Lietuvos matematikos rinkinys
Lietuvos matematikų draugijos darbai, ser. B
64 tomas, 2023, 59–74
https://doi.org/10.15388/LMR.2023.33597

Vilnius University Press

Sąvokos, terminai ir simboliai matematikos vadovėliuose

Rimas Norvaiša

Matematikos ir informatikos fakultetas, Vilniaus universitetas
Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva
El. paštas: rimas.norvaisa@mif.vu.lt

Įteiktas 2023 liepos 6; publikuotas 2023 lapkričio 20

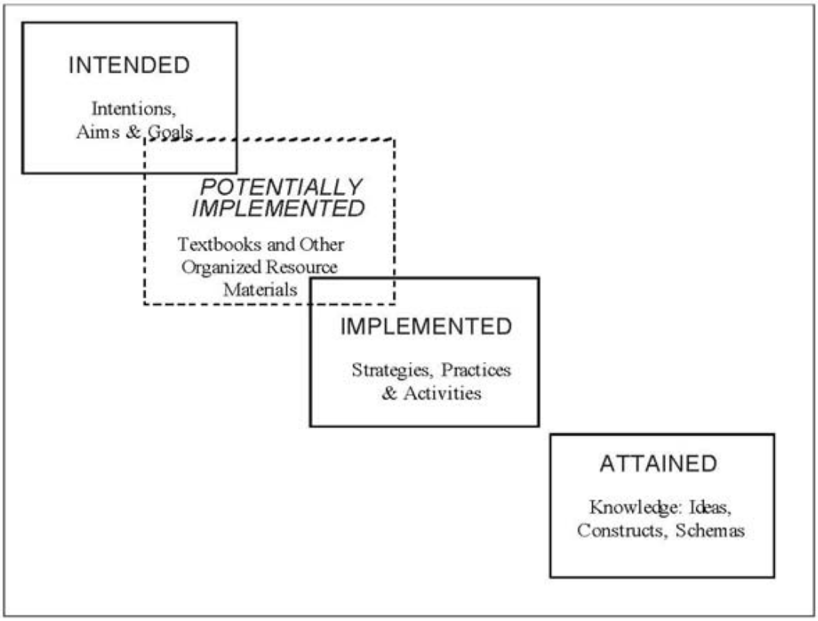
Santrauka. Straipsnyje svarstomas mokyklinės matematikos sąvokos apibrėžties problemiškumas vadovėliuose. Ištraukomis iš vadovėlių parodoma, kaip pastaraisiais dešimtmečiais keitėsi trupmenos interpretacija, neturinti matematinės sąvokos apibrėžčiai būtinų savybių. Aptarta trupmenos sąvokos alternatyvi samprata grindžiama skaičių tiese.

Raktiniai žodžiai: trupmenos sąvoka; dalmens sąvoka; skaičių tiesė; vadovėlinė mokyklinė matematika; matematinis nominalizmas
AMS: 97-02, 97F20, 97U20

Įvadas

Matematikos vadovėliai yra mokyklinės matematikos turinio reiškimo forma. Vadovėlio recenzentai privalo įvertinti ir patvirtinti vadovėlio turinio atitikimą programai. Šia prasme, apibrėžiant mokymo turinį, vadovėlis turi oficialų statusą panašų į ugdymo programą. Viena vertus, vadovėliai gali turėti nemažą įtaką mokymui ir mokymuisi. Kita vertus, vadovėliai atskleidžia tam tikrą matematikos programoje deklaruojamų tikslų sampratą.

R.T. Houang ir W.H. Schmidt [8] apžvelgė 1995 TIMSS tarptautinę matematikos programų analizę ir antrinę jos analizę pagal suteikiamas mokymo galimybes. TIMSS analizė vertino valstybių švietimo standartus pagal jų programas ir vadovėlius. Tam tikslui naudojo tuo metu įprastą trijų lygmenų programos modelį: ketinama, įdiegta ir pasiekta. Buvo nustatyta, kad vadovėliai atliko reikšmingą bet skirtingą mokymo resursų vaidmenį visose tirtose valstybėse. Paprastai vadovėliai plėtojo programas įvairiais aspektais ir dėl tokio savo vaidmens įsiterpė į trijų lygmenų programos modelį kaip „potencialiai įdiegta“ programa (žr. 1 pav.).



1 pav. Vadovėlių vaidmuo diegiant programą. Pagal [8].

Pagal TIMSS metodologiją, programos atskleidžia pirminius valstybės švietimo sistemoje deklaruojamus mokymo tikslus. Daugelyje šalių vadovėliai laikomi tokių tikslų papildymu ir pagalba juos plėtojant, jie atlieka jungiamąjį vaidmenį tarp ketinimų ir diegimo, arba yra tiltu tarp ministerijos ir klasės [8, 5 p.]. Atlikti tyrimai parodė, kad daugelyje šalių pastebima milžiniška vadovėlių įtaka mokymo pasiekimams.

Neturime tikslesnių duomenų apie vadovėlių vaidmenį mokinių pasiekimams Lietuvoje. Tačiau netiesiogiai apie mūsų vadovėlius galima spręsti pagal lyginamųjų tyrimų rezultatus. Pavyzdžiui, W.H. Schmidt vadovaujama grupė atliko 19 šalių 8 klasės vadovėlių analizę, kuria įvertino aukštesniuosius mąstymo gebėjimus lavinančių užduočių santykinę dalį tarp likusių užduočių [15].

Pastarųjų trijų dešimtmečių laikortarpiu H.-H. Wu [17] atskleidė matematikos iškraipymų mastą amerikiečių mokykliniuose vadovėliuose. Juose dažnai pasigendama tikslių apibrėžimų ir loginio samprotavimo, naudojama netiksli kalba, neatskleidžiami vidiniai ryšiai tarp atskirų mokyklinės matematikos temų. Pavyzdžiui, neatskleidžiami panašumai ir skirtumai tarp natūraliųjų skaičių ir trupmenų temų.

Šiame straipsnyje panašiu aspektu analizuojame mūsų matematikos vadovėlių turinį. Pirmas tyrimo klausimas – kaip matematikos vadovėlyje apibrėžiama trupmenos sąvoka ir kokį vaidmenį vaidina dalmuo? Tam, kad neatrodytų jog tik kritikuojame, siūlome alternatyvą. Antras tyrimo klausimas – kaip matematiškai taisyklingai apibrėžti trupmenos ir dalmens sąvokas? Atsakymas į pirmąjį klausimą yra 2 skyrelyje. Šio skyrelio gale yra matematikos filosofijai aktualių pastabų. Atsakymas į antrąjį klausimą – 3 skyrelyje. Paskutinis skyrelis skirtas išvadoms. Pradėsime keliomis pastabomis apie matematinės savokos apibrėžties savybes.

1 Mokyklinės matematikos sąvokos apibrėžtis

Apie mokyklinės matematikos sąvoką ir jos traktavimo priklausomybės nuo požiūrio į matematikos prigimtį rašėme [12]. Pratęsdami šią temą, čia pagrindinį dėmesį skiriame mokyklinės matematikos sąvokos apibrėžimui. Mokyklinės matematikos sąvokos traktavimo priklausomybės nuo požiūrio į matematikos prigimtį temą pratęsiame 2 skyrelio gale aptardami vadovėlio kalbą.

Matematiniu samprotavimu grindžiama mokyklinė matematika turi turėti savybes, kurios įgalintų lavinti mokinių įrodinėjimo gebėjimus. Viena tokia savybe yra būtinumas matematikos vadovėliuose formuluoti matematinių sąvokų apibrėžimus, kurių tikslumas turėtų priklausyti nuo mokinių amžiaus tarpsnių ir nuo matematikos mokymo turinio. H.-H. Wu knyga mokytojams [16] yra šiuos reikalavimus atitinkančio 1–6 klasės mokyklinės aritmetikos turinio pavyzdys.

Matematinės sąvokos apibrėžtis skiriasi nuo „žodžio apibrėžties“ kasdieninėje kalboje. Leksikografijoje „žodžio apibrėžtis“, yra jo reikšmės aiškinimas. Matematikoje apibrėžtimi nusakomas sąvokos turinys ir sąvokos terminas, kurie besimokančiajam yra nauji. Kitaip tariant, apibrėžtimi tiksliai formuluojamos savybės, kuriomis vienareikšmiškai identifikuojamas matematinis objektas. Leksikografinė „apibrėžtis“, nusako kalboje priimtą žodžio reikšmę ir jo naudojimo praktiką, o matematinė apibrėžtis sukuria sąvoką ir jos naudojimo praktiką.

Matematinės sąvokos apibrėžimas turi keletą būtinų savybių [4, 5]. *Pakankamumas*: sąvoką apibrėžiančių savybių pakanka įrodyti visus programoje numatytus teiginius. *Hierarchinė struktūra*: bet kuri nauja sąvoka turi būti kurios nors bendresnės sąvokos atskiru atveju. (trupmena yra skaičius) *Egzistavimas*: reikalingas įrodymas, kad bent vienu atveju naujai apibrėžiama sąvoka egzistuoja (jei tai nėra akivaizdu). *Vienareikšmiškumas*: apibrėžties savybės objektą nusako vienareikšmiškai. *Ekvivalentumas*: jei yra du tos pačios sąvokos apibrėžimai, tai būtinas įrodymas, kad sąvoką apibrėžiančios savybės yra ekvivalenčios.

Pageidaujamos matematinės apibrėžties savybės. Minimalumas: reikalingas tik minimalus savybių skaičius būtinas vienareikšmiškai nusakyti sąvoką. Elegantiškumas: pageidautina tarp ekvivalenčių apibrėžčių pasirinkti tą, kuri lakoniškesnė arba kuri atrodo „gražiau“ (pvz. lygiašonis trikampis).

Toliau šiame straipsnyje matematinės sąvokos, termino ir simbolio apibūdinimą vadinsime „interpretacija“, jei nesilaikoma būtinų matematinės apibrėžties savybių. Straipsnyje aptariamos trupmenos ir su ja susijusios sąvokos. Šias sąvokas reikėtų apibrėžti taip, kad aritmetines operacijas natūraliesiems skaičiams galima būtų apibendrinti atitinkamoms operacijoms su trupmenomis. Dabartiniuose mūsų vadovėliuose aritmetinės operacijos trupmenoms formuluojamos kaip naujos taisyklės, kurias būtina mokytis mintinai. Pačių trupmenų interpretacijos keičiasi kartu su naujais vadovėliais. Keletą trupmenų interpretacijų apžvelgsime kitame skyrelyje.

2 skyrelyje aptariame pagrindinių sąvokų, terminų ir simbolių naudojimo vadovėliuose praktikos ypatumus. Trupmenos ir dalmens pavyzdžiais iš kai kurių vadovėlių iliustruojame naujus pastaraisiais dešimtmečiais susiformavusius mokyklinės matematikos bruožus. Turime vadovėlinės mokyklinės matematikos (VMM) lietuvišką variantą. Amerikietišką VMM variantą tyrinėjo matematikas Hung-Hsi Wu. Be jau minėtų savybių, VMM būdingas matematikos sąvokų apibrėžčių vengimas arba jų iškraipymas, matematikos žinių fragmentavimas į tarpusavyje nesusijusias sakinių

grupes, skirtumo tarp įrodinėjimo ir euristinio samprotavimo išnykimas, matematinio tikslumo trūkumas.

2 Trupmenos vadovėliuose

Trupmenos sąvoka yra viena iš svarbiausių ir sudėtingiausių mokyklinėje matematikoje. Ji yra mokiniams sunkiai suprantama, kaip rodo gausūs tyrimai. Trupmenos svarba pasireiškia tuo, kad ji yra jungiamoji grandis tarp natūraliųjų skaičių ir realiųjų skaičių, bei svarbus mokyklinės algebros elementas.

Trupmenų mokymo problemiškumą sudaro jos skirtingų interpretacijų gausa ir trupmenų aritmetikos sudėtingumas. Labai dažnai trupmena siejama su dalmeniu. Matysime, kad pastaraisiais dešimtmečiais išleistuose vadovėliuose skirtumas tarp trupmenos ir dalmens trinamas, vietoje to skirtumo paaiškinimo.

Vadovėlis „Matematika“ Aptarsime iš estų kalbos verstus, bei 1992 ir 1993 metais publikuotus vadovėlius 5 ir 6 klasėms [9, 10]. 5 klasės vadovėlyje trupmena pristatoma tradiciniu būdu – pavyzdžiais ir trupmenos simbolio aiškinimu. Trupmena „parodo, į kiek lygių dalių padalytas vienetas ir kiek tokių dalių paimta“.

6 klasės vadovėlyje trupmena siejama su dalmeniu, taip pat tradiciniu būdu – pavyzdžiais [10, 27 p.]:

> Parodysime, kad paprastąją trupmeną galima laikyti natūraliųjų skaičių dalmeniu. Pavyzdžiui, 8 obuolius norėdami padalyti 4 vaikams po lygiai, turime rasti dalmenį, t. y. $8 : 4 = 2$. Kiekvienas vaikas gaus po du obuolius. Tarkime, kad dabar reikia 3 obuolius padalyti 4 vaikams po lygiai. Pirmiausia kiekvieną obuolį padalykime į 4 lygias dalis, Vadinasi 1 dalis yra $\frac{1}{4}$ obuolio. Iš viso tokių gabalėlių yra 12 (iliustracija). Todėl kiekvienas vaikas gaus po 3 tokius gabalėlius, t. y. $\frac{3}{4}$ obuolio. Šio uždavinio sprendimo užrašas toks: $3 : 4 = \frac{3}{4}$, t. y. paprastąją trupmeną galima nagrinėti kaip dalmenį. Apskritai, kiekvieną paprastąją trupmeną galima laikyti dalmeniu dalybos, kurios dalinys – trupmenos skaitiklis, daliklis – trupmenos vardiklis. Trupmenos brukšnys reiškia dalybos veiksmą. Vadinasi
>
> $$a : b = \frac{a}{b}.$$

Priminsime, kad natūraliųjų skaičių dalyba pradiniame ugdyme apibrėžiama kai dalmuo yra natūralusis skaičius [9, 90 p.] ir [10, 8 p.].

1 apibrėžimas. Tarkime, kad m ir n yra natūralieji skaičiai, $n \neq 0$, ir k yra toks natūralusis skaičius, kad $m = kn$. Sakoma, kad m dalijasi iš n, m vadinamas n kartotiniu ir k vadinamas dalmeniu bei žymimas $m : n$.

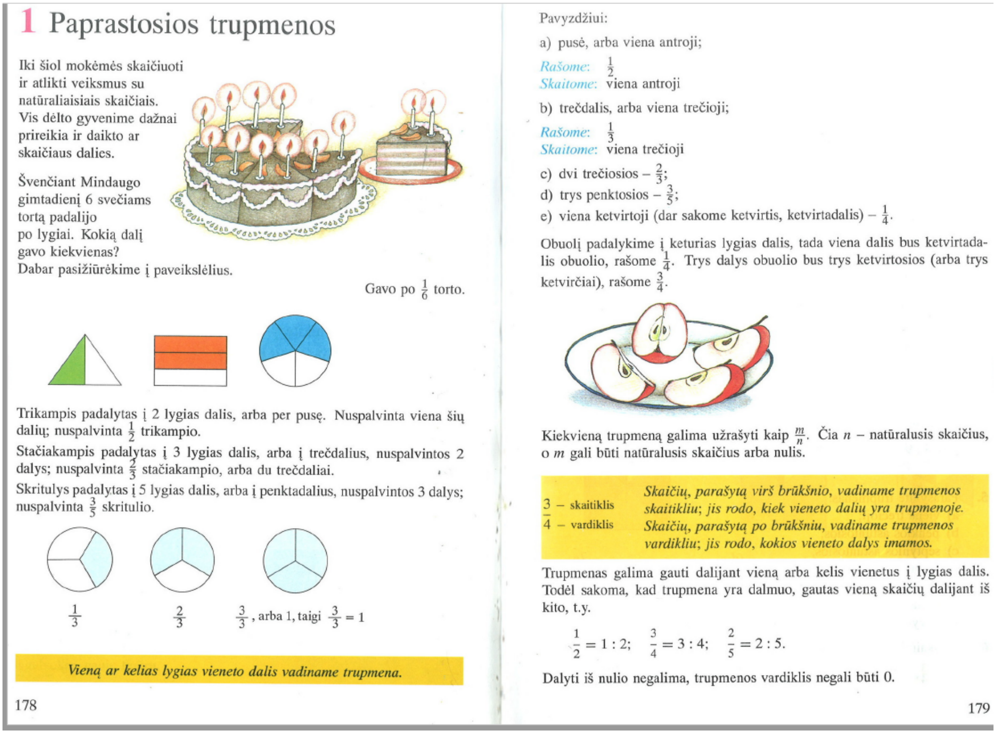
Cituojamame pavyzdyje 8 dalosi iš 4, 8 yra 4 kartotinis ir $2 = 8 : 4$. Vadovėlyje panašiai samprotaujama apie $3 : 4$ nepaisant, kad 3 nėra 4 kartotinis. Toks samprotavimas gali sukelti skaitytojui kognityvinį disonansą. Be to, neaiški dviejų miglotai suprantamų objektų lygybės prasmė.

Kituose toliau apžvelgiamuose vadovėliuose „trupmenos kaip dalmens“ idėja įgyja dar labiau miglotas formas.

Vadovėlis „Matematika ir pasaulis“ Šios serijos vadovėliai pradėti leisti 1997 metais. Čia aptarsime trupmenos apibūdinimą esantį 5-os klasės vadovėlyje [11]. 178 puslapio apačioje (2 pav.) yra tokia trupmenos apibrėžtis:

$$\textit{Vieną ar kelias lygias vieneto dalis vadiname trupmena.} \tag{1}$$

Vienetas (angl. *unit*) šioje apibrėžtyje reiškia visumą, kuri dalijama į lygias dalis. Kiekvienos trupmenos atveju visuma gali būti skirtinga ir ji yra susitarimo reikalas. 2 pav. vaizduojamos trupmenos, kurių visuma yra geometrinė figūra (trikampis, stačiakampis, skritulys) arba daiktas (tortas, obuolys). Visumą gali sudaryti keli daiktai, pavyzdžiui, keturi pieštukai. Tokiu atveju vienas pieštukas yra vieneto dalijimo į keturias lygias dalis rezultatas ir išreiškia trupmeną $\frac{1}{4}$. Priklausomai nuo vieneto kaip visumos pasirinkimo turime atitinkamą trupmenos sampratą [16, 12.4 subsection].



1 Paprastosios trupmenos

Iki šiol mokėmės skaičiuoti ir atlikti veiksmus su natūraliaisiais skaičiais. Vis dėlto gyvenime dažnai prireikia ir daikto ar skaičiaus dalies.

Švenčiant Mindaugo gimtadienį 6 svečiams tortą padalijo po lygiai. Kokią dalį gavo kiekvienas? Dabar pasižiūrėkime į paveikslėlius.

Gavo po $\frac{1}{6}$ torto.

Trikampis padalytas į 2 lygias dalis, arba per pusę. Nuspalvinta viena šių dalių; nuspalvinta $\frac{1}{2}$ trikampio.

Stačiakampis padalytas į 3 lygias dalis, arba į trečdalius, nuspalvintos 2 dalys; nuspalvinta $\frac{2}{3}$ stačiakampio, arba du trečdaliai.

Skritulys padalytas į 5 lygias dalis, arba į penktadalius, nuspalvintos 3 dalys; nuspalvinta $\frac{3}{5}$ skritulio.

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3}$, arba 1, taigi $\frac{3}{3} = 1$

Vieną ar kelias lygias vieneto dalis vadiname trupmena.

178

Pavyzdžiui:

a) pusė, arba viena antroji;

Rašome: $\frac{1}{2}$
Skaitome: viena antroji

b) trečdalis, arba viena trečioji;

Rašome: $\frac{1}{3}$
Skaitome: viena trečioji

c) dvi trečiosios – $\frac{2}{3}$;
d) trys penktosios – $\frac{3}{5}$;
e) viena ketvirtoji (dar sakome ketvirtis, ketvirtadalis) – $\frac{1}{4}$.

Obuolį padalykime į keturias lygias dalis, tada viena dalis bus ketvirtadalis obuolio, rašome $\frac{1}{4}$. Trys dalys obuolio bus trys ketvirtosios (arba trys ketvirčiai), rašome $\frac{3}{4}$.

Kiekvieną trupmeną galima užrašyti kaip $\frac{m}{n}$. Čia n – natūralusis skaičius, o m gali būti natūralusis skaičius arba nulis.

3 – skaitiklis
4 – vardiklis

Skaičių, parašytą virš brūkšnio, vadiname trupmenos skaitikliu; jis rodo, kiek vieneto dalių yra trupmenoje. Skaičių, parašytą po brūkšniu, vadiname trupmenos vardikliu; jis rodo, kokios vieneto dalys imamos.

Trupmenas galima gauti dalijant vieną arba kelis vienetus į lygias dalis. Todėl sakoma, kad trupmena yra dalmuo, gautas vieną skaičių dalijant iš kito, t.y.

$$\frac{1}{2} = 1:2; \quad \frac{3}{4} = 3:4; \quad \frac{2}{5} = 2:5.$$

Dalyti iš nulio negalima, trupmenos vardiklis negali būti 0.

179

2 pav. Vadovėlis „Matematika ir pasaulis“.

Kito puslapio apačioje (2 pav.) trupmenos apibrėžtis papildoma sakiniais apie jos „gavimą“:

> *Trupmeną galima gauti dalijant vieną arba kelis vienetus į lygias dalis. Todėl sakoma, kad trupmena yra dalmuo, gautas vieną skaičių dalijant iš kito, t.y.*
>
> $$\frac{1}{2} = 1:2; \quad \frac{3}{4} = 3:4; \quad \frac{2}{5} = 2:5.$$

Būtent, pradinė trupmenos apibrėžtis papildoma galimybe gauti trupmeną dalijant kelis vienetus į lygias dalis. Kadangi, trupmenos apibrėžtyje, vienetas reiškia visumą, kuri dalijama į lygias dalis, tai keli vienetai turėtų reikšti kelias visumas, kas yra beprasmiška taikant trupmenos apibrėžtį. Toliau tenka spėlioti, ką nori pasakyti vadovėlio autoriai rašydami apie kelių vienetų dalijimo į lygias dalis galimybę. Spėjame, kad kelių vienetų panaudojimas susijęs su noru trupmeną pakeisti dalmeniu. Tai patvirtina bandymas iššifruoti lygybę

$$\frac{3}{4} = 3 : 4, \tag{2}$$

naudojantis cituojamais vadovėlio sakiniais. Pirmasis sakinys apie „kelių vienetų dalijimą į lygias dalis“ matyt skirtas dalmeniui. Spėjame, kad skaičius 3 laikomas trimis vienetais. Norint gauti dalmenį $3 : 4$, reikėtų „tris vienetus dalyti į keturias lygias dalis“ (ką tai bereikštų). Pagal pradinę trupmenos apibrėžtį, norint gauti trupmeną $\frac{3}{4}$, reikėtų (vieną) vienetą dalyti į keturias dalis ir paimti tris iš jų. Vadovėlyje nėra argumentų, kurie bandytų įtikinti, kad simbolių $\frac{3}{4}$ ir $3 : 4$ skaitinės reikšmės yra lygios. Tai viena problema. Antra problema – dalmuo vadovėlyje apibrėžtas kaip atvirkštinis veiksmas natūraliųjų skaičių sandaugai (96 p.). Todėl simbolio $3 : 4$ skaitinė reikšmė niekur nėra apibrėžta. Dalyba su liekana (105 p.) šiuo atveju negelbsti. Išvada – vadovėlis „Matematika ir pasaulis“ nesuteikia matematinės prasmės nei vienai (2) lygybės pusei ir tuo labiau jos neįrodo. Matematinę prasmę (2) lygybei suteiksime 3 skyrelyje naudodami skaičių tiesę.

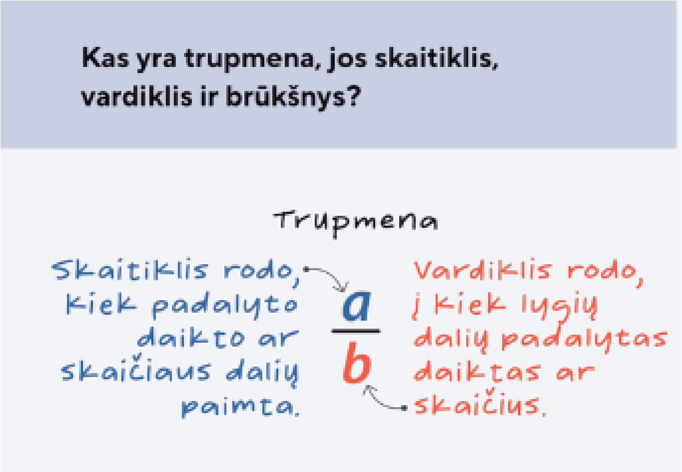
Taigi, trupmena apibrėžiama gretinant du skirtingus supratimo būdus ir leidžiant rinktis (vieną) vienetą arba kelis vienetus. Vienas būdas grindžiamas visumos-dalies konceptu. Kitas būdas grindžiamas neapibrėžta dalyba. Matematiškai tikslus dviejų sąvokų apibrėžimas ir jų lygybės įrodinėjimas pakeičiamas neįpareigojančia fraze „galima gauti“. Matysime, kad samprotavimas su klaidingai suprantama vieneto sąvoka ir neapibrėžtu dalmeniu kartojasi vėlesniuose vadovėliuose.

Vadovėlis „Horizontai“ Šios serijos vadovėliai rašomi pagal 2022 metais atnaujintą matematikos programą. Čia apžvelgiame 5 klasei skirto vadovėlio antrąjį ciklą „trupmenos“ [13]. 63 vadovėlio puslapyje siūloma nauja trupmenos simbolio interpretacija. Vietoje įprasto vieneto dalijimo į lygias dalis, kaip (1) apibrėžtyje, vadovėlio autoriai trupmeną sieja su „daikto ar skaičiaus“ dalijimu į lygias dalis.

Atsakant į 3 pav. matomą klausimą rašoma, kad trupmena yra simbolis $\frac{a}{b}$, kurį sudaro skaitiklis, vardiklis ir trupmenos brūkšnys. Skaitiklis ir vardiklis apibūdinami „daikto ar skaičiaus dalijimu“. Cituoju:

> Vardiklis rodo, į kiek lygių dalių padalytas daiktas ar skaičius.
>
> Skaitiklis rodo, kiek padalyto daikto ar skaičiaus dalių paimta.

Svarbu tai, kad trupmenos simbolio interpretacijoje nėra paaiškinta skaičiaus dalyba į lygias dalis ir skaičiaus termino naudojimo motyvai. Sudėtingi terminai, tokie kaip skaičius, tradiciškai vadovėlyje nėra aiškinami. Temos dėstymą vadinti „pakartojimu“, nepakanka, nes siūloma interpretacija neturi matematinės prasmės. Skaičiaus dalybos į lygias dalis rezultatu galėtų būti dalmuo, kaip rašoma citatoje iš vadovėlio „Matematika ir pasaulis“. Bet apie dalmenį šiame vadovėlio „Horizontai“ cikle



Kas yra trupmena, jos skaitiklis, vardiklis ir brūkšnys?

Trupmena

$\frac{a}{b}$

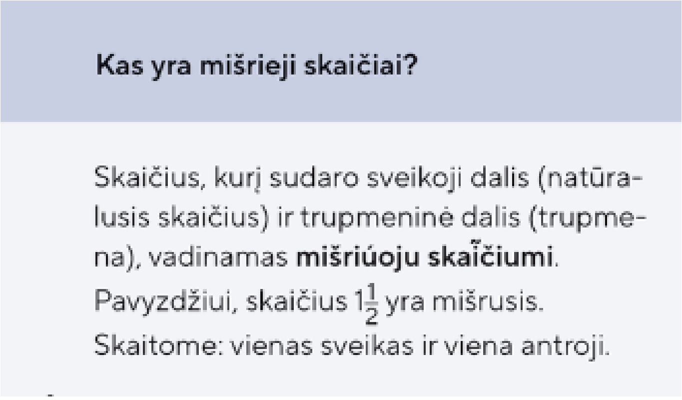
Skaitiklis rodo, kiek padalyto daikto ar skaičiaus dalių paimta.

Vardiklis rodo, į kiek lygių dalių padalytas daiktas ar skaičius.

3 pav. Vadovėlis „Horizontai” 5 klasė

neužsimenama. Toliau vadovėlyje matysime, kad skaičiaus dalybos rezultatu suprantama dalybos su liekana procedūra, kurios pagalba trupmenos simbolis lyginamas su mišriojo skaičiaus simboliu.

Tame pačiame vadovėlio 63 puslapyje atsakoma į kitą išsikeltą klausimą: „Kas yra mišrieji skaičiai?“



Kas yra mišrieji skaičiai?

Skaičius, kurį sudaro sveikoji dalis (natūralusis skaičius) ir trupmeninė dalis (trupmena), vadinamas **mišriúoju skaĩčiumi**.

Pavyzdžiui, skaičius $1\frac{1}{2}$ yra mišrusis.

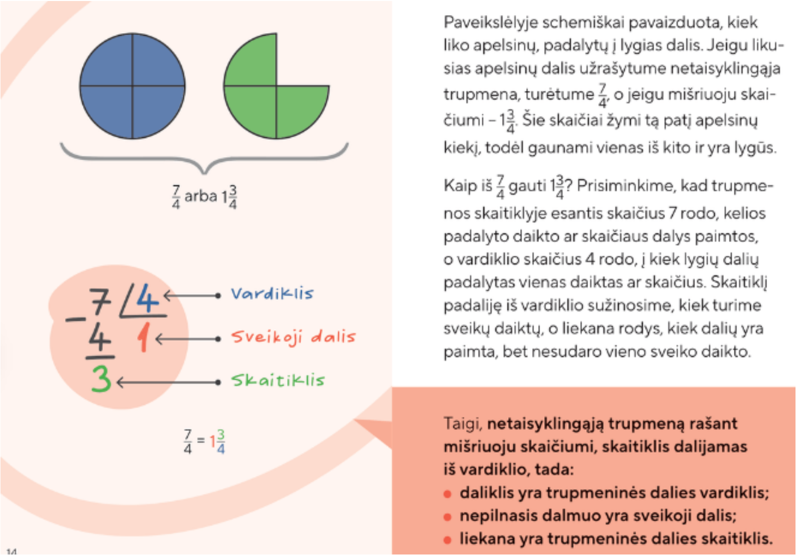
Skaitome: vienas sveikas ir viena antroji.

4 pav. Vadovėlis „Horizontai“ 5 klasė.

Šis atsakymas yra tik simbolio interpretacija, o ne matematinės prasmės paaiškinimas. Kaip jau minėta, nei skaičiaus sąvokos, nei trupmenos kaip skaičiaus sąvokos aiškinimo šiame vadovėlio cikle nėra. Interpretacijoje nėra užsimenama apie tai, kad mišrusis skaičius yra natūraliojo skaičiaus ir trupmenos sumos $1 + \frac{1}{2}$ *sutrumpintas žymėjimas* $1\frac{1}{2}$. Gal būt todėl, kad trupmenų suma primenama vėliau, 65-ame vadovėlio puslapyje. Be to, derėtų pridurti, kad trupmena mišriajame skaičiuje yra taisyklingoji – terminas, kuris vadovėlyje taip pat primenamas vėliau.

H.-H. Wu teigimu [16, 225 p.], mišriojo skaičiaus apibrėžimo iki trupmenų sumos apibrėžimo pateikimas yra būdingas daugeliui amerikiečių vadovėlių. Todėl mokantis šios temos mokiniams tenka pasikliauti tik savo atmintimi. Wu teigimu, to kaina yra mišriųjų skaičių baimė paplitusi tarp amerikiečių mokinių. Tikėkimės, kad lietuvių mokiniai yra kitokie.

Svarbiausiu trupmenos ciklo rezultatu vadovėlyje yra dvi taisyklės, kurių pagalba „netaisyklingoji trupmena parašoma mišriuoju skaičiumi“ (68 p.) ir atvirkščiai „mišrusis skaičius parašomas netaisyklingąja trupmena“ (70 p.). Pirmoji taisyklė gaunama skaitiklį dalijant iš vardiklio su liekana. Antroji taisyklė gaunama mišriajame skaičiuje tarp „sveikosios dalies“ ir „trupmeninės dalies“ įterpiant sumos veiksmą. Abi panaudotos savybės neišplaukia iš atitinkamų simbolių interpretacijų. Pačios taisyklės formuluojamos naudojant apelsinų dalijimo pavyzdį.



Paveikslėlyje schemiškai pavaizduota, kiek liko apelsinų, padalytų į lygias dalis. Jeigu likusias apelsinų dalis užrašytume netaisyklingąja trupmena, turėtume $\frac{7}{4}$, o jeigu mišriuoju skaičiumi – $1\frac{3}{4}$. Šie skaičiai žymi tą patį apelsinų kiekį, todėl gaunami vienas iš kito ir yra lygūs.

Kaip iš $\frac{7}{4}$ gauti $1\frac{3}{4}$? Prisiminkime, kad trupmenos skaitiklyje esantis skaičius 7 rodo, kelios padalyto daikto ar skaičiaus dalys paimtos, o vardiklio skaičius 4 rodo, į kiek lygių dalių padalytas vienas daiktas ar skaičius. Skaitiklį padalinę iš vardiklio sužinosime, kiek turime sveikų daiktų, o liekana rodys, kiek dalių yra paimta, bet nesudaro vieno sveiko daikto.

Taigi, **netaisyklingąją trupmeną rašant mišriuoju skaičiumi, skaitiklis dalijamas iš vardiklio, tada:**
- **daliklis yra trupmeninės dalies vardiklis;**
- **nepilnasis dalmuo yra sveikoji dalis;**
- **liekana yra trupmeninės dalies skaitiklis.**

5 pav. Vadovėlis „Horizontai“ 5 klasė.

68-ame jo puslapyje atsakoma į klausimą: „Kaip netaisyklingąją trupmeną parašyti mišriuoju skaičiumi?“ (5 pav. yra šio puslapio dalis). Atkreipsime dėmesį į vadovėlio kalbos netikslumą komentuojant apelsinų dalijimo pavyzdį ir simbolių interpretacijas. Paveikslėlis vaizduoja 7 ketvirčius, gautus sveiką apelsiną (vienetą) dalijant į keturias lygias dalis. Vadovėlio žodžiais „pavaizduota, kiek liko apelsinų, padalytų į lygias dalis“. Mažai prasmės turinti frazė, jei greta nebūtų paveiksliuko. Paveiksliukas turėtų įtikinti skaitytoją, kad apelsino ketvirčių kiekis reiškiamas netaisyklingąja trupmena lygus $\frac{7}{4}$, o reiškiamas mišriuoju skaičiumi lygus $1\frac{3}{4}$. Vadovėlio autorių teigimu, todėl abu skaičiai yra lygūs. Tai pirmieji argumentai, kuriais siekiama pagrįsti lygybę

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}. \tag{3}$$

Toliau vadovėlyje klausiama (5 pav.): „Kaip iš $\frac{7}{4}$ gauti $1\frac{3}{4}$?“ Prisiminęs trupmenos interpretaciją, vadovėlio skaitytojas turi suprasti, kad $\frac{7}{4}$ yra tas pats, kas 7 dalyti iš

4 su liekana. Kaip tiksliai gaunamas mišrusis skaičius procedūros iliustracijoje parodoma rodyklėmis. Atsakymas į klausimą formuluojamas puslapio apačioje trijų dalių taisykle.

Ar galima kitaip atsakyti į tą patį klausimą? Jei mišrusis skaičius būtų apibrėžiamas kaip natūraliojo skaičiaus ir trupmenos sumos sutrumpintas užrašas, tai (3) lygybę galima įrodyti. Remiantis tuo pačiu dalybos su liekana algoritmu, tiksliau (6) sąryšiais, teisinga lygybė $7 = 1 \times 4 + 3$. Ši išraiška kartu su trupmenų sumos taisykle ir pagrindine trupmenos savybe (1 teorema) pateisina lygybes:

$$\frac{7}{4} = \frac{1 \times 4 + 3}{4} = \frac{1 \times 4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

Įrodėme (3) lygybę be vaizdinių argumentų. Kitoks analogiškos lygybės įrodymas seka po 2 teoremos formulavimo sekančiame skyrelyje.

Dar du vadovėlio puslapiai, 70-tas ir 71-as, skiriami atsakymui į klausimą: „Kaip mišrųjį skaičių parašyti netaisyklingąja trupmena?“ Šioje vietoje galima būtų svarstyti, kodėl reikia atsakinėti į šį klausimą, jei jau turime (3) lygybę. Kaip ten bebūtų, autoriai viena savo atsakymo dalimi mišrųjį skaičių keičia natūraliojo skaičiaus ir trupmenos suma be paaiškinimo, kodėl tai galima daryti. Primename, kad mišriojo skaičiaus interpretacijoje du simboliai tiesiog rašomi greta vienas kito. Kita atsakymo dalimi yra pagrindinės trupmenos savybės aiškinimas pavyzdžiu. Ši savybė naudojama natūralųjį skaičių išreikiant trupmena su laisvai pasirinktu vardikliu. Tokiu būdu suformuluojamos dar dvi taisyklės be jas paaiškinančio įrodymo, kurias mokiniui teks mokytis mintinai arba pačiam rasti taisyklių pagrindimą. Tai buvo vadovėlio „Horizontai“ antrojo ciklo „trupmenos“ pagrindiniai teiginiai.

Vadovėlio teksto kalba Vadovėlyje iš serijos „Horizontai“ 5 klasei dažnai naudojami tokie žodžiai, kaip „užrašoma“ „parašoma“ ir panašiai. Jie taikomi išreiškiant ryšius tarp matematinių simbolių. Pavyzdžiui, „skaitiklis *rodo*“, „vardiklis *rodo*“, „natūralųjį skaičių galima *parašyti* trupmena“, (visi 63 p.) „netaisyklingoji trupmena *parašoma* mišriuoju skaičiumi“ (68 p.), „mišrusis skaičius *parašomas* netaisyklingąja trupmena“ (70 p.). Šios frazės kartojasi. Tokia kalba gali įtikinti naujoką, kad matematika tai mokslas apie simbolių pertvarkymą.

Yra ir kitokių matematikos praktikai neįprastų frazių. Pavyzdžiui, mišriajam skaičiui apibrėžti naudojama frazė „Skaičius, kurį sudaro sveikoji dalis ir trupmeninė dalis“. Šiuo atveju apie skaičių rašoma, kaip apie simbolį turintį dalis. Jei skaičius yra matematinė sąvoka, tai ji apibrėžiama esminėmis savybėmis arba konstruojama iš kitų matematinių objektų. Frazė matematikos praktikoje būtų suprantama, jei būtų sakoma „skaičius yra lygus kitam objektui“ arba „skaičius yra taškas geometrinėje tiesėje“. Šios pastabos reiškia, kad mišrusis skaičius vadovėlyje traktuojamas kaip simbolis. Be to, mišrusis skaičius nepateisinamai sureikšminamas. Jis yra tik natūraliojo skaičiaus ir trupmenos sumos žymėjimas. Kiti pavyzdžiai: „Kaip skaičių tiesėje *pavaizduoti* trupmenas, kurių vardikliai vienodi?” (64 p.)

Ar yra kokia nors prasmė už simbolių, ar greta simbolių? Jei sutiktume, kad už simbolių yra abstraktūs objektai, pavyzdžiui skaičiai, tai sakytume, kad už simbolių yra matematiniai objektai. Vaikui tai būtų tiek prasminga, kiek jam prasmingi realiai neegzistuojantys pasakų herojai. Simbolių „parašymas“ išreiškia tais simboliais žymimų skaičių lygybę. Bet vadovėlyje teiginiai apie skaičių lygybę nėra dažni. Vadovėlio teksto kalba rodo, kad matematika autorių požiūriu yra kalba simboliais, o ne matematinių objektų teorija. Gal būt, jei trupmena yra tik simbolis, tai nėra prasmės ją sieti su skaičiumi-sąvoka. Jei kalbam tik apie simbolius, tai matematinis įrodymas netenka prasmės, nes jame būtų samprotaujama apie objektų savybes.

Nuostata, kad matematika yra kalba apie simbolius matematikos filosofijoje vadinama nominalizmu [2, 63 p.]. Nominalizmo požiūriu neegzistuoja abstraktūs objektai. Pagal kai kurias nominalizmo rūšis (fictionalism) matematiniai teiginiai apie matematinius objektūs yra klaidingi. Tikėjimas nominalizmu turi įvairaus pobūdžio pasekmes. Be abejonės, mokyklinės matematikos tyrimuose šie klausimai aktyviai diskutuojami. Iš vienos pusės matematiniai objektai laikomi svarbia metafora mokantis matematikos (A. Sfard [14] ir kiti). Iš kitos pusės egzistuoja kritika tokios metaforos sureikšminimui (J. Confrey and S. Costa [3]).

Ką tai reiškia mokantis matematikos? Pradiniame ugdyme mes mokome matematiką naudodami įvairias konkrečias priemones, realaus pasaulio daiktus, iliustracijas. Kartu su šiais apčiuopiamais dalykais pradedame naudoti abstrakcijas – simbolius, reiškinius, formules. Jie palaipsniui pradeda dominuoti mokyklinės matematikos turinyje. Kai kurie matematikos ekspertai keičia šią tendenciją siūlydami vadovėliuose naudoti mažiau teksto, daugiau iliustracijų ir intuityvaus savarankiško mąstymo [1] ir [7]. Šie siūlymai prieštarauja matematikos mokyme dominuojančiai tendencijai matematikos mokymo tikslu laikyti matematinį samprotavimą, kurio svarbiausia dalimi yra įrodymas ir įrodinėjimo gebėjimas [18].

3 Trupmenos ir dalmens sąvokos

Pradiniame ugdyme mokiniai pažįsta trupmenas kaip visumos dalis. Visumą vadinant vienetu, trupmena yra viena arba kelios lygios vieneto dalys. Logiškai tvarkingas trupmenos apibrėžimas galėtų prasidėti penktoje klasėje po to kai keletą metų besimokantys yra nuosekliai pratinami prie skaičių tiesės. Tradiciškai vadovėliuose aiškinama, kad trupmeną „galima nagrinėti kaip dalmenį“. Tačiau matematiškai prasminga būtų, pirma, atskirai apibrėžti trupmenos ir dalmens sąvokas ir antra, įrodyti atitinkamų skaičių lygybę.

Trupmena skaičių tiesėje Geometrinėje tiesėje laisvai pasirenkami du taškai. Kairysis taškas tapatinamas su skaičiumi 0 (nulis), o dešinysis taškas tapatinamas su skaičiumi 1 (vienas). Atkarpa[2] $[0,1]$ vadinama *vienetine atkarpa*, o skaičius 1 vadinamas *vienetu*. Į dešinę nuo vieneto atidedant atkarpas, kongruenčias $[0,1]$, gaunami taškai, kurie tapatinami su natūraliaisiais skaičiais $2,3,4,\ldots$. Taip papildyta geometrinė tiesė vadinama *skaičių tiese.*

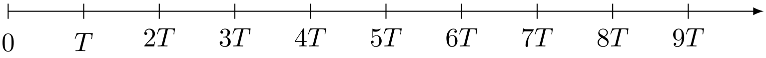
2 apibrėžimas. Realusis skaičius yra taškas skaičių tiesėje.

Skaičių tiesės ypatybė ta, kad geometrinis taškas su skaičiumi ir atkarpos $[a,b]$ ilgis, kaip dydis, yra tapatinamas su skaičiumi, kuris gaunamas perstumiant atkarpą taip, kad a sutaptų su 0. Tada dešinį galą atitinkantis skaičius yra atkarpos $[a,b]$ ilgis. Atskiru atveju, vienetinės atkarpos $[0,1]$ ilgis lygus 1.

---

[2] Uždaras aprėžtas intervalas.

Sekančiame apibrėžime naudojame tokią terminologiją. Atkarpą $[0,T]$ stumiam į dešinę nuo skaičių tiesės taško 0 taip, kad 0 pažymėtas atkarpos kairysis galas atsidurtų skaičių tiesės taške T. Perstumtos atkarpos dešinysis galas atsidurs atstumu $2T$ nuo skaičių tiesės taško 0 ir jį pavadinsime skaičių tiesės taško T antruoju kartotiniu tašku. Su bet kuriuo natūraliuoju skaičiumi m, skaičių tiesės taško T *m-tasis kartotinis taškas* yra dešinysis galas atkarpos gautos atkarpą $[0,T]$ stumiant taip, kad atkarpos kairysis galas sutaptų su skaičių tiesės tašku $(m-1)T$. Skaičių tiesėje gauname seką taškų su vienodo ilgio tarpais tarp gretimų taškų.



Tegul $0T := 0$ ir $1T := T$. Jei $T = 1$, tai taško 0 m-tieji kartotiniai taškai yra natūralieji skaičiai. Apibendrinsime natūraliuosius skaičius.

Tarkime, kad n yra nelygus nuliui natūralusis skaičius. Kiekvieną skaičių tiesės atkarpą $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $\ldots$ padalyjame į n to paties ilgio atkarpų. Dalijimo taškai, apimantys natūraliuosius skaičius, skaičių tiesėje sudaro (begalinę) seką taškų, vadinamą *n-tųjų kartotinių seka.* Bet kurie du gretimi šios sekos nariai vienas nuo kito yra nutolę lygiais atstumais. Pirmasis dešinėje nuo 0 esantis šios sekos taškas yra žymimas $\frac{1}{n}$, antrasis taškas žymimas $\frac{2}{n}$, trečiasis taškas žymimas $\frac{3}{n}$ ir t. t., o m-tasis dešinėje nuo 0 esantis šios sekos taškas žymimas $\frac{m}{n}$.

3 apibrėžimas. Trupmenomis vadiname n-tųjų kartotinių sekų narius, kai n prabėga natūraliuosius skaičius $1,2,3,\ldots.$ n-tųjų kartotinių sekoje dešinėje nuo 0 esantis m-tasis taškas žymimas $\frac{m}{n}$. Pagal susitarimą, taškas 0 žymimas $\frac{0}{n}$. Simbolyje $\frac{m}{n}$ skaičius m vadinamas skaitikliu, o skaičius n vadinamas vardikliu.

Sekdami tradicija, vietoje frazės „simboliu $\frac{m}{n}$ žymima trupmena“ sakysime „trupmena $\frac{m}{n}$“. Taip pat sakysime, kad m yra trupmenos $\frac{m}{n}$ skaitiklis, o n yra trupmenos $\frac{m}{n}$ vardiklis. Pagal 2 ir 3 apibrėžimus, trupmena $\frac{m}{n}$ yra skaičius.

Duotam n, trupmena $\frac{m}{n}$ yra m-tasis kartotinis trupmenos $\frac{1}{n}$. Trupmenos $\frac{1}{n}$ m-tųjų kartotinių seka apibendrina natūraliųjų skaičių seką, kuri yra 1 m-tųjų kartotinių seka. Atsižvelgiant į šią aplinkybę pedagogine prasme naudinga trupmeną $\frac{1}{n}$ vadinti *vienetine trupmena.*

Dvi trupmenos yra *lygios*, jei abi jos yra tas pats taškas skaičių tiesėje. Trupmenų lygybės įrodymą iliustruosime įrodydami *pagrindinę trupmenos savybę.*

1 teorema. *Tarkime, kad* $\frac{m}{n}$ *ir* $\frac{k}{l}$ *yra dvi trupmenos ir egzistuoja toks natūralusis skaičius* c, *kad*

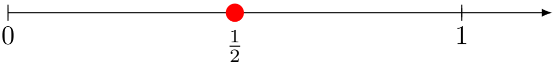
$$k = cm \quad ir \quad l = cn. \tag{4}$$

Tada $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$.

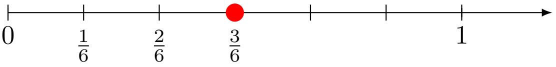
Įrodymas. Reikia įrodyti, kad trupmenos $\frac{m}{n}$ ir $\frac{cm}{cn}$ žymi tą patį tašką skaičių tiesėje. Naudosime bendrinį argumentą (angl. generic argument) – taikomą atskiram atvejui bet nepriklausomą nuo atvejo specifikos. Tegul $m = 1$, $n = 2$ ir $c = 3$. Įrodysime lygybę

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}. \tag{5}$$

Pirmas piešinys iliustruoja taško $\frac{1}{2}$ gavimo būdą:



Antras piešinys iliustruoja taško $\frac{3}{6}$ gavimo būdą:



(5) lygybės kairėje ir dešinėje esančios trupmenos žymi skaičių tiesės taškus gaunamus dalijant vienetinę atkarpą. Trupmena $\frac{1}{2}$ žymi tašką gaunamą atkarpą $[0,1]$ dalijant į dvi lygias dalis ir randant nuo nulio pirmosios atkarpos dešinįjį galą. Trupmena $\frac{3}{6}$ žymi tašką gaunamą atkarpą $[0,1]$ dalijant į šešias lygias dalis ir randant nuo nulio pirmųjų trijų atkarpų junginio dešinįjį galą. Kodėl gauti du taškai sutampa? Kiekvieną iš dviejų kongruenčių atkarpų $[0,1/2]$ ir $[1/2,1]$ dalijame į tris lygias dalis. Gauname atkarpą $[0,1]$ padalytą į šešias lygias dalis, nes $23 = 6$. Pavadinkime šias dalis „mažosiomis atkarpomis“. Pirmosios nuo nulio mažosios atkarpos dešinysis galas yra taškas žymimas trupmena $\frac{1}{6}$. Pagal pirmąjį šio taško gavimo būdą, jo 3-asis kartotinis yra taškas $\frac{1}{2}$, o pagal antrąjį jo gavimo būdą, jo 3-asis kartotinis yra taškas $\frac{3}{6}$. Todėl teisinga (5) lygybė. □

Dalmuo skaičių tiesėje Apibendrinsime 1 apibrėžimu formuluojamą natūraliųjų skaičių dalybą atsisakydami kartotinumo prielaidos. Tam tikslui naudinga prisiminti talpos dalybos interpretaciją objektų rinkiniui: dalmuo $m : n$ yra objektų kiekis kiekvienoje grupėje (dalyje), kai m objektų yra padalijama į n lygių grupių (dalių). Performuluosime šią interpretaciją, kai objektais yra taškai $1, 2, 3, \ldots$ skaičių tiesėje.

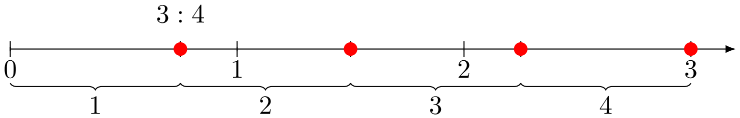
> $m : n$ yra ilgis atkarpos, gautos m ilgio atkarpą dalijant į n vienodo ilgio atkarpų, t. y. $[0, m : n]$ yra pirmoji atkarpa, gaunama atkarpą $[0, m]$ dalijant į n vienodo ilgio atkarpų.

Skirtingai nuo objektų grupėje skaičiaus, atkarpos ilgis neprivalo būti natūraliuoju skaičiumi. Prisiminkime, kad skaičiais vadiname skaičių tiesės taškus. Todėl prasmingas sekantis apibrėžimas.

4 apibrėžimas. Tegul m ir n yra nelygūs nuliui natūralieji skaičiai. m dalijimo iš n rezultatu, vadinamo dalmeniu ir žymimu $m : n$, yra dešinysis galas arčiausiai nulio esančios atkarpos, gautos m ilgio atkarpą $[0, m]$ dalijant į n vienodo ilgio atkarpų.

Apibrėžus trupmenų sandaugą, galima įrodyti, kad $m = (m : n) \times n$. Kaip išvadą gauname, kai m yra n kartotinis, tai dalmens samprata pagal pastarąjį apibrėžimą sutampa su 1 apibrėžtyje formuluojama dalmens samprata.

Esame pasirengę suteikti prasmę (2) lygybei. Pagal 4 apibrėžimą, dalmens $3:4$ radimas skaičių tiesėje reiškia atkarpos $[0,3]$ ilgio dalijimą į keturias lygias dalis. Pirmosios šiuo dalijimu gautos atkarpos dešinysis galas yra dalmuo $3:4$, kaip pavaizduota paveikslėlyje.



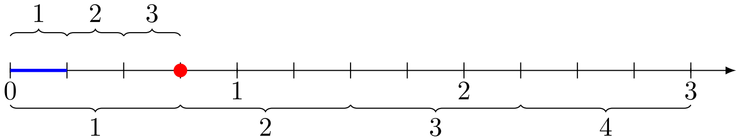
Trupmena $\frac{3}{4}$ randama skaičių tiesėje, pirma, dalijant vienetinės atkarpos $[0,1]$ ilgį į keturias lygias dalis gaunama atkarpą $[0,\frac{1}{4}]$, kurios dešinysis galas yra *vienetinė trupmena* $\frac{1}{4}$. Antra, apjungus tris gautas to paties ilgio nuosekliai viena paskui kitą gulinčias atkarpas gaunama atkarpa, kurios dešinysis galas yra (paprastoji) trupmena $\frac{3}{4}$, kaip pavaizduota paveikslėlyje.

Palyginus abu paveikslėlius galima spėti, kad simboliais $\frac{3}{4}$ ir $3:4$ pažymėti taškai skaičių tiesėse sutampa.

Pagal 4 apibrėžtį, dalmuo yra skaičius, nes tai yra taškas skaičių tiesėje. Bet neaišku ar dalmuo yra trupmena, nes toks skaičius gaunamas dalijant vienetinę atkarpą [0,1]. Pagal šį apibrėžimą, dalmuo neprivalo būti trupmena. Tačiau teisinga kita teorema.

2 teorema. *Dalmuo* $3:4$ *yra trupmena* $\frac{3}{4}$, *t.y.* $3:4=\frac{3}{4}$.

Įrodymas. Du skaičiai yra lygūs, jei atitinkami taškai skaičių tiesėje sutampa. Parodysime, kad $\frac{3}{4}$ yra dešinysis galas arčiausiai nulio esančios atkarpos, kurią gauname atkarpą $[0,3]$ dalydami į 4 vienodo ilgio atkarpas. Nesunku atkarpą $[0,3]$ padalyti į tris lygias dalis. Neaišku, kaip šią atkarpą padalyti į keturias lygias dalis. Tam panaudosime pagrindinę trupmenos savybę (1 teorema), pagal kurią $3=\frac{4\cdot 3}{4}$, t. y. 3 yra taško $\frac{1}{4}$ 12-tasis kartotinis taškas arba dešinysis galas atkarpos, gaunamos jungiant 12 $\frac{1}{4}$ ilgio atkarpas.



Turime atkarpą $[0,3]$, padalytą į 12 kongruenčių atkarpų. Pirmoji, kurios kairysis galas yra 0, pažymėta melsva spalva. Kadangi $12=3\cdot 4$, jas nuosekliai jungdami į grupes po 3 atkarpas, gauname keturias kongruenčias atkarpas, kurios dalo atkarpą $[0,3]$. Pirmosios šios grupės atkarpos dešinysis galas, pažymėtas rausva spalva, yra taško $\frac{1}{4}$ 3-asis kartotinis, taigi yra trupmena $\frac{3}{4}$, ką ir reikėjo įrodyti. □

Pastaroji teorema trupmeną išreiškia dalmeniu. Parodysime, kad dalyba su liekana įgalina trupmeną išreikšti dešimtainiu skaičiumi. Priminsime, kad kiekvienai natūraliųjų skaičių porai m ir n egzistuoja tokia natūraliųjų skaičių pora d ir l, kurioms teisingi sąryšiai

$$m = n{\cdot}d + l \quad \text{ir} \quad 0 \leqslant l < n. \tag{6}$$

Šiuo atveju d taip pat vadinamas (nepilnuoju) dalmeniu, o l vadinamas liekana. Jei $l = 0$, tai nepilnasis dalmuo d yra pilnuoju dalmeniu.

3 teorema. *Trupmena* $\frac{m}{n}$ *yra periodinis dešimtainis skaičius, kurio skaitmenys yra skaitmenimis dalmens gaunamo* $m \times 10^k$ *dalijant iš* l *su liekana ir su pakankamai dideliu* k*.*

Trupmena $\frac{m}{n}$ išreiškiama baigtiniu dešimtainiu skaičiumi tada ir tik tada, kai jos vardiklis $k = 2^a 5^b$ su kuriais nors natūraliaisiais skaičiais a ir b.

Visi pastarieji rezultatai rodo, kad trupmenos tapatinimas su dalmeniu neturi kokios nors apčiuopiamos reikšmės mokyklinėje matematikoje, net ir trupmenų supratimo atžvilgiu.

4 Išvados

[12] darbe rašėme, kad matematinės sąvokos traktavimas priklauso nuo požiūrio į matematikos prigimtį. Tame darbe šią priklausomybę iliustravome sąvokos apibrėžimų pavyzdžiais iš matematikos didaktikos vadovėlių. Darome išvadą, kad šio straipsnio 2 ir 3 skyreliuose aptariamų trupmenos sampratų skirtumai taip pat paaiškinami požiūrių į matematikos prigimtį skirtumais. Šią išvadą grindžiame matematikos mokymo filosofija. Joje atskleidžiama matematikos mokymo tikslų ir mokyklinės matematikos turinio pasirinkimo priklausomybė nuo ideologijos ir interesų grupių įtakojančių mokymo turinį [6].

Nėra abejonių, kad kitos mokyklinės matematikos dalys formuluojamos mūsų vadovėliuose taip pat turi didelių matematinio tikslumo ir aiškumo problemų. „Matematika ir pasaulis“ vadovėlio jubiliejų pažyminti matematikos ekspertų diskusija rodo, kad pastarųjų dešimtmečių ir dabartinė vadovėlinė mokyklinė matematika yra kuriama minimizuojant tekstinę reprezentaciją, maksimizuojant iliustracijų kiekį ir skatinant tik intuityvų savarankišką mąstymą [1] ir [7]. 2 skyrelis parodo tokios mokyklinės matematikos rezultatą. 3 skyrelis parodo kaip abstrakčios matematikos prigimties sudėtingumas mokyme sprendžiamas siekiant maksimalaus dalyko tikslumo ir aiškumo. Šiuo būdu yra įgyvendinamas matematinio samprotavimo lavinimo tikslas. Siekiant šio tikslo būtina parengti naują viso 12-os metų mokyklinės matematikos turinį. Galima naudoti ir adaptuoti amerikiečių matematiko H.-H. Wu išdėstytą šešių knygų rinkinyje. [16] yra pirmoji šio rinkinio knyga. Amerikiečių matematikos programa *Common Core States Standards for Mathematics* https://www.nctm.org/ccssm/ yra suderinta su H.-H. Wu mokyklinės matematikos turiniu.

Kaip minėjome straipsnio įvade, vadovėliai atlieka jungiamąjį vaidmenį tarp ketinamos diegti programos ir klasėje diegiamo matematikos turinio [8, 5 p.]. Vadovėlinės mokyklinės matematikos ir matematikos programos kokybė yra vienodai svarbios. Matematikos programa negali būti tiksli ir kokybiška, jei jos rengėjai neturi prieš save viso 12-os metų mokyklinės matematikos turinio. Tuo labiau tai teisinga matematikos vadovėlių rašymui. Neišvengiamai tiek matematikos programa, tiek vadovėlinė mokyklinė matematika yra skirtingų požiūrių, ideologijų ir kvalifikacijos autorių kūriniai. Suderintas tarp interesų grupių mokyklinės matematikos turinys turėtų būti rengiamas mokyklinės matematikos tyrimų kontekste ir atsižvelgiant į pasaulines mokyklinės matematinos mokymo tikslų tendencijas. Tai yra siekiamybė ir tam be abejo reikia daug laiko ir daug kvalifikuotų žmonių.

Dabartinis vadovėlių recenzavimas vertina vadovėlio turinio atitikimą bendrajai programai. Pavyzdžiui, formaliai vertinama, ar programoje minima matematinė sąvoka vadovėlyje apibrėžta, ar ne? Taip formuluojant užduotį recenzavimui sunku būtų įtikinti vadovėlio autorius keisti savo apibrėžimą, nes pati apibrėžimo samprata ir sąvokos turinio atitikimas matematiniam korektiškumui nėra reglamentuojami. Mažiausiai, ką galima padaryti dabartinėmis sąlygomis, tai įpareigoti leidyklas į matematikos vadovėlių autorių kolektyvus įtraukti daktaro laipsnį ir tyrimų patirtį turinčius matematikus.

Literatūra

[1] V. Būdienė, N. Cibulskaitė, R. Rudalevičienė, M. Skakauskienė (Stričkienė), A. Vilimienė. Diskusija apie pirmąjį lietuvišką matematikos vadovėlį „Matematika ir pasaulis“ I dalis, 2016. https://www.youtube.com/watch?v=1tqQ0xqTAUU.

[2] M. Colyvan. *An Introduction to the Philosophy of Mathematics.* Cambridge University Press, 2012.

[3] J. Confrey, S. Costa. A critique of the selection of “mathematical objects” as a central metaphor for advanced mathematical thinking. *Int. J. Comput. Math. Learning*, **1**:139–168, 1996.

[4] J. Van Dormolen, O. Zaslavsky. The many facets of a definition: the case of periodicity. *J. Math. Behav.*, **22**:91–106, 2003.

[5] B.S. Edwards, M. B. Ward. The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics course. In C. Rasmusses M.P. Carlson(Ed.), *Making the Connection: Reserach and Teaching in Undergraduate Mathematics Education*, pp. 223–232. Mathematical Association of America, 2008.

[6] P. Ernest. *The Philosophy of Mathematics Education.* Routledge, 1991.

[7] P. Gudynas, S. Staknienė, A. Vilimienė, E. Žalys. Diskusija apie pirmąjį lietuvišką matematikos vadovėlį „Matematika ir pasaulis“ II dalis, 2017. https://www.youtube.com/watch?v=chFNvgUOqic.

[8] R.T. Houang, W.H. Schmidt. Timss international curriculum analysis and measuring educational opportunities. In *3rd IEA International Reserach Conference TIMSS*, pp. 1–18, 2008.

[9] E. Nurkas ir A. Telgma. *Matematika. 5 klasė.* Šviesa, 1992.

[10] E. Nurkas ir A. Telgma. *Matematika. 6 klasė.* Šviesa, 1993.

[11] N. Cibulskaitė ir M. Stričkienė. *Matematika ir pasaulis. 5 klasė.* TEV, 2006.

[12] R. Norvaiša. Matematikos mokymo tikslai: matematinis kompetentingumas ar matematinis raštingumas? *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **61**:8–14, 2020.

[13] L. Daukšytė-Koncevičienė O. Janušaitienė, A. Ališauskas. *Matematika. Vadovėlis 5 klasei, 1 dalis, serija Horizontai.* Šviesa, 2023.

[14] A. Sfard. *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* Cambridge University Press, 2008.

[15] W.F. Sullivan-L.S. Cogan W.H. Schmidt, R.T. Houang. When practice meets policy in mathematics education: a 19 country/jusrisdiction case study. In *OECD Education Working Papers No. 268*, pp. 1–120. OECD Publishing, Paris, 2022.

[16] H.-H. Wu. *Understanding Numbers in Elementary School Mathematics.* American Mathematical Society, 2011.

[17] H.-H. Wu. Potential impact of the common core mathematics standards on the American curriculum. In G. Lappan Y. Li(Ed.), *Mathematics Curriculum in School Education*, pp. 119–142. Springer, 2014.

[18] O. Zaslavsky, S.D. Nickerson, A.J. Styllianides, I. Kydron, G. Winicki-Landman. The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In G. de Villiers G. Hanna(Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education. New ICMI Study Series,* volume 15, pp. 215–229. Springer, Dordrecht, 2012.

SUMMARY

Concepts, terms and symbols in mathematics textbooks

R. Norvaiša

The article discusses the problems of definitions of concepts of school mathematics in textbooks. Excerpts from textbooks show how interpretations of a fraction having no necessary properties of a mathematical definition have changed over the decades. The alternative of a concept of a fraction based on the number line is discussed.

Keywords: concept of fraction; concept of quotient; number line; textbook school mathematics; mathematical nominalism