

## Métodos probabilísticos nivel II y III en Ingeniería Marítima. Una aproximación didáctica basada en la interpretación gráfica del problema

Chamorro, G.<sup>1</sup>; Muñoz-Pérez, J.J.<sup>2</sup>; Negro, V.<sup>3</sup>; Cabrera, P.<sup>2</sup>; Contreras, A.<sup>2</sup>; Gómez-Pina, G.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ETSI Universidad de Sevilla, Dpto. de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería. Camino de los Descubrimientos S/N, 41092. Sevilla. gchamorro1@us.es. <sup>2</sup>Grupo de Investigación de Ingeniería Costera de la Univ. Cádiz, Puerto Real, 11510. Cádiz. juanjose.munoz@uca.es, antonio.contreras@uca.es, pablo.cabrera@acoport.es. <sup>3</sup>ETSICCP UPM Grupo de Medio Marino, Costero y Portuario, Campus Ciudad Universitaria, C/ Profesor Aranguren, 3, 28040. Madrid. vicente.negro@upm.es

---

### Resumen

*En la presente ponencia se realiza un enfoque sencillo e introductorio de la aplicación de los métodos probabilísticos Nivel II y III en ingeniería Marítima. Se trata intencionadamente el problema bivariado por su sencillez pedagógica e interpretación gráfica del problema.*

**Palabras clave:** Nivel II, Nivel III, métodos probabilísticos, ROM 0.0.

### 1. Introducción

En el año 2001, Puertos del Estado ([www.puertos.es](http://www.puertos.es)) publicó la ROM 0.0 “*Criterios Generales y Bases de Cálculo*”. Este documento incluye los métodos probabilísticos de Nivel II y III en la verificación de los modos de fallo de las obras marítimas y portuarias. Este cambio normativo en España se sitúa muy en la línea de los Eurocódigos (*Eurocódigo 0. Bases de Proyecto*).

Desde ese momento, las obras marítimas con índices ISA (Índice de repercusión social y ambiental) e IRE (Índice de repercusión económica) altos, deben ser comprobadas mediante la aplicación de métodos probabilísticos, conceptualmente muy diferentes a los denominados como métodos de Nivel I. Esto supone para el sector un choque frontal con la costrumbre y el “espacio de confort” de los métodos de cálculo y diseño deterministas o semiprobabilísticos (Métodos de Nivel I).

La generalización de los métodos deterministas o de cálculo en Nivel I, con empleo de coeficientes de seguridad parciales o globales (empleado en normativas como: EHE, EAE, CTE, ...etc.), esconde el significado real del coeficiente de seguridad y su íntima relación, aunque no explícita, con el concepto de probabilidad de fallo, base de los cálculos probabilistas del programa ROM.

Han pasado ya casi dos décadas desde la aparición de la ROM 0.0 y seguimos encontrándonos al sector de la ingeniería civil con una importante laguna formativa en la aplicación de métodos probabilistas de diseño y en teoría estadística y probabilidad, en general.

Observamos en nuestras aulas en la universidad el “terror” de los alumnos cuando se enfrentan con temas de probabilidad e inferencia estadística, en materias tan importantes para el ingeniero civil como la hidrología o el cálculo estructural. A ello se une la dificultad inherente de las disciplinas matemático-estadísticas, el cálculo probabilístico y las lagunas formativas de los ingenieros civiles en general en estas materias. Desde la Universidad estamos logrando introducir muy poco a poco los métodos probabilísticos en el diseño ingenieril, aunque para una implantación completa y efectiva hace falta un relevo generacional en nuestras escuelas, en el que nos incluimos.

No obstante, hemos comprobado que la docencia de esta materia de forma rigurosa pero desenfadada y **clarificándola con la interpretación gráfica del problema** en modelos probabilísticos bivariados es, por propia experiencia docente, una sólida base para inducir el cambio de mentalidad.

Cuando un alumno observa gráficamente la forma de la campana gaussiana en 3D y el corte de la misma con la superficie de fallo  $Z = g(X_1, X_2)$ , asume y asienta rápidamente los conceptos de probabilidad de fallo, punto de diseño, correlación de variables, transformación de variables aleatorias, etc. Además visualiza y comprende un concepto de vital importancia: *la conveniencia de linealizar la función de fallo para la aplicación del Nivel II* (desarrollos en serie de Taylor de primer orden, ...etc.).

Una vez que se ha logrado visualizar un problema, en sí muy árido, es suficiente el conocimiento de algún lenguaje de programación (MATLAB, EXCEL, C++, FORTRAN, PYTHON, etc.) que permita crear códigos sencillos y flexibles que sistematicen el cálculo para su aplicación directa al ejercicio real de la Ingeniería marítima.

## 1. El problema de laguna formativa del sector

La aplicación de métodos probabilistas en ingeniería no es algo nuevo. Ya en la década de los 70, los profesores Benjamin y Cornell, por poner una referencia imprescindible en la aplicación de estos métodos en ingeniería civil, hicieron un comentario de gran importancia y visión:

*“The need for writing such a book is a result of the unusual status of probability and statistics in civil engineering”.*

Por tanto, se trata de un problema que viene de largo y no es únicamente de la ingeniería civil española, sino que parece una tónica a nivel mundial.

Podemos concluir, de forma general, que el sector se ha acostumbrado al espacio de confort que ofrecen los métodos de Nivel I y que es reactivo al cambio de mentalidad. Esta actitud, muy humana por otra parte, la hemos visto en otros muchos casos de la ingeniería. A esto se suma el hecho innegable de la complicación para obtener las funciones de distribución de las variables aleatorias en campos tan importantes como la Geotecnia. El conocimiento de estas funciones de distribución son la base y condición “sine qua non” para la aplicación de los métodos probabilistas de Nivel II y III.

La resistencia al cambio está también provocada por la laguna formativa del sector en temas esenciales como la teoría de probabilidades, la teoría estadística y los métodos de inferencia estadística. En la opinión personal de los autores, si estas materias fueran reforzadas en las escuelas de ingeniería con un enfoque más práctico (Muñoz-Perez et al. 2010; Chamorro et al, 2016 y 2018), se estaría dando un paso de gigante en la implantación definitiva de los métodos probabilísticos en el ejercicio de la ingeniería civil.

## 2. Interpretación gráfica del problema como objetivo didáctico

Se pretende demostrar aquí cómo con el desarrollo de ejemplos muy sencillos y reduciendo intencionadamente el problema al caso de dos variables aleatorias (problema bivariado), independientes o correlacionadas, pueden visualizarse e interpretarse los conceptos clave del cálculo probabilístico en Nivel II y III, de forma intuitiva, clara y eficaz. El aparato matemático subyacente es, en este caso, un aspecto secundario, y sin ánimo de trivializar un problema difícil de por sí, no deja de ser un simple trabajo de “fontanería” matemática al alcance de cualquier ingeniero civil.

Se pretende contestar y mostrar de forma gráfica una serie de cuestiones esenciales en cálculo probabilístico, como son las siguientes:

- ¿Cómo es la forma de una función normal bivariada cuando las variables aleatorias son independientes y cuando no lo son? ¿Se puede visualizar gráficamente esta diferencia?
- ¿Cuál es el objetivo de transformar las variables aleatorias normales  $N[\mu, \sigma]$  en otras estándar  $N[0, 1]$ ?
- ¿Por qué es necesario en los cálculos de Nivel II convertir las variables aleatorias correlacionadas en otras independientes y estándar? ¿Qué consecuencias tiene esta transformación en la forma de la campana de Gauss resultante de la transformación?
- En el caso anterior ¿Por qué se dice que el coeficiente de fiabilidad  $\beta = \mu/\sigma$  es la distancia de un punto a una recta? ¿Puede interpretarse gráficamente esta aseveración? ¿Cómo?
- ¿Cómo se interpreta gráficamente el concepto de función de fallo y probabilidad de fallo?
- ¿Qué es el punto de diseño y cómo se visualiza gráficamente?
- ¿Por qué resulta tan útil linealizar la función de fallo alrededor del punto de diseño?
- ¿Cómo es la sistemática de cálculo iterativo en Nivel II para la obtención del punto de diseño y la probabilidad de fallo mediante el algoritmo de Newton-Raphson? ¿Puede visualizarse e interpretarse gráficamente este proceso iterativo?
- ¿Por qué suele ser habitual comenzar los cálculos iterativos partiendo de los valores medios de las variables aleatorias?
- ¿Por qué los métodos de Nivel II son sólo una aproximación al cálculo de la probabilidad de fallo? ¿Puede visualizarse esta afirmación?
- ¿Cómo se interpreta gráficamente el concepto del coeficiente de sensibilidad  $\alpha_i$ ?
- ¿Qué es una simulación de Montecarlo en métodos de Nivel III?

- ¿Por qué decimos que una simulación de Montecarlo en Nivel III da valores “exactos” de la probabilidad de fallo y en Nivel II sólo obtenemos una aproximación?
- ¿Por qué no puede obtenerse el punto de diseño en una simulación de Montecarlo y sí en un cálculo en Nivel II?
- ... etc.

En los próximos apartados se realizarán una serie de ejemplos de cálculo muy sencillos que darán contestación a todas estas preguntas esenciales.

### 3. Ejemplo didáctico de cálculo en Nivel II

En este apartado resolveremos un caso sencillo bivariado en Nivel II. Reiteramos la intencionalidad de los autores en la simplificación máxima del problema que permita a la audiencia interpretar gráficamente los resultados, aun a costa del rigor matemático subyacente. No se pretende en absoluto trivializar un problema, ya complicado de por sí, sino acercarlo al lector de forma didáctica<sup>1</sup>.

Hemos probado esta metodología en nuestras clases, obteniendo resultados satisfactorios. Observamos que la visualización e interpretación gráfica previa de un caso sencillo sitúa al alumno en modo “no temor”, permitiéndole posteriormente ser capaz de resolver problemas complejos empleando herramientas informáticas de cálculo simbólico como Matlab®.

El ejercicio propuesto se basa en la aplicación del ajuste con datos de campo del número de estabilidad ( $N_s$ ) adimensional de piezas de protección de mantos de diques propuesto por Van der Meer (1995).

$$N_s = \frac{H_s}{\Delta \cdot D_{n50}}$$

Siendo:

- $N_s$  parámetro de altura de ola adimensional o número de estabilidad adimensional.
- $H_s$  la altura de ola significativa [m].
- $\Delta$  el coeficiente adimensional de densidades del material de bloque ( $\gamma$ ) y del agua del mar ( $\gamma_w$ ):

$$\Delta = \frac{\gamma}{\gamma_w} - 1$$

- $D_{n50}$  el tamaño medio del bloque [m].

Entre los años 1994-2000, Negro y Varela presentan un ajuste del valor de  $N_s$  con datos de campo obtenidos de más de 100 diques de tipología rompeolas en la cornisa cantábrica española, con piezas de tipo masivo (bloques y escolleras) y que han presentado un comportamiento correcto desde su construcción. En el siguiente cuadro sólo se muestran 20 diques estudiados que servirán para nuestro ejemplo.

---

<sup>1</sup> Este ejemplo no debe ni puede considerarse de aplicación a un caso de diseño real en Ingeniería Marítima. Se insiste en su valor únicamente didáctico. La ROM 0.0 incluye ejemplos resueltos en Nivel II de gran rigor matemático y conceptual que deben utilizarse como referencia en la práctica profesional, una vez que el ingeniero ha profundizado en el estudio y la aplicación de métodos probabilísticos en ingeniería.

Tabla 5.15. APROXIMACIÓN TEÓRICA DE DIQUES EN TALUD EN ESPAÑA [19]

NOMBRE DEL DIQUE	PESO DEL MANTO EXTERIOR, t	DIÁMETRO NOMINAL, m	ALTURA DE OLA SIGNIFICANTE, m	PARÁMETRO DE ALTURA DE OLA ADIMENSIONAL, -
Hondarribia	9 t	1,50 m	5,00 m	2,04
Orio	13 t	1,66 m	5,85 m	2,02
Getaria	20 t	1,96 m	6,63 m	2,12
Bermeo, 1º	50 t	2,75 m	7,13 m	1,93
Bermeo, 2º	85 t	3,30 m	9,00 m	2,03
Bilbao	150 t	4,00 m	10,10 m	1,88
Lastres	40 t	1,955 m	6,80 m	1,98
Gijón	120 t	3,70 m	9,60 m	1,94
Candás	27 t	2,25 m	4,95 m	1,64
Pravia	125 t	3,70 m	8,75 m	1,77
Cudillero	60 t	2,92 m	8,00 m	2,04
Burela	72 t	3,10 m	7,45 m	1,79
San Ciprián	90 t	3,35 m	8,90 m	1,98
Cillero	28 t	2,25 m	6,25 m	2,06
Cariño	12 t	2,05 m	5,00 m	1,96
Malpica	120 t	3,68 m	10,70 m	2,16
Lage	20 t	2,05 m	5,00 m	1,96
Finisterre	15 t	1,85 m	5,00 m	2,09
Zurriola	45 t	2,55 m	8,20 m	1,96
Langosteira	150 t	4,00 m	11,00 m	2,05

Fig. 1. Fuente: "Diseño de Diques Rompeolas". Negro y Varela (2008)

Observando los valores de campo del número de estabilidad, se observa la variación aleatoria del monomio adimensional alrededor del valor  $N_s \approx 2$ , que puede considerarse como un excelente ejemplo de "número gordo" para cálculos y encajes preliminares.

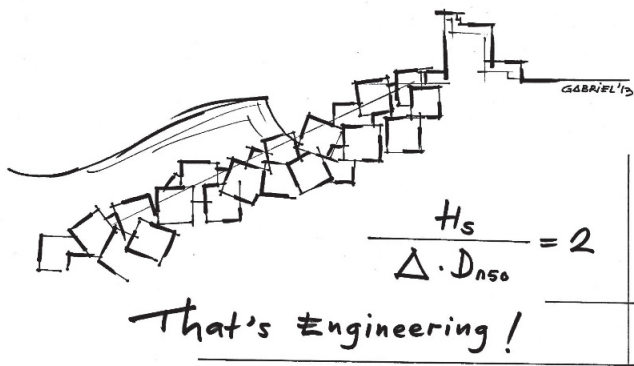


Fig. 2. Ajuste del monomio adimensional de Negro(2008) para el caso de piezas masivas

**Enunciado del ejemplo:**

Empleando el ajuste de Negro y Varela, se pretende obtener el valor de la probabilidad de fallo y punto de diseño de una obra de un dique de tipología rompeolas con piezas cúbicas de hormigón en masa para protección de su manto principal, dimensión del bloque de  $D_{n50} = 2,50$  m y peso específico del hormigón de  $\gamma = 2,40$  T/m<sup>3</sup>, considerando estos dos parámetros ( $D_{n50}$  y  $\gamma$ ) como variables deterministas, es decir, de valor fijo o no aleatorias.

$$\Delta = \frac{\gamma}{\gamma_w} - 1 = \frac{2,40}{1,03} - 1 = 1,33$$

Lo primero que necesitamos es definir la función de fallo Z que relaciona los términos de resistencia (R) y de sollicitación (S). Cuando  $R > S$  el sistema es seguro y  $Z > 0$ . Cuando  $R < S$  el sistema falla y  $Z < 0$ . Cuando  $R = S$  estamos en el caso de estado límite con  $Z = 0$ .

$$Z = R - S$$

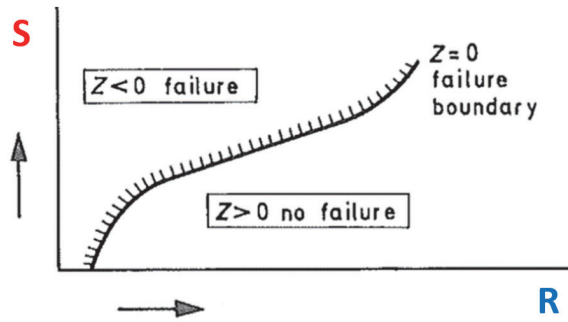


Fig. 3. Visualización gráfica de la función de fallo en términos de resistencia (R) y sollicitación (S)

En este caso concreto, definiremos los conceptos de resistencia y sollicitación en términos de altura de ola significativa. Como término resistente tendremos la altura de ola resistida por el bloque de hormigón de dimensiones y peso específico conocidos (variables deterministas). Como término de sollicitación tendremos el valor de la altura de ola significativa medida en una boya situada en aguas profundas, asociada a un valor de periodo de retorno  $T_R$  y propagada hasta el punto de diseño del dique.

$$Z = N_s \cdot \Delta \cdot D_{n50} - (H_s)_{T_R}$$

Obsérvese, que de los cuatro parámetros que aparecen en la función de fallo  $Z$ , dos los consideramos como variables deterministas ( $D_{n50}$  y  $\gamma$ ) y los otros dos como variables aleatorias ( $N_s$  y  $H_{s,TR}$ ). Esta consideración se ha hecho intencionadamente para obtener un problema bivariado que pueda visualizarse gráficamente.

Para emplear una notación más acorde con la bibliografía técnica especializada, llamaremos  $X_1$  a la variable aleatoria  $N_s$  y  $X_2$  a la variable aleatoria  $H_{s,TR}$ . Se obtiene así la siguiente función de fallo bivariada:

$$Z = 3,325 \cdot X_1 - X_2$$

La función de fallo obtenida es intencionadamente **lineal** en este ejercicio, por su carácter didáctico. Las importantes consecuencias de la linealidad de la función  $Z$  serán tratadas más adelante. Sólo avanzar aquí, que es algo esencial en el cálculo probabilístico en Nivel II y que si la función  $Z$  no fuera lineal debe linealizarse (desarrollos en serie de Taylor de primer orden alrededor del punto de diseño).

Es ahora el momento de realizar el ajuste estadístico de las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$ . Para ello, y únicamente por motivos didácticos y de claridad de exposición, supondremos que ambas variables aleatorias se distribuyen como normales  $N[\mu_i, \sigma_i]$ , definidas por los parámetros de media ( $\mu_i$ ) y desviación típica ( $\sigma_i$ ). En un caso real general, estas variables podrían distribuirse con cualquier otra función de distribución estadística (Weibull, Gumbel, lognormal, ... etc.), en cuyo caso, necesitaríamos realizar transformaciones de estas variables a otras normales (p.ej. transformación de Rosenblatt. Ver ROM 0.0) para la aplicación de los métodos de Nivel II.

Para el caso de la variable  $X_1$  disponemos de una muestra de 20 datos del ajuste de campo de Negro y Varela. Sin más justificación asumiremos que se distribuye como una normal, dado que en el valor del número de estabilidad intervienen numerosos factores (periodo, dirección del oleaje, ángulo del talud, porosidad del manto,  $N^\circ$  de olas activas del temporal, ... etc.). Mediante métodos de inferencia estadística (método de los momentos, máxima verosimilitud, etc.) podemos obtener estimadores (e.g. Benjamin&Cornell. 2014) de los parámetros de media ( $\mu_1$ ) y desviación típica ( $\sigma_1$ ) de la variable aleatoria  $X_1$ , en base a los  $n = 20$  valores de la muestra  $x_i$ .

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 1,97$$

$$\sigma = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0,125$$

$$X_1 \rightarrow N[1,97; 0,125]$$

Para el caso de la variable  $X_2$  sabemos que es una variable extremal (p.ej. ajuste Weibull en boyas de Puertos del Estado). Por simplicidad, adoptaremos una distribución normal para esta variable, tomando un ejemplo de cálculo similar del Profesor Burcharth (1997). Suponemos que la altura de ola propagada hasta el dique está fuertemente limitada por efecto de rotura por fondo y que, por tanto, la variable altura de ola significante de diseño puede asimilarse a una normal. Tomaremos en este ejemplo la siguiente:

$$X_2 \rightarrow N[5 ; 1,20]$$

Las funciones de distribución estadística normales obtenidas para las variables aleatorias por separado se denominan funciones marginales. Al ser ambas normales, la distribución conjunta  $f(X_1, X_2)$  será también una normal gaussiana bivariada con forma de campana en el espacio.

Si representamos esta campana gaussiana en planta mediante curvas de nivel, observaremos que éstas tienen forma de elipses cuyos semiejes no son en general paralelos a los ejes coordenados  $(X_1, X_2)$ . De hecho, los semiejes de las elipses serán paralelos a los ejes coordenados únicamente cuando las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  no están correlacionadas. Precisamente, el giro de los semiejes de las elipses muestra de forma cualitativa el grado de correlación de ambas variables y como podría obtenerse una transformación de las variables correlacionadas a otras no correlacionadas con un simple giro de ejes.

El grado de correlación de las variables se obtiene mediante la matriz de covarianzas  $\Sigma$ , que en el caso bivariado que estamos analizando es una matriz 2x2 que contiene los valores de las varianzas en la diagonal principal ( $\sigma_i^2$ ) y la covarianza  $cov[X_1, X_2]$  en el resto de posiciones. Cuando las variables no están correlacionadas ( $cov[X_1, X_2]=0$ ) la matriz  $\Sigma$  es diagonal.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov[X_1, X_2] \\ cov[X_1, X_2] & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1 \ \mu_2)$$

$$N(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \cdot |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\right\} \quad ; \quad d = 2 \text{ (bivariado)}$$

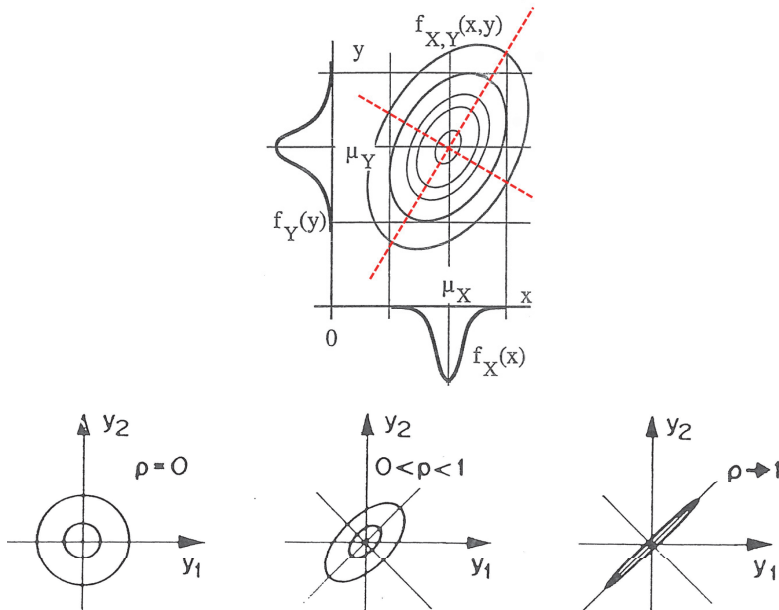


Fig. 4. Caso general de gaussiana bivariada con variables correlacionadas

Surge ahora la pregunta: ¿Están  $X_1$  y  $X_2$  correlacionadas? A priori, deberíamos pensar que no, pues  $N_s$  es precisamente un número que adimensionaliza la altura de ola significativa concebido por Van der Meer para diseño de diques. No obstante, la comprobación de esta afirmación se realiza primero mediante el cálculo de la covarianza y del coeficiente de correlación ( $\rho$ ), y posteriormente mediante una representación gráfica de los pares de valores muestrales del número de estabilidad y la altura de ola significativa.

$$cov[X_1, X_2] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{1,i} - \mu_1)(x_{2,i} - \mu_2) = 0,031$$

$$\rho = \frac{cov[X_1, X_2]}{\sigma_1 \sigma_2} = 0,12 < 0,20$$

El coeficiente de correlación  $\rho$  expresa el grado de correlación de las variables. Toma valores  $-1 < \rho < 1$  y el valor  $\rho = 0$  indicaría que las variables no están correlacionadas. En la práctica, se admite que las variables no están correlacionadas cuando  $|\rho| < 0,20$ , como es el caso. Por tanto, concluimos que en este caso  $X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias normales y no correlacionadas. Observemos esta aseveración de forma gráfica.

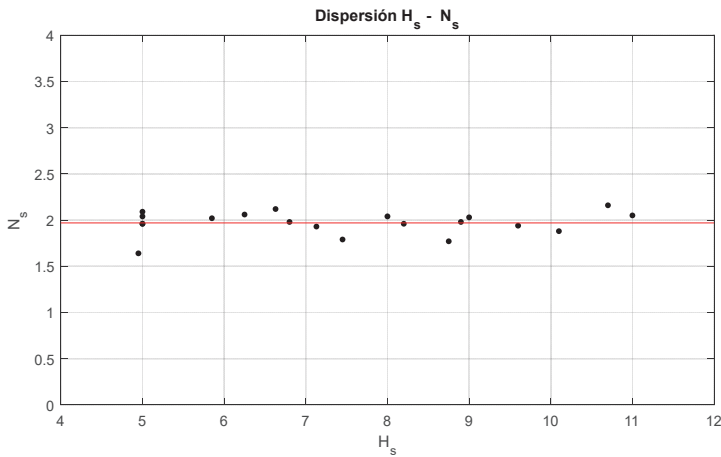


Fig. 5. Gráfico de dispersión de los valores muestrales. Se aprecia que las variables no están correlacionadas

Se aprecia claramente y de forma gráfica que los valores de  $N_s$  y  $H_s$  no están correlacionados y que los valores de  $N_s$  para cada valor de  $H_s$  oscilan aleatoriamente alrededor del valor medio próximo a  $N_s \approx 2$ .

En el siguiente gráfico se muestra la representación gráfica de la función gaussiana de distribución conjunta de las variables  $f(X_1, X_2)$ . Al tratarse de variables no correlacionadas, puede observarse que los semiejes de las elipses producidas por un corte horizontal de la función son paralelas a los ejes coordenados  $X_1$  y  $X_2$ . La campana gaussiana tiene un máximo en el punto  $(\mu_1, \mu_2)$ . Matemáticamente, esta forma se obtiene cuando la matriz de covarianza  $\Sigma$  es diagonal.

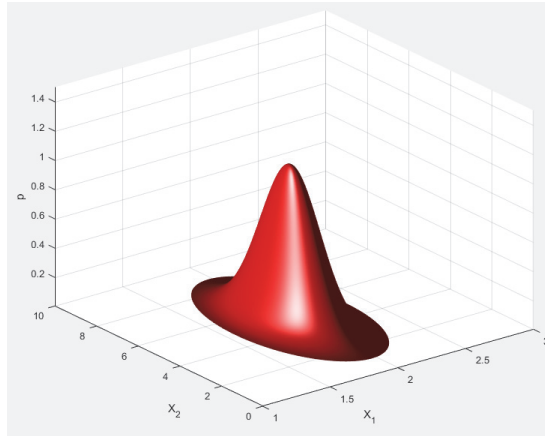


Fig. 6. Campana gaussiana de distribución conjunta de las variables  $f(X_1, X_2)$

Si en el gráfico de la función gaussiana biviada (figura 6) representamos la función de fallo  $Z$ , podremos observar las regiones de fallo y de no fallo. Nuestro objetivo será obtener la probabilidad de fallo  $P_f$ , que gráficamente se interpreta como el volumen de la campana que queda dentro de la región de fallo ( $Z < 0$ ).

Por tanto, los métodos probabilísticos de Nivel II y III no son más que técnicas estadístico-matemáticas que nos permitirán obtener al menos una buena aproximación del volumen objetivo en la región de fallo.

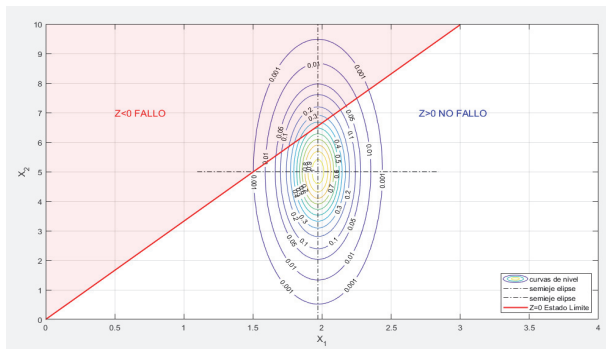


Fig. 7. Curvas de nivel de la campana gaussiana de distribución conjunta de las variables  $f(X_1, X_2)$  y región de fallo  $Z < 0$

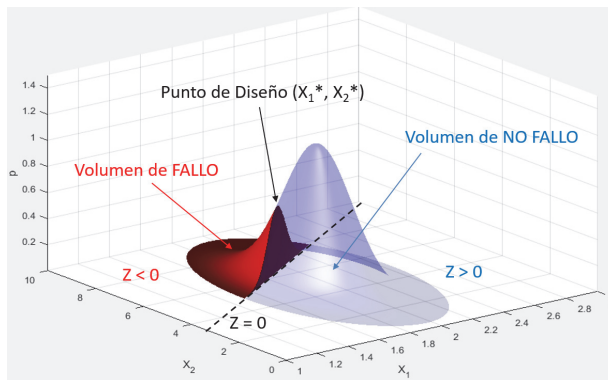


Fig. 8. Volúmenes de la campana gaussiana biviada en la región de fallo  $Z < 0$  (en rojo) y de no fallo  $Z > 0$  (en azul)



En las figuras 7 y 8 se observa que la intersección de la campana gaussiana bivariada con la superficie  $Z = 0$  da lugar a una curva también con forma de campana con un máximo, que representa el punto de máxima probabilidad de ocurrencia del fallo. A este punto se le denomina **punto de diseño** ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ). La obtención de este punto es de crucial importancia cuando se emplean los métodos de Nivel I, pues a través de la comparación de este valor con los valores característicos de las variables es como se obtienen los coeficientes de seguridad parciales que empleamos comúnmente en normativas y códigos como EHE (2008).

Hagamos un breve resumen de los pasos dados hasta el momento:

- Función de fallo  $Z$  lineal en las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$ .
- Se ha supuesto que las variables  $X_1$  y  $X_2$  se distribuyen como normales  $N[\mu_i, \sigma_i]$
- Se ha comprobado que las variables  $X_1$  y  $X_2$  son independientes.

Con estos tres ingredientes básicos **la obtención de la probabilidad de fallo  $P_f$  es trivial**, pues cuando se cumplen, la variable aleatoria  $Z$  (función de fallo) también se distribuye como una normal  $N[\mu_Z, \sigma_Z]$ . Para el caso bivariado (aplicable al caso general con  $n$  variables aleatorias) se cumple:

$$Z = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 \quad (\text{función de fallo LINEAL})$$

$$\mu_Z = a_0 + a_1 \cdot \mu_1 + a_2 \cdot \mu_2$$

$$\sigma_Z^2 = a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + a_2^2 \cdot \sigma_2^2$$

Anteriormente ya obtuvimos las distribuciones normales de las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  y la función de fallo:

$$X_1 \rightarrow N[1,97 ; 0,125]$$

$$X_2 \rightarrow N[5,00 ; 1,20]$$

$$Z = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 = 3,325 \cdot X_1 - X_2$$

Por tanto, el cálculo de la media y la desviación típica de  $Z$  es inmediato:

$$\mu_Z = 0 + 3,325 \cdot 1,97 - 1,00 \cdot 5,00 = \mathbf{1,5503}$$

$$\sigma_Z^2 = (3,325 \cdot 0,1248)^2 + (1,00 \cdot 1,20)^2 = \mathbf{1,2697^2}$$

Conocida la distribución de la variable  $Z$  buscamos la probabilidad de fallo, es decir, la probabilidad de que  $Z < 0$ . Los valores tabulados de la función normal (ver Fig. 9) corresponden a los de la **normal estándar** de media  $\mu = 0$  y desviación típica  $\sigma = 1$ ,  $N[0,1]$ . Por ello, debemos transformar la variable normal  $N[\mu_Z, \sigma_Z]$  en una estándar  $N[0,1]$ , mediante un simple cambio de variable.

$$\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}$$

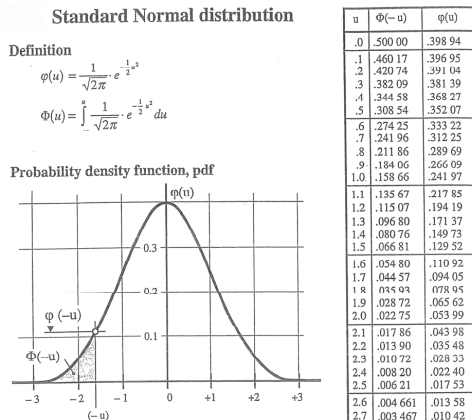


Fig. 9. Función normal estándar  $N[0,1]$  tabulada

Buscamos el valor de la probabilidad  $Z < 0$ , es decir, el valor:

$$\Phi\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi(-\beta)$$

El parámetro  $\beta$  se conoce como **índice de fiabilidad**. En nuestro caso obtenemos:

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{1,5503}{1,2697} = 1,2210$$

Por tanto, de los valores tabulados de la  $N[0,1]$  se obtiene directamente la probabilidad de fallo:

$$P_f = \Phi(-\beta) = \Phi(-1,2210) = 0,111 \quad (11,1\%)$$

La obtención del punto de diseño  $(x_1^*, x_2^*)$  se hace a través de los índices de sensibilidad  $\alpha_i$ .

$$\alpha_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_Z} \cdot a_i$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_Z} \cdot a_1 = \frac{0,1248}{1,2697} \cdot 3,325 = \mathbf{0,3268}$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_Z} \cdot a_2 = \frac{1,20}{1,2697} \cdot (-1) = \mathbf{-0,9451}$$

Estos índices tienen la siguiente propiedad, con una interpretación geométrica muy interesante, que se explicará más adelante:

$$\sum \alpha_i^2 = 0,3268^2 + (-0,9451)^2 = \mathbf{1}$$

Sirva aquí solo como avance, que los índices de sensibilidad representan los cosenos directores del vector unitario que apunta hacia el punto de diseño cuando las variables aleatorias normales  $(X_1, X_2)$  se transforman en otras normales estándar  $(Y_1, Y_2)$  y se representa gráficamente la función de fallo  $Z = Z(Y_1, Y_2)$  y la distribución conjunta  $f(Y_1, Y_2)$  en función de las nuevas coordenadas.

Las coordenadas del punto de diseño se obtienen mediante la siguiente ecuación.

$$x_i^* = \mu_i - \alpha_i \cdot \beta \cdot \sigma_i$$

Obteniéndose en este caso:

$$x_1^* = 1,92 \quad x_2^* = 6,38$$

Con los anteriores cálculos tendríamos completamente resuelto el problema de obtención de la probabilidad de fallo mediante un método probabilístico de Nivel II. No obstante, buscamos una interpretación gráfica de los parámetros obtenidos ( $\beta$ ,  $\alpha_i$ , etc.). Por ello, vamos a plantear de nuevo el ejemplo, pero en esta ocasión transformando las variables aleatorias  $X_1$  y  $X_2$  en otras normales estándar  $Y_1$  e  $Y_2$ . Este cambio de variables tiene una interpretación gráfica muy interesante que merece atención por parte del lector.

Partimos de la función de fallo  $Z = Z(X_1, X_2)$  en las variables originales  $X_1$  y  $X_2$ .

$$Z = 3,325 \cdot X_1 - X_2$$

Realizamos el cambio de variable a la normal estándar:

$$Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad Y_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$$

Despejando los valores de  $X_1$  y  $X_2$  en función de las nuevas variables  $Y_1$  e  $Y_2$ , e introduciéndolas en la ecuación de fallo obtendríamos:

$$Z = 0.4150 \cdot Y_1 - 1.20 \cdot Y_2 + 1,5503$$

La función de fallo sigue siendo lineal en las nuevas variables  $Y_1$  e  $Y_2$  normales estándar.

Obsérvese en este caso (Fig. 10) que las curvas de nivel de la función de distribución conjunta  $f(Y_1, Y_2)$  son círculos concéntricos, no elipses, con centro en el origen de coordenadas, puesto que las nuevas variables  $Y_1$  e  $Y_2$  son normales estándar de media  $\mu = 0$  y desviación típica  $\sigma = 1$ .

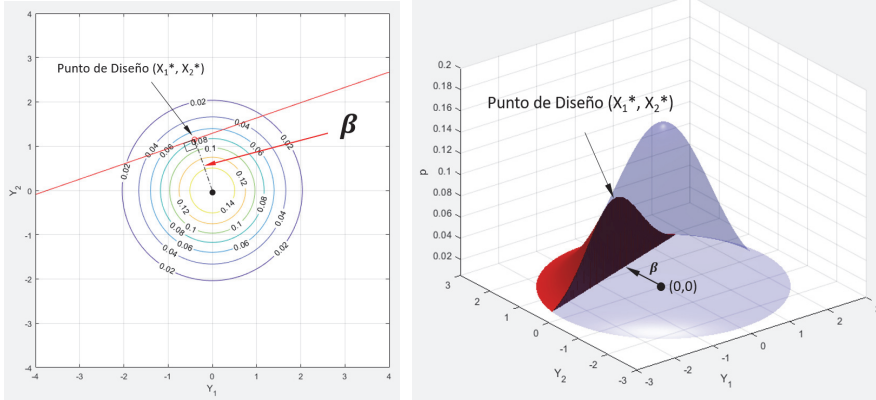


Fig. 10. Campana de Gauss de la función de distribución conjunta  $f(Y_1, Y_2)$  con variables  $Y_1$  e  $Y_2$  normales estándar  $N[0, 1]$ .

Con lo visto hasta el momento es sencillo demostrar los siguientes resultados y su visualización gráfica:

- El valor de  $\beta$  equivale a la distancia entre el origen de coordenadas y la recta  $Z = 0$ .
- El vector  $\mathbf{n} = (\alpha_1, \alpha_2)$  es un vector unitario que apunta en la dirección del punto de diseño.
- Las coordenadas del punto de diseño se obtiene como:  $\mathbf{y}^* = \beta \mathbf{n}$

Conocidas las coordenadas del punto de diseño  $\mathbf{y}^*$  en las variables  $Y_1$  e  $Y_2$  es sencillo obtenerlas en las variables originales  $X_1$  y  $X_2$ , simplemente deshaciendo el cambio de variable.

#### 4. Caso de cálculo en Nivel II con función de fallo Z no lineal

Se presenta a continuación un caso sencillo de cálculo en Nivel II cuando la función de fallo es no lineal. En este caso las variables aleatorias son normales  $N[\mu, \sigma]$  e independientes. También se trata de un problema bivariado que nos permite interpretar gráficamente los resultados obtenidos.

$$Z = X_1 \cdot X_2 - 10^4 \quad \text{Caso NO LINEAL}$$

$$X_1 \rightarrow N[150; 20] \quad X_2 \rightarrow N[90; 30]$$

Sólo se exponen en este caso los resultados, pues estamos interesados aquí en la interpretación gráfica, dejando su resolución al lector como ejercicio recomendado de alto valor formativo.

En este caso, el problema se resuelve de forma iterativa partiendo de un valor arbitrario inicial del punto de diseño  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$  y linealizando la función de fallo mediante un desarrollo de Taylor de primer orden centrado en el punto obtenido en el paso anterior de la iteración. El proceso iterativo se detiene cuando la diferencia en valor absoluto (residuo) de los valores de la probabilidad de fallo obtenidos en dos iteraciones sucesivas es menor al residuo máximo seleccionado (en este caso  $10^{-3}$ ).

$$Z \approx Z(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n (X_i - x_i^*) \left. \frac{\partial Z}{\partial X_i} \right|_{\mathbf{x}^*}$$

Para este caso concreto, como se puede observar en las figuras 11 y 12, se obtiene un valor de la probabilidad de fallo  $P_f = 0,228$ . Como valor estimado inicial del punto de diseño se han tomado los valores medios de las variables  $x_0^* = (\mu_1^*, \mu_2^*)$ . El subíndice 0 indica que es el valor inicial con el que comenzamos el proceso de iteración.

-----	
Nº iteraciones hasta convergencia:	N = 8
-----	
Índice de Fiabilidad:	beta = 0.74389
Media de Z:	mZ = 3404.9118
desviación Típica de Z:	sZ = 4577.1682
Valor de diseño de la variable:	X1,d = 145.5331
Valor de diseño de la variable:	X2,d = 68.7129
Probabilidad de Fallo:	Pf = 0.22847
-----	

Fig. 11. Resumen de resultados de la simulación para la función de fallo no lineal

Se muestran a continuación los resultados de la simulación realizada con un algoritmo de cálculo simbólico programado en lenguaje Matlab®.

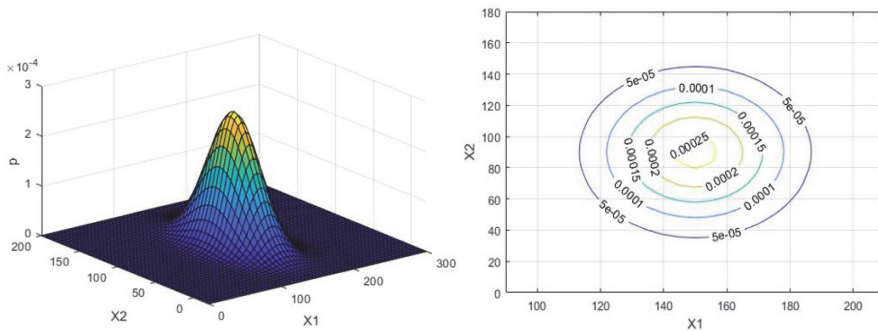


Fig. 12. Caso de campana de Gauss bivariada con variables independientes (no correlacionadas) utilizado en este apartado

En la figura 13 se muestra gráficamente el efecto de la linealización de la función de fallo alrededor del punto de diseño. Se aprecia claramente que al linealizar la función de fallo en el punto de diseño ( $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ) cometemos un error en el cálculo del volumen de la campana gaussiana en la región de fallo. Por esta razón se dice que los métodos Nivel II sólo permiten obtener una aproximación de la probabilidad de fallo. Sólo obtendríamos un valor exacto de la probabilidad de fallo cuando la función de fallo Z es lineal en las variables.

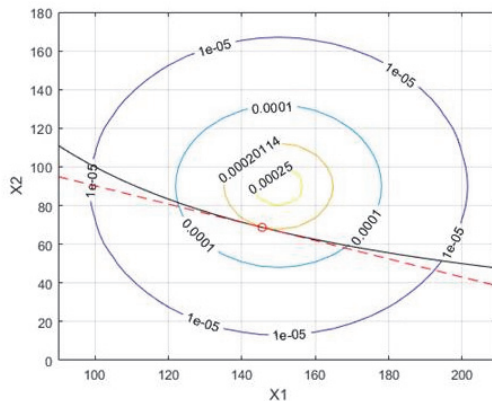


Fig. 13. Cálculo en Nivel II con dos variables independientes y función de fallo no lineal Z. Obsérvese la aproximación lineal de la función de fallo en el punto de diseño (línea a trazos roja) frente a la función de fallo real (línea continua negra)

## 5. Caso de cálculo en Nivel III. Simulaciones de Montecarlo

En este apartado vamos a resolver el mismo ejercicio del apartado 4, pero empleando en este caso los métodos de Nivel III mediante simulaciones de Montecarlo.

$$Z = 3,325 \cdot X_1 - X_2$$

$$X_1 \rightarrow N[1,97; 0,125]$$

$$X_2 \rightarrow N[5,00; 1,20]$$

Conocida la función de fallo  $Z$  (en nuestro ejemplo bivariada) y como se distribuyen las variables  $X_1$  y  $X_2$  (funciones marginales normales), debemos generar  $N$  pares de números aleatorios entre 0 y 1. Cada número aleatorio entre 0 y 1 se asocia con una probabilidad de ocurrencia de la variable, por lo que puede generarse un valor de la variable aleatoria a través de su función de distribución.

Cada par de números aleatorios, por tanto, genera un par de valores de las variables que son introducidos en la función de fallo, obteniendo en cada prueba un valor de  $Z$ :

- Si  $Z \geq 0$  no se produce fallo
- Si  $Z < 0$  se produce el fallo

Pues bien, tras realizar  $N$  simulaciones o pruebas, la probabilidad de fallo se obtiene como el cociente del número de fallos obtenidos ( $n_{fallos}$ ) y el número total de pruebas realizadas ( $N$ ).

$$P_f = \frac{n_{fallos}}{N}$$

Es evidente que la precisión en la obtención del valor de  $P_f$  dependerá del número de simulaciones o pruebas realizadas. De hecho cuando  $N \rightarrow \infty$  el valor de la probabilidad de fallo obtenida mediante la simulación de Montecarlo tiende a su valor exacto.

A continuación se representan gráficamente 4 simulaciones de Montecarlo con distintos valores de  $N$  (número de simulaciones):  $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ . Obsérvese como el valor de  $P_f$  tiende al valor obtenido en Nivel II de 0,111. Hay que recordar que al tratarse de una función de fallo lineal, con el método de Nivel II empleado en el apartado 4 se obtiene el valor exacto de la probabilidad de fallo.

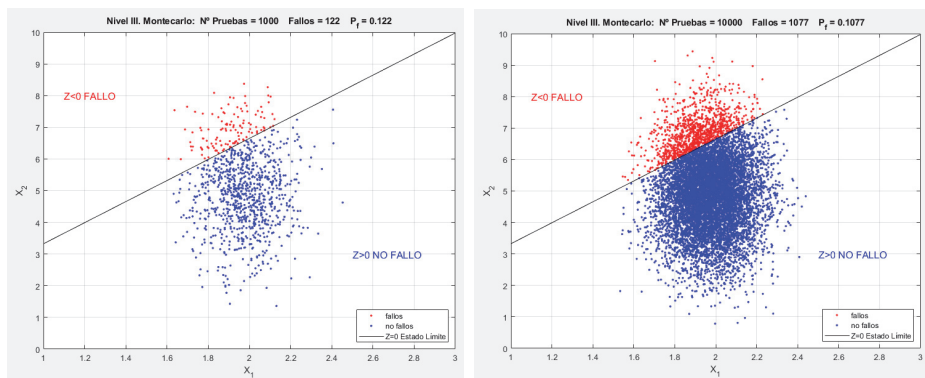


Fig. 14. Cálculo en Nivel III. Simulaciones de Montecarlo para el caso de 1000 (izquierda) y 10.000 (derecha) pruebas con dos variables independientes y función de fallo lineal  $Z$ . Obsérvese en rojo la región de fallo

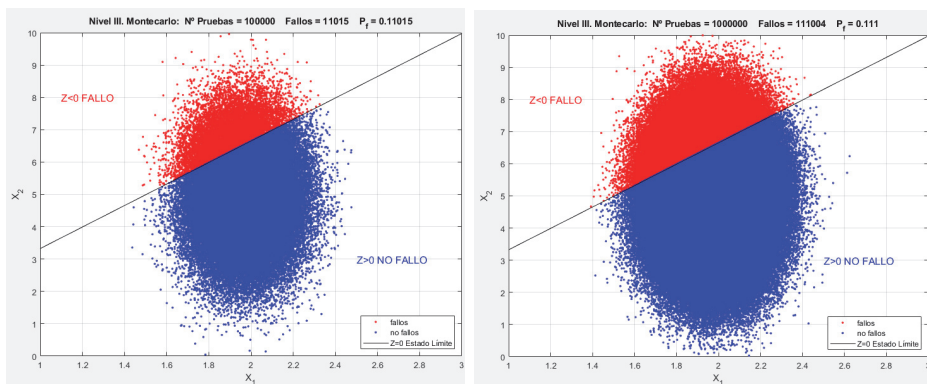


Fig. 15. Cálculo en Nivel III. Simulaciones de Montecarlo para el caso de 100.000 (izquierda) y 1.000.000 (derecha) pruebas con dos variables independientes y función de fallo lineal Z. Obsérvese en rojo la región de fallo

Como era de esperar, el valor de  $P_f$  para el caso de  $N = 10^6$  simulaciones coincide con el obtenido en Nivel II.

$$P_f = \frac{n_{fallos}}{N} = \frac{111004}{10^6} \approx 0,111$$

Es importante aquí reseñar que con una simulación de Montecarlo se obtiene el valor exacto de la probabilidad de fallo, pero no podemos obtener las coordenadas del punto de diseño  $(x_1^*, x_2^*)$ . Este punto es esencial para la obtención de los valores de los coeficientes de seguridad parcial empleados en cálculos de Nivel I.

## 6. Conclusiones

Ojalá, esta resumida y poco rigurosa ponencia (desde un punto de vista puramente matemático) sirva de motivación al sector de la Ingeniería Civil para vencer la barrera psicológica y formativa en la aplicación fáctica de los métodos probabilísticos en el diseño, no sólo en el campo de la Ingeniería Marítima, y contribuir a revertir un poco la situación de rechazo a un cambio de mentalidad que es necesario.

La aplicación de estos métodos no es sencilla, por lo que una aproximación al problema basada en su interpretación gráfica del problema bivariado puede ser una buena opción para acercarnos al problema. El presente artículo no pretende trivializar un problema complejo de por sí.

Los ejercicios prácticos presentados muestran una aplicación directa de los métodos probabilísticos a un caso práctico, pero no debe olvidarse que estos cálculos son inútiles si el conocimiento preciso de cómo se distribuyen estadísticamente las variables aleatorias involucradas. Este es precisamente uno de los escollos en la aplicación efectiva de estos métodos.

No se han trado intencionadamente los problemas con variables aleatorias correlacionadas y la aplicación de transformaciones (Rosenblatt) en el caso de variables aleatorias con distribución conjunta conocida. Para ello el lector debe profundizar en la bibliografía técnica específica. Este artículo puede ser una buena forma de introducirse a estos métodos de una forma más productiva.

Una de las conclusiones importantes a tener en cuenta ha sido la demostración gráfica de la aproximación del valor de la probabilidad de fallo. en el caso de la aplicación del cálculo en Nivel II. El nivel II sólo nos da un valor aproximado de la probabilidad de fallo, mientras que los métodos de Nivel III son capaces de darnos un valor tan aproximado al real como queramos, dependiendo del número de pruebas realizadas. Obtendríamos un valor exacto en el límite, cuando el número de pruebas tiende a infinito.

Debemos comenzar con paso firme y consciente a abandonar el cómodo espacio de confort de los métodos de Nivel I. Para ello es inevitable el esfuerzo personal y el estudio, pues pese a quien pese, a Dios sí le gusta jugar a los dados...

## Referencias

- BENJAMIN, J.R., CORNELL, C.A. (2014). *Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers*. Mineola, New York: Dover Publications, INC.
- BURCHARTH, H.F. (1997). *Reliability-Based Design of Coastal Structures*. Aalborg University (Denmark).
- CASTILLO, E., MÍNGUEZ, R. “Curso de Máster y Doctorado. Métodos Matemático-Informáticos de Optimización para la Ingeniería” (2008). Universidad de Castilla-La Mancha. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- CHAMORRO, G., CABRERA, P. & MUÑOZ-PÉREZ, J.J (2016). “A return to the” Rules of Thumb” in Maritime Engineering for digital native students”.
- CHAMORRO, G., GALÁN, J. M., NEGRO, V., MUÑOZ-PÉREZ, J. J., CABRERA, P., & CONTRERAS, A. (2018). “Reflexiones sobre el empleo de modelos numéricos “user friendly” en la práctica profesional de la ingeniería marítima”.
- EHE (2008). “Instrucción del Hormigón estructural”. Serie Normativas del Ministerio de Fomento. Gobierno de España.
- EUROCÓDIGO 0 (2010). “Bases de Cálculo de Estructuras”. UNE-EN 1990:2003/A 1:2010
- GODA, Y. (2010). *Random Seas and Design of Maritime Structures. 3<sup>rd</sup> Edition*. Advanced Series on Ocean Engineering- Vol. 33. World Scientific.
- KÖHLER, J. (2018). “Aspect of Structural Safety. Lecture Notes”. NTNU (Noruega).
- KOTTEGODA N.T, ROSSO R. (1997). *Statistics, Probability, and Reliability for Civil and Environmental Engineers*. McGraw Hill.
- MUÑOZ-PÉREZ, J.J., CABALLERO, I., TEJEDOR, B. & GÓMEZ-PINA, G. (2010). “Reversal in longshore sediment transport without variations in wave power direction”. *Journal of Coastal Research*, 780-786.
- NEGRO, V., VARELA O. (2008). *Diseño de Diques Rompeolas. 2ª Edición*. Colección Señor Nº 28. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- PUERTOS DEL ESTADO (2001). ROM 0.0. “Procedimiento General y Bases de Cálculo en el Proyecto de Obras Marítimas y Portuarias”. Puertos del Estado.
- SANCHIDRIAN, C. (2018). “Notas de Clase sobre Métodos Probabilísticos de Verificación Establecidos en el Programa ROM”. Curso de Especialización Práctica de Ingeniería Marítima. Colegio de Ingenieros de Caminos, C. y P. de Andalucía.
- STRAUB, D. (2015). “Lecture Notes in Engineering Risk Analysis”. TU München (Alemania).
- UNE-EN 1990:2003. *Eurocódigo 0: Bases de Proyecto*. Comisión Europea de normalización CEN, Bruselas, 2003.
- VAN DER MEER, J.W. (1995). *Conceptual Design of Rubble Mound Breakwaters*.