Artigos

Impacto sobre a renda per capita de longo prazo dos sistemas previdenciários de repartição*

Samuel de Abreu Pessôa§

RESUMO

Neste artigo é desenvolvido um modelo de gerações sobrepostas em tempo contínuo. A vida dos indivíduos transcorre em duas etapas. A primeira delas vai do nascimento até a idade da aposentadoria. Nessa etapa, os indivíduos ofertam trabalho inelasticamente, consomem e acumulam ativos. A segunda etapa inicia-se com a aposentadoria e os indivíduos deparam com uma probabilidade de morte positiva. Nessa etapa, a renda dos indivíduos origina-se de ativos privados e de um sistema previdenciário de repartição. Após a agregação das decisões individuais, obtém-se uma equação que determina o estoque de capital com crescimento equilibrado. O modelo é resolvido numericamente para encontrar a renda de longo prazo nos dois sistemas: repartição e fundado. O risco de morte é levado em consideração no caso em que uma seguradora paga benefícios enquanto o indivíduo está vivo e também na ausência dela. Nesse último caso, os indivíduos deixam ativos após a morte, ou seja, uma herança não intencional motivada por precaução.

Palavras-chave: previdência, ciclo de vida, poupança, seguro.

ABSTRACT

In this paper we developed an overlapping generation model in continuos time. The life span of the households has two stages. The first stage begins after birth and ends at the age of retirement. During this stage households supply work ineslasticaly, consume and accumulate assets. The second stage starts after retirement and the household faces a death probability which is positive. During this stage the income of the household comes from private assets and from a social security system which runs in a pay-as you-go basis. After aggregating the decisions of the individuals we founded an equation that determines the capital stock in the steady state. The model was solved numerically in order to find the long-run income under the system fully founded and under the pay-as-you-go system. The death risk took into consideration a case where there is an insurance company that pays annuities when the individual is alive and a case where such company is absent. In the last case the individual will leave assets after he dies as an involuntary bequest caused by precautionary behavior.

Key words: social security, life cicle, saving, insurance.

---

* Agradeço os comentários de Luís Eduardo Afonso, Paulo Barelli, Flávio Barreto, Ciro Biderman, Fernando Blumenschein, Renato Cardoso, Pedro Ferreira, Marcos Lisboa, Afonso Franco, Luiz Oliveira e participantes do primeiro Encontro Brasiliense de Economia, e especialmente os comentários de um parecerista anônimo.

§ Professor do Departamento de Economia da FEA-USP. e-mail: spessoa@usp.br

Recebido em outubro de 1997. Aceito em outubro de 1998.

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é construir um modelo de acumulação de capital, com gerações sobrepostas em tempo contínuo, que possibilite responder à seguinte pergunta: qual é o ganho de renda de uma economia no longo prazo quando ela altera o sistema de aposentadoria de um sistema de repartição simples para um sistema fundado? A preocupação é quantitativa, por isto optou-se por uma estrutura flexível para posterior simulação e análise de sensibilidade com relação aos parâmetros.

A estratégia para enfrentar este problema é imaginar duas economias que são idênticas em todos os aspectos - preferências, tecnologias e dotações iniciais -. tendo como única diferença a forma como o sistema de previdência social é instituído. Este não é um trabalho de economia institucional porque não se pergunta como esta instituição foi criada, ou qual o motivo para duas economias que são idênticas desenvolverem diferentes arranjos institucionais. O objetivo é mais singelo: construir uma estrutura analítica para determinar o impacto de uma instituição sobre a renda.

Tendo esclarecido o objetivo deste trabalho, é oportuno deixar bem claro quais são os pontos que não serão aqui abordados. Não há preocupações com o problema fiscal: supõe-se que o gestor da previdência social calibre o valor da alíquota de imposto de modo que haja receita suficiente para que as contas públicas estejam equilibradas. Efetivamente, o modelo que será desenvolvido neste trabalho permite o cálculo da pressão fiscal da previdência de repartição simples, isto é, a determinação do valor da alíquota do imposto de renda que equilibra as contas públicas.

O sistema da previdência social tem duas atribuições: aposentadoria e segurança social. Muitas vezes estas duas funções aparecem em um mesmo instrumento. Por exemplo, uma parte do benefício da previdência pode ser visto como a contrapartida das contribuições que o indivíduo fez quando era ativo. Outra parcela é uma transferência entre indivíduos. A primeira atribui-se à aposentadoria, ou seja, um processo que, do ponto de vista individual, constitui-se em uma transferência de renda ao longo do tempo. A segunda é uma redistribuição que, ao menos em tese, deve ocorrer dos indivíduos de maior renda para os de menor renda. Como este projeto tem preocupações macroeconômicas, questões distributivas não serão abordadas. Desta forma, limita-se ao aspecto de transferência intertemporal da previdência.

Uma outra questão que tem sido muito debatida é se a aposentadoria deve ser pública ou privada. Do ponto de vista desta investigação, é totalmente imaterial quem é o gestor do sistema previdenciário: se uma agência estatal ou uma empresa privada. Se a eficiência administrativa de ambas for equivalente, o resultado será igual. Se os incentivos subjacentes ao sistema forem os mesmos, ele funcionará igualmente bem com administração pública ou privada. Dito de outra forma, pode-se imaginar uma previdência fundada gerida pelo setor público - os depósitos dos poupadores podem ser efetuados em um banco público, e esta instituição promove a intermediação entre a poupança e o investimento -, como também é possível conceber uma previdência de repartição administrada pelo setor privado - uma empresa privada pode adquirir uma concessão pública para coletar impostos e distribuir os benefícios aos que a eles têm direito. Neste trabalho supõe-se que a administração do sistema previdenciário será eficiente, não se definindo a natureza da agência que administra o sistema.

Também há uma desconfiança de que a poupança adicional gerada pelo sistema fundado não produza a elevação do investimento produtivo, mas fique perdida na esfera especulativa, proporcionando ganhos expressivos a especuladores, em detrimento da atividade produtiva. Em nosso modelo a economia trabalha sempre a pleno emprego, de tal maneira que toda poupança gerada automaticamente transforma-se em investimento produtivo.

Finalmente, resta uma questão de extrema importância: mesmo que o sistema fundado aumente a renda no longo prazo da economia, há um custo de transição que recai sobre a geração que está aposentada no momento em que a transição é feita. Será fruto de trabalho futuro a mensuração deste custo e a determinação de maneiras alternativas de financiamento da transição, de tal sorte que o peso do ajustamento não recaia totalmente sobre uma única geração. Esta etapa da pesquisa só faz sentido se os ganhos de renda obtidos com a alteração do sistema forem significativos, que é o objeto deste trabalho.

2 Descrição informal do modelo

A grande dificuldade de construir um modelo de ciclo de vida é modelar o processo de envelhecimento. O mais realista é trabalhar com uma desutilidade do trabalho que cresça com a idade do indivíduo. A partir de certo ponto a desutilidade marginal torna-se suficientemente elevada e o indivíduo aposenta-se. Optou-se no presente trabalho em tornar este processo descontínuo, produzindo grande simplificação formal. Do ponto de vista da oferta de trabalho, o indivíduo passa por duas etapas em sua vida. Na primeira, a desutilidade do trabalho é nula e, portanto, o indivíduo oferta inelasticamente sua força de trabalho no mercado. Na segunda etapa, a desutilidade torna-se infinita: o indivíduo retira-se do mercado de trabalho. Este momento é conhecido e igual para todos os indivíduos.

O envelhecimento tem também impacto sobre o horizonte de vida. Ao envelhecer, a probabilidade de morte eleva-se. Quando jovem, a probabilidade de morte é nula; o período aposentado divide-se em dois: velho e idoso. Neste último a probabilidade de morte é maior.

A vida ativa divide-se em dois períodos: no primeiro a renda do trabalho cresce e no segundo decresce. Este comportamento da renda do trabalho ao longo da vida está em consonância com os estudos de economia do trabalho.

Nesta economia há incerteza quanto à data da morte. Conseqüentemente, os indivíduos nunca consomem todo o seu capital. Por motivo precaução, os indivíduos morrem deixando uma riqueza. A riqueza total dos mortos em um instante é transferida em partes iguais aos indivíduos que nascem no mesmo momento da morte dos outros. Esta é uma maneira simples de incorporar herança não intencional por motivo precaução em um modelo em que não há famílias. Uma forma alternativa de tratar a incerteza quanto à data da morte é supor que há uma companhia seguradora. Esta paga ao indivíduo pelo direito de utilizar sua riqueza à taxa de juros de mercado e um benefício igual à probabilidade de morte. Quando o indivíduo morre, sua riqueza fica com a seguradora.[1] Ambas as possibilidades são investigadas no presente estudo.

Ao se aposentar, o indivíduo carrega para o outro período um estoque de ativos. Estes constituem a poupança que o indivíduo faz no sistema de capitalização. Pode haver um sistema de previdência por repartição. Neste, impostos sobre a renda do trabalho e/ou do capital financiam um benefício aos aposentados. Nota-se que a existência de uma previdência de repartição simples não elimina o sistema de capitalização. Em geral, o indivíduo poupa privadamente para sua aposentadoria. No entanto, há uma relação entre as duas decisões: a garantia de renda futura deprime o desejo de poupar.

A seção 3 deste trabalho estuda as variáveis demográficas desta economia. Determina-se a evolução ao longo do tempo da população total, da população ativa, da população aposentada e da razão de dependência do sistema de repartição.

1 Ver Blanchard (1985) e seção 8 deste trabalho.

A seção 4 investiga a escolha individual. Para cada etapa de sua vida o indivíduo encontra a evolução ótima do consumo, isto é, o perfil do consumo. O nível do consumo dependerá da dotação inicial e da riqueza que o indivíduo transfere para a velhice e para a última etapa da vida (idoso). Substituindo-se a trajetória do consumo, fruto da integração da equação de Euler, na função objetivo, segue uma função utilidade indireta que depende da riqueza que o indivíduo decide transferir para a etapa subseqüente de sua vida. A riqueza ótima que o indivíduo transfere é obtida por meio da maximização desta função utilidade indireta.

Após encontrar a trajetória do consumo individual, determina-se o consumo agregado, obtido a partir da agregação do consumo individual, e que é o objeto da seção 5. É possível encontrar-se uma expressão para o consumo agregado médio de estado estacionário. Este depende, entre outros fatores, da riqueza total individual de estado estacionário. Esta, por sua vez, depende da dotação inicial de estado estacionário que os indivíduos, quando nascem, recebem daqueles que estão morrendo. A seção 6 calcula esta dotação de estado estacionário e determina a demanda de consumo.

A seção 7 encontra a solução de equilíbrio geral do modelo em estado estacionário. A taxa de juros de estado estacionário é aquela que equilibra a demanda de bens de consumo, encontrada na seção anterior, com a disponibilidade de recursos em estado estacionário - toda a produção descontando-se a depreciação. Nessa seção também se encontra a equação que descreve a restrição orçamentária do governo. A consolidação de todo o cuidadoso processo de agregação são duas equações em estado estacionário equilíbrio no mercado de bens e restrição orçamentária do governo - que são solucionadas simultaneamente para duas incógnitas: a taxa de juros e a alíquota de imposto de estado estacionário que equilibra as contas públicas.

A seção 8 refaz todo o caminho percorrido nas seções 3 a 7, agora na presença de seguro quanto à incerteza da data da morte, uma vez que ao morrer a riqueza do indivíduo fica com a seguradora. Dado que não há dotação inicial, o modelo simplifica-se enormemente.

Este modelo é síntese de dois trabalhos. Cass e Yaari (1967) apresentam um modelo de gerações sobrepostas em tempo contínuo em que os indivíduos conhecem a data da morte. Blanchard (1985) desenvolve o seu modelo de juventude perpétua. Supõe que as pessoas ao nascer se defrontam com uma probabilidade de morte constante; tudo se passa como se as pessoas fossem eternamente jovens, seguindo, portanto, o nome do modelo. No modelo aqui exposto ao longo do primeiro período de vida os indivíduos vivem numa economia de Cass e Yaari e ao longo do segundo período de vida numa economia de Blanchard.

Com relação aos trabalhos que têm sido publicados, o modelo aqui apresentado tem duas inovações: a utilização de tempo contínuo permite uma maior flexibilidade na construção do modelo, bem como facilita o estudo da sensibilidade do resultado a alterações dos valores dos parâmetros. Por outro lado, o presente trabalho inova ao levar em consideração a incerteza quanto à data de morte. Trabalhos anteriores que não levam em consideração esta incerteza, dado que não há poupança por motivo precaução, produzem valores de taxa de juros de estado estacionário muito elevados. Este fato, além de ser contrafactual, faz com que a taxa de capitalização do fundo de pensão seja elevada, enviesando o resultado a favor deste sistema. Ver, por exemplo, Barreto e Oliveira (1995), o fascículo da *Revista de Análises Económico* (1994) dedicado à previdência social, Arrau (1990) e as referências citadas nestes trabalhos. Por outro lado, Fabel (1994) não tem preocupações quantitativas, e estranhamente faz uma análise de equilíbrio parcial, não considerando o impacto da previdência social sobre a taxa de juros da economia. Ao longo de todo o seu livro supõe que a taxa de juros de longo prazo é igual à taxa de preferência intertemporal, hipótese que só faz sentido num contexto de horizonte infinito.

3 Demografia

O indivíduo que nasce no instante s, também chamado de indivíduo da geração s, passa ao longo de sua vida por quatro fases distintas. Nas duas primeiras etapas de sua vida a probabilidade de morte é nula: na primeira, o perfil de renda do trabalho é crescente e, na segunda, que termina em $T_2 + s$, é decrescente. Neste instante, o indivíduo envelhece: a probabilidade de morte passa a ser positiva e ele se retira do mercado de trabalho. Pode-se imaginar que na transição de jovem para velho a desutilidade do trabalho que era nula passa a ser infinita. Em $T_3 + s$ a probabilidade de morte torna-se mais elevada. A seguir apresenta-se a linha da vida de cada indivíduo:

$p_1 = 0$	$p_2 = 0$	$p = p_3$	$p = p_4$	
s	$T_1 + s$	$T_2 + s$	$T_3 + s$	∞

em que p_i é a probabilidade de morte no i-ésimo período de vida e $p_4 > p_3$.

A cada instante $K^{-1}e^{nt}$ indivíduos nascem. A probabilidade de morte produz um decréscimo exponencial no tamanho de cada geração. Seja $N(s,t)$ o tamanho da geração s no intante t. Segue que:

$$N(s,t) = \begin{cases} K^{-1}e^{ns}, & \text{se } s \le t \le T_2 + s \\ K^{-1}e^{ns}e^{-p_3(t-(T_2+s))}, & \text{se } T_2 + s < t \le T_3 + s \\ K^{-1}e^{ns}e^{-p_3(T_3-T_2)}e^{-p_4(t-(T_3+s))}, & \text{se } t > T_3 + s \end{cases} \tag{1}$$

A população total é:

$$N(t) = \int_{t-T_2}^{t} K^{-1}e^{ns}ds + \int_{t-T_3}^{t-T_2} K^{-1}e^{ns}e^{-p_3(t-(T_2+s))}ds$$

$$+ \int_{-\infty}^{t-T_3} K^{-1}e^{ns}e^{-p_3(T_3-T_2)}e^{-p_4(t-(T_3+s))}ds \tag{2}$$

$$= K^{-1}e^{nt}\left\{\frac{1-e^{-nT_2}}{n} + e^{-nT_2}\frac{1-e^{-(n+p_3)(T_3-T_2)}}{n+p_3} + e^{-nT_2}\frac{e^{-(n+p_3)(T_3-T_2)}}{n+p_4}\right\}$$

Definindo-se a constante K, segue que:

$$K \equiv K_1 + K_2 + K_3 \tag{3}$$

em que:

$$K_1 \equiv \frac{1-e^{-nT_2}}{n}, \tag{4}$$

$$K_2 \equiv e^{-nT_2}\frac{1-e^{-(n+p_3)(T_3-T_2)}}{n+p_3}, \tag{5}$$

$$K_3 \equiv \frac{e^{-(n+p_3)(T_3-T_2)}}{n+p_4}e^{-nT_2} \tag{6}$$

Definindo-se

$L_1\,(t)$ - como a população economicamente ativa;

$L_2\,(t)$ - como a população aposentada;

RD – como a razão de dependência da previdência,

Segue que:

$$N(t) = e^{nt}, \tag{7}$$

$$L_1(t) = \frac{K_1}{K} e^{nt}, \tag{8}$$

$$L_2(t) = \frac{K_2 + K_3}{K} e^{nt}, \tag{9}$$

$$RD = \frac{K_2 + K_3}{K_1}. \tag{10}$$

As expressões (7) - (10) sumariam a demografia desta economia.

4 Escolha individual

4.1 Vida ativa

O consumidor escolhe o perfil do consumo de modo a maximizar o valor presente da utilidade instantânea do consumo sujeito à restrição orçamentária. Isto é,

$$max \int_{s}^{T_2+s} e^{-\rho(t-s)} \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}} dt, \tag{11}$$

$$\text{sujeito a } \frac{dv(s,t)}{dt} = m(t)v(s,t) + y(s,t) - c(s,t), \tag{12}$$

$$v(s,s) = v_0(s) \ e \ v(s,T_2+s) = E_1. \tag{13}$$

em que:

$c(s,t)$ - consumo em t de um indivíduo nascido em s;

$y(s,t)$ - renda líquida do trabalho em t de um indivíduo nascido em s;

$m(t)$ - renda líquida do capital;

$v(s,t)$ - riqueza em t de um indivíduo nascido em s;

$v_0(s)$ - dotação inicial de um indivíduo nascido em s;

E_1 - riqueza que o indivíduo transfere para a aposentadoria;

ρ - taxa de preferência intertemporal;

σ - elasticidade de substituição intertemporal no consumo.

A solução para este problema padrão de otimização intertemporal é a seguinte:

$$c(s,t) = c(s,s)e^{\sigma\int_s^t (m(t')-\rho)dt}, \tag{14}$$

$$c(s,s) = A_1^{-1}\left[v_0(s) + h(s,s) - R(s,T_2+s)E_1\right], \tag{15}$$

$$A_1 \equiv \int_s^{T_2+s} R^{1-\sigma}(s,t)e^{-\sigma\rho(t-s)}dt, \tag{16}$$

$$h(s,s) \equiv \int_s^{T_2+s} R(s,t)\,y(s,t)dt, \tag{17}$$

$$R(t,t') \equiv e^{-\int_t^{t'} m(t'')dt''} \tag{18}$$

A taxa de crescimento do consumo (ver (14)) é dada pela diferença da remuneração do capital sobre a taxa de preferência intertemporal multiplicada pela elasticidade de substituição. O consumo inicial é a propensão marginal a consumir (ver (16)) multiplicada pela riqueza que o indivíduo despenderá neste período de escolha (ver (15)). Esta última, por sua vez, é a soma da riqueza não humana inicial com a riqueza humana, deduzindo-se o que o indivíduo deseja deixar para o período posterior da vida, evidentemente em valor presente.

Para uso posterior retém-se a expressão da riqueza em t do indivíduo que nasceu em s:

$$R(s,t)v(s,t) = v_0(s) + \int_s^t R(s,t')y(s,t')dt' - c(s,s)\int_s^t R^{1-\sigma}(s,t')e^{-\sigma\rho(t'-s)}dt' \tag{19}$$

A riqueza que o indivíduo tem em t avaliada em s é a soma da riqueza não humana inicial com a riqueza humana até o instante t deduzindo-se o valor presente descontado do consumo até este instante.

4.2 Vida inativa - primeiro subperíodo

A probabilidade de morte é positiva. Nesta situação o indivíduo maximiza o valor esperado das atividades futuras do consumo. Segue que:[2]

$$max\int_{T_2+s}^{T_3+s} e^{-(\rho+p_3)(t-(T_2+s))} \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}}dt, \tag{20}$$

$$\text{sujeito a } \frac{dv(s,t)}{dt} = m(t)v(s,t) + x(s,t) - c(s,t), \tag{21}$$

$$v(s,T_2+s) = E_1 \ e \ v(s,T_3+s) = E_2. \tag{22}$$

em que:

$x(s,t)$ - benefício da previdência de repartição em t para o indivíduo nascido em s;

E_2 - riqueza que o indivíduo transfere para o próximo período de vida.

2 O indivíduo maximiza

$$E_s\left[\int_{T_2+s}^{\infty} e^{-\rho(t-(T_2+s))}u(c(s,t))dt\right] = \int_{T_2+s}^{\infty} e^{-\rho(t-(T_2+s))}p(s,t)u(c(s,t))dt,$$

em que $p(s,t) = e^{-p(t-T_2+s))}$ é a probabilidade de um indivíduo da geração s estar vivo em t. Ver Yaari (1965).

Repetindo-se os passos, segue que:

$$c(s,t) = c(s,T_2 + s)e^{\sigma\int_{T_2+s}^{t}(m(t')-\rho-p_3)dt'}, \tag{23}$$

$$c(s,T_2 + s) = A_2^{-1}\left[E_1 + g_1(s) - R(T_2 + s, T_3 + s)E_2\right], \tag{24}$$

$$A_2 \equiv \int_{T_2+s}^{T_3+s} R^{1-\sigma}(T_2 + s, t)e^{-\sigma(\rho+p_3)(t-(T_2+s))}dt, \tag{25}$$

$$g_1(s) \equiv \int_{T_2+s}^{T_3+s} R(T_2 + s, t)x(s,t)dt. \tag{26}$$

Nota-se a semelhança com a solução para o período anterior. Comparando-se (23) - (26) com, respectivamente, (14) - (17), verifica-se.que as interpretações são análogas. Observa-se que há redução na inclinação da trajetória do consumo produzida pela probabilidade de morte. Na expressão da riqueza total que o indivíduo despenderá neste período aparece o valor presente descontado das transferências futuras do sistema previdenciário (ver (24) e (26)).

Para uso posterior, vale lembrar que:

$$\begin{aligned} R(T_2 + s, t)v(s,t) = E_1 &+ \int_{T_2+s}^{t} R(T_2 + s, t')x(s,t')dt' \\ &- c(s, T_2 + s)\int_{T_2+s}^{t} R^{1-\sigma}(T_2 + s, t')e^{-\sigma(\rho+p_3)(t'-(T_2+s))}dt' \end{aligned} \tag{27}$$

Expressão que é equivalente à equação (19).

4.3 Vida inativa - segundo subperíodo

Para este período o indivíduo soluciona:

$$max\int_{T_3+s}^{\infty} e^{-(\rho+p_4)(t-(T_3+s))}\frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}}dt, \tag{28}$$

$$\text{sujeito a } \frac{dv(s,t)}{dt} = m(t)v(s,t) + x(s,t) - c(s,t), \tag{29}$$

$$v(s, T_3 + s) = E_2. \tag{30}$$

Analogamente, segue que:

$$c(s,t) = c(s, T_3 + s)e^{\sigma\int_{T_3+s}^{t}(m(t')-\rho+p_4)dt'}, \tag{31}$$

$$c(s, T_3 + s) = A_3^{-1}(E_2 + g_2(s)), \tag{32}$$

$$A_3 \equiv \int_{T_3+s}^{\infty} R^{1-\sigma}(T_3 + s, t)e^{-\sigma(\rho+p_4)(t-(T_3+s))}dt, \tag{33}$$

$$g_2(s) \equiv \int_{T_3+s}^{\infty} R(T_3 + s, t)x(s,t)dt. \tag{34}$$

As expressões (31) - (34) são respectivamente análogas a (23)   (26).

Para uso posterior, lembrar que:

$$\begin{aligned} R(T_3 + s, t)v(s,t) = E_2 &+ \int_{T_3+s}^{t} R(T_3 + s, t')x(s,t')dt' \\ &- c(s, T_3 + s)\int_{T_3+s}^{t} R^{1-\sigma}(T_3 + s, t')e^{-\sigma(\rho+p_4)(t'-(T_3+s))}dt' \end{aligned} \tag{35}$$

4.4 Escolha de E_1 e E_2

A trajetória do consumo obtida a partir da integração da equação de Euler

$$\frac{1}{c(s,t)}\frac{\mathrm{d}\, c(s,t)}{\mathrm{d}\, t} = \sigma(m(t) - \rho - p_i)$$

depende do consumo inicial. Em outras palavras, a equação de Euler gera o perfil do consumo. O nível do consumo depende da riqueza do indivíduo (ver (15), (24) e (32)). Esta, por sua vez, além de depender da renda do capital, do trabalho e das transferências da previdência, depende da transferência de riqueza de um período para outro, as quais o indivíduo escolhe.

Para encontrar o valor de E_1 e E_2 escolhido pelo indivíduo, substitui-se a trajetória do consumo na utilidade do indivíduo, obtendo-se uma utilidade indireta. Substituindo-se (14), (23) e (31) em:

$$U_s = \int_s^{T_2+s} e^{-\rho(t-s)} \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}} dt + e^{-\rho T_2} \int_{T_2+s}^{T_3+s} e^{-(\rho+p_3)(t-(T_2+s))} \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}} dt$$

$$+ e^{-\rho T_3} e^{-p_3(T_3-T_2)} \int_{T_3+s}^{\infty} e^{-(\rho+p_4)(t-(T_3+s))} \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,t)}{1-\frac{1}{\sigma}} dt$$

segue:

$$V_s = A_1 \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,s)}{1-\frac{1}{\sigma}} + e^{-\rho T_2} A_2 \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,T_2+s)}{1-\frac{1}{\sigma}} + e^{\rho T_3} e^{-p_3(T_3-T_2)} A_3 \frac{c^{1-\frac{1}{\sigma}}(s,T_3+s)}{1-\frac{1}{\sigma}} \tag{36}$$

Derivando-se (36) contra E_1 e E_2 e igualando-se a zero, lembrando-se de (15), (24) e (32), após efetuar alguns cálculos obtém-se:

$$R(s,T_2+s)E_1 = \frac{\tilde{T}_2+\tilde{T}_3}{\tilde{\tilde{T}}} w(s,s) - R(s,T_2+s)g(s), \tag{37}$$

$$R(s,T_3+s)E_2 = \frac{\tilde{T}_3}{\tilde{\tilde{T}}} w(s,s) - R(s,T_3+s)g_2(s), \tag{38}$$

em que:

$$w(s, s) \equiv v_0(s) + h(s, s) + R(s, T_2 + s)g(s), \tag{39}$$

$$g(s) \equiv g_1(s) + R(T_2 + s, T_3 + s)g_2(s), \tag{40}$$

$$\widetilde{T} \equiv \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_3, \tag{41}$$

$$\widetilde{T}_1 \equiv A_1, \tag{42}$$

$$\widetilde{T}_2 \equiv e^{-\rho\sigma T_2} R^{1-\sigma}(s, T_2 + s)A_2, \tag{43}$$

$$\widetilde{T}_3 \equiv e^{-\sigma p_3(T_3 - T_2)} e^{-\rho\sigma T_3} R^{1-\sigma}(s, T_3 + s)A_3. \tag{44}$$

A riqueza total de um indivíduo ao nascer (ver (39)) é a soma de três parcelas: a riqueza não humana inicial, a riqueza humana e as transferências futuras da previdência. Esta última, por sua vez, é a soma de dois termos (ver (40)): as transferências no primeiro subperíodo da vida inativa e as transferências no segundo subperíodo.

A interpretação de (37) e (38) é bastante simples. Do ponto de vista das preferências, a vida do indivíduo transcorre em três períodos distintos, consoante o valor da probabilidade de morte em cada período. O indivíduo ao nascer depara com a riqueza $w(s,s)$. Ele divide a riqueza total ao nascer em três parcelas de valor $\frac{\widetilde{T}_i}{\widetilde{T}}$ despendendo cada parcela em um período. Ao decidir quanto transferir para sua aposentadoria privada, o indivíduo deduz, da quantia que deseja despender após retirar-se do mercado de trabalho, o valor das transferências futuras da previdência de repartição (ver (37)). Segue interpretação análoga para (38).

4.5 Trajetória do consumo

Substituindo-se (37) e (38) em (15), (24) e (32), segue a trajetória do consumo em cada período:

$$c(s,t) = \begin{cases} \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma \int_s^t (m(t')-\rho)dt'}, & \text{se } s \le t \le T_2 + s, \\[2ex] \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma \int_s^{T_2+s} (m(t')-\rho)dt'} e^{\sigma \int_{T_2+s}^{t} (m(t')-\rho-p_3)dt'}, & \text{se } T_2 + s < t \le T_3 + s, \\[2ex] \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma \int_s^{T_2+s} (m(t')-\rho)dt'} e^{\sigma \int_{T_2+s}^{T_3+s} (m(t')-\rho-p_3)dt'} e^{\sigma \int_{T_3+s}^{t} (m(t')-\rho-p_4)dt'}, & \text{se } t > T_3 + s. \end{cases} \tag{45}$$

No estado estacionário a remuneração do capital é constante. Segue que:

$$c(s,t) = \begin{cases} \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma(m^* -\rho)(t-s)}, & \text{se } s \le t \le T_2 + s, \\[2ex] \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma(m -\rho)T_2} e^{\sigma(m^* -\rho-p_3)(t-(T_2+s))}, & \text{se } T_2 + s < t \le T_3 + s, \\[2ex] \dfrac{w(s,s)}{\widetilde{T}} e^{\sigma(m^* -\rho)T_2} e^{\sigma(m^* -\rho-p_3)(T_3-T_2)} e^{\sigma(m^* -\rho-p_4)(t-(T_3+s))}, & \text{se } t > T_3 + s, \end{cases}$$

em que m^* é a taxa de juros de estado estacionário, o que é ilustrado pela Figura 1.

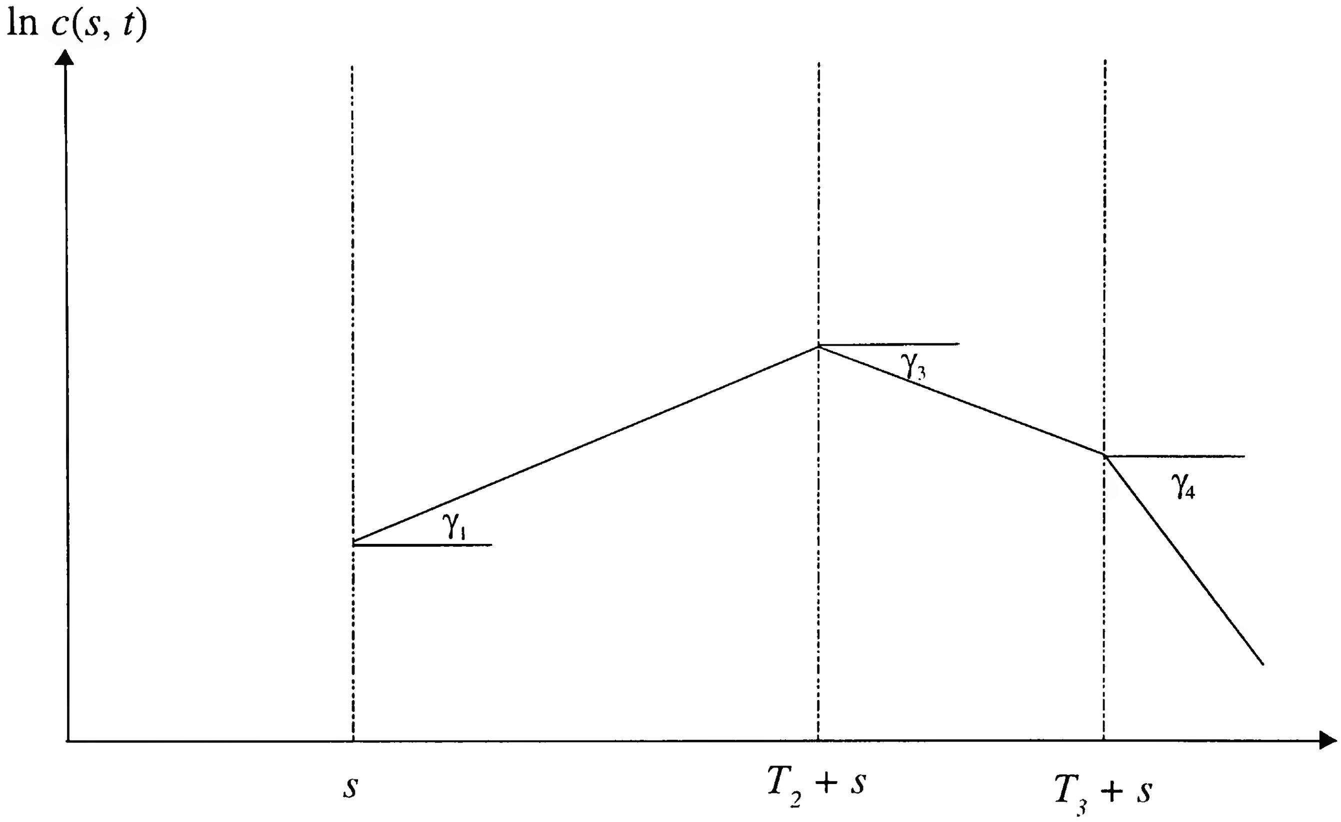
No estado estacionário, segue que:

$$\widetilde{T}_1 = \frac{1 - e^{-(m^* -\sigma(m^* -\rho))T_2}}{m - \sigma(m - \rho)}, \tag{46}$$

$$\widetilde{T}_2 = e^{-(m -\sigma(m^* -\rho))T_2} \frac{1 - e^{-(m -\sigma(m^* -(\rho+p_3)))(T_3-T_2)}}{m^* - \sigma(m - (\rho + p_3))}, \tag{47}$$

$$\widetilde{T}_3 = e^{-(m -\sigma(m -\rho))T_2} \frac{e^{-(m^* -\sigma(m^* -(\rho+p_3)))(T_3-T_2)}}{m - \sigma(m - (\rho + p_4))} \tag{48}$$

Figura 1



Na Figura 1, $\gamma_i \equiv \sigma(m \quad - \rho - p_i)$

Um caso particular de interesse ocorre quando $\sigma = 1$ e $\rho = 0$ Nestas condições:

$$\widetilde{T}_1 = T_2,$$

$$\widetilde{T}_2 = \frac{1 - e^{-p_3(T_3 - T_2)}}{p_3}$$

$$\widetilde{T}_3 = \frac{e^{-p_3(T_3 - T_2)}}{p_4}$$

que são, respectivamente, o tempo de vida esperado para cada etapa da vida. Lembrando-se de (37) e (38), se o indivíduo não desconta o futuro ante o presente, e se o efeito renda e riqueza se compensam, a fração da riqueza total que decide despender em cada período é a fração do tempo esperado da vida toda transcorrido em cada etapa.

4.6 Riqueza total ao nascer

O nível da trajetória do consumo depende da riqueza total do indivíduo ao nascer, que, por sua vez, é a soma de três parcelas: dotação inicial, riqueza humana e valor presente das transferências futuras da previdência de repartição. Isto é,

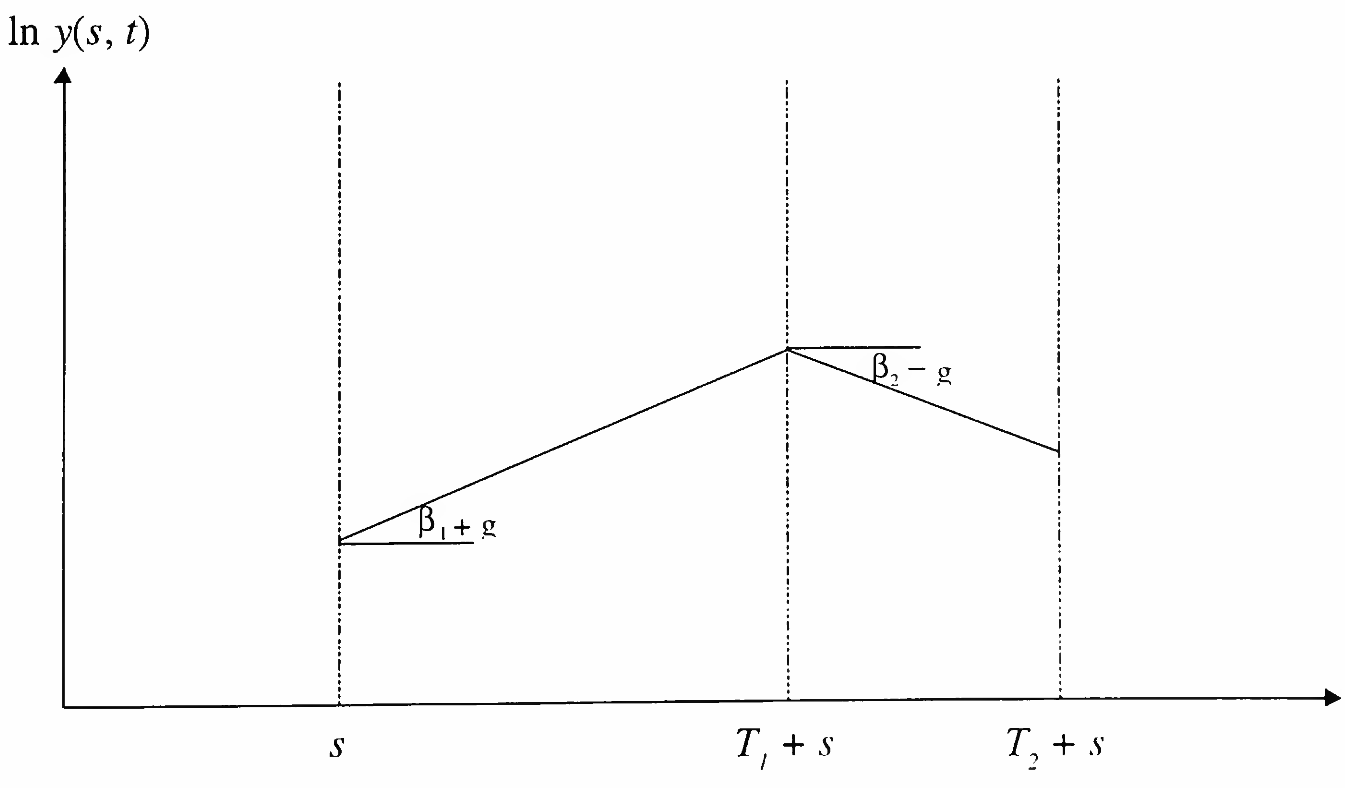
$$w(s,s) = v_0(s) + h(s,s) + R(s, T_2 + s)g(s) \tag{49}$$

Para calcular a riqueza humana é necessário saber a evolução da renda do trabalho ao longo da vida do indivíduo. Estudos de economia do trabalho mostram que a renda do trabalho ao longo da vida útil do indivíduo é crescente e a partir de uma idade passa a ser decrescente. Supõe-se que a renda do trabalho individual evolui da seguinte forma:

$$y(s,t) = \begin{cases} y_0(s)e^{(\beta_1+g)(t-s)}, & \text{se } s \le t \le T_1 + s, \\ \\ y_0(s)e^{(\beta_1+g)T_1}e^{-(\beta_2-g)(t-(T_1+s))}, & \text{se } T_1 + s < t \le T_2 + s, \end{cases} \tag{50}$$

em que $y_0(s)$ é a renda do trabalho no primeiro instante de vida do indivíduo e g é a taxa de progresso técnico exógeno. A Figura 2 ilustra a evolução do salário.

Figura 2



Calculando-se, segue que:

$$h(s,s) = y_0(s)\left[\frac{1 - e^{-(m \; -\beta_1 - g)T_1}}{m \; - \beta_1 - g} + e^{-(m \; -\beta_1 - g)T_1} \frac{1 - e^{-(m \; +\beta_2 - g)(T_2 - T_1)}}{m \; + \beta_2 - g}\right]. \tag{51}$$

Se $\beta_1 = \beta_2 = 0$, isto é, se a renda do trabalho tem um perfil constante, descontando-se o efeito do progresso técnico exógeno, segue que:

$$h(s,s) = y_0(s)\frac{1 - e^{-(m^* - g)T_2}}{m \; - g} \tag{52}$$

Para calcular o valor presente das transferências futuras da previdência de repartição supõe-se que:

$$x(s,t) = x(s, T_2 + s)e^{\Delta g(t - (T_2 + s))}, \; \Delta \in \{0,1\}. \tag{53}$$

Se $\Delta = 0$, o progresso técnico não é repassado ao benefício, se $\Delta = 1$ é repassado. Calculando-se, segue que:

$$g(s) = \frac{x(s, T_2 + s)}{m^* - \Delta g} \tag{54}$$

e

$$x(s, T_2 + s) = \theta y(s, T_2 + s). \tag{55}$$

O valor inicial do benefício é proporcional à renda do trabalho do indivíduo no instante em que se aposenta. A razão entre os dois, o parâmetro θ, é uma variável de política econômica. No estado estacionário todas as quantidades *per capita* crescem à taxa g. Portanto,

$$
\begin{aligned}
w(s,s) &= w\ e^{gs}, \\
v_0(s) &= v\ e^{gs}, \\
y_0(s) &= y\ e^{gs}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Substituindo-se (51) - (56) em (49), segue que:

$$
\begin{aligned}
w &= v + y^* \left[\frac{1 - e^{-(m' - \beta_1 - g)T_1}}{m - \beta_1 - g} + e^{-(m' - \beta_1 - g)T_1} \frac{1 - e^{-(m + \beta_2 - g)(T_2 - T_1)}}{m + \beta_2 - g} \right] \\
&+ e^{-m T_2} \theta y \frac{e^{(\beta_1 + g)T_1} e^{-(\beta_1 - g)(T_2 - T_1)}}{m - \Delta g}.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Se $\beta_1 = \beta_2 = 0$ esta expressão simplifica:

$$
w = v + y \frac{1 - e^{-(m - g)T_2}}{m - g} + e^{-m T_2} \theta y \frac{e^{g T_2}}{m - \Delta g}
\tag{58}
$$

A expressão (58) tem a interpretação usual. A riqueza total ao nascer em unidades de trabalho eficiência é composta de três termos: a dotação inicial, a riqueza humana e o valor presente das transferências futuras do sistema de repartição.

5 Agregação

5.1 Renda do trabalho

Para cada geração que compõe a população economicamente ativa a remuneração do trabalho assume um valor diferente. Devido à existência de progresso técnico exógeno, a renda inicial de cada geração cresce à taxa g. Portanto,

$$
y_0(s) = y\ e^{gs}
\tag{59}
$$

A partir de (59) e (50) pode-se calcular a renda agregada do trabalho para toda a população ativa.[3] Segue que:

$$Y(t) = K^{-1}e^{(n+g)t}y^*\left[\frac{1-e^{(\beta_1-n)T_1}}{n-\beta_1} + e^{(\beta_1-n)T_1}\frac{1-e^{-(n+\beta_2)(T_2-T_1)}}{n+\beta_2}\right]. \tag{60}$$

Na situação em que $\beta_1 = \beta_2 = 0$, segue que:

$$Y(t) = K^{-1}e^{(n+g)t}y\,\frac{1-e^{-nT_2}}{n} \tag{61}$$

5.2 Benefício total da previdência

O benefício evolui da seguinte forma:

$$x(s,t) = \theta y(s, T_2 + s)e^{\Delta g(t-(T_2+s))}, \tag{62}$$

em que a variável de política Δ assume os valores $\{0,1\}$. segundo as circunstâncias, ou seja, de o sistema de previdência de repartição transferir ou não aos inativos os ganhos de produtividade dos ativos.

O valor inicial do benefício segue de (50):

$$y(s, T_2 + s) = y_0(s)e^{(\beta_1+g)T_1}e^{-(\beta_2-g)(T_2-T_1)} \tag{63}$$

O gasto total é dado por:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t-T_3} N(s,t)x(s,t)ds + \int_{t-T_3}^{t-T_2} N(s,t)x(s,t)ds. \tag{64}$$

Substituindo-se (1), (59), (62) e (63) em (64), segue que:

3 O processo de agregação é padrão. Ver, por exemplo, a derivação da expressão (67).

$$G(t) = K^{-1}e^{(n+g)t}e^{-nT_2}e^{\beta_1 T_1 - \beta_2(T_2 - T_1)}\theta y \cdot \left[\frac{e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_2} + \frac{1 - e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1}\right], \tag{65}$$

em que

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv n + p_3 + g - \Delta g, \\ x_2 &\equiv n + p_4 + g - \Delta g. \end{aligned} \tag{66}$$

5.3 Consumo agregado

Seja $C(t)$ o consumo agregado. Segue que:

$$C(t) = \int_{t-T_2}^{t} N(s,t)c(s,t)ds + \int_{t-T_3}^{t-T_2} N(s,t)c(s,t)ds + \int_{-\infty}^{t-T3} N(s,t)c(s,t)ds.$$

Substituindo-se (1) e (45) - (48) e (56), e resolvendo segue que:

$$\begin{aligned} c &= K^{-1}\frac{w}{\widetilde{T}}\left\{\frac{1 - e^{-(n+g-\sigma(m-\rho))T_2}}{n+g-\sigma(m-\rho)} + e^{-(n+g-\sigma(m-\rho))T_2}\frac{1 - e^{-(n+g+p_3-\sigma(m-(\rho+p_3)))(T_3-T_2)}}{n+g+p_3-\sigma(m-(\rho+p_3))}\right. \\ &\left. + e^{-(n+g-\sigma(m-\rho))T_2}\frac{e^{-(n+g+p_3-\sigma(m-(\rho+p_3)))(T_3-T_2)}}{n+g+p_4-\sigma(m-(\rho+p_4))}\right\} \end{aligned} \tag{67}$$

em que:

$$c \equiv C(t)e^{-(n+g)t} \tag{68}$$

é o consumo agregado *per capita* ou o consumo médio em unidades de trabalho eficiência.

6 Cálculo da dotação inicial

No final da seção 4 calculou-se a riqueza total ao nascer do indivíduo. Esta riqueza constitui-se de três termos: a dotação inicial, a riqueza humana ao nascer e o valor presente das transferências futuras da previdência pública. Os dois últimos termos dependem da renda do trabalho, uma vez que o benefício da previdência é calculado em função da renda do trabalhador da ativa. Para se obter uma expressão de w^* que dependa unicamente da renda do trabalho e da renda do capital é necessário calcular o valor da dotação inicial. A dotação é o valor da riqueza dos mortos em um instante dividida pela população que nasce naquele instante. Como salientado na parte inicial do trabalho, esta é uma forma simples de incorporar herança não intencional por motivo precaução, sem interferir na estrutura macroeconômica do modelo.

A riqueza dos mortos em um instante é dada por:

$$v_{\text{mortos em } t} = \int_{-\infty}^{t-T_3} p_4 N(s,t) v(s,t) ds + \int_{t-T_3}^{t-T_2} p_3 N(s,t) v(s,t) ds. \tag{69}$$

que é a riqueza total dos aposentados multiplicada pela probabilidade de morte. Os indivíduos da ativa não contribuem, pois a probabilidade de morte é nula. O passo seguinte para calcular a dotação inicial é encontrar a riqueza de um indivíduo aposentado. Para aqueles recém-aposentados, isto é, com idade entre T_2 e T_3, segue de (27) (38) e de (45) que:

$$\begin{aligned} R(s,t)v(s,t) = {} & \frac{\widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w(s,s) - R(s, T_2 + s)\left[g(s) - \int_{T_2+s}^{t} R(T_2 + s, t')x(s,t')dt' \right] \\ & - R^{1-\sigma}(s, T_2 + s) e^{-\rho\sigma T_2} \frac{w(s,s)}{\widetilde{T}} \int_{T_2+s}^{t} R^{1-\sigma}(T_2 + s, t') e^{-\sigma(\rho + p_3)(t' - (T_2 + s))} dt' \end{aligned} \tag{70}$$

Lembrando-se que

$$\frac{\widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w(s,s) - R(s, T_2 + s) g(s)$$

é a riqueza não humana que o indivíduo carrega ao aposentar-se, a riqueza que o indivíduo possui em t é o que ele transferiu do período ativo mais as transferências da previdência até este instante, menos o que consumiu nesta etapa da vida até este instante.

No estado estacionário, calculando-se (70), segue que:

$$\begin{aligned} v(s,t)e^{-m^{*}(t-s)} &= \frac{\widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w\ e^{gs} - e^{-m\ T_2}\theta y\ e^{g(T_2+s)} \frac{e^{-(m\ -\Delta g)(t-(T_2+s))}}{m\ -\Delta g} \\ &- \frac{w\ e^{gs}}{\widetilde{T}} e^{-(m\ -\sigma(m\ -\rho))T_2} \frac{1-e^{-(m\ -\sigma(m^{*}-(\rho+p_3)))(t-(T_2+s))}}{m\ -\sigma(m\ -(\rho+p_3))} \end{aligned} \tag{71}$$

No cálculo de (71) supõe-se que:

$$m\ -\Delta g > 0. \tag{72}$$

Caso contrário, o valor presente das transferências futuras da previdência é ilimitado.

Para os indivíduos que estão na última etapa da vida, isto é, com idade superior a T_3, segue que:

$$\begin{aligned} R(s,t)v(s,t) &= \frac{\widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w(s,s) - R(s,T_3+s)g_2(s) + R(s,T_3+s)\int_{T_3+s}^{t} R(T_3+s,t')x(s,t')dt' \\ &- R^{1-\sigma}(s,T_3+s)e^{-\rho\sigma T_3}e^{-p_3\sigma(T_3-T_2)}\frac{w(s,s)}{\widetilde{T}}\int_{T_3+s}^{t} R^{1-\sigma}(T_3+s,t')e^{-\sigma(\rho+p_4)(t'-(T_3+s))}dt' \end{aligned} \tag{73}$$

Analogamente, lembrando que

$$\frac{\widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w(s,s) - R(s,T_3+s)g_2(s)$$

é a riqueza não humana que o indivíduo transfere para esta etapa de sua vida; a riqueza em t que o indivíduo possui é o que ele transfere mais as transferências da previdência até este instante menos o que consumiu nesta etapa da vida até este instante.

No estado estacionário, calculando-se (73), segue que:

$$
\begin{aligned}
v(s,t)e^{-m^*(t-s)} &= \frac{\widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w^* e^{gs} - e^{-m^* T_3} \theta y \; e^{g(T_2+s)} e^{\Delta g(T_3-T_2)} \frac{e^{-(m^*-\Delta g)(t-(T_3+s))}}{m^* - \Delta g} \\
&- \frac{w^* e^{gs}}{\widetilde{T}} e^{-(m^* - \sigma(m^* - (\rho + p_3)))(T_3-T_2)} e^{-(m^* - \sigma(m^* - \rho))T_2} \frac{1 - e^{-(m^* - \sigma(m^* - (\rho + p_4)))(t-(T_3+s))}}{m^* - \sigma(m^* - (\rho + p_4))}.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Nas expressões (71) e (74) apareceu o termo

$$\theta y \; e^{g(T_2+s)},$$

que é a transferência da seguridade social no primeiro instante após a aposentadoria. Na situação em que a renda do trabalho não é uniforme, isto é, quando β_1 e β_2 são diferentes de zero ao longo da vida útil do indivíduo, este termo é trocado por:

$$\theta y \; e^{gs} e^{(\beta_1+g)T_1} e^{-(\beta_2-g)(T_2-T_1)},$$

Substituindo-se (71) e (74) em (69), e calculando-se, segue que:

$$
\begin{aligned}
\frac{v_{\text{mortos em } t}}{K^{-1} e^{(n+g)t}} = v &= p_3 e^{-k_0 T_2} \left\{ \frac{1 - e^{-k_1(T_3-T_2)}}{k_1} \left[\frac{\widetilde{T}_2 + \widetilde{T}_3}{\widetilde{T}} w - \frac{w}{\widetilde{T}} \frac{e^{-m_0 T_2}}{m_1} \right] \right\} \\
&- p_3 e^{-k_0 T_2} \theta y \; \frac{e^{-(m^* - g)T_2}}{m^* - \Delta g} \frac{1 - e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1} \\
&- p_4 e^{-k_0 T_2} e^{-k_1(T_3-T_2)} \frac{\theta y}{x_2} \frac{e^{-(m^* - g)T_2}}{m^* - \Delta g} e^{-(m^* - \Delta g)(T_3-T_2)} \\
&+ p_3 e^{-k_0 T_2} \frac{1 - e^{-n_1(T_3-T_2)}}{n_1} \frac{e^{-m_0 T_2}}{m_1} \frac{w}{\widetilde{T}} \\
&+ p_4 e^{-k_0 T_2} e^{-k_1(T_3-T_2)} \frac{1}{n_2} \frac{e^{-m_0 T_2} e^{-m_1(T_3-T_2)}}{m_2} \frac{w}{\widetilde{T}},
\end{aligned}
\tag{75}
$$

em que

$$\left.\begin{aligned}
m_0 &\equiv m \; - \sigma(m \; - \rho), \\
m_1 &\equiv m \; - \sigma(m \; - (\rho + p_3)), \\
m_2 &\equiv m \; - \sigma(m \; - (\rho + p_4)), \\
n_0 &\equiv n + g - \sigma(m \; - \rho), \\
n_1 &\equiv n + g + p_3 - \sigma(m \; - (\rho + p_3)), \\
n_2 &\equiv n + g + p_4 - \sigma(m \; - (\rho + p_4)), \\
k_0 &\equiv n + g - m \; , \\
k_1 &\equiv n + g + p_3 - m^*, \\
k_2 &\equiv n + g + p_4 - m \; , \\
x_1 &\equiv p_3 + n + g - \Delta g, \\
x_2 &\equiv p_4 + n + g - \Delta g.
\end{aligned}\right\} \tag{76}$$

No cálculo de (75) supõe-se que

$$k_2 \equiv n + g + p_4 - m \; > 0. \tag{77}$$

A taxa de crescimento da riqueza das gerações mais antigas (m^*) tem que ser menor do que a taxa efetiva de decrescimento das gerações. Esta última é a soma da taxa de crescimento populacional com a taxa de progresso técnico e a probabilidade de morte dos idosos. Se esta condição não for atendida, a integral imprópria em (69) não converge.

Em (75), se a renda do trabalho não for uniforme, troca-se o termo

$$\theta y \; e^{gT_2}$$

por

$$\theta y \; e^{(\beta_1+g)T_1} e^{-(\beta_2-g)(T_2-T_1)}$$

Substituindo-se (75) em (57) ou (58), encontra-se w^* como função da renda do trabalho, isto é, y^* Finalmente, segue de (67) que:

$$c \;=\frac{\psi_1\psi_2}{\phi K}\,y \tag{78}$$

em que:

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1-e^{-m_0T_2}}{m_0}+e^{-m_0T_2}\,\frac{1-e^{-m_1(T_3-T_2)}}{m_1}+e^{-m_0T_2}\,\frac{e^{-m_1(T_3-T_2)}}{m_2}\\ &- p_3e^{-k_0T_2}\left[\frac{1-e^{-k_1(T_3-T_2)}}{k_1}\left(\widetilde{T}_2+\widetilde{T}_3-\frac{e^{-m_0T_2}}{m_1}\right)+\frac{1-e^{-n_1(T_3-T_2)}}{n_1}\,\frac{e^{-m_0T_2}}{m_1}\right]\\ &- p_4e^{-k_0T_2}e^{-k_1(T_3-T_2)}\,\frac{\widetilde{T}_3}{m_2},\end{aligned} \tag{79}$$

$$\psi_2 \equiv \frac{1-e^{-n_0T_2}}{n_0}+e^{-n_0T_2}\left[\frac{1-e^{-n_1(T_3-T_2)}}{n_1}+\frac{e^{-n_1(T_3-T_2)}}{n_1}\right], \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &\equiv \frac{1-e^{-(m^*-\beta_1-g)T_1}}{m^*-\beta_1-g}+e^{-(m^*-\beta_1-g)T_1}\,\frac{1-e^{-(m^*+\beta_2-g)(T_2-T_1)}}{m^*+\beta_2-g}\\ &+e^{-m^*T_2}\theta\,\frac{e^{(\beta_1+g)T_1}e^{-(\beta_2-g)(T_2-T_1)}}{m^*-\Delta g}\\ &\left[1-e^{-k_0T_2}\left(p_3\,\frac{1-e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1}+p_4e^{-k_1(T_3-T_2)}\,\frac{e^{-(m^*-\Delta g)(T_3-T_2)}}{x_2}\right)\right].\end{aligned} \tag{81}$$

Se $\beta_1 = \beta_2 = 0$, segue que:

$$\psi_1 \equiv \frac{1-e^{-(m^* - g)T_2}}{m^* - g} + \theta \frac{e^{-(m^* - g)T_2}}{m^* - \Delta g}\left[1 - e^{-k_0 T_2}\left(p_3 \frac{1-e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1} + p_4 e^{-k_1(T_3-T_2)} \frac{e^{-(m^* - \Delta g)(T_3-T_2)}}{x_2}\right)\right]. \tag{82}$$

A equação (78) é o resultado da agregação das escolhas individuais, que estabelece a demanda de consumo agregado *per capita* em unidades de trabalho eficiência como função da renda do trabalho.

Para o caso particular em que $n = m^* - g$, $\theta = 1$ e $\Delta = 1$, segue que:

$$\frac{\psi_1 \psi_2}{\phi K} = 1,$$

ou seja, $c^* = y^*$ Esta grande simplificação sugere que não há erro nos cálculos.

7 Equilíbrio geral

7.1 Oferta agregada

No final da seção anterior derivou-se a demanda agregada como função da renda do trabalho. Assim, tem-se que:

$$\frac{c}{y^*} = \frac{\psi_1 \psi_2}{\phi K}.$$

Em equilíbrio geral a demanda agregada por consumo tem que ser igual à oferta de bens de consumo de estado estacionário, isto é,

$$N(t)e^{gt}c = L_1(t)e^{gt}\left[f(k^*) - (n + g + \delta)k\right], \tag{83}$$

em que $f(k)$ é uma função de produção neoclássica padrão e k é o estoque de capital em unidades de trabalho eficiente.

Por sua vez, a renda total do trabalho é dada por:

$$Y(t) = (1 - \tau_L)\ L_1(t)e^{gt}\left[f(k^*) - k\ f'(k^*)\right], \tag{84}$$

em que τ_L é a alíquota do imposto sobre o trabalho que financia a previdência por repartição. De (84) e (60) segue:

$$y^*\left[\frac{1 - e^{(\beta_1 - n)T_1}}{n - \beta_1} + e^{(\beta_1 - n)T_1}\frac{1 - e^{-(n+\beta_2)(T_2 - T_1)}}{n + \beta_2}\right]K^{-1} = (1 - \tau_L)\frac{L_1(t)}{N(t)}\left[f(k^*) - k\ f'(k^*)\right]. \tag{85}$$

Assim, pelo lado da oferta tem-se que:

$$\frac{c}{y^*} = \left[\frac{1 - e^{(\beta_1 - n)T_1}}{n - \beta_1} + e^{(\beta_1 - n)T_1}\frac{1 - e^{-(n+\beta_2)(T_2 - T_1)}}{n + \beta_2}\right]\frac{f(k^*) - (n + g + \delta)k}{f(k^*) - k\ f'(k^*)}\frac{1}{(1 - \tau_L)K}. \tag{86}$$

Igualando oferta e demanda, isto é, (86) e (78), e lembrando que o estoque de capital é função da remuneração do capital de estado estacionário, isto é, que:

$$m = (1 - \tau_K)f'(k^*) - \delta, \tag{87}$$

obtém-se uma equação com duas incógnitas: a taxa de juros de estado estacionário e, portanto, o estoque de capital e a alíquota do imposto. Em (87) t_K é a alíquota do imposto sobre o capital.

7.2 Restrição orçamentária do governo

A alíquota do imposto de renda é a necessária para equilibrar as contas da previdência, isto é,

$$L_1(t)e^{gt}\left[\tau_L(f(k^*) - k\ f'(k^*)) + \tau_K k\ f'(k^*)\right]$$

$$= N(t)e^{gt}e^{-nT_2}\theta y^*\left[\frac{e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_2} + \frac{1 - e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1}\right]K^{-1}e^{\beta_1 T_1 - \beta_2(T_2 - T_1)} \tag{88}$$

Em (88) o lado esquerdo representa a receita previdenciária e o lado direito os gastos totais da previdência de repartição, dados por (65).

Para um dado valor de τ_K, (88), (87), (86), (85) e (78) são simultaneamente solucionadas, encontrando-se τ_L m^* e k^*. Além da variável de política θ há uma outra variável de política que é a relação entre as alíquotas,

$$\theta_K \equiv \frac{\tau_K}{\tau_L}. \tag{89}$$

As equações simplificam-se no caso em que a função de produção é Cobb-Douglas e as alíquotas de imposto são iguais para ambas as rendas. Neste caso, segue de (88) e (85):

$$\frac{\tau}{1-\tau}\frac{1}{1-\alpha} = e^{-n\,T_2}\theta e^{\beta_1 T_1 - \beta_2(T_2 - T_1)}\frac{\dfrac{1 - e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_1} + \dfrac{e^{-x_1(T_3-T_2)}}{x_2}}{\dfrac{1 - e^{(\beta_1 - n)T_1}}{n - \beta_1} + e^{(\beta_1 - n)T_1}\dfrac{1 - e^{-(n+\beta_2)(T_2 - T_1)}}{n + \beta_2}} \equiv H, \tag{90}$$

em que α é a participação do capital no produto.

Segue-se que:

$$\tau = \frac{(1 - \alpha)H}{1 + (1 - \alpha)H} \tag{91}$$

Nota-se em (91) que a alíquota que equilibra as contas da previdência de repartição independe da taxa de juros de estado estacionário.

De (87), (86) e (78), segue:

$$\left[\frac{1-e^{(\beta_1-n)T_1}}{n-\beta_1}+e^{(\beta_1-n)T_1}\,\frac{1-e^{-(n+\beta_2)(T_2-T_1)}}{n+\beta_2}\right]\frac{1}{1-\tau}\,\frac{1-(n+g+\delta)\dfrac{(1-\tau)\alpha}{m\;+\delta}}{1-\alpha}=\frac{\Psi_1\Psi_2}{\phi}. \qquad (92)$$

Substituindo-se (91) em (92) obtém-se a solucão para a taxa de juros de estado estacionário supondo-se um valor ao vetor de parâmetros

$$(\alpha, g, \rho, \sigma, \beta_1, \beta_2, \theta, \Delta, RD, p_4, n).$$

Nota-se que p_3 é endógeno, uma vez que se fixou a razão da dependência. Quando se soluciona (92) supondo $\theta = 0$, todo o financiamento da previdência ocorre a partir da poupança individual. A previdência é totalmente fundada.

8 Modelo em que há seguro

Nesta economia os indivíduos deparam com uma incerteza quanto à duração da vida. Os indivíduos são precavidos e, portanto, nunca consomem completamente seu capital. Ao morrerem, resta um estoque de riqueza que é repassado aos indivíduos que nascem no mesmo instante. Uma outra forma de tratar teoricamente esta incerteza é supor que há uma seguradora que funcione a custo zero. O contrato de seguro seria nos seguintes termos.[4] Ao se aposentar, o indivíduo passaria a guarda de seu patrimônio à seguradora. Esta pagaria ao segurado, pela utilização da riqueza, a taxa de juros de mercado mais um benefício igual à probabilidade de morte do indivíduo. Em caso de ocorrência de sinistro, isto é, da morte do indivíduo, a riqueza ficaria com a seguradora como contrapartida dos benefícios pagos antecipadamente. É fácil convencer-se que as contas da seguradora estão equilibradas. Os desembolsos com os indivíduos da geração s totalizam

$$pN(s,t)v(s,t). \qquad (93)$$

A receita é o total de mortes desta geração multiplicado pela riqueza individual, quantidade igual a (93).

4 Ver Blanchard (1985).

A existência de seguro faz com que a diferença entre a taxa à qual os indivíduos descontam rendas futuras e a taxa à qual descontam utilidades futuras, isto é,

$$m(t) + p_i - (\rho + p_i)$$

independa da probabilidade de morte. Logo, o perfil do consumo ao longo da vida não se altera. Tem-se, pois, que:

$$\frac{dc(t) / dt}{c(t)} = \sigma(m(t) - \rho) \tag{94}$$

para qualquer instante da vida.

Por outro lado, a seguradora constitui uma transferência intrageracional. Ou seja, a renda dos indivíduos que morrem relativamente jovens é transferida aos longevos. Na ausência de seguro, devido à poupança por motivo precaução, fruto do desconhecimento da data da morte, há transferência intergeracional.

Do ponto de vista formal, a existência de seguro torna o modelo muito mais simples: não há necessidade de calcular a dotação inicial. Seguindo os passos da seção 4, obtém-se:

$$c^{SE}(s,t) = \frac{w^{SE}(s,s)}{\widetilde{T}^{SE}} e^{\sigma\int_s^t (m(t')-\rho)dt'}, \ \forall t \geq s, \tag{95}$$

em que

$$w^{SE}(s,s) \equiv h(s,s) + R(s, T_2 + s)g(s), \tag{96}$$

$$g(s) \equiv g_1(s) + R^{SE}(T_2 + s, T_3 + s)g_2(s), \tag{97}$$

$$g_1(s) \equiv \int_{T_2+s}^{T_3+s} R^{SE}(T_2 + s, t)x(s,t)dt, \tag{98}$$

$$g_2(s) \equiv \int_{T_3+s}^{\infty} R^{SE}(T_3 + s, t)x(s, t)dt, \tag{99}$$

$$\begin{aligned} R^{SE}(t, t') &\equiv e^{-\int_t^{t'}(m(t'')+p)dt'}, \\ \widetilde{T}^{SE} &\equiv \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2^{SE} + \widetilde{T}_3^{SE}, \end{aligned} \tag{100}$$

$$\widetilde{T}_2^{SE} \equiv R^{1-\sigma}(s, T_2 + s)e^{-\sigma\rho T_2} \int_{T_2+s}^{T_3+s} e^{-\int_{T_2+s}^{t}(m(t')+p_3-\sigma(m(t')-\rho))dt'} dt, \tag{101}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_3^{SE} &\equiv R^{1-\sigma}(s, T_2 + s)\left[R^{SE}(T_2 + s, T_3 + s)\right]^{1-\sigma} e^{-\sigma(\rho-p_3)(T_3-T_2)}, \\ &\int_{T_3+s}^{\infty} e^{-\int_{T_3+s}^{t}(m(t')+p_4-\sigma(m(t')-\rho))dt'} dt. \end{aligned} \tag{102}$$

A equação (95) segue diretamente da integração de (94). Em (96) nota-se que não há o termo referente à dotação inicial.[5] O índice '*SE*' em algumas variáveis indica que as respectivas quantidades referem-se à situação em que há seguro. As definições das variáveis são as mesmas do modelo com seguro. Ressalte-se que a taxa de desconto das rendas futuras incorpora a probabilidade de morte.[6]

O consumo agregado é calculado segundo os mesmos passos do modelo sem seguro. Em estado estacionário, segue que:

$$c^* \equiv \frac{C(t)}{e^{(n+g)t}} = K^{-1} \frac{w}{\widetilde{T}^{SE}} \left\{ \frac{1 - e^{-h_0 T_2}}{h_0} + e^{-h_0 T_2} \frac{1 - e^{-h_1(T_3-T_2)}}{h_1} + e^{-h_0 T_2} \frac{e^{-h_1(T_3-T_2)}}{h_2} \right\}, \tag{103}$$

em que:

5 Comparar com (39).

6 Comparar (100) com (18).

$$h_0 \equiv n + g - \sigma(m - \rho), \tag{104}$$

$$h_1 \equiv n + g + p_3 - \sigma(m - \rho), \tag{105}$$

$$h_2 \equiv n + g + p_4 - \sigma(m - \rho). \tag{106}$$

No cálculo de (104) supõe-se que:

$$h_2 > 0. \tag{107}$$

Para calcular a demanda por bens de consumo de estado estacionário resta encontrar o valor da riqueza total ao nascer de estado estacionário. Segue então que:

$$\begin{aligned} w^{SE}(s, s) &\equiv h(s, s) + R(s, T_2 + s)g(s) \\ &= \int_s^{T_2+s} e^{-m(t-s)} y(s, t)dt + e^{-m T_2} \int_{T_2+s}^{T_3+s} e^{-(m + p_3)(t-(T_2+s))} x(s, t)dt \\ &\quad + e^{-m T_3} \int_{T_3+s}^{\infty} e^{-(m + p_4)(t-(T_3+s))} x(s, t)dt. \end{aligned}$$

A riqueza humana não se altera e é dada por (51). Para o valor presente das transferências futuras segue que:

$$g_1(s) = x\ e^{gs} \frac{1 - e^{-(m + p_3 - \Delta g)(T_3 - T_2)}}{m + p_3 - \Delta g}. \tag{108}$$

$$g_2(s) = \frac{x\ e^{gs} e^{\Delta g (T_3 - T_2)}}{m + p_4 - \Delta g} \tag{109}$$

Portanto,

Analogamente ao modelo sem seguro, a equação (104) admite grande simplificação no caso em que

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \; \Delta = \theta = 1 \quad e \quad m - g = n.$$

Nesta situação:

$$c^* = y^*$$

A solução do modelo em equilíbrio geral é idêntica à solução do modelo sem seguro. A única adaptação necessária é colocar a equação (104) no lugar da equação (78).

9 Simulação

No presente estudo está-se interessado em investigar qual será o ganho de renda no longo prazo que haverá se uma economia trocar de sistema previdenciário. Este problema é equivalente a determinar o diferencial de renda de duas economias idênticas, sendo a única diferença entre elas a forma de funcionamento do sistema previdenciário. Para tal, solucionar-se-á a equação (92) obtendo a taxa de estado estacionário. Após a determinação da taxa de juros obtém-se, a partir de (91), a alíquota de imposto que equilibra as contas da previdência, e a partir de (87) o estoque de capital e a renda de estado estacionário. As equações (91) e (92) foram obtidas supondo-se que o financiamento da previdência dá-se por meio de uma alíquota de imposto de renda que incide sobre a renda do trabalho e do capital, isto é, um imposto de renda. No entanto, muitos sistemas de previdência são financiados por meio de uma alíquota de imposto que incide somente sobre a folha de salários. Nesta situação, refazendo-se os cálculos da subseção 7.2 segue que:

$$\tau = \frac{H}{1 + H}$$

expressão bastante parecida com a expressão (91). Proceder-se-á de forama análoga para a expressão (92).

Assim, para todo subconjunto escolhido dos parâmetros, resolver-se-á (92) nos dois casos de financiamento e para dois valores de θ: 1 e 0. Quando θ vale zero, não há previdência por repartição: os indivíduos vivem somente dos recursos que pouparem ao longo de sua vida ativa.

Para calibrar o modelo, isto é, escolher valores para os parâmetros, a maior dificuldade refere-se aos parâmetros das preferências, por não haver observação direta dos mesmos. Para a elasticidade de substituição intertemporal no consumo adotou-se como padrão o valor 1/2. As estimativas econométricas apontam para valores entre 1/5 e 5. A escolha de 1/2 significa que se está supondo menos flexibilidade de escolha do que o caso logarítmico. Para a taxa de desconto adotou-se outra estratégia. No modelo desenvolvido neste trabalho a 'taxa´ de desconto do consumidor altera-se conforme varia a probabilidade de morte. Se este consumidor tivesse horizonte infinito com desconto constante sua avaliação subjetiva do tempo de vida seria:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^{EF} t} dt = \frac{1}{\rho^{EF}}.$$

No entanto, a forma como se avalia o tempo de vida é dada por:

$$\int_0^{T_2} e^{-\rho t} dt + \int_{T_2}^{T_3} e^{-(\rho+p_3)t} dt + \int_{T_3}^{\infty} e^{-(\rho+p_4)t} dt = -\frac{e^{-\rho T_2} - 1}{\rho} - \frac{e^{-(\rho+p_3)T_3} - e^{-(\rho+p_3)T_2}}{\rho + p_3} + \frac{e^{-(\rho+p_4)T_3}}{\rho + p_4}.$$

O parâmetro que será fixado é a taxa de preferência intertemporal de um agente representativo, com probabilidade de morte nula e horizonte infinito. Para um valor fixado de ρ^{EF} encontrar-se-á o valor correspondente para ρ, igualando-se esta última expressão a $1/\rho^{EF}$ Muitos estudos econométricos estimam a taxa de preferência intertemporal a partir da estimação da equação de Euler para o consumo, supondo que o indivíduo tem horizonte infinito e probabilidade de morte zero. Desta forma, o parâmetro empiricamente observado é ρ^{EF}

As duas tabelas apresentadas no final do trabalho mostram o resultado para as duas simulações: simulação 1, com imposto sobre a renda, e simulação 2, com imposto sobre a folha de pagamentos. A configuração padrão escolhida, tomando-se por base a economia americana, foi a seguinte:[7] $\alpha = 0{,}35$ (segue das contas nacionais), g = 1,5% ao ano (idem),

7 Esta configuração não é definitiva, carecendo de uma determinação mais cuidadosa dos parâmetros que melhor representam a economia norte-americana.

$\rho^{EF} = 3{,}5\%$ ao ano (taxa de juros de longo prazo para a economia americana), $\Delta = 1$ ao ano (sobrevida média de dez anos quando idoso), $T_2 = 40$ (anos de vida ativa), $T_3 = 65$, depreciação de 5% ao ano e razão de dependência de 0,29. Os parâmetros β_1, β_2 e T_1 foram escolhidos de forma a minimizar a diferença dos quadrados de uma curva estimada para o perfil de salários para os Estados Unidos e a adotada neste trabalho com duas taxas lineares.[8] Foram obtidos os valores $\beta_1 = 4{,}63\%$ e $\beta_2 = 0{,}71\%$, ambas ao ano, e $T_1 = 18{,}39$ anos. O ciclo de vida do consumidor é o seguinte: entre o período de entrada no mercado de trabalho (no modelo, o ano de nascimento) até 18 anos a renda do trabalho cresce à taxa de 4,63% ao ano; desta data até 40 anos cresce à taxa de 0,78% ao ano; nos primeiros 25 anos de aposentado a probabilidade de morte é 2,468% e nos últimos anos de vida a probabilidade de morte é de 10%. A Tabela 1 apresenta os principais resultados para a configuração padrão quando o financiamento é por meio de um imposto de renda.

Tabela 1

	$\theta = 1$	$\theta = 0$
m*	0.0880	0.0487
τ	0.22	
k*	2.881	7.141
PIB*	1.028	1.413
%		37.39

Há um expressivo ganho de renda ao se alterar as regras de funcionamento da previdência. Para o caso em que o financiamento é por meio de contribuição sobre a folha de salários, segue a Tabela 2.

8 Determinaram-se os parâmetros de forma a que:

$$min_{\beta_1,\beta_2,T_1} \int_s^{T_1+s} \left[a_1(t-s) - a_2(t-s)^2 - (\beta_1 + g)(t-s)\right]^2$$

$$+ \int_{T_1+s}^{T_2+s} \left[a_1(t-s) - a_2(t-s)^2 - ((\beta_1 + g)T_1 + (\beta_2 - g)(t - (T_1 + s)))\right]^2 dt,$$

em que $\log y(s,t) = a_0 + a_1(t-s) - a_2(t-s)^2$ é a curva estimada de perfil de salários para a economia norte-americana.

Tabela 2

	$\theta = 1$	$\theta = 0$
m*	0.0892	0.0487
τ	0.30	
k*	4.188	7.141
PIB*	1.172	1.413
%		20.53

Ressalte-se que para o caso de financiamento somente sobre os salários o impacto sobre a acumulação de capital e a renda é menor. Este resultado é robusto para inúmeras simulações. Ele decorre do fato de que quando o financiamento dá-se somente sobre a renda do trabalho não há desestímulo à acumulação de capital devido a alterações nas condições marginais. Há somente o efeito de desestímulo à acumulação de capital induzido pela garantia de renda futura.[9] Quando o financiamento dá-se por meio de um imposto sobre a renda os dois efeitos somam. Como esperado, o fator mais importante é a participação do capital na renda. Quanto maior for esta participação, maior será o ganho de renda de estado estacionário. Dito de outra maneira, se os retornos decrescentes à acumulação de capital atuam muito lentamente, maior será o impacto da acumulação de capital sobre a renda de estado estacionário, visto que a queda da relação capital/trabalho é muito lenta.

10 Conclusão

Este trabalho mostrou que há expressivos ganhos de renda no estado estacionário quando uma economia altera a forma de funcionamento do sistema previdenciário, substituindo um sistema de repartição por um sistema fundado. Sob a configuração padrão, e supondo que o financiamento do sistema dá-se por meio de um imposto sobre a folha de pagamentos, que no presente contexto é não distorcido, pois a oferta de trabalho é exógena, obtêm-se ganhos de renda de 20%. Este cálculo é conservador, pois não leva em consideração possíveis efeitos distorcidos do imposto, bem como trabalha com um conceito estrito de capital. Sob a simulação padrão a participação do trabalho na renda empregada foi de 35%. Caso sejam consideradas outras formas de capital, esta participação pode chegar a 75%. Isto é,

9 Fato expresso nas equações (37) e (38).

sob uma noção abrangente de capital, a participação na renda dos fatores que se acumulam por decisão econômica é aproximadamente 3/4, potencializando o valor encontrado para o ganho de renda.[10]

Referências bibliográficas

Arrau, Patricio. Social security reform. World Bank, *Working Paper 512*, 1990, mimeo.

Barreto, Flavio A. S. D. e Oliveira, Luiz G. S. Aplicação de um modelo de gerações sobrepostas para a reforma da previdência no Brasil: uma análise de sensibilidade no estado estacionário. *Anais do XVII Encontro Brasileiro de Econometria*, v. 1, p. 71-91 1995.

Blanchard, Oliver J. Debts, deficits, and finite horizons. *Journal of Political Economy* 93, 2, p. 223-247 April 1985.

Blanchard, Oliver J. e Fischer, Stanley. *Lectures on macroeconomics*. The MIT Press, 1989

Barro, Robert J., Mankiw, Gregory e Sala-i-Martin, Xavier. Capital mobility in neoclassical models of growth. *American Economic Review* 85, p. 103-115, março 1995.

Cass, David e Yaari, Menahem. Individual saving, aggregation capital accumulation, and efficient growth. Em Karl Shell (ed.), *Essays on the theory of optimal economic growth*. Cambridge, MA. MIT Press, 1967

Fabel, Oliver. *The economics of pensions and variable retirement schemes*. John Wiley & Sons, 1994.

ILADES/Georgetown University. *Revista de Análises Económico*, v. 9, n. 1, junho, 1994.

Yaari, Menahem. Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. *The Review of Economic Studies* 32, p. 137-150, abril 1965.

10 Ver, por exemplo, Barro, Mankiw e Sala-i-Martin (1995).