MODELING AND ANALYSIS OF INFORMATION SYSTEMS, VOL. 30, NO. 3, 2023
journal homepage: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Application of the algorithm for finding the outer median of a graph in the problems of determining the reliability of technical systems

V. B. Tikhonov[1], Y. A. Plaksa[1], S. A. Kurochkina[1], N. A. Prusova[1] DOI: 10.18255/1818-1015-2023-3-258-263

[1]Yaroslavl Higher Military School of Air Defense, 150001, Yaroslavl, Moskovsky prospect, building 28.

MSC2020: 05C35
Research article
Full text in Russian

Received July 5, 2023
After revision August 7, 2023
Accepted August 16, 2023

The problem of locating a service center for technical systems with known values of failure flows is considered. This problem was solved using the minisum algorithm of graph theory. The dependence of the system availability factor on the average time between failures and the average recovery time of the system elements is obtained. It is shown that the optimal location of the maintenance point is the median of the graph located at one of its vertices.

Keywords: undirected weighted graph; minisum algorithm; graph vertex; graph median; gear ratio; maintenance center; reliability index.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vladimir B. Tikhonov	orcid.org/0000-0002-5524-282X. E-mail: kaktus38@yandex.ru Professor of the Department of Physics, Doctor of Technical Sciences, Professor.
Yuri A. Plaksa	orcid.org/0000-0003-0785-8272. E-mail: plaksa-06@mail.ru Associate Professor of the Department of Automation, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor.
Svetlana A. Kurochkina corresponding author	orcid.org/0000-0001-7261-0439. E-mail: svetlana_k_621@mail.ru Associate Professor of the Department of Mathematics, Candidate of Physical and Mathematical Sciences.
Nataliya A. Prusova	orcid.org/0000-0002-2805-5228. E-mail: natali_pet@mail.ru Associate Professor of the Department of Mathematics, Candidate of Pedagogical Sciences.

For citation: V. B. Tikhonov, Y. A. Plaksa, S. A. Kurochkina, and N. A. Prusova, “Application of the algorithm for finding the outer median of a graph in the problems of determining the reliability of technical systems”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 3, pp. 258-263, 2023.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ, ТОМ 30, № 3, 2023
сайт журнала: www.mais-journal.ru

DISCRETE MATHEMATICS IN RELATION TO COMPUTER SCIENCE

Применение алгоритма поиска внешней медианы графа в задачах определения надежности технических систем

В. Б. Тихонов[1], Ю. А. Плакса[1], С. А. Курочкина[1], Н. А. Прусова[1]

DOI: 10.18255/1818-1015-2023-3-258-263

[1]Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны, 150001, г. Ярославль, Московский проспект, дом 28.

УДК 519.17
Научная статья
Полный текст на русском языке

Получена 5 июля 2023 г.
После доработки 7 августа 2023 г.
Принята к публикации 16 августа 2023 г.

Рассмотрена задача о размещении центра обслуживания технических систем при известных значениях потоков отказов. Даная задача решалась с помощью минисуммного алгоритма теории графов. Получена зависимость коэффициента готовности системы от среднего времени наработки между отказами и среднего времени восстановления элементов системы. Показано, что оптимальным местом расположения пункта технического обслуживания является медиана графа, расположенная в одной из его вершин.

Ключевые слова: неориентированный взвешенный граф; минисуммный алгоритм; вершина графа; медиана графа; передаточное число; центр технического обслуживания; показатель надежности.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Владимир Борисович Тихонов	orcid.org/0000-0002-5524-282X. E-mail: kaktus38@yandex.ru профессор кафедры физики, доктор техн. наук, профессор.
Юрий Андреевич Плакса	orcid.org/0000-0003-0785-8272. E-mail: plaksa-06@mail.ru доцент кафедры автоматики, кандидат техн. наук, доцент .
Светлана Алексеевна Курочкина автор для корреспонденции	orcid.org/0000-0001-7261-0439. E-mail: svetlana_k_621@mail.ru доцент кафедры математики, кандидат физ.-мат. наук.
Наталия Александровна Прусова	orcid.org/0000-0002-2805-5228. E-mail: natali_pet@mail.ru доцент кафедры математики, кандидат пед. наук.

Для цитирования: V. B. Tikhonov, Y. A. Plaksa, S. A. Kurochkina, and N. A. Prusova, “Application of the algorithm for finding the outer median of a graph in the problems of determining the reliability of technical systems”, *Modeling and analysis of information systems*, vol. 30, no. 3, pp. 258-263, 2023.

Обычно в теории надежности графы используются для иллюстрации алгоритмов восстановления технических систем [1]. Однако есть ряд задач, использующих графы для определения оптимального или рационального размещения центров технического обслуживания, решение которых позволяет обеспечить более высокую надежность этих систем.

В практических приложениях часто возникает необходимость решения задачи планирования и расположения центров обслуживания. Впервые задача о размещении объектов была сформулирована в XVII веке, получившая впоследствии название задачи Вебера [2]. Геометрическое решение данной задачи для треугольника было представлено Э. Торричелли [3]. Во второй половине XX века задача решена численно методом наименьших квадратов [3]. В настоящее время проблема поиска оптимального места размещения объектов остается актуальной: для определения места расположения баз снабжения, коммутаторов в телефонной сети, подстанций в электросетях и т. д. Современные задачи оптимального размещения можно разделить на два типа: задачи о размещении взаимосвязанных объектов [4—6] и задачи размещения-распределения. Ко второму случаю относятся, в частности, задачи о p-медиане и размещения с предпочтениями клиентов. Для описания моделей задач размещения используется различный математический аппарат, методы решения определяются характеристиками модели. Так для поиска решения задачи о p-медиане в [7—9] применяется метод целочисленного линейного программирования, формулировка сводится к задаче о паре матриц распределения. Такой подход к решению задачи размещения распространенный, но предполагает математическую определенность переменных величин и их ограниченное количество. Как и в случае других NP-полных задач, при оптимальном поиске прибегают к приближенным инструментам, например, в [10] рассматривается алгоритм наискорейшего спуска для нахождения локального оптимума. Но приближенные методы имеют ряд недостатков, один их них — отсутствие эффективной точной процедуры решения. Полиномиальные приближенные алгоритмы решения представлены и в [11], в работе проведен также вероятностный анализ задачи размещения, а расстояния между вершинами графов определяются как случайные величины с одинаковой функцией распределения. Параметры задачи могут быть описаны не только количественными характеристиками, но и качественными. В [12] рассмотрена однокритериальная минисуммная задача размещения центра обслуживания в сети дорог, где переменная является лингвистической, то есть может иметь как количественную оценку, так и описывать качественные понятия. В том числе различную смысловую нагрузку может нести и термин «объект». Таким образом, задача о размещении пунктов обслуживания, в которых требуется расположить пункт обслуживания на графе так, чтобы сумма кратчайших расстояний от этого пункта до вершин графа была бы минимально возможной, имеет обширную сферу практического применения, в том числе и военно-прикладную.

С точки зрения эксплуатации изделий, как функциональной, так и технической, любую сложную техническую систему по своей структуре можно рассматривать как распределенную иерархическую систему, которая состоит из пространственно-разнесенных между собой элементов, размещение на местности и функционирование которых подчинено достижению одной общей цели.

Комплексным показателем надежности технических систем является коэффициент готовности, который показывает вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых эксплуатация системы не предусмотрена [13]. Он определяется по формуле:

$$K_{\Gamma} = \frac{T_o}{T_o + T_{\text{в}}}, \tag{1}$$

где T_o — среднее время наработки между отказами системы, $T_{\text{в}}$ — среднее время восстановления системы.

Формула (1) показывает, что требуемое значение коэффициента готовности напрямую зависит от работоспособности изделий. Для ее обеспечения могут быть использованы центры технического обслуживания, размещение которых существенно влияет на среднее время восстановления. Снижение времени доставки неисправных элементов в ремонтный орган и обратно или выезда сервисной бригады к отказавшему элементу технической системы позволяет повысить значение

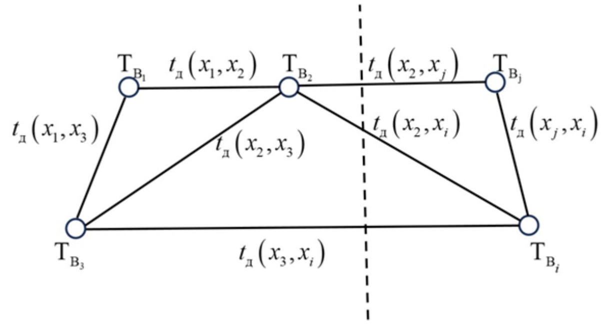

Fig. 1. Loading scheme of vertices and edges of a graph

Рис. 1. Схема нагружения вершин и ребер графа

коэффициента готовности. Поэтому актуальной является задача размещения центра технического обслуживания таким образом, чтобы обеспечить максимальное значение коэффициента готовности технической системы, и, следовательно, максимальную эффективность ее применения.

Выше было отмечено, что для решения задач подобного рода может быть использована теория графов [14]. Наиболее близким к предлагаемому решению является минисуммный алгоритм размещения, обеспечивающий поиск медианы графа — вершины, сумма взвешенных расстояний от которой до остальных вершин минимальна. Суть метода заключается в следующем [14].

Пусть дан неориентированный граф $G = (X, R)$, где X — множество вершин, а R — множество ребер. Для каждой i-й вершины графа вводится понятие передаточного числа:

$$\sigma(x_i) = \sum_{x_j \in X} v_j \, d(x_i, x_j) = \sum_{x_j \in X} v_j \, d(x_j, x_i), \tag{2}$$

где v_j — вес j-й вершины, $d(x_i, x_j)$ — кратчайшее расстояние между i-й и j-й вершинами. Вершина x_0, для которой $\sigma(x_0) = \min[\sigma(x_i)]$, где $x_i \in X$, является медианой графа.

Если рассматривать территориально распределенную техническую систему в качестве множества элементов, неделимых на данном уровне иерархии, то такое множество можно представить в виде неориентированного взвешенного графа. Тогда в качестве множества вершин будет выступать множество элементов технической системы, размещенных на местности, а в качестве множества ребер можно рассматривать маршруты транспортной сети для перемещения необходимых ресурсов (элементов замены, сервисных бригад) для восстановления изделий между пунктами их размещения. Вес ребер будет определяться минимальным временем доставки этих ресурсов по данному маршруту $t_{\text{д}}(x_j, x_i)$.

На практике, чаще всего, элементы технической системы неравнозначны, объединены в подсистемы и вносят различный вклад в формирование ее надежности. Этот вклад определяется критериями отказа, как самих элементов и подсистем, так и технической системы в целом. При этом, в соответствии с выражением (1), надежность каждого элемента технической системы характеризуется двумя величинами: T_o и $T_{\text{в}}$. Поэтому каждая вершина графа данной системы, вообще говоря, должна быть взвешена двумя весами — T_o и $T_{\text{в}}$. Но T_o не зависит от времени транспортировки элемента замены между вершинами графа, а $T_{\text{в}}$ зависит. Следовательно, при решении задачи об оптимальном размещении центра технического обслуживания вершины достаточно нагрузить весами, равными $T_{\text{в}}$. Схема нагружения вершин и ребер графа представлена на рис. 1.

Величина $T_{\text{в}}$ для каждой вершины складывается из $t_{\text{в}}$ — времени выполнения мероприятий восстановления элемента системы, находящегося в j-й вершине, которое не зависит от места расположения центра технического обслуживания (время диагностирования, время замены блока и т.п.); $t_{\text{д}}$ — времени доставки отказавшего элемента замены из j-й вершины в i-ю вершину, которое определяется местоположением вершин, и равного ему времени доставки отремонтированного элемента замены из i-й вершины в j-ю вершину (время обратного пути); $t_р$ — времени ремонта отказавшего элемента замены j-го изделия в центре технического обслуживания. В результате получим:

$$T_{в_j} = t_{в_j} + 2t_д(x_j, x_i) + t_{p_j}, \tag{3}$$

Поскольку и $t_в$, и t_p инвариантны к размещению пункта обслуживания, то выражение (3) может быть записано как:

$$T_{в_j} = f(t_д(x_j, x_i)), \tag{4}$$

где $f(t_д(x_j, x_i))$ — некоторая функция минимального времени доставки, определяемая условиями конкретной задачи.

В результате критерий оптимальности размещения центра технического обслуживания можно представить, как некоторую функцию местоположения вершин. Тогда обобщенное передаточное число для i-й вершины графа можно представить в следующем виде:

$$\sigma(x_i) = \sum_{x_j \in X} F[t_д(x_j, x_i)]. \tag{5}$$

В формуле (5) предполагается, что каждый элемент суммы, образующей передаточное число, в соответствии с формулой (2) равный произведению весов вершин $T_в$ и времен доставки ресурсов $t_д(x_j, x_i)$ будет в конечном счете определятся минимальным временем доставки $t_д(x_j, x_i)$ и фактически являться некоторой функцией F этой величины.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти такую вершину на графе, для которой обобщенное передаточное число примет минимальное значение: $\sigma(x_0) = \min[\sigma(x_j)]$, где $x_j \in X$. Как показано в методе внешней медианы графа [14] такая точка будет находиться в одной из вершин графа.

Пусть имеем техническую систему, состоящую из N элементов. Если при отказе любого одного элемента из N происходит отказ системы, то систему можно представить в виде системы с основным соединением [15]. В некоторых системах допускается отказ m элементов из N, где $m \geq 1$. В этом случае можно говорить о системе с нагруженным резервом и неограниченным восстановлением. Показатели надежности таких систем рассчитываются по формулам [15]:

$$T_o = \frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{|B|=k} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}}}{\sum\limits_{|B|=m} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}} \sum\limits_{l \in A} \frac{1}{T_{o_j}}}, \quad T_B = \frac{\sum\limits_{|B|=m+1} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}}}{\sum\limits_{|B|=m} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}} \sum\limits_{l \in A} \frac{1}{T_{o_j}}}, \tag{6}$$

где m — количество избыточных элементов в системе;
B — множество номеров отказавших (восстанавливаемых) элементов системы;
A — множество номеров работоспособных элементов системы;
$|B|$ — мощность (число элементов) множества B, $|B| + |A| = N$;
$\sum_{k=1}^{m}$ — сумма, включающая k-е уровни графа состояний системы, $k = \overline{1, m}$;
$\sum_{|B|=k}$, $\sum_{|B|=m}$, $\sum_{|B|=m+1}$ — сумма, включающая все состояния k-го, m-го, $(m + 1)$-го уровня графа состояний системы соответственно.

С учетом выражений (1) и (6) получим формулу для расчета коэффициента готовности m/N системы:

$$K_Г = \frac{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{|B|=k} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{|B|=k} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}} + \sum\limits_{|B|=m+1} \prod\limits_{j \in B} \frac{T_{в_j}}{T_{o_j}}}. \tag{7}$$

Обозначим элементы в выражении (7) следующим образом:

$$A_1 = 1 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|B|=k} \prod_{j \in B} \frac{T_{\text{в}_j}}{T_{o_j}}, \quad A_2 = \sum_{|B|=m+1} \prod_{j \in B} \frac{T_{\text{в}_j}}{T_{o_j}}. \tag{8}$$

Тогда $K_\Gamma = A_1/(A_1 + A_2)$.

Исходя из вышеизложенного, можно сказать, что коэффициент готовности технической системы обратно пропорционален выражению A_2. Выражение для A_2 (см. выражение (8)) представляет собой сумму произведений взвешенных средних времен восстановления элементов системы, которые определяются весами ребер графа (минимальными временами доставки).

Следовательно, в этом случае коэффициент готовности технической системы будет обратно пропорционален сумме взвешенных времен доставки из i-го элемента в центр технического обслуживания и медиана графа будет находиться в одной из его вершин. Таким образом, для определения местоположения центра технического обслуживания можно применить минисуммный алгоритм на графах, заменив передаточное число (2) на обобщенное передаточное число (5).

Данный метод был использован для определения местоположения центра технического обслуживания группировки средств противовоздушной обороны.

References

[1] A. Oleinik, E. A. Lukashev, S. P. Poserenin, and M. E. Stavrovskiy, “Graph method in reliability theory and practice of technical service”, *Izvestiya MGTU MAMI*, vol. 4, no. 2, pp. 236–247, 2010, in Russian.

[2] H. J. Miser, *Handbook of Operations Research: foundations and fundamentals*. Van Nostrand Reinhold, 1978, 622 pp.

[3] M. Aoki, *Introduction to optimization techniques. Fundamentals and applications of nonlinear programming*. Macmillan, 1971, 335 pp.

[4] G. G. Zabudsky and N. S. Veremchuk, “Reshenie zadachi vebera na ploskosti s minimaksnym kriteriem i zapreshchennymi zonami”, *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, vol. 9, pp. 10–25, 2014, in Russian.

[5] V. Beresnev and A. Mel’nikov, “Approximate algorithms for the competitive facility location problem”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, vol. 5, pp. 180–190, 2011.

[6] V. Demidenko, “Generalizing strong feasibility conditions for the quadratic assignment problem with anti-Monge and Toeplitz matrices”, in *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi*, vol. 47, 2003, pp. 15–18.

[7] A. A. Kolokolov, T. V. Levanova, and M. A. Loresh, “Algoritmy murav’inoj kolonii dlja zadach optimal’nogo razmeshhenija predprijatij”, *Omskij nauchnyj vestnik*, vol. 38, no. 4, pp. 62–67, 2006, in Russian.

[8] I. L. Vasiliev, K. B. Klimentova, and Y. A. Kochetov, “Novye nizhnie otsenki dlya zadachi razmeshcheniya s predpochteniyami klientov”, *Zhurnal vychislitel’noi matematiki i matematicheskoi fiziki*, vol. 49, no. 6, pp. 1055–1066, 2009, in Russian.

[9] E. V. Alekseeva and Y. A. Kochetov, “Geneticheskii lokal’nyi poisk dlya zadachi o p-mediane s predpochteniyami klientov”, *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii*, vol. 14, no. 1, pp. 3–31, 2007, in Russian.

[10] Y. A. Kochetov, M. G. Pashchenko, and A. Plyasunov, “O slozhnosti lokal’nogo poiska v zadache o p-mediane”, *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii*, vol. 12, no. 2, pp. 44–71, 2005, in Russian.

[11] E. K. Gimadi, “O veroyatnostnom analize priblizhennogo algoritma resheniya zadachi o p-mediane”, *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii*, vol. 17, no. 3, pp. 19–31, 2010, in Russian.

[12] I. N. Rosenberg, “Odnokriterial’naya minisummnaya zadacha razmeshcheniya tsentra obsluzhivaniya s lingvisticheskimi peremennymi”, *Izvestiya Yuzhnogo federal’nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, vol. 31, no. 2, pp. 56–63, 2003, in Russian.

[13] *GOST 27.002-2015: Dependability in technics. terms and definitions*, in Russian, 2015.

[14] N. Christofides, *Graph theory: An algorithmic approach*. Academic Press, Inc., 1975, 400 pp.

[15] A. Polovko and S. V. Gurov, *Osnovy teorii nadezhnosti*. BHV, 2006, 704 pp., in Russian.