〔研究ノート〕

数と色をつなぐペイント理論
―フェルマーの最終定理、四色問題、ABC 予想―

神　頭　広　好

Hiroyoshi Kozu（Aichi University）

Nagoya Campus 4-60-6 Hiraike-cho, Nakamura-ku, Nagoya Aichi, JAPAN 453-8771

Email: kozu@aichi-u.ac.jp

自称ペイント理論とは、数と色をつなぐ理論である。ここでは、この理論にもとづきペイント使用量と色の特徴から数学の難問と言われるフェルマーの最終定理、四色問題、ABC 予想に挑戦する。

ペイント理論にもとづくフェルマーの最終定理
Fermat's last theorem based on paint theory

Abstract

In this paper, based on the paint theory, applying the binomial theorem to the nth-order equation for the amount of three different paint colors used, we found that there were many mixed colors in the world of colors. Next, to maintain the world of three different colors, we needed only quadratic equation by the conversion between the

amount of paint used and the brightness of the color. Finally, Fermat's last theorem was proved by repeating the conversion for the brightness and the mount of the mixed color.

はじめに

17世紀にピエール・ド・フェルマーによって予想された定理とは、「$x^n + y^n = z^n$ を満たす３以上の自然数 n に対して自然数の組（x, y, z）は存在しない」というものである。これは、フェルマーの最終定理と呼ばれ、1995年にイギリスの数学者、アンドリュー・ワイルズによって証明された[1]。

ここでは、独自で考案したペイント理論[2]にもとづいて、フェルマーの最終定理を導出する。

フェルマーの最終定理の導出

ここでは、色と数とが共存する世界を考え、ペイント理論として以下の仮定が設定される。

（1）3つの異なる色のペイントが存在し、ペイントの使用量は自然数で表される。また各ペイントによって混合された色 (混合色) はそれに使われた単色[3]の積として表される。ここでは、ペイントは単色が詰まったものである。

（2）色の共通の尺度は明度[4]であり、それは自然数で表される。

1　この証明の歴史的経緯については、Amir（1996）、Simon（1997）、加藤 (2009、第11章)、ニュートン別冊 (2022、７) 等で平易に説明されている。

2　これは、ペイントの使用量と色の性質から数としての和と色の掛け合わせとしての積を融合させた理論である。この考え方は、kozu（2022、pp.1-9）にもとづいている。

3　これについては、つぎの２つの説明がなされている。1. 1色だけで他の色のまじっていない色。2. プリズムによって太陽光線を分光したときの七原色の一つ一つの色。（単色（たんしょく）の意味 - goo 国語辞書）ここでは、単純化のために１を採用する。

4　これは、「どのくらい明るいか」を表しており、明るい色は白に近く、暗い色は黒に近い

（3）同色に同色を掛け合わせても、また同色に数値を掛け合わせてもその明度は変わらない。

上記の仮定にもとづいて、フェルマーの最終定理を導出する。

まず、この定理に登場する式は、

$$x^n + y^n = z^n \tag{1}$$

である。ただし、異なる色を有するペイント x、y および z は使用量を示す。

（1）に、$n=1$ を代入すると、

$$x + y = z \tag{2}$$

で表される。

さらに、（2）の両辺を二乗すると、

$$(x+y)^2 = z^2 \tag{3}$$

で表される。

ところで、（1）を二項定理の一般式で展開すると、

$$(x+y)^n = x^n + {}_nC_1 x^{n-1} y + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_{n-2} x^2 y^{n-2} + {}_nC_{n-1} x y^{n-1} + y^n = z^n \tag{4}$$

で表される。

また、（3）の左辺を展開すると、

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = z^2 \tag{5}$$

である。（5）において、3色ではなく 4 色が存在するため、3 色にするためには、色の世界において、混合色は単色の積で表されることから、混合色 xy は同色（同

ことを示している。明度は色相に属さず、純色の中ではニュートラルな黄色が最も明度が高く、ニュートラルな青が最も明度が低いとされている。（ 出所：色 - Wikipedia）

明度）としての z に対応しなければならない。一方、（4）から、$3 \leq n$ の場合は、コンビネーション C が付されたところの異なる混合色は幾つも存在するために、これらの混合色と z は1:1の対応ができない。したがって、色の明度としての式は、$n = 2$ の場合に限り、

$$2xy = z^2 \tag{6}$$

で表される。ただし、仮定（3）から明度において（6）は、

$$xy = z \tag{7}$$

と書くこともできる。ただし、（7）は（2）からも導かれる。

さらに、（6）をペイント使用量に変換すると、左辺および右辺は、

$$2xy \to 2(x + y) \to 2x + 2y \tag{8}$$

$$z^2 \to 2z \tag{9}$$

で表される。（8）および（9）から、（6）は、

$$2x + 2y = 2z \tag{10}$$

で表される。ただし、（10）は（2）に2を乗じることによっても導かれる。

つぎに、（10）から、各ペイントの使用量を色の明度に変換すると、

$$2x \to x^2 \tag{11}$$

$$2y \to y^2 \tag{12}$$

$$2z \to z^2 \tag{13}$$

で表される。

（11）、（12）、（13）から、（10）は、

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{14}$$

に書き換えられる。ただし、(14) は明度ごとに変換されたペイント使用量の積み重ねから成る式である。

結果として、(14) は (1) に $n=2$ を代入したものである。このことから、$n=2$ に対してのみ自然数の組 (x, y, z) が存在するというフェルマーの最終定理が導かれる。

なお、ここでは単色と混合色は区別することなく、混合色も明度が唯一ということでは単色でもあることを意味する。

おわりに

本研究では、ペイント理論にもとづいて、異なる３色のペイントの使用量に対して n 次式に2項定理を応用すると、色の世界において、幾つもの混合色が存在する。そこで３色の世界を維持するためには、ペイントの使用量と色の明度から、2次式でなければならない。ここでは2つの単色から成る混合色と他の単色の明度が一致する必要があり、この明度からペイント使用量に変換して、さらに、その使用量から明度に変換することによって、フェルマーの最終定理が導かれた[5]。

要約すると、数の世界→色の世界→数の世界のプロセスを通じて、フェルマーの最終定理が証明されたことになる。

5　この考え方は、タイヒミュラー理論およびそれを応用した望月教授による IUT 理論に近いような気がする。これらの理論については、加藤 (2019) および Newton 別冊 (2022、９) を参照せよ。

参考文献

Amir, D. A.（1996）*Fermat's Last Theorem* － *Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, Four Walls Eight Windows（吉永良正訳『天才数学者たちが挑んだ最大の難問』早川書房、2003年）

Kozu, H.（2022）*Space and Order of Four Colors*, Book series Vol.7, Institute of Managerial Research, Aichi University.（.\..-PDF.p.pwd (aichi-u.ac.jp)）

Simon, S.（1997）*Fermat's Last Theorem*, Conville & Walsh Limited（青木　薫訳『フェルマーの最終定理』新潮文庫、2006年）

加藤文元『物語　数学の歴史』中公新書、2009年

加藤文元『宇宙と宇宙をつなぐ数学』角川書店、2019年

安福　悠『発見・予想を積み重ねる―それが整数論』オーム社、2016年

山崎隆雄「フェルマー予想と ABC 予想（PDF）」『数学セミナー』2010年10月、2022年4月16日閲覧。

Newton 別冊「7フェルマーの最終定理」『数学の世界　数と数式編 [改定第2版]』ニュートンプレス、2022年

Newton 別冊「9 素数と難問 ABC 予想」『数学の世界　数と数式編 [改定第2版]』ニュートンプレス、2022年

ペイント理論による四色問題の解
Solving the four-color problem by paint theory

Abstract

In this paper, by applying the inequality consisting of the arithmetic mean and the geometric mean to the paint theory that the weight of the mixed color is the total weight of the single colors used, the world consisting of the mixed color with the strongest attraction and the three single colors was derived and by adjusting the weight of the three paints, we found that the map could be painted with only four colors.

はじめに

四色問題は1852年に、F. Guthrie によって提起された問題である。当時、これを証明することは易しく見えたが、オイラーの公式、トポロジーの理論、組み合わせの理論を駆使しても誰も解くことが出来なかった[6]。1976年になって、Appel and Haken によって、コンピュータを使って1000時間もかけて計算が行われ、四色問題を解決したとされている[7]。これについては、数学的エレガントな証明という意味において賛否両論ある。

最近、Kozu（2022）ではペイント間の重力モデルとペイントの性質を用いて、すべての地図は四色で塗分けられることを導いている。

本研究では、算術平均・幾何平均の不等式から色の概念を重視して、「混合色は使われたペイントの色の積で表され、混合色の重量はそこで使用されたペイントの重量の和とする」をペイント理論として、混合色の最大の引力を有す

6　これについては、Saaty and Kainen（1977）、Willson（2002）、一松（2016）によって説明されている。

7　これについては、Appel and Haken（1977）、竹内（1976）、Willson（2002）、一松（2016）を参照せよ。

る場合は、それを構成する３つの単色が存在しなければならないことを導く。その結果、混合色と３つの単色との引力関係から、すべての地図が４色のみで塗られることを明らかにする。

四色問題の解

まず、仮定として、色の異なる各ペイントの重量は１単位であり、混合色は各ペイントの色を掛け合わせたものである。また、その混合色の重量は各ペイントの重量の和である。ただし、混合色と区別する意味において、ペイントの色は単色[8]として扱う。

一般に、算術平均と幾何平均からなる不等式は、

$$n\sqrt[n]{abc\cdots z} \leq a+b+c+\cdots+z \tag{1}$$

で表される。ただし、a から z はそれぞれ異なる色のペイントの重量を、n は a から z までの個数をそれぞれ示す。

また、混合色は 本のペイントの色を完全に混ぜたもので、上記の仮定から、混合色の重量はペイントの重量の和であることから、

$$abc\cdots z \rightarrow a+b+c+\cdots+z \tag{2}$$

が成立する。(2) は、重量のみならず混合色とそれに使う色の数が等しいことを強調している。(以下同様)

さらに、(1) および (2) から、この段階においてペイントの数によっては、

$$n\sqrt[n]{a+b+c+\cdots+z} \leq a+b+c+\cdots+z \tag{3}$$

8　これについては、1. 1色だけで他の色のまじっていない色。2. プリズムによって太陽光線を分光したときの七原色の一つ一つの色。(単色（たんしょく）の意味 - goo 国語辞書）と定義されているが、ここでは、単純に１のみを採用する。

または、

$$n\sqrt[n]{a+b+c+\cdots+z} \geq a+b+c+\cdots+z \tag{4}$$

で書き換えられる。ただし、上記の仮定においてペイントの重量は $a=b=c=1$（単位）であることから、

$$a+b+c+\cdots+z=n \tag{5}$$

である。結果を見越して、(5) を (4) へ代入すると、

$$n\sqrt[n]{n} > n \tag{6}$$

を得る。さらに、

$$\sqrt[n]{n} > 1 \tag{7}$$

を得る。(6) の左辺は混合色の全ペイントに対する引力の大きさを、(7) の左辺は混合色の各ペイントに対する引力の大きさを示している。ただし、各色間の距離は微々たるものとして、それぞれ色間の引力に対して影響しないものとする。

ここで重要なことは、色から数へ変換することによって、不等式の不等号が逆転する場合がある。これはペイント理論の特徴である。

(7) から、混合色の各ペイントに対する引力としての大きさ m は、

$$m=\sqrt[n]{n} \tag{8}$$

で表される。

さらに、(8) から、m を最大化するペイントの数は、(8) を対数に変換することによって、

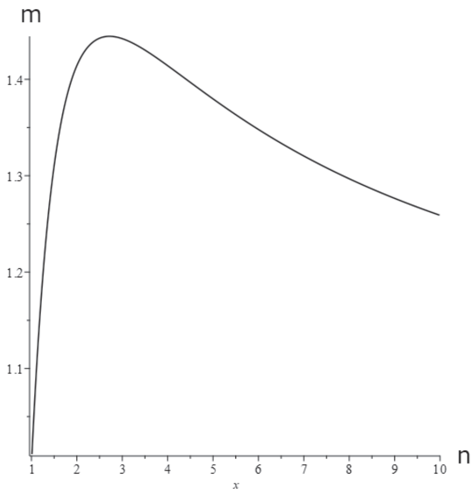
$$\log m=\frac{1}{n}\log n \tag{9}$$

で表される。(9) を n で微分してゼロとおくと、

$$\frac{d\log m}{dn} = -\frac{\log n}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 0 \qquad (10)$$

である。これを解くと、$n = e$（2.718…）であり、n は自然数であることから、e に最も近い自然数は $n = 3$ である。この時、混合色が最も強い引力を有する空間であり、１つの混合色と３つの単色の計４色が存在することになる。この時の各ペイントに対する混合色の引力は、$m = \sqrt[n]{n} = \sqrt[3]{3} \approx 1.442$ である。ちなみに、m の範囲は、$1 \le m \le e$ である。なお、(8) については、$1 \le n \le 10$ の範囲で図1が描かれている。

図1



ペイント使用量としての重量の観点から、混合色に１色のペイントが接することによって、それらによる引力がより増大して、他の２つの色のペイントも

順次接していくことになる。ただし、同重量のペイント同士は引力が作用しないために、お互い接することはないが、混合色と同色の引力によって同色が隣り合ってしまうことがある。その結果、四色問題が成立しない。

そこで、上記の仮定の各ペイントの重量が１単位であることを削除して、色によって３つのペイントの重量がそれぞれ異なるとすれば、または使用するペイントの量が異なるとして、

$$c < b < a \tag{11}$$

で表されるとする[9]。（11）については、$3! = 6$ から6通りの不等式が成立する。

さらに、各３つのペイントの使用量が異なってもそれらの総重量は変わらないとして、

$$a + b + c = 3 \tag{12}$$

を満たすとすれば、（8）へ $n = 3$ を代入した値1.442は変わらず、基本形としての図2および地図としての図３のように4色で塗分けられることになる。

言い換えると、混合色は、それぞれ3つのペイントを引っ張り、さらに３つのペイントの異色同士が引っ張られるために四色あれば地図は塗り分けられる。

また、ペイントの使用量は自然数でなくても構わないために、（12）を満たす3色の使用量の組み合わせは、（11）の制約のもとでもほぼ無数に存在する。それゆえ混合色も無数に存在することになる。

9　これは、ペイントの重量と色を対応させた、一種の秩序である。このような秩序にもとづいて Kozu（2022）では四色問題が解かれている。

図２

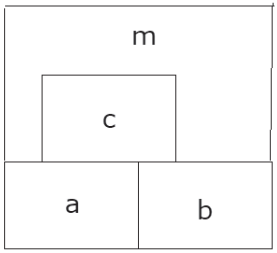
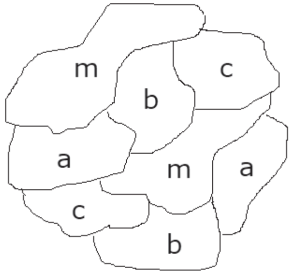


図３



注）図２および図３における m は混合色を示している。

おわりに

本論では、算術平均・幾何平均から成る不等式を混合色の重量は使用した単色の総重量とするペイント理論に応用することによって、最も強い引力を有する混合色とそれを構成する3つの単色からなる世界が導かれた。その結果、われわれは４色のみで地図が塗り分けられることが分かった。ここでも数学で活躍している e が登場してくるのは不思議な縁である。

本論において、興味深いことは3つのペイントの使用量が分かり、ペイントの使い方が私たちに委ねられると、４色だけで地図が塗り分けられることを暗に示していることである。

この四色問題を経営立地に応用すれば、異なる特徴を有する３つのチェーン店とこれら3つの特徴を融合するチェーン店があれば､この4つのチェーン店で､すべての地域においてそれぞれのチェーン店が接近することなく立地することが可能となる。これは、経営戦略論およびマーケティングの観点からも有益と考えられる。

参考文献

Appel, K and W. Haken（1977）*The Solution of the Four-Map- Problem*, SCIENTIFIC AMERICAN, October (島内剛一訳「4色問題の解決」『別冊　日経サイエンス172』）

Goldsmith, M.（2019）*Inside Mathematics: Understanding shapes and sizes*, Shelter Harbor Press Ltd, New York, USA (緑慎也訳『深淵なる「幾何学」の世界』創元社、2021年)

Kozu, H.（2022）*Space and Order of Four Colors*, Book series Vol.7, Institute of Managerial Research, Aichi University.（.\..-PDF.p.pwd（aichi-u.ac.jp））

Saaty,T.L and P.Kainen（1977）*The Four Color Problem―Assaults and Conquest*, McGraw-Hill.

Willson, R.（2002）*Four Colours Suffice*, Allen Lane Science. (茂木健一郎訳『四色問題』新潮文庫、2004年)

一松　信『四色問題』講談社、2016年

竹内外史「四色問題＝ついに解決！」『数学セミナー』1976年、10月号、pp.2-6

ペイント理論にもとづくABC予想
ABC conjecture based on paint theory

Abstract

In this paper, based on the paint theory that the total amount of paint used for the colors used is calculated as an addition, and the mixed color composed of those colors is calculated as a multiplication, Comparing the brightness of the mixed color consisting of three single colors with the brightness of the mixed color multiplied by the brightest single color of the three single colors, we derived the formula for the ABC conjecture.

はじめに

ABC予想（abc conjecture）は1985年にジョセフ・オステルスとデイビット・マンサーによって提起された数論の未解決予想である。ABC予想とは、「$a+b=c$ を満たす互いに素（1以外に共通の約数をもたない）な自然数の組 (a,b,c) に対し、積 abc の互いに異なる素因数の積を d と表す。このとき、任意の ε（$0<\varepsilon$）に対して、$d^{1+\varepsilon}<c$ を満たす組、(a, b, c) は有限個しか存在しない」という予想である[10]。すなわち、$d^{1+\varepsilon}<c$ を満たすものがたかだか有限個しか存在しないことを証明するものである[11]。

本研究の目的は、自称ペイント理論を用いて、ABC予想の解を導くことで

10　最近では、ABC予想が京都大学の望月教授によって証明されたとしている。(“「ABC予想」論文掲載　京大の望月教授証明、審査7年半”. 日経新聞 (日本経済新聞社). (2021年3月7日)

11　この定式化については、他に２つの定式が存在する。これについては、ABC予想 - Wikipediaを参照せよ。また、ABC予想については、黒川（2012、128-131）、黒川・小川（2018）、安福（2016、第７章）等によって説明されている。さらに文系向きには小山（2021、第20話ー第24話）、横山（2022、pp.244-247）によって平易に説明されている。また、ABC予想の回帰については、ノートとして神頭（2022）がある。

ある。ここでのペイント理論は、「混合色は単色[12]を掛け合わせたものであり、単色の積として表され、混合色の重量は、これに用いた各単色の使用量の和である」ことにもとづいている。この理論において、単色を素数と同一視することによってABC予想[13]を導く。

ABC予想の導出

ABC予想の導出に際し、以下の仮定が設定される。

(1) 混合色は、2つ以上の単色の積で表される。混合色の重量は、これに用いた各単色の使用量の和であることにもとづいている。

(2) 混合色および単色のすべての色において統一される尺度は明度[14]である。これは自然数で表される。また、同色に同色を掛け合わせてもその明度は変わらない。

(3) 単色は唯一の色であることから素数と同一視される。したがって、混合色は素数を除くすべての自然数（合成数）を意味する。

ここで、上記の仮定にもとづいて、ペイントの使用量から色に置き換えるならば、

$$a+b+c \rightarrow abc \tag{1}$$

および

12　単色とは、１色だけの色を示し、混合色とは他の色が混じっている色を示す。これについては、つぎの２つの説明がなされている。1. 1色だけで他の色のまじっていない色。2. プリズムによって太陽光線を分光したときの七原色の一つ一つの色。（単色（たんしょく）の意味 - goo国語辞書）ここでは、１のみを採用する。

13　これについては、ABC予想 - Wikipediaを参照せよ。

14　これは、「どのくらい明るいか」を表しており、明るい色は白に近く、暗い色は黒に近いことを示している。明度は色相に属さず、純色の中ではニュートラルな黄色が最も明度が高く、ニュートラルな青が最も明度が低いとされている。（ 出所：色 - Wikipedia）

$$a + b \to ab \tag{2}$$

で示される[15]。

ABC 予想における条件式は。

$$c = a + b \tag{3}$$

である。この式から、ペイント使用量の大きさの順位は、

$$a < b < c \quad (4)\ \text{または} \quad b < a < c \tag{5}$$

である。

また、(4) および (5) に従い、単色 c が単色 a および単色 b より高い明度を有しているとすると、

$$ab < c \tag{6}$$

で表される。(6) は、混合色が単色ではないことと一致する。

ここで、(1) に関して 3 つの単色 a、b、c のうち単色 c だけ使用量を増やすことによって明度の高い混合色に変換すると、

$$a + b + \gamma c \to (ab)c^{\gamma} \tag{7}$$

で示される。ただし、$1 < \gamma$ である。

また、(1) および (7) において明度の大きさを比較すると、

$$abc < (ab)c^{\gamma} = (abc)c^{\gamma - 1} \tag{8}$$

で表される。さらに、(8) の両辺を $(1+\varepsilon)$ で乗じると、

15　これは、純色 c の使用量が、間接的に混合色 ab の明度に関わっていることを意味している。

$$(abc)^{1+\varepsilon} < (abc)^{(1+\varepsilon)} c^{(\gamma-1)(1+\varepsilon)} \quad (9)$$

で表される。ここで、(9) の右辺において c の乗数 $(\gamma-1)(1+\varepsilon)$ を増やしていくと、すなわち混合色 *abc* に明度の大きい単色 *c* を掛け合わせていくと、究極的には、混合色 *abc* は単色 *c* の明度に近づいていく。それゆえ、(9) の右辺は、

$$(abc)^{(1+\varepsilon)} c^{(\gamma-1)(1+\varepsilon)} = c \quad (10)$$

で表される。しかし、混合色は単色になれないことから、(10) は、

$$(abc)^{(1+\varepsilon)} c^{(\gamma-1)(1+\varepsilon)} < c \quad (11)$$

でなければならない。その結果、(9) と (11) から、

$$d^{1+\varepsilon} < c \quad (12)$$

が導かれる。ただし、混合色の表示として $d = abc$ である。ところで (12) は、ABC予想の式を示す。

(12) は、(10) であっても成立する。また、明度の大きさが、例えば、$a < c < b$ または $c < a < b$ の場合などを考慮すると、$d^{1+\varepsilon} < c$ を満たす組 (*a, b, c*) が存在しない場合がある。したがってABC予想において満たされる組は有限個しか存在しないことが言える。

要約すると、ペイント使用量から色の明度への変換を通じて、ABC予想の式が成立する。

おわりに

本研究では、利用される色のペイントの総使用量は足し算として計算され、それらの色から成る混合色はかけ算として計算されるというペイント理論にもとづいて、３つの単色からなる混合色の明度とその3つの単色のうち最も明度

の大きい単色を乗じた混合色の明度を比較することによって、ABC 予想の式が導かれた。

そこでは、単色は素数として、混合色は合成数として、色から数の世界へ戻しても ABC 予想の意味は変わらないと考える。

最後に、ペイントの数と色の性質から成るペイント理論は、まさに IUT 理論[16]と同じことを数と色の次元で説明しているような気がする。

参考文献

Kozu, H.（2022）*Space and Order of Four Colors*, Book series Vol.7, Institute of Managerial Research, Aichi University.（ .\..-PDF.p.pwd（aichi-u.ac.jp））

加藤文元『宇宙と宇宙をつなぐ数学』角川書店、2019年

黒川信重「付録 数論の有名な予想のいくつか（1)abc 予想」『リーマン予想の探求 ABC から Z まで』技術評論社、2012年

黒川信重・小山信也『ABC 予想入門』PHP 研究所、2018年

神頭広好「ABC 予想への回帰ー AC 予想、準 ABC 予想および平均公式にもとづいてー」『経営総合科学研究所』第117号、2022年10月。（014-117_KOZU（aichi-u.ac.jp））

小島寛之『素数ほどステキな数はない』技術評論社、2021年

小山信也『日本一わかりやすい ABC 予想』ビジネス教育出版社、2021年。

芹沢正三『素数入門』講談社ブルーバックス、2002年

田口雄一郎 .“abc 予想の話”. 東京工業大学 理学院 数学系 . 2022年４月16日閲覧。

西来路文朗・清水健一『素数が奏でる物語』講談社ブルーバックス、2015年

安福　悠『発見・予想を積み重ねるーそれが整数論』オーム社、2016年

山崎隆雄「フェルマー予想と ABC 予想（PDF）」『数学セミナー』2010年10月、2022年4月16日閲覧。

横山明日希「ABC 予想」『数式図鑑』講談社ブルーバックス、2022年

Newton 別冊「９素数と難問 ABC 予想」『数学の世界　数と数式編 [改定第2版]』ニュートンプレス、2022年9月

16　これは、「次元の異なる二つの舞台を用意して足し算とかけ算を分離することで、足し算とかけ算の関係性を解き明かそうとする理論」である。（Newton 別冊（2022、9）を参照 ）

最後に、ペイント理論を用いて、コールドバッハ予想およびリーマン予想なども解かれているが、今回の紀要はページ数に制限があり、余白が少なすぎて掲載することができなかった。

近いうちに、これらの予想などを含めて、叢書にまとめることを考えている。