ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-183-200

Поступила в редакцию 14.11.2022
Received 14.11.2022

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА НА ОТРЕЗКЕ СУММАМИ ФЕЙЕРА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ – ЧЕБЫШЕВА

Аннотация. Изучаются аппроксимации суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с ограничениями на число геометрически различных полюсов. В качестве объекта исследований выступает класс функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке [–1, 1]. Установлены интегральные представления приближений и оценки сверху равномерных приближений. В случае, когда граничная функция имеет на отрезке [–1, 1] степенную особенность, найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Подробно исследуется задача об аппроксимации интегралов Пуассона при двух геометрически различных полюсах аппроксимирующей рациональной функции. В этом случае найдены оптимальные значения параметров, при которых достигается наибольшая скорость равномерных приближений изучаемым методом. В случае, когда интеграл Пуассона является представлением функции $|x|^s$, $s \in (0, 1]$, оценки равномерных приближений являются выше соответствующих полиномиальных аналогов. В качестве следствия получены асимптотические выражения точных верхних граней отклонений сумм Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева на классах интегралов Пуассона на отрезке, а также оценки равномерных приближений функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке, с граничной функцией, имеющей степенную особенность, суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева.

Ключевые слова: рациональные интегральные операторы, суммы Фейера, классы интегралов Пуассона, асимптотические оценки, равномерные приближения

Для цитирования. Поцейко, П. Г. О рациональных приближениях интегралов Пуассона на отрезке суммами Фейера интегральных операторов Фурье – Чебышева / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2023. – Т. 59, № 3. – С. 183–200. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-183-200

Pavel G. Patseika, Yauheni A. Rouba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ON RATIONAL APPROXIMATIONS OF POISSON INTEGRALS ON THE INTERVAL BY FEJER SUMS OF FOURIER – CHEBYSHEV INTEGRAL OPERATORS

Abstract. Approximations of the Fejér sums of the Fourier – Chebyshev rational integral operators with restrictions on numerical geometrically different poles are herein studied. The object of research is the class of functions defined by Poisson integrals on the segment [–1, 1]. Integral representations of approximations and upper estimates of uniform approximations are established. In the case when the boundary function has a power singularity on the segment [–1, 1], upper estimates of pointwise and uniform approximations are found, and the asymptotic representation of the majorant of uniform approximations is found. As a separate problem, approximations of Poisson integrals for two geometrically different poles of the approximating rational function are considered. In this case, the optimal values of the parameters at which the highest rate of uniform approximations by the studied method is achieved are found. If the function $|x|^s$, $s \in (0, 1]$, is approximated, then this rate is higher than the corresponding polynomial analogues. Consequently, asymptotic expressions of the exact upper bounds of the deviations of Fejer sums of polynomial Fourier – Chebyshev series on classes of Poisson integrals on a segment are obtained. Estimates of uniform approximations by Fejer sums of polynomial Fourier – Chebyshev series of functions given by Poisson integrals on a segment with a boundary function having a power singularity are also obtained.

Keywords: rational integral operators, Feyer sums, classes of Poisson integrals, asymptotic estimates, uniform approximations

For citation. Patseika P. G., Rouba Y. A. On rational approximations of Poisson integrals on the interval by Fejer sums of Fourier – Chebyshev integral operators. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2023, vol. 59, no. 3, pp. 183–200 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2023-59-3-183-200

Введение. Задачи, связанные с полиномиальной аппроксимацией на классах интегралов Пуассона

$$f(x)=A_0+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t)\sum_{k=1}^{+\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dt,\quad q\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R},\ \|\varphi(\cdot)\|_C\le 1, \tag{1}$$

представляющих собой 2π-периодические функции, исследовались в трудах многих известных математиков [1–3] и активно рассматриваются в последние 20 лет [4–6].

Средние арифметические тригонометрических рядов Фурье 2π-периодических функций нашли широкое применение при решении задач аппроксимации [7–15] и к настоящему времени в полиномиальной аппроксимации достаточно хорошо изучены. Приближения на классах интегралов Пуассона (1) суммами Фейера тригонометрических рядов Фурье исследованы О. А. Новиковым и О. Г. Ровенской [16–18].

Наряду с тригонометрическими интегралами Пуассона (1) имеет смысл рассматривать класс функций, представимых алгебраическими интегралами Пуассона на отрезке [–1, 1]. Для каждой непрерывной на отрезке [–1, 1] функции $\varphi(x)$ такой, что $\|\varphi(x)\|_{C[-1,1]}\le 1$, рассмотрим выражение

$$f_{r,\varphi}(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n c_n T_n(x),\quad x\in[-1,1],\ r\in(0,1), \tag{2}$$

где $T_n(x)=\cos n\arccos x$, $n=0,1,\ldots,$ – ортогональная с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ на отрезке [–1, 1] система полиномов Чебышева первого рода и

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\varphi(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt,\quad k=0,1,\ldots,$$

– коэффициенты Фурье по этой системе. Выражение (2) естественно назвать суммами Абеля – Пуассона рядов Фурье – Чебышева. Известно [19, 20], что для функции $f_{r,\varphi}(x)$ (2) справедливо интегральное представление

$$f_{r,\varphi}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\varphi(\cos\tau)[P_r(\tau-\theta)+P_r(\tau+\theta)]d\tau,\quad P_r(u)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos u+r^2},\ x=\cos\theta, \tag{3}$$

называемое интегралом Пуассона.

В рациональной аппроксимации построены интегральные операторы, являющиеся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [21–23]. В 1979 г. Е. А. Ровба [24] ввел интегральный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышева – Маркова, который является обобщением полиномиального оператора Фурье – Чебышева.

Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо являются действительными и $|a_k|<1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке [–1, 1] с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор Фурье – Чебышева (см. [24]):

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(u,v)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,\quad x=\cos u, \tag{4}$$

где

$$\lambda_n(u,v)=\int_u^v \lambda_n(y)dy,\quad \lambda_n(y)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1+2|\alpha_k|\cos(y-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2},$$

$\alpha_k=a_k\Big/(1+\sqrt{1-a_k^2}),\ k=1,2,\ldots,$ причем значение квадратного корня выбирается таким образом, чтобы $|\alpha_k|\le 1.$ Оператор $s_n: f\to\mathbb{R}_n(A),$ где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_kx)},$$

A – множество параметров $(a_1,\ldots,a_n)$, $p_n(x)$ – некоторый многочлен степени не выше n, коэффициенты которого зависят от $a_k,\ k=1,2,\ldots,n,$ функции f, и $s_n(1,x)\equiv 1.$ В частности, если положить $a_k=0,\ k=1,\ldots,n,$ то $s_n(f, x)$ есть частичная сумма ряда Фурье по многочленам Чебышева первого рода.

В [25] исследовались рациональные аппроксимации интегралов Пуассона на отрезке [–1, 1] оператором (4). Установлены оценки равномерных приближений, а в случае, когда граничная функция имеет на отрезке [–1, 1] степенную особенность, подробно рассмотрен случай двух геометрически различных полюсов у аппроксимирующей функции. Были найдены оптимальные значения параметров, при которых равномерные приближения посредством этих операторов имеют более высокую скорость стремления к нулю в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В настоящей работе продолжим изучение рациональных приближений функций, задаваемых интегралами Пуассона (3). Представляет интерес исследовать аппроксимационные свойства операторов, представляющих собой суммы Фейера рациональных функций (4), на классах интегралов Пуассона.

Суммы Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева. Пусть $q,\ q\in(0,n),$ – произвольное натуральное число. A_q есть множество параметров из A таких, что среди чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n,$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна m,n = mq. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим среднее арифметическое рациональных функций (4) следующим образом:

$$\sigma_{n,q}(f,x)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}s_{kq}(f,x),\quad x\in[-1,1], m\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{5}$$

Выражение (5) естественно назвать суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева с q геометрически различными полюсами. Из представления (5) также следует, что оператор $\sigma_{n,q}: f\to\mathbb{R}_n(A),$ где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\left(\prod_{k=1}^{q}(1+a_kx)\right)^m},$$

$p_n(x)\in\mathbb{P}_n$ и является точным на константах.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_n(x,A_q,\sigma_n)\ =f_{r,\varphi}(x)-\sigma_{n,q}(f_{r,\varphi},x),\quad x\in[-1,1], \tag{6}$$

$$\varepsilon_n(A_q,\sigma_n)\ =\left\|f_{r,\varphi}(x)-\sigma_{n,q}(f_{r,\varphi},x)\right\|_{C[-1,1]},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{7}$$

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Для приближений интегралов Пуассона* (3) *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера* (5) *имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_n(x, A_q, \sigma_n) = -\frac{r}{\pi(m+1)} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varphi(\cos\tau)\cos\psi_n(r,\tau,\theta)}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{1-2\pi_q^{m+1}(r,\tau)\cos\big((m+1)\Omega_q(r,\tau,\theta)\big)+\pi_q^{2(m+1)}(r,\tau)}{1-2\pi_q(r,\tau)\cos\Omega_q(r,\tau,\theta)+\pi_q^2(r,\tau)}}\,d\tau, \quad r\in(0,1), \; x=\cos\theta, \tag{8}$$

где

$$\psi_n(r,\tau,\theta) = \arg\frac{1-\overline{\omega_q^{m+1}(rz)}\omega_q^{m+1}(\xi)}{(r-z/\xi)\big(1-\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi)\big)}, \quad \omega_q(\xi) = \prod_{k=1}^{q}\frac{\xi-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k\xi}, \; z=\mathrm{e}^{i\tau}, \; \xi=\mathrm{e}^{i\theta}, \; x=\cos\theta,$$

$$\pi_q(r,\tau) = \prod_{k=1}^{q}\sqrt{\frac{r^2-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2}{1-2\alpha_k r\cos\tau+\alpha_k^2 r^2}}, \quad \Omega_q(r,\tau,\theta) = \arg\Big(\omega_q(rz)\overline{\omega_q(\xi)}\Big);$$

2) равномерная оценка

$$\varepsilon_n(A_q,\sigma_n) \le \frac{r}{\pi(m+1)} \max_{x\in[-1,1]} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-\pi_q^{2(m+1)}(r,\tau)}{1-\pi_q^2(r,\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{1-2r\cos(\tau-\theta)+r^2}}, \quad r\in(0,1), m\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Доказательство. Известно [25], что для приближений интегралов Пуассона (3) оператором (4) в общем случае имеет место интегральное представление

$$\varepsilon_n(x, A, s_n) = -\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\left[\frac{\overline{\omega_n(\xi)}\omega_n(rz)}{r-\xi/z} + \frac{\omega_n(\xi)\overline{\omega_n(rz)}}{r-z/\xi}\right]d\tau,$$

где $z=\mathrm{e}^{i\tau}, \xi=\mathrm{e}^{i\theta}, x=\cos\theta$, $\omega_n(\cdot)$ определена в (8). В случае ограничений на количество геометрически различных полюсов, последнее представление примет вид

$$\varepsilon_{kq}(x, A_q, s_n) = -\frac{r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\left[\frac{\overline{\omega_q^k(\xi)}\omega_q^k(rz)}{r-\xi/z} + \frac{\omega_q^k(\xi)\overline{\omega_q^k(rz)}}{r-z/\xi}\right]d\tau, \quad k=0,1,\dots\,. \tag{10}$$

Просуммируем правую и левую части равенства (10) по k от 0 до m и разделим их на $m+1$. Тогда

$$\varepsilon_n(x, A_q, \sigma_n) = -\frac{r}{2\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\times$$

$$\times\left[\frac{1-\overline{\omega_q^{m+1}(\xi)}\omega_q^{m+1}(rz)}{(r-\xi/z)\big(1-\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(rz)\big)} + \frac{1-\overline{\omega_q^{m+1}(rz)}\omega_q^{m+1}(\xi)}{(r-z/\xi)\big(1-\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi)\big)}\right]d\tau, \quad z=\mathrm{e}^{i\tau}, \xi=\mathrm{e}^{i\theta}, x=\cos\theta. \tag{11}$$

Заметив, что в квадратных скобках подынтегрального выражения последнего интеграла одно слагаемое является комплексным сопряжением другого, чтобы прийти к представлению (8) достаточно применить соотношения

$$\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi) = \pi_q(r,\tau)\exp\Big[i\arg\Big(\overline{\omega_q(rz)}\omega_q(\xi)\Big)\Big]$$

и выполнить соответствующие преобразования.

Из (8) легко следует (9), если учесть, что $\|\varphi(x)\|_{C[-1,1]} \le 1$, и применить известную оценку

$$\sqrt{\frac{1-2r^{m+1}\cos(m+1)u+r^{2(m+1)}}{1-2r\cos u+r^2}} \le \frac{1-r^{m+1}}{1-r}, \quad r\in(0,1).$$

Теорема 1 доказана.

Пусть $\mathrm{K}_r[-1,1]$ – класс функций, представимых интегралами Пуассона (3) с граничной функцией $\|\varphi(x)\|_{C[-1,1]} \le 1.$ Следуя [16], рассмотрим величину

$$\mathcal{E}_n\left(\mathrm{K}_r[-1,1], \sigma_n^{(0)}\right) = \sup_{f\in \mathrm{K}_r[-1,1]} \left\| f(x) - \sigma_n^{(0)}(f,x)\right\|_{C[-1,1]}, \quad r\in(0,1),$$

представляющую собой приближения на всем классе интегралов Пуассона $\mathrm{K}_r[-1,1]$ суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева $\sigma_n^{(0)}(f,x).$

С л е д с т в и е 1. *Имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathcal{E}_n\left(\mathrm{K}_r[-1,1], \sigma_n^{(0)}\right) = \frac{4r}{\pi(1-r^2)(n+1)} + O\left(\frac{r^{n+1}}{(1-r^2)(n+1)}\right), \quad r\in(0,1),\ n\to\infty. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В теореме 1 положим $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_q=0.$ Тогда $\varepsilon_n(x,O,\sigma_n)=\varepsilon_n^{(0)}(x,\sigma_n)$ представляют собой поточечные (6) приближения интегралов Пуассона (3) суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева $\sigma_n^{(0)}(f,x).$ При этом из представления (11) получим

$$\varepsilon_n^{(0)}(x,\sigma_n^{(0)}) = \frac{-r}{2\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\cos\tau)\left[\frac{1-(r\bar{\xi}z)^{n+1}}{(r-\xi/z)(1-r\bar{\xi}z)} + \frac{1-(r\bar{z}\xi)^{n+1}}{(r-z/\xi)(1-r\bar{z}\xi)}\right]d\tau,$$

где $z=\mathrm{e}^{i\tau},\ \xi=\mathrm{e}^{i\theta},\ x=\cos\theta,\ 0<r<1.$ Воспользовавшись 2π-периодичностью подынтегральной функции, придем к выражению

$$\varepsilon_n^{(0)}\left(x,\sigma_n^{(0)}\right) =$$

$$= \frac{r}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\big(\cos(\tau+\theta)\big)\frac{\left((1+r^2)\cos\tau-2r\right) - r^{n+1}\left(r^2\cos n\tau - 2r\cos(n+1)\tau + \cos(n+2)\tau\right)}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau.$$

Из последнего представления нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n^{(0)}(x,\sigma_n^{(0)}) = \frac{r}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\big(\cos(\tau+\theta)\big)\frac{(1+r^2)\cos\tau-2r}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau + O\left(\frac{r^{n+1}}{(1-r^2)(n+1)}\right),$$
$$x=\cos\theta,\ n\to\infty.$$

Отсюда, учитывая, что $\|\varphi(\cdot)\|_{C[-1,1]}\le 1,$ следует оценка

$$|\varepsilon_n^{(0)}(x,\sigma_n)| \le \frac{r}{\pi(n+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|(1+r^2)\cos\tau-2r|}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau + O\left(\frac{r^{n+1}}{(1-r^2)(n+1)}\right), \quad n\to\infty. \tag{13}$$

С другой стороны, оценка (13) достигается асимптотически при $x = 1$ на подходящей последовательности непрерывных функций, сходящихся точечно к функции $\varphi_0(t)=\operatorname{sgn}\left((1+r^2)t-2r\right).$ Поэтому из (13) и определения точной верхней грани следует

$$\mathcal{E}_n\left(\mathrm{K}_r[-1,1], \sigma_n^{(0)}\right) = \frac{2r}{\pi(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{|(1+r^2)\cos\tau-2r|}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau + O\left(\frac{r^{n+1}}{(1-r^2)(n+1)}\right), \quad n\to\infty. \tag{14}$$

Разбивая интеграл справа на два интеграла по промежуткам

$$\left[0, \arccos\left(2r/(1+r^2)\right)\right], \quad \left[\arccos\left((2r/(1+r^2)\right),\pi\right]$$

и учитывая, что

$$\int\frac{(1+r^2)\cos\tau-2r}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau = \frac{\sin\tau}{1-2r\cos\tau+r^2}+C, \quad r\in(0,1),$$

где C – постоянное, получим

$$\int_0^{\pi}\frac{|(1+r^2)\cos\tau-2r|}{(1-2r\cos\tau+r^2)^2}d\tau=\frac{2}{1-r^2},\quad r\in(0,1).$$

Из (14) и последнего равенства придем к (12). Следствие 1 доказано.

З а м е ч а н и е. Асимптотическое равенство (12) есть алгебраический аналог соответствующих результатов из [16–18] при определенных условиях на граничную функцию φ.

Приближения интегралов Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность. При решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа возникают случаи, когда граничная функция имеет вид $\varphi(x)=|x|^s,\ s>0.$ Рассмотрим такой случай.

Ввиду четности граничной функции φ необходимо специальным образом выбрать параметры аппроксимирующей рациональной функции. Пусть, как и прежде, $q,\ q\in(0,n)$ – произвольное натуральное число, $m, n=mq,\ n\ge q.$ A_{2q} – множество из $2q$ параметров, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_k=i\gamma_k,\quad \alpha_{q+k}=-i\gamma_k,\quad \gamma_k\ge 0,\ k=1,2,\dots,q.$$

То есть будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями порядка $2n$ с $2q$ геометрически различными чисто мнимыми полюсами в расширенной комплексной плоскости.

В обозначениях (6) и (7) изучаемые приближения примут вид

$$\varepsilon_{2n}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=f_{r,|\cdot|^s}(x)-\sigma_{2n,2q}(f_{r,|\cdot|^s},x),\quad x\in[-1,1],$$

$$\varepsilon_{2n}(A_{2q},\sigma_{2n})=\left\|f_{r,|\cdot|^s}(x)-\sigma_{2n,2q}(f_{r,|\cdot|^s},x)\right\|_{C[-1,1]},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 2. *Если* $\varphi(t)=|t|^s,\ s\in(0,2),$ *то для приближений интегралов Пуассона* (3) *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера* (5) *имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}\cos\Theta_{2q}(t,x)}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1+2(-1)^m\chi_{2q}^{m+1}(t)M_{2q(m+1)}(x)+\chi_{2q}^{2(m+1)}(t)}{1+2\chi_{2q}(t)M_{2q}(x)+\chi_{2q}^2(t)}}dt,\quad x=\cos\theta,\ r\in(0,1),\tag{15}$$

где

$$\Theta_{2q}(t,x)=\arg\frac{\xi^2\left(1+(-1)^m\omega_{2q}^{m+1}(\xi)\chi_{2q}^{m+1}(t)\right)}{(1+t^2\xi^2)\left(1+\omega_{2q}(\xi)\chi_{2q}(t)\right)},\quad \omega_{2q}(\xi)=\prod_{k=1}^{q}\frac{\xi^2+\gamma_k^2}{1+\gamma_k^2\xi^2},\quad \xi=e^{i\theta},\ \chi_{2q}(t)=\prod_{k=1}^{q}\frac{t^2-\gamma_k^2}{1-\gamma_k^2u^2},$$

$M_{2q}(x)$ *– косинус-дробь Чебышева – Маркова порядка 2q;*

2) оценка поточечных приближений

$$|\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})|\le\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{1+2(-1)^m\chi_{2q}^{m+1}(t)M_{2q(m+1)}(x)+\chi_{2q}^{2(m+1)}(t)}{1+2\chi_{2q}(t)M_{2q}(x)+\chi_{2q}^2(t)}}dt,\quad x\in[-1,1],\ r\in(0,1);\tag{16}$$

3) оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})\le\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n}),\quad n=mq,\ n\in\mathbb{N},\tag{17}$$

где

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}}{1-t^2}\frac{1-|\chi_{2q}^{m+1}(t)|}{1-|\chi_{2q}(t)|}dt,\quad r\in(0,1). \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [25], что для приближений интегралов Пуассона с граничной функцией $\varphi(t)=|t|^s,\ s>0,$ интегральным оператором (4), образом которого является рациональная функция порядка $2k,\ k=0,1,\ldots,$ имеет место представление

$$\varepsilon_{2k}(x,A,s_{2k})=(-1)^k\frac{2^{1-s}}{r^s\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r(r^2-t^2)^s t^{1-s}\left[\frac{\overline{\omega_{2k}(\xi)}}{t^2+\xi^2}+\frac{\xi^2\omega_{2k}(\xi)}{1+t^2\xi^2}\right]\chi_{2k}(t)dt,\quad x=\cos\theta,\ \xi=\mathrm{e}^{i\theta},$$

где $\omega_{2n}(\cdot)$ и $\chi_{2n}(\cdot)$ определены в (15). С ограничениями на количество геометрически различных полюсов, последнее представление примет вид

$$\varepsilon_{2k,2q}(x,A_{2q},s_{2k})=(-1)^k\frac{2^{1-s}}{r^s\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r(r^2-t^2)^s t^{1-s}\left[\frac{\overline{\omega_{2q}^k(\xi)}}{t^2+\xi^2}+\frac{\xi^2\omega_{2q}^k(\xi)}{1+t^2\xi^2}\right]\chi_{2q}^k(t)dt.$$

Учитывая, что

$$\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^m\varepsilon_{2k,2q}(x,A_{2q},s_{2k}),$$

получим

$$\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2^{1-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r(r^2-t^2)^s t^{1-s}\times$$

$$\times\left[\frac{\xi^2}{1+t^2\xi^2}\sum_{k=0}^m(-1)^k\omega_{2q}^k(\xi)\chi_{2q}^k(t)+\frac{1}{t^2+\xi^2}\sum_{k=0}^m(-1)^k\overline{\omega_{2q}^k(\xi)}\chi_{2q}^k(t)\right]dt. \tag{19}$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями, получим

$$\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2^{1-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r(r^2-t^2)^s t^{1-s}\times$$

$$\times\left[\frac{\xi^2}{1+t^2\xi^2}\frac{1+(-1)^m\omega_{2q}^{m+1}(\xi)\chi_{2q}^{m+1}(t)}{1+\omega_{2q}(\xi)\chi_{2q}(t)}+\frac{1}{t^2+\xi^2}\frac{1+(-1)^m\overline{\omega_{2q}^{m+1}(\xi)}\chi_{2q}^{m+1}(t)}{1+\overline{\omega_{2q}(\xi)}\chi_{2q}(t)}\right]dt.$$

Слагаемые в квадратных скобках являются комплексными сопряжениями друг друга. Следовательно, их сумма является действительнозначной функцией, представляющей собой произведение их модуля на косинус некоторого угла. Выполнив некоторые алгебраические преобразования и заметив, что функция

$$M_{2q}(x)=\frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^q\frac{\xi^2+\gamma_k^2}{1+\gamma_k^2\xi^2}+\prod_{k=1}^q\frac{1+\gamma_k^2\xi^2}{\xi^2+\gamma_k^2}\right),\quad \xi=\mathrm{e}^{i\theta},\ x=\cos\theta,$$

представляет собой алгебраические дроби Чебышева – Маркова [26], придем к (15). Оценка (16) легко следует из (15).

Для доказательства оценки (17) обратимся к представлению приближений (19). Принимая во внимание, что

$$|\omega_{2q}(\xi)|=1,\ \xi=\mathrm{e}^{i\theta},\qquad |1+t^2\xi^2|=|t^2+\xi^2|=\sqrt{1+2t^2\cos2\theta+t^4},$$

имеем

$$|\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})|\le\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}}\sum_{k=0}^m|\chi_{2q}^k(t)|dt.$$

Воспользовавшись известной формулой суммы геометрической прогрессии и неравенством

$$\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}\ge 1-t^2,\quad \theta\in\mathbb{R},\quad t\in[0,1],$$

из последней оценки придем к (17). Теорема 2 доказана.

Обратим внимание, что при $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_q=0$ величины $\varepsilon_{2n,2q}(x,O,\sigma_{2n})=\varepsilon_{2n}^{(0)}(x,\sigma_{2n})$, $\varepsilon_{2n,2q}(O,\sigma_{2n})=\varepsilon_{2n}^{(0)}(\sigma_{2n})$ – соответственно поточечные и равномерные приближения интегралов Пуассона суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева. Отсюда получим

С л е д с т в и е 2. *В условиях теоремы 2 для приближений интегралов Пуассона суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева справедливы:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(x,\sigma_{2n})=\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r(r^2-t^2)^s t^{1-s}\times$$

$$\times\frac{(1+t^4)\cos 2\theta+2t^2+(-1)^n t^{2n+2}\left(t^4T_{2n}(x)+2t^2T_{2n+2}(x)+T_{2n+4}(x)\right)}{(1+2t^2\cos 2\theta+t^4)^2}dt,\quad x=\cos\theta,\ r\in(0,1),$$

где $T_k(x)$ – полином Чебышева первого рода степени k;

2) оценка поточечных приближений

$$|\varepsilon_{2n}^{(0)}(x,\sigma_{2n})|\le\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}\sqrt{1+2(-1)^n t^{2n+2}T_{2n+2}(x)+t^{4n+4}}}{1+2t^2\cos 2\theta+t^4}dt; \tag{20}$$

3) асимптотическая оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(\sigma_{2n})=\frac{2^{2-s}}{r^s\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^r\frac{(r^2-t^2)^s t^{1-s}}{(1-t^2)^2}dt+O\left(\frac{r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^2(n+1)^{s+2}}\right),\quad n\in\mathbb{N},\ r\in(0,1). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегральное представление приближений следует из (19), если положить $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_q=0$ и провести некоторые алгебраические преобразования. Оценка (20) при тех же положениях относительно параметров следует из (16). Оценка (21) следует из (17), если заметить, что максимальное значение приближений полиномиальными суммами Фейера достигается при $x=0$, что соответствует значению параметра $\theta=\pi/2$.

Известно [27], что интеграл Пуассона является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа. При этом на границе области для любой непрерывной граничной функции $\varphi(x)$, $x\in[-1,1]$

$$f_{1,\varphi}(x)=\varphi(x).$$

Переходя в теореме 2 к пределу при $r\to 1$, получим

С л е д с т в и е 3 (приближения функции со степенной особенностью). *Для приближений функции* $|x|^s$, $s\in(0,2)$, *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера* (5) *имеют место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2^{2-s}}{\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\cos\Theta_{2q}(t,x)}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^2}}\sqrt{\frac{1+2(-1)^m\chi_{2q}^{m+1}(t)M_{2q(m+1)}(x)+\chi_{2q}^{2(m+1)}(t)}{1+2\chi_{2q}(t)M_{2q}(x)+\chi_{2q}^2(t)}}dt,\quad x=\cos\theta, \tag{22}$$

где $\Theta_{2q}(t,x)$ *из* (15), $M_{2q}(x)$ *– косинус-дробь Чебышева – Маркова порядка 2q;*

2) оценка поточечных приближений

$$|\varepsilon_{2n,2q}(x,A_{2q},\sigma_{2n})|\leq\frac{2^{2-s}}{\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2\theta+t^2}}\sqrt{\frac{1+2(-1)^m\chi_{2q}^{m+1}(t)M_{2q(m+1)}(x)+\chi_{2q}^{2(m+1)}(t)}{1+2\chi_{2q}(t)M_{2q}(x)+\chi_{2q}^2(t)}}dt,\quad x\in[-1,1]; \tag{23}$$

3) оценка равномерных приближений

$$\varepsilon_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})\leq\frac{2^{2-s}}{\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\frac{1-|\chi_{2q}^{m+1}(t)|}{1-|\chi_{2q}(t)|}dt,\quad n=mq. \tag{24}$$

Исследование приближений функции $|x|^s, s\in(0,2),$ на отрезке [–1, 1] рациональными суммами Фейера, т. е. выражений (22)–(24), представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений. Имеет смысл получить асимптотическое выражение величины (18) при $n\to\infty$. С этой целью в интеграле справа выполним замену переменного по формуле

$$t^2=(1-u)/(1+u),\ dt=-du\Big/\left((1-u)^{1/2}(1+u)^{3/2}\right).$$

Тогда

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_R^1\frac{(u-R)^s}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{1-|\pi_q^{m+1}(u)|}{1-|\pi_q(u)|}du,\quad s\in(0,2), n\in\mathbb{N}, \tag{25}$$

где

$$\pi_q(u)=\prod_{k=1}^q\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u},\quad R=\frac{1-r^2}{1+r^2},\ R\in[0,1),\quad \beta_k=\frac{1-\gamma_k^2}{1+\gamma_k^2},\ k=1,2,\ldots,q.$$

Без нарушения общности будем полагать, что параметры $\beta_k, k=1,2,\ldots,q,$ упорядочены следующим образом: $R<\beta_q\leq\beta_{q-1}\leq\ldots\leq\beta_1\leq 1.$

Т е о р е м а 3. *При $n\to\infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})=\frac{2q}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi(n+q)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_R^1\frac{(u-R)^s\,du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)}+O\left(\frac{d^{n+1}}{n+1}\right), \tag{26}$$

$d=\max_{u\in[R,1]}|\pi_q(u)|,$ *если* $r\in(0,1),$ *и*

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q},\sigma_{2n})\sim\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases}\dfrac{q^s\Gamma(s)}{(1-s)\left(2(n+q)\sum\limits_{j=1}^q\dfrac{1}{\beta_j}\right)^s}+\Phi_{n+1}^{(s)}(A_{2q}), & s\in(0,1),\\[2ex] \dfrac{q\ln(n+1)}{2(n+q)\sum\limits_{j=1}^q\dfrac{1}{\beta_j}}+\Phi_{n+1}^{(1)}(A_{2q}), & s=1,\\[2ex] \dfrac{q}{n+q}\displaystyle\int_0^{\beta_q}\frac{u^{s-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}\left(1-\pi_q(u)\right)}+\Phi_{n+1}^{(s)}(A_{2q}), & s\in(1,2),\end{cases} \tag{27}$$

если $r = 1$, *где*

$$\Phi_{n+1}^{(s)}(A_{2q}) = \frac{q}{n+q}\int_{\beta_q}^{1}\frac{u^{s-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)}, \tag{28}$$

$\Gamma(\cdot)$ – *гамма-функция Эйлера,* $n = mq$.

Доказательство. Пусть $r\in(0,1)$. Представим интеграл (25) в виде

$$\varepsilon_{2n,2q}^{*}(A_{2q},\sigma_{2n}) = \frac{2}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\int_R^1\frac{(u-R)^s\,du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)}-\right.$$

$$\left.-\int_R^1\frac{(u-R)^s}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{|\pi_q^{m+1}(u)|}{1-|\pi_q(u)|}du\right],\quad s\in(0,2),\ n\in\mathbb{N}.$$

Интеграл

$$\int_R^1\frac{(u-R)^s\,du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)}$$

существует при любом наборе $\beta_k\in(R,1], k=1,2,\ldots,q,\ s\in(0,2)$ и $r\in(0,1)$. Функция $|\pi_q^{m+1}(u)|$ мажорируется величиной d, указанной в формулировке настоящей теоремы. Учитывая сказанное, чтобы из последнего равенства прийти к (26), достаточно заметить, что $n = mq$.

Пусть теперь $r = 1$. Тогда из (25) получим

$$\varepsilon_{2n,2q}^{*}(A_{2q},\sigma_{2n}) = \frac{2}{\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{1-|\pi_q^{m+1}(u)|}{1-|\pi_q(u)|}du,\quad s\in(0,2),\ m=nq,\ n\in\mathbb{N}. \tag{29}$$

Введем обозначения:

$$I_n^{(1)}(A_{2q}) = \int_0^{\beta_q}\frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{1-\pi_q^{m+1}(u)}{1-\pi_q(u)}du,$$

$$I_n^{(2)}(A_{2q}) = \sum_{j=1}^{q-1}\int_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{1-\pi_{q,j}^{m+1}(u)}{1-\pi_{q,j}(u)}du,$$

$$I_n^{(3)}(A_{2q}) = \int_{\beta_1}^{1}\frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\frac{1-|\pi_q^{m+1}(u)|}{1-|\pi_q(u)|}du.$$

Тогда (29) примет вид

$$\varepsilon_{2n,2q}^{*}(A_{2q},\sigma_{2n}) = \frac{2}{\pi(m+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_n^{(1)}(A_q)+I_n^{(2)}(A_q)+I_n^{(3)}(A_q)\right]. \tag{30}$$

Теперь, очевидно, задача сводится к изучению асимптотического поведения при $n\to\infty$ интегралов $I_n^{(1)}(A_q)$, $I_n^{(2)}(A_q)$, $I_n^{(3)}(A_q)$. Сформулируем три леммы. Приведем их без доказательств, поскольку они содержатся в [28].

Лемма 1. *При* $m\to\infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_n^{(1)}(A_{2q}) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma(s)(m+1)^{1-s}}{(1-s)\left(2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}\right)^{2\gamma}}, \quad s \in (0,1), \\ \dfrac{\ln(m+1)}{2\sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_j}}, \quad s = 1, \\ \int\limits_0^{\beta_q} \dfrac{u^{s-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-\pi_q(u))} + O\left(\dfrac{1}{(m+1)^{s-1}}\right), \quad s \in (1,2), \end{cases} \tag{31}$$

где $\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера,* $\pi_q(u)$ *из* (25).

Л е м м а 2. *При* $m \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_n^{(2)}(A_{2q}) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{s-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)} + \delta_{m+1}(A_{2q}), \tag{32}$$

где

$$\delta_{m+1}(A_{2q}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2(m+1)}} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{b_j^{s-\frac{3}{2}} |\pi_q^{m+1}(b_j)|}{(1+b_j)(1-b_j^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(b_j)|)\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{\beta_k}{(\beta_k^2-b_j^2)^2}}},$$

b_j *– единственный корень уравнения* $\sum_{k=1}^{q}\beta_k / (u^2-\beta_k^2) = 0$ *на интервале* (β_{j+1}, β_j), $j = 1, 2 \ldots, q-1$.

Л е м м а 3. *При* $m \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$I_n^{(3)}(A_{2q}) \sim \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{s-1}du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}(1-|\pi_q(u)|)} + \rho_{m+1}(A_{2q}), \tag{33}$$

где

$$\rho_{m+1}(A_{2q}) \sim -\frac{\Gamma(1-s/2)\left|\pi_q(1)\right|^{m+1}}{4\left(1-\left|\pi_q(1)\right|\right)\left((m+1)\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{2\beta_k}{1-\beta_k^2}\right)^{1-\frac{s}{2}}},$$

$\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера,* $\pi_q(u)$ *из* (25).

Вернемся к доказательству теоремы 3 в случае $r = 1$. Из равенства (31) с учетом асимптотических соотношений (31) и (32), (33) получим асимптотическое равенство (27). Доказательство теоремы 3 завершено.

С л е д с т в и е 4. *Для равномерных приближений интегралов Пуассона с граничной функцией* $\varphi(x) = |x|^s$, $s \in (0,2)$, *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(\sigma_{2n}) = \frac{1}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi(n+1)} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_R^1 \frac{(u-R)^s du}{u^2(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} + O\left(\frac{r^{2(n+1)}}{(1-r^2)^2(n+1)^{s+2}}\right), \quad n \to \infty,$$

где $R = (1-r^2)/(1+r^2)$, $r \in (0,1)$.

С л е д с т в и е 5. *Для равномерных приближений функции* $|x|^s, s \in (0,2),$ *на отрезке* [–1, 1] *суммами Фейера полиномиальных рядов Фурье – Чебышева справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)}(\sigma_{2n}) \sim \begin{cases} \sin\frac{\pi s}{2}\frac{2^{1-s}\Gamma(s)}{\pi(1-s)(n+1)^s}, & s \in (0,1), \\ \frac{\ln(n+1)}{\pi(n+1)}, & s = 1, \\ \sin\frac{\pi s}{2}\frac{1}{\pi^{3/2}(n+1)}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\right), & s \in (1,2). \end{cases}$$

Асимптотическая оценка из следствия 5 содержится в [29] и получена при изучении приближений функции $|x|^s, s \in (0,2),$ суммами Фейера рядов Фурье по системе рациональных функций Чебышева – Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

Случай двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Рассмотрим приближения интегралов Пуассона в условиях теоремы 2 в случае двух геометрически различных полюсов $\alpha_1 = i\gamma, \alpha_2 = -i\gamma,$ аппроксимирующей рациональной функции. Из (26), (27) и (28) при этом находим, что

$$\varepsilon_{2n,2}^*(A_2,\sigma_{2n}) = \frac{1}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi(n+1)}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\int_R^\beta \frac{(u-R)^s(\beta+u)du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{(u-R)^s(u+\beta)du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right] +$$
$$+O\left(\frac{1}{n+1}\left(\max_{u\in[R,1]}\left|\frac{\beta-u}{\beta+u}\right|\right)^{n+1}\right), \quad \beta = \frac{1-\gamma^2}{1+\gamma^2}, R = \frac{1-r^2}{1+r^2}, \quad s \in (0,2), \tag{34}$$

если $r \in (0,1),$ и если $r = 1$, то

$$\varepsilon_{2n,2}^*(A_2,\sigma_{2n}) \sim \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases} \frac{\Gamma(s)\beta^s}{(1-s)(2(n+1))^s} + \frac{1}{2(n+1)\beta}\int_\beta^1 \frac{u^{s-1}(u+\beta)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, & s \in (0,1), \\ \frac{\beta\ln(n+1)}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)\beta}\int_\beta^1 \frac{(u+\beta)du}{(1+u)\sqrt{1-u^2}}, & s = 1, \\ \frac{1}{2(n+1)}\left[\int_0^\beta \frac{u^{s-2}(\beta+u)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{u^{s-1}(u+\beta)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right], & s \in (1,2). \end{cases} \tag{35}$$

Представляет интерес минимизировать правые части соотношений (34) и (35) посредством выбора оптимального для каждой задачи параметра $\alpha = \alpha^*, \alpha \in [0,r].$ Другими словами, искать оценку наилучшего равномерного приближения интегралов Пуассона с граничной функцией $\varphi(x) = |x|^s, s \in (0, 2),$ на отрезке [–1, 1] суммами Фейера (5). Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n,2}(\sigma_{2n}) = \inf_{\alpha\in[0,r]} \varepsilon_{2n,2}(A_2,\sigma_{2n}), \quad \varepsilon_{2n,2}^*(\sigma_{2n}) = \inf_{\alpha\in[0,r]} \varepsilon_{2n,2}^*(A_2,\sigma_{2n}).$$

Т е о р е м а 4. *Справедливы асимптотические равенства:*

1) при $r \in (0,1)$

$$\varepsilon_{2n,2}^*(\sigma_{2n}) \sim \frac{c_2(s,r)}{n+1}, \quad n \to \infty, \tag{36}$$

где

$$c_2(s,r)=\frac{1}{(1-R^2)^{\frac{s}{2}}\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left(\int_R^{\beta^*}\frac{(u-R)^s(\beta^*+u)du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}+\frac{1}{\beta^*}\int_{\beta^*}^1\frac{(u-R)^s(u+\beta^*)du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right),\quad s\in(0,2),\ R=\frac{1-r^2}{1+r^2},$$

β^* *– корень уравнения*

$$\int_R^{\beta}\frac{(u-R)^s du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}-\frac{1}{\beta^2}\int_{\beta}^1\frac{(u-R)^s du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}=0,\quad R\in[0,1); \tag{37}$$

2) при $r = 1$

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\sigma_{2n})\sim\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}(1+s)\left(\dfrac{\Gamma(s)c_3^s(s)}{(1-s)s^s}\right)^{\frac{1}{s+1}}\dfrac{1}{\left(2(n+1)\right)^{\frac{2s}{1+s}}}, & s\in(0,1),\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2\pi-4}}{\pi}\dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, & s=1,\\[2ex] \dfrac{c_2(s,1)}{n+1}, & s\in(1,2),\end{cases} \tag{38}$$

где

$$c_3(s)=\int_0^1\frac{u^s du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi s}{2}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}s}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right),$$

$\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изучим соотношение (34). Нетрудно убедиться, что остаточный член в этом асимптотическом равенстве имеет вид

$$O\left(\frac{1}{n+1}\left(\max\left\{\left(\frac{\beta-R}{\beta+R}\right)^{n+1},\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{n+1}\right\}\right)\right),\quad \beta\in[R,1],\ R\in(0,1), \tag{39}$$

и убывает при $n\to\infty$ со скоростью геометрической прогрессии. Выражение в квадратных скобках главного члена асимптотического разложения не зависит от n. Отсюда заключаем, что варьирование параметра β влияет лишь на его константу. Выражение в квадратных скобках представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию параметра β на интервале $(R, 1]$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\int_R^{\beta}\frac{(u-R)^s(\beta+u)du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}+\frac{1}{\beta}\int_{\beta}^1\frac{(u-R)^s(u+\beta)du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right]=0.$$

Последнее условие представляет собой (37), корнем которого при каждом $s\in(0,2)$ является оптимальный параметр нашей задачи $\beta^*=\beta^*(s,r)$. Покажем, что корень в (37) всегда существует. Перепишем это равенство в виде

$$\int_R^{\beta}\frac{(u-R)^s du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}=\frac{1}{\beta^2}\int_{\beta}^1\frac{(u-R)^s du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Нетрудно показать, что левая его часть возрастает при $\beta \in [R, 1]$ и обращается в нуль при $\beta = R$. При этом правая часть убывает при $\beta \in [R, 1]$, при $\beta = R$ строго положительна и обращается в нуль при $\beta = 1$. Следовательно, при каждом $s \in (0,2)$ существует корень $\beta^* = \beta^*(s, r)$ уравнения (37). Учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left[\int_R^\beta \frac{(u-R)^s(\beta+u)du}{u^2(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{(u-R)^s(u+\beta)du}{u(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right] = \frac{2}{\beta^2}\left[\frac{(\beta-R)^s}{(1+\beta)(1-\beta^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{(u-R)^s du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right] > 0,$$

заключаем, что в случае $r \in (0,1)$ при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство (36).

Займемся асимптотическим равенством (35). Очевидно, что при постоянных $\beta \in (0,1]$ для каждого заданного $s \in (0,2)$ порядок стремления к нулю не отличается от полиномиального. Пусть $s \in (0,1]$. Будем полагать, что $\beta = \beta(n) \to 0$. Тогда соотношения в (35) примут вид

$$\varepsilon^*_{2n,2}(A_2, \sigma_{2n}) \sim g_{n,s}(\beta) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases} \dfrac{\Gamma(s)\beta^s}{(1-s)\big(2(n+1)\big)^s} + \dfrac{c_3(s)}{2(n+1)\beta}, & s \in (0,1), \\ \dfrac{\beta\ln(n+1)}{2(n+1)} + \dfrac{\pi-2}{4(n+1)\beta}, & s = 1, \end{cases}$$

где величина $c_3(s)$ определена в (38).

При каждом заданном $s \in (0,1]$ соответствующие значения величины $g_{n,s}(\beta)$ имеют строгий минимум при $0 < \beta \le 1$. Решая экстремальную задачу

$$g_{n,s}(\beta) \xrightarrow[0<\beta\le 1]{} \min,$$

находим оптимальные значения

$$\beta^* = \begin{cases} \left(\dfrac{c_3(s)(1-s)}{s\Gamma(s)}\right)^{\frac{1}{s+1}} \dfrac{1}{\big(2(n+1)\big)^{\frac{1-s}{1+s}}}, & s \in (0,1), \\ \sqrt{\dfrac{\pi-2}{2\ln(n+1)}}, & s = 1. \end{cases}$$

При этом

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\sigma_{2n}) \sim \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sin\dfrac{\pi s}{2}(1+s)\left(\dfrac{\Gamma(s)c_3^s(s)}{(1-s)s^s}\right)^{\frac{1}{s+1}} \dfrac{1}{\big(2(n+1)\big)^{\frac{2s}{1+s}}}, & s \in (0,1), \\ \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}-1}\,\dfrac{\sqrt{\ln(n+1)}}{n+1}, & s = 1. \end{cases} \tag{40}$$

Пусть теперь $s \in (1,2)$. В этом случае из (35) имеем

$$\varepsilon^*_{2n,2}(A_2, \sigma_{2n}) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[\int_0^\beta \frac{u^{s-2}(\beta+u)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}} + \frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{u^{s-1}(u+\beta)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right]\frac{1}{n+1}, \quad n \to \infty.$$

Выражение в квадратных скобках не зависит от n и представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию параметра β на интервале (0, 1]. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\int_0^\beta \frac{u^{s-2}(\beta+u)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}+\frac{1}{\beta}\int_\beta^1 \frac{u^{s-1}(u+\beta)du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}\right]=0.$$

Выполнив дифференцирование по параметру β, приходим к уравнению (37) при $r = 1$. Отсюда заключаем, что при $n \to \infty$

$$\varepsilon^*_{2n,2}(\sigma_{2n}) \sim \frac{c_2(s,1)}{n+1}, \quad n\to\infty, \tag{41}$$

где $c_2(s, 1)$ определено в формулировке настоящей теоремы. Из соотношений (40) и (41) приходим к асимптотическим равенствам (38). Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует, что в случае $r \in (0,1)$ классы функций, задаваемых интегралами Пуассона на отрезке [–1, 1] с граничной функцией $\varphi(x) = |x|^s$, $s \in (0,2)$, не отражают особенности рациональной аппроксимации суммами Фейера (5) в том смысле, что никаким параметром нельзя увеличить скорость убывания главного члена асимптотического разложения мажоранты равномерных приближений. Покажем, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно увеличить скорость убывания остаточного члена разложения. С этой целью обратимся к величине (39). Положим $\beta=\sqrt{R}.$ В этом случае остаточный член асимптотического разложения будет иметь порядок

$$O\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{R}}{1+\sqrt{R}}\right)^{n+1}\right), \quad n\to\infty.$$

Возвращаясь к первоначальным параметрам, последняя величина примет вид

$$O\left(\frac{1}{n+1}\left(\frac{r^2}{1+\sqrt{1-r^4}}\right)^{n+1}\right), \quad n\to\infty.$$

Сравнивая полученный результат с остаточным членом асимптотического разложения в полиномиальном случае (см. следствие 4), заключаем, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции возможно добиться более высокой скорости убывания остаточного члена в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом.

Заключение. В работе изучены аппроксимации функций, представимых интегралами Пуассона на отрезке [–1, 1], суммами Фейера рациональных интегральных операторов Фурье – Чебышева в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов. Рассмотрены интегралы Пуассона с граничной функцией, имеющей степенную особенность на отрезке [–1, 1]. Найдены интегральное представление приближений, оценки поточечных и равномерных приближений с определенной мажорантой и ее асимптотическое выражение. Подробно рассмотрен случай двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. В этом случае установлено, что при $r \in (0,1)$ улучшить скорость убывания мажоранты равномерных приближений путем специального выбора параметров аппроксимирующей функции нельзя. Этот результат носит отрицательный характер. Однако специальным выбором параметров можно увеличить скорость убывания остаточного члена асимптотического разложения мажоранты равномерных приближений. В случае $r = 1$ ситуация меняется. Класс интегралов Пуассона на отрезке с граничной функцией, имеющей степенную особенность, в некоторых случаях отражает особенности рациональной аппроксимации изучаемыми суммами Фейера в том смысле, что при специальном выборе параметров, оценки равномерных рациональных приближений оказываются в некоторой степени лучше соответствующих полиномиальных аналогов.

Список использованных источников

1. Никольский, С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1946. – Т. 10, № 3. – С. 207–256.

2. Стечкин, С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций / С. Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. – 1980. – Т. 145. – С. 126–151.

3. Степанец, А. И. Решение задачи Колмогорова – Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций / А. И. Степанец // Мат. сб. – 2001. – Т. 192, № 1. – С. 113–138. https://doi.org/10.4213/sm538

4. Serdyuk, A. S. Asymptotic behavior of best approximations of classes of Poisson integrals of functions from H_ω / A. S. Serdyuk, I. V. Sokolenko // J. Approxim. Theory. – 2011. – Vol. 163, iss. 11. – P. 1692–1706. https://doi.org/10.1016/j.jat.2011.06.008

5. Новиков, О. А. Приближение интегралов Пуассона линейными методами / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская, Ю. В. Козаченко // Праці ІПММ НАН України. – 2017. – Т. 31. – С. 92–108.

6. Ровенська, О. Г. Наближення класів інтегралів Пуассона повторнімі сумами Фейера / О. Г. Ровенська // Буковин. мат. журн. – 2020. – Т. 8, № 2. – С. 114–121. https://doi.org/10.31861/bmj2020.02.10

7. Fejer, L. Untersuchungen uber Fouriersche Reihen / L. Fejer // Math. Ann. – 1904. – Vol. 58, iss. 1–2. – P. 51–69.

8. Lebesgue, H. Sur les integrales singulieres / H. Lebesgue // Annales de la faculte des sciences de Toulouse, 3e serie. – 1909. – Vol. 1. – P. 25–117.

9. Bernstein, S. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne / S. Bernstein. – Bruxelles: M. Hayez. Imprimeur de l'academie royale de Belgique, 1912. – 104 p.

10. Никольский, С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.

11. Zygmund, A. On the degree of approximation of functions by Fejer means / A. Zygmund // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1945. – Vol. 51, iss. 4. – P. 274–278. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1945-08332-3

12. Ефимов, А. В. О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера / А. В. Ефимов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1958. – Т. 22, № 1. – С. 81–116.

13. Стечкин, С. Б. О приближении периодических функций суммами Фейера / С. Б. Стечкин // Тр. МИАН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 48–60.

14. Теляковский, С. А. О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера / С. А. Теляковский // Укр. мат. журн. – 1969. – Т. 21, № 3. – С. 334–343.

15. Мартынюк, В. Т. Точные константы приближения периодических функций операторами Фейера / В. Т. Мартынюк // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 1. – С. 75–83.

16. Новиков, О. А. Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская // Компьютер. исслед. и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 813–819. https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-4-813-819

17. Novikov, O. O. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums / O. O. Novikov, O. G. Rovenska // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. 47, № 2. – P. 196–201. https://doi.org/10.15330/ms.47.2.196-201

18. Ровенская, О. Г. О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций / О. Г. Ровенская, О. А. Новиков // Чебышев. сб. – 2020. – Т. 21, № 4. – С. 218–226. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

19. Русецкий, Ю. И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля – Пуассона / Ю. И. Русецкий // Сиб. мат. журн. – 1968. – Т. 9, № 1. – С. 136–144.

20. Жигалло, Т. В. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона – Чебышева / Т. В. Жигалло // Проблемы управления и информатики. – 2018. – № 3. – С. 1–14.

21. Русак, В. Н. Об одном методе приближения рациональными функциями / В. Н. Русак // Вес. Акад. навук БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1978. – № 3. – С. 15–20.

22. Ровба, Е. А. Рациональные интегральные операторы на отрезке / Е. А. Ровба // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 1996. – № 1. – С. 34–39.

23. Смотрицкий, К. А. О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке / К. А. Смотрицкий // Вестн. БГУ. Сер. 1. Математика и информатика. – 2005. – № 3. – С. 64–70.

24. Ровба, Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба // Докл. Акад. наук БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

25. Поцейко, П. Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье – Чебышева / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сиб. мат. журн. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386. https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.209

26. Русак, В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения / В. Н. Русак. – Минск: БГУ, 1979. – 178 с.

27. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 5-е изд., стер. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

28. Поцейко, П. Г. О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Тр. ин-та математики. – 2022. – Т. 30, № 1–2. – С. 57–77.

29. Поцейко, П. Г. Суммы Фейера рационального ряда Фурье – Чебышева и аппроксимации функции $|x|^s$ / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2019. – № 3. – С. 18–34. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

References

1. Nikol'skii S. M. Approximation of functions by trigonometric polynomials on average. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Mathematics of the USSR. Izvestiya*, 1946, vol. 10, no. 3, pp. 207–256 (in Russian).

2. Stechkin S. B. Estimation of the remainder of the Fourier series for differentiable functions. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova = Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1980, vol. 145, pp. 126–151 (in Russian).

3. Stepanets A. I. Solution of the Kolmogorov – Nikolsky problem for Poisson integrals of continuous functions. *Matematicheskii sbornik = Sbornik: Mathematics*, 2001, vol. 192, no. 1, pp. 113–138 (in Russian). https://doi.org/10.1070/sm2001v192n01abeh000538

4. Serdyuk A. S., Sokolenko I. V. Asymptotic behavior of best approximations of classes of Poisson integrals of functions from H_ω. *Journal of Approximation Theory*, 2011, vol. 163, no. 11, pp. 1692–1706. https://doi.org/10.1016/j.jat.2011.06.008

5. Novikov O. A., Rovenskaya O. G., Kozachenko Yu. V. Approximation of Poisson integrals by linear methods. *Pratsi IPMM NAN Ukraini = Proceedings of IAMM of the NAS of Ukraine*, 2017, vol. 31, pp. 92–108 (in Russian).

6. Rovens'ka O. G. Approximation of the class of the Poisson integral by repeated Fejer sums. *Bukovins'kii matematicheskii zhurnal = Bukovinian Mathematical Journal*, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 114–121 (in Ukrainian). https://doi.org/10.31861/bmj2020.02.10

7. Fejer L. Untersuchungen uber Fouriersche Reihen. *Mathematische Annalen*, 1904, vol. 58, no. 1–2, pp. 51–69 (in German).

8. Lebesgue H. Sur les integrales singulieres. *Annales de la faculte des sciences de Toulouse 3e serie*, 1909, vol. 1, pp. 25–117 (in French).

9. Bernstein S. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne*. Bruxelles, M. Hayez, Imprimeur de l'academie royale de Belgique, 1912. 104 p. (in French).

10. Nikol'skii S. M. On the asymptotic behavior of the remainder when approximating functions satisfying the Lipschitz condition by Feyer sums. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Mathematics of the USSR. Izvestiya*, 1940, vol. 4, no. 6, pp. 501–508 (in Russian).

11. Zygmund A. On the degree of approximation of functions by Fejer means. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1945, vol. 51, no. 4, pp. 274–278. https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1945-08332-3

12. Efimov A. V. On the approximation of certain classes of continuous functions by Fourier sums and Feyer sums. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya = Mathematics of the USSR. Izvestiya*, 1958, vol. 22, no. 1, pp. 81–116 (in Russian).

13. Stechkin S. B. On the approximation of periodic functions by Feyer sums. *Trudy Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova = Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1961. vol. 62, pp. 48–60 (in Russian).

14. Telyakovskii S. A. On the approximation of functions satisfying the Lipschitz condition by Feyer sums. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 1969, vol. 21, no. 3, pp. 334–343 (in Russian).

15. Martynyuk V. T. Exact constants of approximation of periodic functions by Feyer operators. *Ukrainskii matematicheskii zhurnal = Ukrainian Mathematical Journal*, 1990, vol. 42, no. 1, pp. 75–83 (in Russian).

16. Novikov O. A., Rovenskaya O. G. Approximation of classes of Poisson integrals by Feyer sums. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie = Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 813–819 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2076-7633-2015-7-4-813-819

17. Novikov O. O., Rovenska O. G. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums. *Matematychni Studii*, 2017, vol. 47, no. 2, pp. 196–201. https://doi.org/10.15330/ms.47.2.196-201

18. Rovenska O. G., Novikov O. O. On approximation by Fejer means of classes of analytic periodic functions. *Chebyshevskii sbornik = Chebyshevskii Sbornik*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 218–226 (in Russian). https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

19. Rusetskii Yu. I. On the approximation of continuous functions on a segment by Abel – Poisson sums. *Siberian Mathematical Journal*, 1968, vol. 9, no. 1, pp. 103–109. https://doi.org/10.1007/BF02196661

20. Zhigallo T. V. Approximation of Functions Holding the Lipschitz Conditions on a Finite Segment of the Real Axis by the Poisson–Chebyshev Integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, vol. 50, no. 5, pp. 34–48 https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i5.40

21. Rusak V. N. On one method of approximation by rational functions. *Vestsi akademii navuk BSSR. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the Academy of Sciences of BSSR. Physics and Mathematics series*, 1978, vol. 3, pp. 15–20 (in Russian).

22. Rovba E. A. Rational integral operators on a segment. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Bulletin of the Belarusian State University. Series 1, Physics. Mathematics. Informatics: scientific and theoretical journal*, 1996, no. 1, pp. 34–39 (in Russian).

23. Smotritskii K. A. On the approximation of convex functions by rational integral operators on a segment. *Vestnik BGU. Seriya 1, Fizika. Matematika. Informatika = Bulletin of the Belarusian State University. Series 1, Physics. Mathematics. Informatics: scientific and theoretical journal*, 2005, no. 3, pp. 64–70 (in Russian).

24. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).

25. Potseiko P. G., Rovba E. A. Approximations on classes of Poisson integrals by rational Fourier – Chebyshev integral operators. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 292–312. https://doi.org/10.1134/s0037446621020099

26. Rusak V. N. *Rational Functions as an Approximation Apparatus*. Minsk, BSU, 1979. 178 p. (in Russian).

27. Tikhonov A. N. Samarskii A. A. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 735 p. (in Russian).

28. Potseiko P. G., Rovba E. A. On rational approximations of the Markov function on an interval by Fejйr sums with a fixed number of poles. *Trudy instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 57–77 (in Russian).

29. Potseiko P. G., Rovba E. A. Feyer sums of the rational Fourier – Chebyshev series and approximations of the function $|x|^s$. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika = Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2019, no. 3, pp. 18–34 (in Russian). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-3-18-34

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Ровба Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной и прикладной математики, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com. https://orcid.org/0000-0002-1265-1965

Information about the authors

Pavel G. Patseika – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshki Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-7835-0500

Yauheni A. Rouba – Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Fundamental and Applied Mathematics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Azheshki Str., 230023, Grodna, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com. https://orcid.org/0000-0002-1265-1965