

# APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE PELL

Un Proyecto de Tesis

Presentado Por

LUIS ADÁN MONTERROSA HERNÁNDEZ

En Cumplimiento Parcial de los Requerimientos

Para Obtener el Grado De

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Bajo Asesoramiento Del

PROFESOR NARCISO RODRÍGUEZ

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESCUELA DE MATEMÁTICA



FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y  
TECNOLOGÍA



UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

REPÚBLICA DE PANAMÁ



**UNIVERSIDAD DE PANAMÁ**  
**Secretaría General**  
**Acta de Evaluación de la Tesis de Grado**

Facultad de: Ciencias Naturales, Exactas y Tecnología – Escuela de Matemática

Nombre del estudiante: LUÍS ADAN MONTERROSA HERNÁNDEZ Cédula: 8-836-215

Grado al que aspira: LICENCIADO EN MATEMÁTICA.

Título de la tesis: APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE PELL

Año Académico: 2021 Semestre: I Cód. de Asignatura: 26590 Cód. de Horario: 4291

CRITERIOS	PONDERACIÓN
<b>Para evaluación de la Monografía y Sustentación</b>	
Contenido y presentación escrita del trabajo.	(Hasta el 25%)
Presentación oral por el estudiante de su trabajo y calidad de las ayudas que use como apoyo didáctico.	(Hasta el 15%)
Respuestas del estudiante, al interrogatorio del Tribunal de Sustentación. De no haber interrogatorio, los puntos de este se adicionan, en su totalidad, al criterio b.	(Hasta el 10%)
Pruebas, Asignaciones, Parciales y Asistencia	(Hasta el 50%)

Nota Final

99  
(Número)

A  
(Letra)

Observaciones Generales \_\_\_\_\_

**TRIBUNAL EXAMINADOR**

**Nombre**

**Firma**

Magíster Narciso Rodríguez  
Tutor (Asesor)

Narciso Rodríguez

Magíster Jaime Gutiérrez

Jaime Gutiérrez

Magíster Daniel Vásquez

Daniel Vásquez

M.Sc. María M. Bustamante D.  
Directora  
Escuela de Matemática

**Doctor**

Dr. Raúl Lavayza  
Decano  
Facultad de Ciencias Naturales,  
Exactas y Tecnología

Fecha: 22 de abril de 2021.

Este documento debe llenarse en tres originales. Según lo aprobado en CGU 3-15 del 16 de julio de 2015.

• A quien su camino sea  
la búsqueda del conocimiento  
y entendimiento de lo cierto.

## **Agradecimientos**

Quiero dejar manifiesta mi gratitud hacia mi madre Maribel Hernández por su apoyo total, su amor, corrección, carácter y motivación para conmigo. Gracias a ella, he podido emprender mi estudio de las matemáticas. Rememoro las palabras de un profesor que decía que “el título de licenciatura es de los padres, los que siguen son de uno”.

También quiero agradecer a mi novia por su amor incondicional, y su gran apoyo emocional; especialmente, durante la realización de este trabajo de tesis.

Agradezco a todos los profesores de quienes recibí clases durante la licenciatura y a mis compañeros, en los que encontré un ambiente enriquecedor mediante el intercambio de ideas. Me siento dichoso por haber estado en contacto con personas que, además de estar interesadas por las matemáticas, son apasionadas y motivan a su estudio solo con compartir su pasión. Como si viéramos una historia de amor que también queremos vivir.

Gracias al tribunal examinador por sus observaciones y sugerencias.

Finalmente, mi agradecimiento a mi profesor favorito de primer año, mi asesor de tesis Narciso Rodríguez, por su enorme disponibilidad, dedicación, implacable constancia, y sus valiosas correcciones y sugerencias para que la tesis tuviera un acabado más “amigable” y didáctico.

# Índice General

<a href="#">Firmas del Tribunal Examinador</a> .....	ii
<a href="#">Dedicatoria</a> .....	iii
<a href="#">Agradecimientos</a> .....	iv
<a href="#">Índice de Cuadros</a> .....	vii
<a href="#">Índice de Anexos</a> .....	ix
<a href="#">Resumen</a> .....	x
<a href="#">Introducción</a> .....	1
<b><a href="#">Capítulo I: Introducción histórica a la ecuación de Pell</a></b> .....	3
1.1. <a href="#">Ecuaciones diofánticas</a> .....	3
1.2. <a href="#">Ecuación de Pell</a> .....	5
1.3. <a href="#">El problema de las reses del sol de Arquímedes</a> .....	13
1.4. <a href="#">Contribuciones adicionales de los griegos</a> .....	20
1.5. <a href="#">Los matemáticos indios</a> .....	30
1.6. <a href="#">Fermat y sus sucesores</a> .....	36
<b><a href="#">Capítulo II: Algunas situaciones en las que emerge</a></b>	
$x^2 - Dy^2 = +1$ .....	53
2.1. <a href="#">Tripletas pitagóricas y triángulos rectos con dos lados consecutivos</a> .....	53
2.2. <a href="#">Números poligonales simultáneos</a> .....	62
2.3. <a href="#">Números triangulares que difieren en 1 de un cuadrado</a> .....	78
2.4. <a href="#">Sumas de enteros consecutivos</a> .....	86
2.5. <a href="#">Sumas de <math>n</math> y <math>n + 1</math> cuadrados consecutivos</a> .....	89
2.6. <a href="#">Triángulos heronianos con lados consecutivos</a> .....	97
2.7. <a href="#">Ecuaciones diofánticas dobles</a> .....	100
2.8. <a href="#">Aproximaciones racionales a <math>\sqrt{D}</math></a> .....	104

### **Capítulo III: Resolviendo la ecuación diofántica**

$x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .....	109
3.1. <u>Ecuaciones diofánticas cuadráticas con dos incógnitas</u> .....	109
3.2. <u>Parametrizaciones de Lehmer</u> .....	112
3.2.1. <u>Infinitas parametrizaciones de soluciones de</u> $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .....	112
3.2.2. <u>Expresiones más explícitas para las recurrencias del</u> <u>Teorema 3.2</u> .....	123
3.2.3. <u>Otras soluciones no incluidas en las</u> <u>parametrizaciones del Teorema 3.2</u> .....	130
<u>Conclusiones</u> .....	139
<u>Recomendaciones</u> .....	142
<u>Referencias</u> .....	144
<u>Anexos</u> .....	154
<u>Apéndice A</u> .....	154
<u>Apéndice B</u> .....	156

## Índice de Cuadros

<a href="#"><u>Algoritmo 1.1</u></a> (Para encontrar aproximaciones racionales a un número real) .....	27
<a href="#"><u>Tabla 1.1</u></a> . Chakravala para $D = 67$ .....	33
<a href="#"><u>Tabla 1.2</u></a> . Diez primeras soluciones no triviales de la ecuación de Pell con $D = 3$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares .....	45
<a href="#"><u>Tabla 1.3</u></a> . Diez primeras soluciones no triviales de (1.38) con $D = 13$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares .....	50
<a href="#"><u>Tabla 1.4</u></a> . Diez primeras soluciones no triviales de (1.5) con $D = 13$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares .....	51
<a href="#"><u>Figura 2.1</u></a> . Triángulo pitagórico .....	54
<a href="#"><u>Tabla 2.1</u></a> . Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con catetos consecutivos que surgen al resolver (1.5) con $D = 2$ .....	56
<a href="#"><u>Tabla 2.2</u></a> . Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con catetos consecutivos que surgen al resolver (1.38) con $D = 2$ .....	60
<a href="#"><u>Tabla 2.3</u></a> . Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con un cateto igual a la medida de su hipotenusa reducida en uno .....	62
<a href="#"><u>Figura 2.2</u></a> . Los primeros cuatro números triangulares .....	63
<a href="#"><u>Figura 2.3</u></a> . 36 canicas en un arreglo triangular .....	64
<a href="#"><u>Figura 2.4</u></a> . Cuatro primeros números cuadrados .....	65
<a href="#"><u>Figura 2.5</u></a> . 36 canicas en un acomodo cuadrado .....	66
<a href="#"><u>Tabla 2.4</u></a> . Veinte primeros números cuadrados triangulares .....	67

<a href="#">Figura 2.6.</a> Primeros cuatro números pentagonales .....	70
<a href="#">Tabla 2.5.</a> Primeros diez números cuadrados pentagonales .....	73
<a href="#">Tabla 2.6.</a> Quince primeros números triangulares pentagonales .....	75
<a href="#">Tabla 2.7.</a> Primeros once números triangulares menores que un cuadrado en 1 .....	84
<a href="#">Tabla 2.8.</a> Primeros once números triangulares mayores que un cuadrado en 1 .....	85
<a href="#">Tabla 2.9.</a> Veinte primeros $(m, n)$ de enteros positivos tales que $\sum_{i=1}^m i = \sum_{i=m+1}^n i$ .....	88
<a href="#">Tabla 2.10.</a> Diez soluciones $(n, x, y)$ de (2.26) correspondientes a los primeros diez números cuadrados triangulares con la solución fundamental de (1.5) con $D = 8$ .....	93
<a href="#">Tabla 2.11.</a> Veinticinco soluciones $(n, x, y)$ de (2.26) dado $b = 5$ .....	96
<a href="#">Figura 2.7.</a> Triángulo heroniano .....	97
<a href="#">Tabla 2.12.</a> Diez primeros triángulos heronianos con sus tres lados consecutivos .....	99
<a href="#">Tabla 2.13.</a> Ocho primeras soluciones enteras $t$ para $10t + 9 = x^2$ , $5t + 4 = y^2$ .....	102
<a href="#">Tabla 2.14.</a> Aproximaciones a $\sqrt{37}$ que obtenemos con $1 \leq k \leq 9$ en (2.39) .....	107
<a href="#">Tabla 3.1.</a> Soluciones de (3.6) con $k = 1$ , o sea, (3.7), presentadas por Miller y Woollett, y su correspondencia con la parametrización (3.8) cuando sea pertinente .....	114
<a href="#">Tabla 3.2.</a> Tabla que presenta Lehmer de las soluciones para (3.7) de la tabla de Miller y Woollett que cumplen con (3.33) para $\lambda \neq 3t^2$ .	130



## Índice de Anexos

<b><u>Apéndice A</u></b> .....	154
<u>Código A.1.</u> Programa escrito en Wolfram Mathematica 12 para solucionar ecuaciones de Pell .....	154
<b><u>Apéndice B</u></b> .....	156
<u>Código B.1.</u> Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar ternas pitagóricas primitivas correspondientes a triángulos pitagóricos con lados consecutivos .....	156
<u>Código B.2.</u> Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números cuadrados triangulares .....	157
<u>Código B.3.</u> Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números cuadrados pentagonales .....	158
<u>Código B.4.</u> Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números triangulares pentagonales .....	159
<u>Código B.5.</u> Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar sumas de enteros consecutivos .....	160
<u>Código B.6.</u> Programa escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar sumas de cuadrados consecutivos .....	161
<u>Código B.7.</u> Bloque escrito en Wolfram Mathematica 12 para calcular aproximaciones racionales a $\sqrt{D}$ y su error .....	162

# Resumen

## Capítulo I: Introducción histórica a la ecuación de Pell

Este capítulo contiene una breve introducción a las ecuaciones diofánticas, ecuaciones a cuyas incógnitas solo se les permite asumir valores enteros o algunas veces valores racionales (cuando sea de interés) y se dan ejemplos que han sido estudiados por los matemáticos a lo largo de la historia.

Con una ligera modificación de la ecuación pitagórica se llega a una situación en la que es de utilidad conocer soluciones de la errónea, pero tradicionalmente llamada ecuación de Pell, con el propósito de obtener más soluciones a dicha situación aplicando la identidad de composición de Brahmagupta. Se discuten las deliberaciones y debates que han compartido los historiadores de las matemáticas en relación al malentendido causado por Euler al etiquetar la célebre ecuación.

Detallamos una demostración sencilla de la existencia de soluciones no triviales para cualquier ecuación de Pell (Teorema 1.3) luego de haber demostrado resultados previos necesarios (Lema 1.1 y Corolario 1.2). La ingeniosa pieza central del razonamiento es el principio del palomar de Dirichlet.

Presentamos y discutimos el problema de las reses del dios Sol formulado por Arquímedes, una de las apariciones más tempranas de las que se tiene registro de la ecuación tema central del presente trabajo. Elaboramos sobre su interpretación y los esfuerzos a lo largo de los siglos para resolverlo. También se dan las fuentes en las que se pueden consultar las soluciones al problema.

Las contribuciones adicionales de los griegos que pueden relacionarse con la ecuación de Pell son elaboradas brevemente. Aquí consideramos los intentos de encontrar una representación de  $\sqrt{2}$  a través de razones de magnitudes diagonales y laterales, surgiendo el proceso de la anthyphairesis como consecuencia de las ingeniosas técnicas y operaciones geométricas ejecutadas dentro de las exigencias de las matemáticas griegas en la antigüedad.

Se detalla e ilustra un algoritmo basado en la proposición de Parménides, capaz de obtener aproximaciones racionales a cualquier número real.

Los registros históricos dirigen, luego, al estudio de los indios sobre las soluciones de la ecuación de Pell. Con una tradición matemática bastante creativa y poco limitada por los requerimientos rigurosos griegos, poetas matemáticos talentosos desarrollan el método cíclico para solucionar toda ecuación de Pell. Nace el primer método para resolverla; sin embargo, para entonces no se había demostrado que funcionaba para cualquier  $D$  entero positivo no cuadrado perfecto.

Los matemáticos europeos del siglo XVII se interesaron por la ecuación, en un ambiente de retos y desafíos que enriquecieron a las matemáticas. Se detalla un método similar al de Brouncker para solucionarla. Este era el nombre que Euler debió emplear en vez del de Pell: la ecuación de Brouncker sería un nombre más adecuado para la ecuación de Pell. Ilustramos el método con un ejemplo.

Se presentan métodos más directos para encontrar las soluciones no triviales a partir de la llamada solución fundamental de la ecuación Pell. Se introduce la ecuación negativa de Pell. Aparecen tablas con las primeras soluciones no triviales para  $D = 3, 13$ , ya sea para la versión normal o la negativa de la ecuación.

Se demuestra el Teorema 1.6 que nos da la condición necesaria y suficiente para que la ecuación negativa de Pell tenga solución: el periodo del desarrollo en fracción simple continua de  $\sqrt{D}$  tiene que ser impar.

El capítulo finaliza con una breve discusión del estado actual del estudio donde la ecuación de Pell, sus versiones más generales o análogos de mayor grado toman un papel crucial.

## **Capítulo II: Algunas situaciones en las que emerge $x^2 - Dy^2 = \pm 1$**

Resolvemos el problema de encontrar todos los triángulos pitagóricos primitivos de lados consecutivos. Así mismo, se encuentran todas las ternas pitagóricas en las que al menos dos de sus componentes son consecutivas. Presentamos los resultados en tablas y comentamos algunos patrones que se divisan en las columnas. Se emplean las fórmulas tipo Binet para demostrar algunas propiedades surgidas de estos patrones.

Definimos y describimos los números poligonales, los triangulares y los cuadrados; discutiendo algunas de sus propiedades. Además, se presentan los números poligonales simultáneos, notándose que hay números triangulares cuadrados. Hallamos todos. Se reflexiona brevemente sobre las herramientas de las que disponen quienes estudian las matemáticas, además del poder que las matemáticas nos otorgan en el entendimiento de cantidades enormes. Presentamos también los números

pentagonales, una recurrencia general para obtener los primeros  $n$  números poligonales de cualquier tipo. Se prueban dos resultados con recurrencias que facilitan la expresión expedita para encontrar las consecutivas soluciones a la ecuación de Pell. Se encuentran todos los números cuadrados pentagonales. Luego, buscando los números triangulares pentagonales, nos enfrentamos a la necesidad de resolver la ecuación generalizada de Pell. Luego de presentarla, encontramos todos los números triangulares pentagonales. Aparece la discusión del problema de encontrar números triangulares cuadrados pentagonales.

Buscamos todos los números triangulares iguales a algún número cuadrado más o menos 1. El problema exige profundizar más en el estudio de la ecuación generalizada de Pell, se prueban dos resultados importantes que nos auxiliarán al momento de resolverla (Proposición 2.3 y Teorema 2.4). Luego de resolver las dos ecuaciones generalizadas de Pell que surgen solucionamos el problema, tabulando los primeros resultados.

Sumamos los primeros  $m$  enteros positivos y los igualamos a la suma de los enteros consecutivos a partir del sucesor de  $m$  hasta un entero  $n$ . Se encuentran todos los pares  $(m, n)$  que satisfacen esta igualdad. Estudiamos recurrencias con ecuaciones modulares para encontrar las soluciones de la ecuación de Pell que se atienen al cambio de variable realizado y así obtener soluciones enteras al problema.

Se suman  $n$  cuadrados consecutivos y se iguala el resultado a otros  $n + 1$  cuadrados consecutivos. Se demuestra el Teorema 2.5 que relaciona este problema directamente con la ecuación de Pell. Tratamos las cantidades del problema y encontramos infinitas situaciones, cada una teniendo infinitas soluciones. Se presentan tablas para algunas de estas situaciones.

Definimos los triángulos heronianos, demostramos la fórmula de Herón para el área de un triángulo dados sus lados. Se describen todos los triángulos heronianos de área entera con sus tres lados consecutivos.

Abordamos un problema propuesto por Diofanto de ecuaciones diofánticas dobles. También se requiere realizar un tratamiento con congruencias módulo  $n$  para filtrar las soluciones de la ecuación de Pell válidas que arrojen soluciones enteras al problema, a través de las parametrizaciones y manipulaciones hechas. Buscamos generalizar el problema de Diofanto y damos un ejemplo con otras constantes. Constatamos los resultados en tablas.

Discutimos el empleo de las ecuaciones de Pell para encontrar aproximaciones racionales a  $\sqrt{D}$ . Se da una expresión para el error de estas.

Tabulamos los resultados para las primeras aproximaciones y errores para  $\sqrt{37}$ .

### **Capítulo III: Resolviendo la ecuación diofántica $x^3 + y^3 + z^3 = 1$**

Tratamos las ecuaciones diofánticas cuadráticas con dos incógnitas y mostramos que pueden ser reducidas a una ecuación generalizada de Pell, a través de dos razonamientos.

Se habla sobre el intercambio entre Mordell, Miller, Woollett y Lehmer que llevó a que este último tratara la ecuación diofántica de la suma de tres cubos igual a 1. Mordell anunciaba que había otras parametrizaciones aparte de las conocidas que habían sido pasadas por alto hasta entonces, y que solucionan el problema que posteriormente abordó Lehmer. Este emplea una identidad entre dos de las componentes de las parametrizaciones conocidas para llevar la ecuación de los cubos a una ecuación indeterminada de segundo grado. Así, notando que se puede reducir a una ecuación generalizada de Pell, cuyas soluciones van a depender de la solución fundamental de la ecuación de Pell. Aprovechando esto, encuentra recurrencias que generan infinitas tripletas de polinomios que son otras parametrizaciones aparte de las conocidas que solucionan  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . Luego, generaliza los resultados que encuentra, pero ninguno de estos explica las otras soluciones primitivas que aparecen en la publicación de Miller y Woollett, y que no siguen parametrizaciones conocidas. Plasmamos las soluciones fundamentales que eran desconocidas para entonces.

## Introducción

*“Verdaderamente no es saber, sino aprender, no poseer sino adquirir, no estar, sino llegar allá, lo que concede el mayor disfrute.”. (Wikiquote, 2020).*

Johann Carl Friedrich Gauss, en una carta a Farkas Bolyai (1775-1856), 1808

La ecuación de Pell aparece en varias situaciones inesperadas. Se estudian diversos problemas en los que surge esta ecuación diofántica, y saber solucionarla es crucial para resolver dichos problemas. Aunque requerimos nociones geométricas básicas para ciertas situaciones, además de la lógica matemática y la teoría de fracciones continuas, es la teoría elemental de números la que se interesa más por las ecuaciones diofánticas. Esta es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades de los números, en particular de los enteros.

¿Pero a qué se debe esta fijación con los números? Desde antes que desarrolláramos el lenguaje, estimar las distancias, dimensiones, la cantidad de determinadas colecciones, poder compararlas y decidir cuándo estábamos en desventaja o no, se tornó un asunto de vida o muerte. Cuando construimos estructuras sociales más complejas, cobró más relevancia conocer de cuántos animales constaban nuestros rebaños, la medida de las tierras que podíamos cultivar, saber las veces que el sol salía y se ocultaba antes de las siguientes lluvias o estimar si teníamos suficiente piedra para construir un zigurat o una pirámide. Ya para los pitagóricos, los números tenían un carácter divino. Más tarde, un alejandrino se interesa por las ecuaciones diofánticas, de quien reciben su nombre.

El desafío de resolver igualdades solo para números enteros parece al alcance de cualquiera que comprenda las operaciones básicas con estos, pero no es raro que esta sea una labor retadora. Quizá esa engañosa propiedad de las ecuaciones diofánticas, aparte del interés en las propiedades de los enteros, haya sido su atractivo por dos milenios. El estudio de estas ecuaciones ha impulsado el desarrollo de las matemáticas, más allá de la teoría elemental de números. La ecuación de Pell es una de ellas, y por muchos siglos se mantuvo oculta la cuestión de si siempre tenía solución no trivial; así como también, un método general para encontrar dicha solución.

El interés del presente trabajo es complementar aquellos previos que abordan el estudio de esta ecuación, dar una idea de su relevancia a través de un vistazo histórico y las ingeniosas técnicas que aparecen debido a su tratamiento. También se busca indagar en las propiedades y problemas, ya expuestos a la comunidad matemática, de la ecuación de Pell, así como en aquellas potencialmente por descubrir. Se presentan de manera clara y precisa las demostraciones de los resultados que permiten las aplicaciones de la ecuación en las diversas situaciones. Además, se pretende motivar estudios posteriores en las propiedades, relaciones y aplicaciones del tratamiento de esta ecuación y, en general, de las ecuaciones diofánticas en cualquier área de las matemáticas.

La exposición histórica mayormente está dada en el Capítulo I, en el que además se demuestra que siempre tiene una solución no trivial. Se introduce la ecuación negativa de Pell y se prueba que tiene solución cuando el desarrollo en fracción continua regular de la mitad de la raíz cuadrada de su discriminante tiene periodo impar. Ilustramos estos resultados con distintos casos particulares.

En el Capítulo II, se presentan distintos problemas en los que es de utilidad saber solucionar esta ecuación diofántica para resolverlos. Se define la ecuación generalizada de Pell y se demuestran resultados que ayudan a encontrar sus soluciones cuando las haya. Resolvemos los problemas en donde esta surge en su versión generalizada.

Se finaliza con la demostración de que hay infinitas parametrizaciones que solucionan la ecuación diofántica suma de tres cubos igual a 1 con la ayuda de la teoría de la ecuación de Pell.

Cuando la evidencia matemática lo requiera, el rigor de los razonamientos e inferencias es observado con cuidado. Sin embargo, el desarrollo del tema no pretende elaborar una armazón formal lógico-deductiva, aislada del influjo de las ideas de la sociedad matemática a través del tiempo, la curiosidad, el contexto de las épocas y las necesidades, problemas e intereses que impulsaron estos resultados, y que van dando forma a lo que entendemos como matemáticas. La ambición de esta metodología es ligar las construcciones más abstractas a su correspondiente evolución, y evitar dar la impresión de que son temas que surgen de la nada, sin ninguna relación última con las percepciones o los constructos más concretos.

¿Pero qué es la ecuación de Pell? ¿Por qué pasó tanto tiempo para saber resolver cualquiera de estas? ¿Qué puede tener que sea retador? ¿En qué situaciones “inesperadas” surge? ¿Cómo ha impulsado a las matemáticas?

## Capítulo I: Introducción histórica a la ecuación de Pell

*“Una partícula de instrucción transmite la ciencia a una mente amplia: y habiéndola alcanzado, se expande por su propio impulso. Como aceite derramado en agua, como secreto confiado al oído, como limosnas otorgadas al digno, aunque sea poca, así la ciencia infundida a una mente sabia se esparce por fuerza intrínseca”. (Quotable Mathematics, 2019).*

Bhaskara II (भास्कर, en escritura devanagari del sánscrito), *Bijaganita*, siglo XII

### 1.1. Ecuaciones diofánticas

Una *ecuación diofántica* es una ecuación a cuyas incógnitas solo se les permite asumir valores enteros o a veces valores racionales. El estudio de tales ecuaciones se remonta a los antiguos; de hecho, llevan su nombre gracias a Diofanto de Alejandría (c. 200-284 NE) en honor a su trabajo en ellas. Sin embargo, es más probable que los matemáticos griegos estuvieron investigando sus propiedades mucho antes que este. Para ver un ejemplo sencillo, considérese la ecuación

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad , \quad (1.1)$$

donde restringimos cualquier solución  $(x, y, z)$  a ser una tripleta de enteros. Cualquier estudiante de geometría de secundaria está familiarizado con la solución  $(3, 4, 5)$  y algunos, incluso, están al tanto de las soluciones adicionales  $(5, 12, 13)$  y  $(8, 15, 17)$ . En efecto, existe una infinidad de distintas soluciones enteras de (1.1) para las cuales el máximo común divisor (MCD) es 1 o, con la notación de la *Encyclopedia of Mathematics* de la Sociedad Matemática Europea,  $(x, y, z) = 1$  (Encyclopedia of Mathematics, 2014).

Hay varias preguntas que pueden hacerse acerca de cualquier ecuación diofántica en particular.

Podríamos solo estar interesados en si existe alguna solución. Por ejemplo, la simple ecuación diofántica



$$x^2 + y^2 = 3$$

no tiene soluciones enteras, ni tampoco

$$x^2 - 3y^2 = 2 \quad .$$

A veces cierta ecuación diofántica tiene una o más soluciones triviales (obvias, se encuentran por simple inspección, generalmente involucran anular al menos una variable, y su interés no va mucho más allá de presentar el conjunto completo de soluciones), y puede que estemos interesados en si tiene alguna solución no trivial.

Consideremos la célebre ecuación de Fermat (1607-1665)

$$x^n + y^n = z^n \quad (n > 2) \quad .$$

Claramente esta tiene soluciones triviales donde  $xyz = 0$ , pero no fue hasta 1995 que Wiles (nacido en 1953) demostró correctamente, con la colaboración de Taylor (nacido en 1962), que no tiene soluciones no triviales (Wiles, 1995).

Algunas ecuaciones diofánticas tienen unas pocas soluciones no triviales, por lo que no tienen más soluciones. En 1942, Ljunggren (1905-1973) demostró que las únicas soluciones en enteros positivos de

$$x^2 - 2y^4 = -1$$

son  $(x, y) = (1, 1), (239, 13)$  (Steiner & Tzanakis, 1991, p. 123). En 1844, Catalan (1814-1894) conjeturó que las únicas potencias consecutivas aparte de las triviales 0 y 1 son 8 y 9; esto es, la ecuación diofántica

$$x^p - y^q = 1 \quad (|x| \neq 1; p, q > 1)$$

tiene solo las soluciones  $(x, y, p, q) = (\pm 3, 2, 2, 3)$  (Weisstein, 2005). Hay mucha literatura sobre esta conjetura, que fue finalmente probada por Mihăilescu (nacido en 1955) en 2002 (Weisstein, 2005). Como tercer ejemplo, mencionamos la ecuación de Ramanujan-Nagell

$$2^n - 7 = x^2 \quad .$$

En 1913, Ramanujan (1887-1920) (1913) preguntó si esta tenía cualquier otra solución además de aquellas para las cuales  $n = 3, 4, 5, 7, 15$  (p. 327). Esto fue respondido negativamente por Nagell (1895-1988) en 1948 (Nagell, 1961, p. 185).

Puede que también estemos interesados en si existe solo un número finito de soluciones o en si hay infinitas. En caso de que haya infinitas, ¿podemos caracterizar todas las soluciones? Por ejemplo, podemos caracterizar todas las soluciones de (1.1) como  $(d(n^2 - m^2), 2dmn, d(m^2 + n^2))$ , donde  $d, m, n$  son enteros, además  $m, n$  tienen paridad opuesta. Haciendo  $d = 1, n = 2, m = 1$ , obtenemos  $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ .

La ecuación diofántica (1.1), a veces llamada la *ecuación pitagórica*, es un ejemplo de una que es particularmente fácil de resolver; no obstante, es importante apuntar que muchas ecuaciones diofánticas son muy difíciles de resolver. Hasta comienzos del siglo XX había pocas técnicas, si alguna, generalmente aplicables que podían ser empleadas exitosamente para este propósito. El estudio parece ser poco más que un repertorio de trucos matemáticos que serían o (más probablemente) no serían útiles al resolver una ecuación en particular. Esta situación ha cambiado profundamente durante la última mitad del siglo pasado, y hay ahora un número de métodos muy profundos y potentes que pueden ser empleados para resolver una amplia variedad de ecuaciones diofánticas. Empero, debe enfatizarse que es un hecho matemático que no puede existir un algoritmo general que pueda ser usado para resolver todas las ecuaciones diofánticas (Matiyasevich, 1993, p. 93).

## 1.2. Ecuación de Pell

Ahora retornemos a (1.1), pero con un pequeño cambio. Intentaremos resolver, para un entero dado  $a$ , la ecuación diofántica

$$x^2 + ay^2 = z^2 \quad .$$

Notamos que se cumple la identidad

$$(m^2 - an^2)^2 + a(2mn)^2 = (m^2 + an^2)^2 \quad ;$$

luego, la ecuación tiene una infinidad de soluciones, ¿pero todas las soluciones  $(x, y, z)$  están caracterizadas por el trío paramétrico  $(d(m^2 - an^2), 2dmn, d(m^2 + an^2))$ , donde  $d, m, n$  son enteros? Mientras que este es el caso para  $a = 1$ , generalmente esto no se cumple. Considérese la ecuación simple

$$x^2 - 21y^2 = z^2 \quad ,$$

y nótese que  $(5, 1, 2)$  es una solución. Esta claramente no está incluida en el conjunto de soluciones mencionado anteriormente. Esto se puede corroborar al ver que  $y = 1 \neq 2dmn$ , pues, en enteros 1 no es múltiplo de 2 jamás o, lo que es lo mismo, 2 no tiene inverso multiplicativo en el anillo de los enteros con la adición y la multiplicación habituales (los únicos que los tienen son 1 y  $-1$ ).

La abordaremos, pues, de otra manera. No hay pérdida de generalidad alguna en asumir que  $a < 0$  (esto lo podemos hacer porque podemos alternar a conveniencia la variable  $x$  con la  $z$ ) y que  $-a$  no es un cuadrado perfecto (de ser cuadrado perfecto, nos llevaría de regreso al problema de resolver (1.1)). Denotaremos  $-a$  por  $D$ .

Considérese la *identidad de Brahmagupta (identidad de composición o identidad de composición de Brahmagupta)*

$$(x^2 - Dy^2)(p^2 - Dq^2) = (xp + Dyq)^2 - D(xq + yp)^2 \quad . \quad (1.2)$$

Así, si

$$p^2 - Dq^2 = 1 \quad , \quad (1.3)$$

y además, si  $(x, y, z)$  es una solución de

$$x^2 - Dy^2 = z^2 \quad , \quad (1.4)$$

entonces

$$(x^2 - Dy^2)(p^2 - Dq^2) = (z^2)(1) = (xp + Dyq)^2 - D(xq + yp)^2 = z^2 \quad .$$

Es decir, también es solución de (1.4) la nueva tripleta

$$(xp + Dyq, xq + yp, z) \quad ;$$

esto es, obtenemos otra solución de (1.4) de una ya dada, provista podemos resolver (1.3).

La ecuación diofántica

$$T^2 - DU^2 = 1 \quad (1.5)$$

es llamada *la ecuación de Pell*. Como ejemplo sencillo, consideremos

$$T^2 - 7U^2 = 1 \quad ,$$

que tiene las soluciones  $(\pm 1, 0)$  (soluciones triviales),  $(\pm 8, \pm 3)$ ,  $(\pm 127, \pm 48)$ , etcétera. Esta ecuación diofántica, con apariencia engañosamente sencilla, ha sido objeto de estudio de los matemáticos por más de dos milenios. Tiene su nombre por John Pell (1611-1685) debido a un error de atribución cometido por Euler (1707-1783) (1750) en cuanto a un método de resolverla en “Los trabajos de Wallis” (p. 37). Esto es más probablemente el resultado de una lectura superficial de Euler del *Álgebra* de Wallis (1616-1703). Como ha sido notado por varios eruditos en la materia, más recientemente por Weil (1906-1998) (1984), el nombre de Pell aparece frecuentemente en *Álgebra*, pero nunca en conexión con la ecuación de Pell (p. 174). De hecho, parece que es más probable que el método referido por Euler para resolver

(1.5) es una técnica que Wallis acredita a Lord Brouncker (1620-1684). A pesar de la amplia evidencia confirmando el descuido de Euler, ha habido incluso esfuerzos relativamente recientes para conectar a Pell con (1.5). Esto parece haber iniciado con un malentendido de una anotación de Hankel (1839-1873), quien en realidad declaró, hablando de la ecuación de Pell, “Pell no le ha hecho más servicio que exponerla de nuevo en un trabajo muy leído” (p. 203). El “trabajo muy leído” es la traducción al inglés del *Teutschen Algebra* de Rahn (1622-1676) de 1668 (véase las Referencias para más detalles sobre esta obra). No obstante, exámenes cuidadosos de este trabajo por Konen (1874-1948) (1901, pp. 33-34, pie de página 1), Wertheim (1843-1902) (1902, pp. 113-126), y Eneström (1852-1923) (1902, pp. 204-207) no resultaron en el descubrimiento de alguna mención de (1.5). Puede haber escasa duda de que la mayor parte de este libro (el de Rahn traducido), particularmente las páginas 100-192, fueron gracias a Pell, aun así, la única mención de lo que hay, al menos, parecido a la ecuación de Pell en este es la ecuación

$$x = 12y^2 - z^2 \quad (1.6)$$

en la página 143. Esto persuadió a Whitford (1865-fecha de muerte desconocida) (1912) de que Pell tenía alguna relación con (1.5) (p. 2) y parece también que ha servido como razón adicional que la biografía de Pell sugiere que este sea el caso. Como sea, una inspección exhaustiva del contexto en el cual aparece (1.6) revela que es para ser usada para encontrar  $x$  después de que se haya seleccionado valores para  $y$ ,  $z$ . Esta, entonces, puede escasamente ser apreciada como la ecuación de Pell. Por ende, de ningún modo hay evidencia enlazando a Pell con (1.5).

Aún más, a (1.5) se le ha dado muchos nombres. Algunos autores la llaman la *ecuación pelliana*, otros la *ecuación Pell*, y otros la *ecuación de Fermat*. En 1963, Clas-Olof Selenius (1922-1991) de la Universidad de Uppsala la llamó la *ecuación Bhaskara-Pell* (Scriba, 1992, p. 326); cuatro años más tarde, el matemático indio C. N. Srinivasiengar (1967) la llamó la *ecuación de Brahmagupta-Bhaskara* (p. 110). En 1975, Selenius (1975) cambió de opinión y escribió que “quizá la ecuación *Jayadeva-Bhaskara* sería el mejor nombre” (p. 168).

A pesar de ello, como Weil (1984) sostiene, la “designación tradicional [de (1.5)] como ‘la ecuación de Pell’ es libre de ambigüedad y conveniente” (p. 174). Consecuentemente, es el término más usado a través de la literatura para (1.5), aunque es tanto históricamente errado e injusto hacia aquellos individuos anteriores que hicieron importantes contribuciones a su estudio.

La ecuación de Pell tiene el hábito de aparecer en una variedad de escenarios, algunos bastante inesperados. Los cuales veremos más adelante, pero mencionaremos algunos.

Considérese el problema de encontrar enteros que son tanto triangulares como cuadrados, un número como 36.

Otro problema sencillo es el de hallar triángulos pitagóricos de lados con medida entera cuyos catetos difieren en 1. Un triángulo como el de lados 20, 21, 29.

Otro ejemplo, menos simple, se menciona a través de la ocurrencia sorprendente de la ecuación de Pell en la parametrización de Lehmer (1905-1991) de las soluciones de la ecuación diofántica cúbica  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .

Ahora demostraremos que (1.5) siempre tiene una solución no trivial ( $U \neq 0$ ) cuando  $D$  es positivo y no es un cuadrado perfecto. Primero requeriremos un lema sencillo.

**Lema 1.1.** *Sea  $s$  cualquier entero positivo. Siempre existen enteros  $t$  y  $u$  tales que*

$$|t - u\sqrt{D}| < \frac{1}{s} \leq \frac{1}{|u|} .$$

*Prueba.* Para cada entero  $u$  tal que  $0 \leq u \leq s$ , ponemos  $t = \lceil u\sqrt{D} \rceil$  (la función techo con entrada  $u\sqrt{D}$ ). Entonces para cada par  $(t, u)$  tenemos

$$0 \leq t - u\sqrt{D} < 1$$

por la misma definición de la función techo. Si dividimos el intervalo  $[0,1)$  en  $s$  subintervalos  $[i/s, (i+1)/s)$  con  $i = 0, 1, \dots, s-1$  cada uno de longitud  $1/s$ , por el principio de Dirichlet:

*Si  $n$  objetos discretos deben guardarse en  $m$  cajas, al menos una caja debe contener no menos de  $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$  objetos*

(también conocido como *principio del palomar* o *principio de las cajas*), vemos que dos de los  $s+1$  pares de arriba, digamos  $(t_1, u_1)$  y  $(t_2, u_2)$ , deben ser tales que  $t_1 - u_1\sqrt{D}$  y  $t_2 - u_2\sqrt{D}$  caen en el mismo subintervalo. Dado que  $u_1 \neq u_2$ , vemos que  $t_1 - u_1\sqrt{D}$  y  $t_2 - u_2\sqrt{D}$  son distintos, y

$$-\frac{1}{s} < t_1 - u_1\sqrt{D} - (t_2 - u_2\sqrt{D}) < \frac{1}{s}$$

o

$$|t_1 - t_2 - (u_1 - u_2)\sqrt{D}| < \frac{1}{s} .$$

También, como  $|u_1 - u_2| \leq s$ , tenemos

$$|t_1 - t_2 - (u_1 - u_2)\sqrt{D}| < \frac{1}{s} \leq \frac{1}{|u_1 - u_2|} .$$

Haciendo  $t = t_1 - t_2$  y  $u = u_1 - u_2$  llegamos a lo enunciado por el lema.  $\square$

**Corolario 1.2.** *Existe una infinidad de pares de enteros  $(t, u)$  tales que*

$$|t - u\sqrt{D}| < \frac{1}{|u|} .$$

*Prueba.* Supongamos que existe solo un conjunto finito  $S$  de tales pares. Entonces debe existir un entero mínimo  $M$  tal que

$$\frac{1}{M} < \min_{(t,u) \in S} \{t - u\sqrt{D}\} .$$

Por el lema, existen enteros  $t'$  y  $u'$  tales que

$$|t' - u'\sqrt{D}| < \min\left\{\frac{1}{M}, \frac{1}{|u'|}\right\} .$$

Dado que  $|t' - u'\sqrt{D}| < 1/|u'|$ , tenemos que  $(t', u') \in S$ . Pero, ya que

$$|t' - u'\sqrt{D}| < \frac{1}{M} < \min\{t - u\sqrt{D} : (t, u) \in S\} ,$$

esto es imposible. □

Ahora usaremos  $S$  para denotar el conjunto infinito de todos los pares  $(t, u)$  tales que

$$|t - u\sqrt{D}| < \frac{1}{|u|} .$$

**Teorema 1.3.** *La ecuación de Pell siempre tiene al menos una solución no trivial.*

*Prueba.* Si  $(t, u) \in S$ , entonces por la desigualdad triangular

$$|t + u\sqrt{D}| = |t - u\sqrt{D} + 2u\sqrt{D}| \leq |t - u\sqrt{D}| + |2u\sqrt{D}| < \frac{1}{|u|} + 2|u|\sqrt{D} .$$

Por consiguiente,

$$|t^2 - Du^2| = |t - u\sqrt{D}||t + u\sqrt{D}| < \frac{1}{|u|} \left( \frac{1}{|u|} + 2|u|\sqrt{D} \right) = \frac{1}{u^2} + 2\sqrt{D} .$$



Como estamos buscando una solución no trivial,  $u \neq 0$ . Por lo que

$$\frac{1}{u^2} + 2\sqrt{D} \leq 1 + 2\sqrt{D} \quad .$$

De este modo, para todo  $(t, u) \in S$ , tenemos  $|t^2 - Du^2| < 1 + 2\sqrt{D}$ . Puesto que  $1 + 2\sqrt{D}$  es fijo, debemos, de nuevo por el principio de las cajas de Dirichlet, tener una infinitud de pares  $(t, u) \in S$  tales que

$$t^2 - Du^2 = k$$

para algún  $k \in \mathbb{Z}$  fijo con  $|k| < 1 + 2\sqrt{D}$ . Ya que  $\mathbb{Z}_k$  es finito, también deben existir infinitos pares de estos para los cuales los valores de  $t$  tienen el mismo módulo  $k$ , al igual que con sus correspondientes valores de  $u$ . Para aclarar más esto último, sabemos que el conjunto de clases de equivalencia módulo  $k$ ,  $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{Z}_k$  es finito; además, hay infinitos pares  $(t, u) \in S$ , por lo que hay clases de equivalencia que tendrán infinitos  $t$ , y esos estarán asociados a infinitos  $u$  que pertenezcan a la misma clase de equivalencia, que no necesariamente es la que tiene a sus  $t$  asociados. Sean  $(t_1, u_1)$  y  $(t_2, u_2)$  dos de dichos pares en los que  $t_1 \neq \pm t_2$  y  $u_1 \neq \pm u_2$ . Por (1.2), vemos que

$$(t_1^2 - Du_1^2)(t_2^2 - Du_2^2) = k \cdot k = (t_1 t_2 - Du_1 u_2)^2 - D(t_1 u_2 - t_2 u_1)^2 = k^2 \quad .$$

Ahora, como  $t_1 \equiv t_2 \pmod{k}$  y  $u_1 \equiv u_2 \pmod{k}$ , entonces  $t_1 u_2 \equiv t_2 u_1 \pmod{k}$  o lo que es lo mismo  $t_1 u_2 - t_2 u_1 \equiv 0 \pmod{k}$ ; por eso,  $t_1 t_2 - Du_1 u_2 \equiv 0 \pmod{k}$  y

$$\left(\frac{t_1 t_2 - Du_1 u_2}{k}\right)^2 - D\left(\frac{t_1 u_2 - t_2 u_1}{k}\right)^2 = 1 \quad .$$

Ya que  $(t_1 t_2 - Du_1 u_2)/k, (t_1 u_2 - t_2 u_1)/k \in \mathbb{Z}$ , tenemos una solución no trivial de (1.5) siempre que  $t_1 u_2 - t_2 u_1 \neq 0$ . Sin embargo, si  $t_1 u_2 - t_2 u_1 = 0$ , entonces  $t_1 t_2 - Du_1 u_2 = \pm k$ , y estas son dos ecuaciones que pueden ser satisfechas simultáneamente solo si  $t_1 = \pm t_2$  y  $u_1 = \pm u_2$ , posibilidades que ya hemos excluido.  $\square$

El Teorema 1.3 es uno de los resultados más destacables porque si, por ejemplo, empezáramos a conducir una búsqueda exhaustiva por el valor más pequeño de  $T$  para el cual

$$T^2 - 1621U^2 = 1 \quad ,$$

recorreríamos un largo camino antes de encontrar tal  $T$  con  $U \neq 0$ . En realidad, probablemente nos convenceríamos de que no existe cierto valor de  $T$ ; esto es porque el menor de dichos valores para  $T$  es un número de 76 dígitos decimales. No obstante, sabemos que esta ecuación sí tiene una solución no trivial, pero la prueba del Teorema 1.3 no nos da información alguna de cómo determinar  $T$  y  $U$ .

### 1.3. El problema de las reses del sol de Arquímedes

En 1773, el poeta y crítico literario Gotthold Ephraim Lessing (1729-1781) publicó un epigrama griego que había editado desde un manuscrito árabe en la Biblioteca Herzog-August en Wolfenbüttel al norte de Alemania. El texto de este epigrama consiste en un encabezado, seguido por un poema de 44 líneas conformado por 22 dísticos elegiacos, un esolio dando una (falsa) solución, y un extenso análisis del problema por parte de Christian Leiste (1738-1815). Ha habido alguna controversia concerniente a la traducción exacta del encabezado, pero parece que la versión de Fraser (1972), dada abajo, es más o menos tan fiel como cabe esperar.

*Un problema que Arquímedes puso de forma epigramática y envió a aquellos interesados en estos asuntos en Alejandría, en una carta dirigida a Eratóstenes de Cirene (Vol. I, p. 407).*

La traducción citada con más frecuencia del problema en sí es la de Thomas (1941).

*Si tú, diligente en arte y sabio, Oh extraño, computas el número de reses del Sol, que en una época pastaban en los campos de la isla trinaciana de Sicilia, divididas en cuatro rebaños de colores diferentes, uno blanco como la leche, otro negro brillante, el tercero amarillo y el último moteado. En cada rebaño había toros, imponentes en número de acuerdo a estas proporciones: Entiende, extraño, que los toros blancos eran iguales a la mitad y un tercio*

*de los negros juntos con la totalidad de los amarillos, mientras que los negros eran iguales a la cuarta parte de los moteados y una quinta, junto con, una vez más, la totalidad de los amarillos. Observa además que los toros restantes, los moteados, eran iguales a la sexta parte de los blancos y una séptima, junto con todos los amarillos. Estas eran las proporciones de las vacas: Las blancas eran exactamente iguales a la tercera parte y una cuarta de todo el rebaño de los negros; mientras que las negras eran iguales a la cuarta parte una vez más de los moteados y con eso una quinta parte, cuando todos, incluyendo los toros iban a pastar juntos. Ahora las moteadas en cuatro partes eran iguales en número a una quinta parte y una sexta del rebaño amarillo. Finalmente, las amarillas eran en número iguales a una sexta parte y una séptima del rebaño blanco. Si vos podéis con certeza decir, Oh extraño, el número de reses del Sol, dando por separado el número de toros bien alimentados y de nuevo el número de hembras de acuerdo a cada color, no solo seréis contado entre los sabios. Mas venid, entended también todas estas condiciones en cuanto a las vacas del Sol. Cuando los toros blancos entremezclaban su número con los negros, se mantenían firmes, iguales en profundidad como en ancho, y las llanuras de Trinacia, extendiéndose lejos en todas direcciones, eran llenadas con su multitud. Una vez más, cuando los toros amarillos y los moteados eran recolectados en un solo rebaño se erguían de tal manera que su número, comenzando en uno, lentamente se hacía mayor hasta que completaba una figura triangular, no habiendo toros de otros colores en medio de ellos ni ninguno de ellos faltando. Si vos hábil en arte, Oh extraño, averiguas todas estas cosas y las mantienes juntas en tu mente, dando todas las relaciones, partiréis coronado con gloria y sabiendo que habéis sido declarado perfecto en esta especie de sabiduría (Vol. II, pp. 203-206).*

Se hace referencia a este problema en un escolio del *Cármides* de Platón (c. 427-c. 347 ANE) siendo llamado el Problema del Ganado de Arquímedes. Puede que haya sido mencionado también en algún trabajo de Cicerón (106-43 ANE). Los historiadores y críticos están de acuerdo en que lo más probable es que el problema tenga su origen con Arquímedes (c. 287-212 ANE), y parece no haber buenas razones para discrepar con este juicio.

El problema es encontrar los números  $W$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de toros blancos, negros, moteados, amarillos, respectivamente, y los números  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de

vacas con los colores correspondientes. Podemos escribir las ecuaciones que satisfacen estas cantidades como

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Z \quad , \quad (1.7)$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Y + Z \quad , \quad (1.8)$$

$$Y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Z \quad , \quad (1.9)$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)(X + x) \quad , \quad (1.10)$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)(Y + y) \quad , \quad (1.11)$$

$$y = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)(Z + z) \quad , \quad (1.12)$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)(W + w) \quad , \quad (1.13)$$

$$W + X = \diamond \quad , \quad (1.14)$$

$$Y + Z = \Delta \quad . \quad (1.15)$$

En las dos últimas,  $\diamond$  y  $\Delta$  representan un número cuadrado y un número triangular, respectivamente. Hablamos más sobre estos números en la Sección 2.2.

Leiste encontró las soluciones enteras para (1.7), (1.8), y (1.9)

$$Y = 1580m \quad , \quad Z = 891m \quad , \quad W = 2226m \quad , \quad X = 1602m \quad , \quad (1.16)$$

donde  $m$  es un parámetro entero (Dickson, 1919, Vol. II, pp. 342-343). (Esto simplemente es Álgebra Lineal). Él luego buscó soluciones a (1.7)-(1.13) para

las incógnitas que fueron todas 20 veces más grandes de lo que deberían ser. Como sea, si multiplicamos (1.10) por 4800, (1.11) por 2800, (1.12) por 1260, y (1.13) por 462 y sumamos, obtenemos

$$4657w = 2800X + 1260Y + 462Z + 143W \quad .$$

Usando las ecuaciones (1.16), encontramos que la relación entre los parámetros es  $m = 4657n$ , para un parámetro entero  $n$ , pues, 4657 es un número primo. De esto y de las ecuaciones (1.10)-(1.13), despejamos el resto de las variables ( $w$  la obtenemos con la ecuación anterior y (1.16)) y encontramos los valores de todas las variables en términos del parámetro  $n$

$$\begin{aligned} W &= 10366482n \quad , & X &= 7460514n \quad , \\ Y &= 7358060n \quad , & Z &= 4149387n \quad , \\ w &= 7206360n \quad , & x &= 4893246n \quad , \\ y &= 3515820n \quad , & z &= 5439213n \quad , \end{aligned} \tag{1.17}$$

Ya que los coeficientes de  $n$  tienen máximo común divisor 1, (1.17) representa todas las soluciones posibles de (1.7)-(1.13). Como ya mencionamos, Leiste dio una solución con  $n = 20$  y el escolio, sin explicación, da una solución para  $n = 80$ . Ninguna de estas satisface (1.14) o (1.15).

Falta considerar (1.14) y (1.15). Ya que  $W + X$  debe ser un cuadrado y

$$W + X = 4 \times 957 \times 4657n \quad ,$$

debemos tener  $n = 957 \cdot 4657U^2 = 4456749U^2$ . También,  $Y + Z = V(V + 1)/2$  significa que

$$T^2 = 8(Y + Z) + 1 = DU^2 + 1 \quad ,$$

donde  $T = 2V + 1$  y

$$D = 410286423278424 \quad . \quad (1.18)$$

Así que, para resolver el problema de las reses del Sol, debemos resolver la ecuación de Pell (1.5) con  $D$  dado por (1.18).

Ha habido algo de controversia acerca de la terminología exacta del problema de las reses, pero ningún cambio significativo al respecto ha alcanzado la aceptación de los eruditos modernos. Se han manifestado algunas dudas sobre si la segunda parte del problema en realidad lleva a una ecuación de Pell. Esto tiene que ver con que si se interpreta el texto del problema como pidiendo que  $W + X$  sea un cuadrado entero o si los toros, cuando juntos son agrupados, llenen un cuadrado. Como un toro es más largo de lo que es de ancho, la segunda interpretación preguntaría simplemente por  $W + X$  siendo un número rectangular. Este problema es llamado problema de Wurm (1791-1839), ya que fue resuelto por él (Wurm, 1830, pp. 194-202) produciendo una solución donde

$$W + X = 1409076 \cdot 1485583 \quad .$$

Esto sugiere, entonces, que la razón del largo a la anchura de los toros sería  $1485583/1409076$ , que es bastante cercana a 1. Podemos aseverar que hemos visto muchos toros, pero nunca un toro con estas proporciones, y es poco probable que los toros en Sicilia alguna vez hayan tenido tales proporciones siquiera.

Nos quedan varias preguntas alrededor de este singular trabajo. Por ejemplo, ¿qué causó que Arquímedes divisara este problema en primer lugar? Hultsch (1833-1906) ha provisto una explicación muy brillante para esto (Fraser, 1972, Vol. II, p. 590, nota 256). Apolonio de Perga (c. 262-c. 190 ANE) en su *Reparto Rápido* produjo una mejor aproximación de  $\pi$  que la de Arquímedes en su anterior *Medida del Círculo*, y parece que parte de la motivación de Apolonio para hacer esto era exhibir su habilidad superior en esta clase de manipulaciones numéricas. Ciertamente, tuvo que realizar multiplicaciones más difíciles que aquellas mencionadas en la *Medida del Círculo*. Otro trabajo de Apolonio referente a la multiplicación de números

grandes, preservado en la *Sinagoga* o *Colección* de Papo de Alejandría (c. 290-c. 350 NE), aunque inspirado por *Contador de Arena* de Arquímedes, también parece implicar alguna crítica a los métodos de Arquímedes. Así que, no parece descabellado que Arquímedes haya respondido formulando el problema de las reses como un desafío a Apolonio y otros; ya que resolver la segunda parte de este involucra la manipulación de números enormes. Esta suposición está apoyada en alguna medida por el sutil tono satírico del problema de las reses, en el que es particularmente evidente la mofa desplegada en las últimas líneas del epigrama, que Fraser (1972) traduce como:

*Si encontrases estas cuestiones, y las pusieses en la mente, dando todas las medidas de los números, andad victorioso en gloria y sabed con certeza que habéis sido declarado consumado en al menos este saber* (Vol. I, p. 409).

Desde la perspectiva de un matemático, el tono de estas últimas líneas nos provee las mejores razones para refutar la hipótesis de Wurm mencionada antes: su solución es demasiado simple de encontrar. Claro que es imposible verificar estas suposiciones, como apunta Dijksterhuis (1892-1965) (1987, pp. 399-400, nota 3), pero es interesante señalar que, como Apolonio pasó la mayor parte de su actividad matemática en Alejandría, él debió muy probablemente haber estado ahí durante el tiempo en el que la carta que contenía el problema fue enviada a Eratóstenes (276-194 ANE).

Parece que el problema debe alguna de su inspiración al Libro XII de la *Odisea* de Homero.

El vocablo griego “trinaciano” significa “de tres esquinas” y fue usado para designar la Isla con tres esquinas de Sicilia, donde Arquímedes vivía.

Además, hay otra importante cuestión acerca de este problema: ¿pudo el mismo Arquímedes resolverlo? Dada la dificultad del problema en sí, la respuesta debe ser que no. Aunque la idea básica de cómo proceder para resolverlo había sido demostrada por Amthor (1845–1916) ya en 1880, no fue hasta el advenimiento de los dispositivos de computación modernos que fue posible calcular los enormes números que representan el tamaño de los distintos rebaños. En efecto, es hasta 1964 que Beiler (1964) pudo escribir

sobre este problema que “espectaculares hazañas de cálculo han sido llevadas a cabo y las respuestas aún no han sido completamente computadas ni siquiera es probable que lo sean jamás” (p. 249). No obstante, Amthor había encontrado las cuatro cifras más representativas del total de reses, siendo  $7,760 \times 10^{206545}$ , implicando que la cantidad de cada rebaño era algún número de al menos 206544 dígitos. No fue hasta 1965 que se pudo determinar el valor numérico de estas cantidades, con la ayuda de dos supercomputadoras IBM 7040 e IBM 1620. El tiempo total de computación fue de 7 horas y 49 minutos (Williams, German, Zarnke, 1965, p. 4). Ya en 1981, con el uso de un ordenador Cray-1, Nelson (nacido en 1932) (1981) obtuvo las cinco primeras soluciones (pp. 162-176). Hoy en día podemos consultar el número total del ganado sagrado del dios griego Helios del Sol en la dirección o enlace de Internet:

<http://oeis.org/A096151/a096151.txt> ,

expresado en expansión decimal y dispuesto en 4131 filas de 50 dígitos cada una (excepto la última), con un total de 206545 dígitos. Los primeros cincuenta dígitos del número son:

77602714064868182695302328332138866642323224059233 ...

y los últimos cincuenta son:

...05994630144292500354883118973723406626719455081800 .

Este número fue publicado por Robert G. Wilson (nacido en 1947) el 2 de septiembre de 2004, y si lo imprimiese con tamaño 10 de letra, ocuparía un documento de 73 páginas tamaño A4, solamente para expresarlo con la disposición de la página web. Un análisis estadístico ayuda a identificar el número y muestra, como cabe esperar, que sus dígitos son esencialmente aleatorios. La mayor cantidad de dígitos repetidos es de seis ochos empezando en el dígito 37207 [el artículo dice que a partir del dígito 37307, lo que es incorrecto] y de seis ceros empezando en el dígito 191148 [la posición correcta es 191048]; estos tomados en cuenta desde el inicio del número (Williams, 1965, p. 4).



La pregunta más importante, como Vardi (nacido en 1957) (1998) notó, es: ¿Arquímedes sabía que tenía solución? Este podría ser el caso, pero puede que nunca lo sepamos con seguridad. Es importante que tengamos siempre en mente una cosa. En nuestra sociedad moderna, con sus computadoras y matemáticas tan sofisticadas, es fácil que perdamos de vista la excepcional obra que es este problema. Dada su fecha de composición y el estado de las matemáticas (como actualmente lo entendemos) para este tiempo, debe ser apreciado como un trabajo de genialidad considerable (pp. 305-319).

#### 1.4. Contribuciones adicionales de los griegos

La primera mención explícita de una ecuación de Pell parece ocurrir en un trabajo (c. 130 NE) de Teón de Esmirna (c. 70-c. 135). Si hacemos  $s_1 = 1$  y  $d_1 = 1$ , y calculamos

$$s_{n+1} = s_n + d_n \quad , \quad d_{n+1} = 2s_n + d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad ,$$

entonces

$$d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^n \quad . \quad (1.19)$$

Claro que Teón no empleaba la notación moderna que usamos aquí, tampoco proveyó alguna prueba de (1.19), en cambio quedó satisfecho simplemente verificándola para los pocos primeros casos. Para mayores detalles del origen geométrico de esta recurrencia, remitimos al lector al trabajo de graduación *La Ecuación de Pell* de Navarrete y Martínez (2009, pp. 12-14). Mucho después, el filósofo neoplatónico Proclo (412-485 NE) arrojó luz sobre estas observaciones. Se refirió a una identidad que en nuestra notación estaría expresada como

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x + y)^2 \quad (1.20)$$

y parece apelar a la Proposición 10 en el Libro II de *Los Elementos* de Euclides (c. 325-c. 265 ANE) para una prueba. Si reescribimos la identidad,

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = -(y^2 - 2x^2) \quad ,$$

que sirve para demostrar (1.19), aunque Proclo no lo dice. La mayoría de los historiadores de la matemática están de acuerdo en que tanto Teón como Proclo parecen elaborar sobre una fuente pitagórica bastante anterior a este material. Lo que es destacable sobre estos números laterales y diagonales es que sugieren que los pitagóricos usaron los valores de  $d_n/s_n$  como medio para producir cada vez mejores aproximaciones racionales de  $\sqrt{2}$ . Como los antiguos matemáticos griegos estaban interesados en el problema de la irracionalidad, es posible que la existencia de esta secuencia infinita acercándose, pero nunca alcanzando el valor de  $\sqrt{2}$  haya sido usada para generar una primera (pero incorrecta) prueba de la irracionalidad de esta cantidad.

Estudiemos con mayor detenimiento las sucesiones  $d_n$  y  $s_n$ . Podemos escoger arbitrariamente los valores de  $d_1$  y de  $s_1$  siempre que ambos no sean 0 a la vez,  $d_n/s_n$  en todo caso va a aproximarse a  $\sqrt{2}$  puesto que si

$$\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{d_{n+1}}{s_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2s_n + d_n}{s_n + d_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{s_n}{s_n + d_n} + \frac{s_n + d_n}{s_n + d_n} \right) \quad ,$$

tendríamos

$$\theta = \frac{1}{1 + \theta} + 1 \Rightarrow \theta^2 = 2 \quad .$$

Asumamos que  $d_1 = k$ ,  $s_1 = m$ , para cualesquiera enteros  $k$ ,  $m$  no nulos a la vez. Haciendo  $p = q = 1$ ,  $x = d_n$ ,  $y = s_n$ ,  $D = 2$  en la identidad de Brahmagupta, tenemos

$$(d_n^2 - 2s_n^2)(1^2 - 2 \cdot 1^2) = (d_n + 2s_n)^2 - 2(d_n + s_n)^2 = (d_{n+1})^2 - 2(s_{n+1})^2 \quad .$$

Podemos inferir entonces que

$$d_n^2 - 2s_n^2 = (-1)^{n+1}(k^2 - 2m^2)$$

y lo demostramos por inducción matemática. Tenemos

$$(d_{n+1})^2 - 2(s_{n+1})^2 = -(d_n^2 - 2s_n^2) \quad ,$$

empleando la hipótesis de inducción llegamos a que

$$-(d_n^2 - 2s_n^2) = -(-1)^{n+1}(k^2 - 2m^2) = (-1)^{(n+1)+1}(k^2 - 2m^2)$$

como queríamos comprobar. Estas son propiedades muy interesantes de dichas recurrencias.

Para representar los  $n$ -ésimos términos de estas sucesiones sin tener que calcular los anteriores son de mucha ayuda las matrices, en ese caso

$$\begin{pmatrix} d_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} d_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y tomando  $d_1$  y  $s_1$  arbitrariamente, con la condición de que no sean nulos simultáneamente. Aquí, la potencia nula de la matriz la definimos como la matriz identidad de tamaño  $2 \times 2$ .

De hecho, es posible usar (1.19) para producir una prueba correcta de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ . Para ello, si asumimos que  $\sqrt{2}$  es racional, entonces  $\sqrt{2} = a/b$  para algunos  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ . Luego, podemos reescribir (1.19) como

$$bd_n + as_n = \frac{b^2}{|bd_n - as_n|} \quad .$$

Ya que  $bd_n - as_n \neq 0$  (de otro modo no se cumpliría (1.19)), tenemos que  $|bd_n - as_n| \geq 1$  y

$$0 < bd_n + as_n \leq b^2 \quad . \quad (1.21)$$

Como  $d_n$  y  $s_n$  crecen más allá de cualquier límite, vemos que (1.21) es imposible para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Mientras que esta prueba nos puede parecer bastante sencilla, de ningún modo es probable que los pitagóricos la hubieran descubierto.

Entonces parece que los antiguos griegos sabían cómo producir soluciones de (1.5) con  $D = 2$ . Es difícil decir con certeza que extendieron la idea de números laterales y diagonales más allá, pero si ponemos  $D = 3$  y definimos  $s_1 = 1$  y  $d_1 = 2$ ,

$$s_{n+1} = s_n + d_n \quad , \quad d_{n+1} = 3s_n + d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad ,$$

obtenemos

$$\frac{d_n}{s_n} = \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \dots \quad (1.22)$$

cuando  $n = 1, 2, 3, \dots, 11, \dots$ . Estas son exactamente las convergentes en la expansión de la fracción continua simple de  $\sqrt{3}$ . Es más, en la *Medida del Círculo*, Arquímedes introduce sin explicación la desigualdad

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780} \quad . \quad (1.23)$$

Nótese que ambas de las cotas usadas están en (1.22). Sin embargo, hay muchos otros métodos con los cuales Arquímedes pudo haber descubierto (1.23). Lo que parece estar claro es que los griegos estaban en posesión de algunas técnicas que les permitían encontrar buenas aproximaciones racionales de  $\sqrt{n}$  (y otros irracionales) para ciertos valores de  $n$ . Como ya ha sido presentado en los trabajos de graduación *La Ecuación de Pell* de Navarrete y Martínez de 2009, y *Ecuación de Pell* de Atencio de 2007, las fracciones continuas simples pueden ser usadas para producir las mejores aproximaciones racionales de un irracional dado. Los griegos pudieron haber estado conscientes en algún nivel de estos objetos. En la Proposición 2 del Libro X de *Los Elementos* de Euclides, se tiene:

*Si, cuando la menor de dos magnitudes distintas es sustraída ininterrumpida y sucesivamente de la mayor, aquella que queda nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables.*

El proceso que Euclides está describiendo aquí es llamado *anthyphairesis* – antes llamado *antanairesis* – como una definición alterna de proporción, y ha sido sujeto de considerable escrutinio por los historiadores modernos de los antiguos matemáticos griegos.

El entendimiento de Euclides de una magnitud es lo que podríamos llamar un segmento de recta y es distinto a lo que entendía por número (entero). Si tenemos dos segmentos lineales  $A$  y  $B$ , escribiremos  $A < B$  para denotar que el segmento  $A$  es más corto que el  $B$ . Ahora supóngase que se nos da dos segmentos lineales  $L_0$  y  $L_1$ , donde  $L_1 < L_0$ . Aplicamos el proceso de *anthyphairesis* a  $L_1$  y  $L_0$ ; esto es, restamos  $L_1$  de  $L_0$  cierto número de veces, digamos  $q_0$  veces, hasta que obtengamos un segmento remanente  $L_2 < L_1$ . Repetimos entonces el procedimiento con  $L_2$  y  $L_1$ , etcétera. Tendremos la siguiente secuencia de ecuaciones, donde los valores  $q$  son todos enteros positivos:

$$L_0 = q_0 L_1 + L_2 \quad (L_2 < L_1) \quad ,$$

$$L_1 = q_1 L_2 + L_3 \quad (L_3 < L_2) \quad ,$$

$$\vdots$$

$$L_i = q_i L_{i+1} + L_{i+2} \quad (L_{i+2} < L_{i+1}) \quad ,$$

$$\vdots$$

Si este proceso no termina (ningún  $L_n$  jamás “mide” a  $L_{n-1}$ ; esto es, ninguna longitud de cualquier  $L_{n+1}$  es 0 jamás), entonces  $L_0$  y  $L_1$  no son conmensurables o, en lenguaje más moderno,  $L_0/L_1$  es irracional (tomándolo como razón entre ambos segmentos con los que iniciamos. Por ejemplo, si denotamos por  $A$  a la magnitud de la diagonal de un cuadrado y por  $B$  a la

de uno de sus lados, entonces la razón  $A/B = \sqrt{2}$ , que es irracional y no debe pensarse como un número fraccionario). Si examinamos el proceso desde una perspectiva moderna y ponemos

$$\phi_i = \frac{L_i}{L_{i+1}} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad ,$$

entonces

$$0 < \phi_i - q_i = \frac{L_{i+2}}{L_{i+1}} < 1 \quad .$$

Así,  $q_i = \lfloor \phi_i \rfloor$  (la función piso o función suelo con entrada  $\phi_i$ ) y

$$\phi_{i+1} = (\phi_i - q_i)^{-1} > 1 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad ;$$

esto es, la “antifairesis” de  $L_0/L_1$  viene dada por

$$\frac{L_0}{L_1} = \phi_0 = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_i, \dots] \quad ,$$

la expansión en *fracción continua simple* de  $\phi_0$ . Llamamos a los  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) los *coeficientes parciales* en esta representación. Los  $\phi_i$  son los *cocientes completos*;  $\phi_i - q_i$ , los *cocientes incompletos*. Para mayor información en la teoría de las fracciones continuas, se puede consultar los trabajos de graduación ya mencionados, o la bibliografía al respecto preferida por el lector.

Sabemos que los primeros matemáticos griegos estaban muy interesados en el problema de la inconmensurabilidad; en particular, parecen haber invertido un montón de esfuerzo demostrando la posible inconmensurabilidad de los segmentos de recta cuya razón es  $\sqrt{n}/\sqrt{m}$ , donde  $m$  y  $n$  son enteros positivos con al menos uno de ellos no cuadrado, y pudieron construir geoméricamente dichos segmentos. No es descabellado

asumir que en sus primeras investigaciones en este tema pudieron haber empleado el proceso “antifairítico” a estos segmentos. Esto es lo que parece estar en partes de los Libros II, X y XIII de *Los Elementos*. El principal problema al hacer esto, como Fowler (1937-2004) (1999) ha observado, sería la dificultad que pudieron enfrentar al determinar los coeficientes parciales que serían necesarios para expresar la “antifairesis” de  $\sqrt{n}/\sqrt{m}$  (p. 45). Esto sencillamente se debe a que sus procedimientos aritméticos no permitirían la fácil manipulación de los números decimales que resultarían. El mismo Fowler (1999) ha dado una posible y plausible solución a este problema haciendo uso de conceptos que serían conocidos por los antiguos (sección 2.3(b), pp. 43-47). La base de este procedimiento es lo que él llama la proposición de Parménides. Una forma de este resultado aparece en *Parménides* de Platón y muy probablemente conocida por los griegos de tiempos de Platón. Ciertamente, aparece en la muy posterior *Colección de Papo* y podía ser fácilmente derivada de resultados en los Libros VII o V de *Los Elementos*.

**Proposición 1.4. (La proposición de Parménides).** Sean  $A, B, C, D \in \mathbb{Z}^+$ . Si  $A/B < C/D$ , entonces

$$\frac{A}{B} < \frac{A+C}{B+D} < \frac{C}{D} .$$

Ahora, supóngase que  $\phi$  es cualquier número real y

$$\frac{A}{B} < \phi < \frac{C}{D} ,$$

donde  $A, B, C, D \in \mathbb{Z}^+$ . Tenemos  $\phi B - A > 0$  y que  $C - \phi D > 0$ ; se sigue que,  $(\phi B - A)/(C - \phi D) > 0$ , y, consecuentemente, existen enteros positivos  $p$  y  $p'$  tales que  $p > (\phi B - A)/(C - \phi D)$  y  $p' > (C - \phi D)/(\phi B - A)$ . Esto significa que

$$\frac{pC + A}{pD + B} > \phi \quad \text{y} \quad \frac{p'A + C}{p'B + D} < \phi .$$

Estas observaciones nos llevan al siguiente algoritmo sencillo, propuesto por Fowler, para encontrar aproximaciones racionales a  $\phi$ .

---

**Algoritmo 1.1:**

---

**Entrada:** Supóngase que  $\phi$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  están definidos como arriba, y

$$\frac{A}{B} < \phi < \frac{C}{D} .$$

1: Calcular  $R = (A + C)/(B + D)$ . Ahora tenemos dos casos.

2: **caso 1:**  $R > \phi$

3: Aplicar la Proposición 1.4 repetidamente para encontrar  $q$  tal que

$$\frac{A}{B} < \frac{(q+1)A+C}{(q+1)B+D} < \phi < \frac{qA+C}{qB+D} < \frac{C}{D} .$$

4: Devolver  $q$ ,  $C' = qA + C$ , y  $D' = qB + D$ . Notar que

$$\frac{A}{B} < \phi < \frac{C'}{D'} < \frac{C}{D} .$$

5: **fin del caso**

6: **caso 2:**  $R < \phi$

7: Aplicar la Proposición 1.4 repetidamente para encontrar  $q$  tal que

$$\frac{A}{B} < \frac{A+qC}{B+qD} < \phi < \frac{A+(q+1)C}{B+(q+1)D} < \frac{C}{D} .$$

8: Devolver  $q$ ,  $A' = A + qC$ , y  $B' = B + qD$ . Notar que

$$\frac{A}{B} < \frac{A'}{B'} < \phi < \frac{C}{D} .$$

9: **fin del caso**

---



Cuando este algoritmo es aplicado repetidamente, los casos se alternarán estrictamente; es decir, si una iteración dada cae en el Caso 1, después la siguiente iteración caerá bajo el Caso 2, y viceversa.

En el Caso 1 podemos calcular  $q$  directamente de

$$q = \left\lfloor \frac{C - \phi D}{\phi B - A} \right\rfloor$$

y en el Caso 2 de

$$q = \left\lfloor \frac{\phi B - A}{C - \phi D} \right\rfloor .$$

Para ilustrar el algoritmo, ejemplifiquémoslo con  $\phi = \sqrt{27}$ . Es obvio que

$$\frac{5}{1} < \sqrt{27} < \frac{6}{1} .$$

Por lo que  $A = 5$ ,  $B = 1$ ,  $C = 6$  y  $D = 1$ . Con estos valores, realizamos la primera iteración calculando  $R = (5 + 6)/(1 + 1) = 11/2$ . Podemos ver que  $121/4 > 27$ , otra forma de evaluarlo es calculando  $11^2 - 27 \cdot 2^2 = 13 > 0$ , por lo que caemos en el Caso 1. Encontramos que  $q = 4$ , consecuentemente obteniendo  $C' = (4)(5) + 6 = 26$  y  $D' = (4)(1) + (1) = 5$ . Así,

$$\frac{5}{1} < \sqrt{27} < \frac{26}{5} < \frac{6}{1} .$$

Para la siguiente iteración, buscamos  $R = (5 + 26)/(1 + 5) = 31/6$ . Observamos que  $31^2 - 27 \cdot 6^2 = -11 < 0$ , por lo que ahora caemos en el Caso 2, siguiendo lo mencionado anteriormente que los casos se alternan en iteraciones consecutivas. Ahora  $q = 10$ , y  $A' = 5 + (10)(26) = 265$  y  $B' = 1 + (10)(5) = 51$ . Tenemos entonces

$$\frac{5}{1} < \frac{265}{51} < \sqrt{27} < \frac{26}{5} .$$

Con una última iteración:  $R = (265 + 26)/(51 + 5) = 291/56$ . Entramos al Caso 1 nuevamente ya que  $291^2 - 27 \cdot 56^2 = 9 > 0$ . Con  $q = 5$ , tenemos que  $C' = (5)(265) + 26 = 1351$  y  $D' = (5)(51) + (5) = 260$ . Llegamos a

$$\frac{265}{51} < \sqrt{27} < \frac{1351}{260} < \frac{26}{5} .$$

Dividiendo este resultado por 3, nos lleva a (1.23). De lo poco que se sabe de la matemática de los antiguos griegos, se conjetura que poseían las herramientas para obtener los convergentes como buenas aproximaciones racionales de  $\sqrt{n}$ , con  $n$  entero positivo no cuadrado, por medio de su método de “antifairesis”. Con el algoritmo basado en este método, hemos llegado a las cotas que consiguió Arquímedes para  $\sqrt{3}$  (al escoger  $\sqrt{27}$ , llegamos al mismo resultado con menos iteraciones que de haber empezado con  $\sqrt{3}$ ). De hecho,  $1351^2 - 3 \cdot 780^2 = 1$ . Por lo que es razonable inferir que un calculador experto como Arquímedes tuvo alguna idea sobre cómo resolver la ecuación de Pell para pequeños valores de  $D$ , al menos. Posiblemente estas investigaciones lo impulsaron a creer que la ecuación de Pell siempre era resoluble, pero cuando  $D$  es grande, este es un problema bastante difícil. Esto explicaría su forma de pensar al formular el problema de las reses.

Otro lugar donde la ecuación de Pell es mencionada explícitamente por los griegos es en la *Aritmética* de Diofanto. En las Secciones 9 y 11 del Libro V, él resuelve (1.5) para  $D = 26$  y  $D = 30$ , respectivamente. Mientras que esto puede causar que pensemos que los griegos posteriormente habían encontrado una técnica para resolver la ecuación de Pell, es importante darse cuenta de que el método dado, en general, solo encontraría soluciones racionales a la ecuación de Pell, no enteras. La concentración de técnicas en *Aritmética* que solo producen soluciones racionales a ecuaciones diofánticas sugiere fuertemente que los griegos del periodo tardío o no eran capaces o no estaban interesados en producir soluciones enteras. Esto

representa el estado insatisfactorio de nuestro conocimiento sobre las contribuciones de los antiguos al estudio de (1.5).

### 1.5. Los matemáticos indios

La situación es muy diferente cuando consideramos los logros de los matemáticos indios de comienzos de tiempos de la Edad Media. Ya para el siglo V NE, Aryabhata I (476-550 NE) había desarrollado un método para resolver ecuaciones diofánticas lineales

$$ax - by = c \quad (1.24)$$

para enteros  $x, y$ , dados los enteros positivos  $a, b, c$ . El problema original de Aryabhata era encontrar un entero  $n$  el cual al ser dividido por un entero  $a$  dado deja un residuo dado  $r_1$  y al dividirlo por un  $b$  dado, deja un residuo  $r_2$ . Poniendo  $c = |r_1 - r_2|$ , este problema se reduce a hacer ya sea  $(ax + c)/b$  o  $(by + c)/a$  un entero positivo de acuerdo a si  $r_1 > r_2$  o  $r_2 > r_1$ . Aryabhata procede luego describiendo una técnica de solución, llamada *kuttaka* (pulverizador), que es una variante de los actuales métodos estándar para resolver este problema haciendo uso de la expansión en fracción continua de  $a/b$ . Se asume frecuentemente por un número de teóricos que los griegos debieron haber encontrado un método para resolver (1.24). De hecho, Thomas Heath (1861-1940) (1964) parece haber creído esto.

Así que la solución de la ecuación  $ax - by = c$ , dada por Aryabhata... es un desarrollo fácil del método de Euclides para encontrar la máxima medida común o de probar por ese proceso que dos números no tienen factor común (*Elementos* VII. 1, 2, X. 2, 3), y que sería extraño que los griegos no hubieran tomado este paso (p. 281).

No sería extraño, sin embargo, si los griegos no hubieran estado interesados en el problema. Hemos visto que los primeros matemáticos griegos estaban interesados en encontrar aproximaciones racionales a irracionales, pero el problema de encontrar aproximaciones racionales a un racional como  $a/b$ , probablemente ni siquiera haya sido visto como un problema en absoluto. Los alejandrinos parecían estar interesados solo en soluciones racionales de ecuaciones diofánticas, y esto explica por qué Diofanto nunca lidió con (1.24). De todas formas, lo que es cierto es que no tenemos ninguna

evidencia que cualquiera de los matemáticos griegos hizo la más mínima contribución al problema de resolver (1.24) para enteros  $x, y$ .

En 628, Brahmagupta (598-670) fue el primero en descubrir nuestra identidad (1.2); esto es, si

$$A^2 - DB^2 = Q \quad (1.25)$$

y

$$P^2 - DR^2 = S \quad , \quad (1.26)$$

entonces

$$(AP + DBR)^2 - D(AR + BP)^2 = QS \quad . \quad (1.27)$$

Hoy llamamos a este proceso de multiplicar dos formas cuadráticas para llevar a una tercera forma cuadrática *composición*, pero los matemáticos indios se refirieron a este como *samasa*.

Si tenemos  $Q = S = \pm 2$ ,  $A = P$ , y  $B = R$ , entonces  $T = (A^2 + DB^2)/2 = A^2 - (\pm 1)$ ,  $U = AB$  es una solución de (1.5). Podemos llegar a este resultado despejando  $DB^2$  en (1.25) y reemplazando en

$$T = \frac{A^2 + DB^2}{2} = \frac{A^2 + (A^2 - Q)}{2} = \frac{2A^2 - (\pm 2)}{2} = A^2 - (\pm 1) \quad .$$

Brahmagupta descubrió este resultado junto con otros que le permitieron resolver la ecuación de Pell siempre que tuviera cualquier solución  $(A, B)$  de

$$A^2 - DB^2 = -1, \pm 2, \pm 4 \quad . \quad (1.28)$$

Sin embargo, él fue más allá: desarrolló un método *ad hoc* para resolver la ecuación de Pell. Por ejemplo, consideremos la ecuación  $x^2 - 92y^2 = 1$ , sobre la cual Brahmagupta declaró, “[aquel que resuelva este problema] en un año [es] un matemático” (Colbrooke, 1817, p. 365). Él, primero nota la igualdad  $10^2 - 92 = 8$  y posteriormente compone esta consigo misma para obtener  $192^2 - 92 \cdot 20^2 = 64$ . Después divide esta ecuación por 64, consigue entonces  $24^2 - 92 \cdot (5/2)^2 = 1$ , y componiendo esta última ecuación consigo misma, obtiene  $1151^2 - 92 \cdot 120^2 = 1$ . Brahmagupta también se dio cuenta de que

usando este principio de composición podía producir muchas más soluciones para la ecuación de Pell, una vez que tenía una solución.

No obstante, el mayor logro de los matemáticos indios con respecto a la ecuación de Pell fue el desarrollo del método cíclico para resolverla. La técnica, descrita por Bhaskara II (1114-1185) en 1150 NE, y su historia son bien expuestas por Selenius. Veamos un bosquejo de una variante (hay muchas) del algoritmo.

Asumimos que  $Q, A, B \in \mathbb{Z}$  y que  $(A, B) = 1$  en (1.25); esto significa que  $(B, Q) = 1$ . En efecto, si  $(B, Q) = d > 1$ , de (1.25)  $A^2 = dk$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ . Si  $d$  es cuadrado,  $d \mid A$  y  $d \mid B$ , lo que contradice  $(A, B) = 1$ . Si  $d$  no es cuadrado, debe dividir a  $k$ , entonces  $d \mid A$ , llegando a la misma contradicción.

Ya que la técnica para solucionar (1.24) era conocida, el paso de encontrar un entero  $P$  tal que  $Q \mid BP + A$  podía fácilmente realizarse a través del proceso kuttaka. Como  $(B, Q) = 1$ , debemos tener  $Q \mid P^2 - D$  y  $Q \mid AP + DB$ . Puesto que  $Q \mid BP + A$ , entonces también

$$Q \mid (BP + A)(BP - A) = B^2P^2 - A^2 = B^2P^2 - (Q + DB^2) = B^2(P^2 - D) - Q \quad .$$

Y como  $(B, Q) = 1$ , entonces  $Q \mid P^2 - D$ . Además, de

$$(AP + DB)^2 - D(A + BP)^2 = (P^2 - D)(A^2 - DB^2) = (P^2 - D)Q \quad ,$$

vemos que  $Q \mid AP + DB$ .

Poniendo  $R = 1$  en (1.26), vemos que de (1.27) obtenemos

$$\left(\frac{AP + DB}{Q}\right)^2 - D\left(\frac{A + BP}{Q}\right)^2 = \frac{P^2 - D}{Q} \quad . \quad (1.29)$$

De esta sencilla observación, podemos desarrollar el método cíclico para resolver la ecuación de Pell.

Dados los enteros  $n, A_{n-1}, B_{n-1}, Q_n$  y  $P_n$  donde  $(A_{n-1}, B_{n-1}) = 1$  tales que

$$|A_{n-1}^2 - DB_{n-1}^2| = Q_n \quad ,$$

encontrar por el proceso kuttaka un entero positivo  $P_{n+1}$  tal que  $|P_{n+1}^2 - D|$  sea minimal y  $Q_n \mid (P_{n+1}B_{n-1} + A_{n-1})$ . Hacer  $Q_{n+1} = |P_{n+1}^2 - D|/Q_n$ ,

$$A_n = \frac{A_{n-1}P_{n+1} + DB_{n-1}}{Q_n} \quad , \quad B_n = \frac{B_{n-1}P_{n+1} + A_{n-1}}{Q_n} \quad . \quad (1.30)$$

Por (1.29) obtenemos

$$|A_n^2 - DB_n^2| = Q_{n+1} \quad ,$$

y  $(A_n, B_n) = 1$ . El último resultado se sigue fácilmente observando que  $|A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1}| = 1$  (empleando (1.30)). El método termina cuando, para algún  $n$ ,  $Q_{n+1} = 1, 2, 4$  porque, como vimos arriba, Brahmagupta ya había demostrado cómo resolver la ecuación de Pell una vez se conocía alguna solución de (1.28).

Consideremos el ejemplo de  $D = 67$ . Empezamos con  $n = 0$ ,  $A_{-1} = 1$ ,  $B_{-1} = 0$ ,  $Q_0 = 1$  (que representan la solución trivial), y  $P_0 = 0$  (no importa realmente con qué valor  $P_0$  empecemos). Resumimos en la Tabla 1.1 la solución de la ecuación de Pell por medio de este proceso, llamado el *chakravala* (el *método circular* o *cíclico*) por los indios.

**Tabla 1.1.** Chakravala para  $D = 67$ .

$n$	$P_n$	$Q_n$	$A_{n-1}$	$B_{n-1}$
0	0	1	1	0
1	8	3	8	1
2	7	6	41	5
3	5	7	90	11
4	9	2	221	27

Para calcular la segunda fila de la Tabla 1.1, primero calculamos  $P_n$ . Aquí  $n = 1$ , por lo que estamos calculando  $P_1$ . Necesitamos que  $P_1^2$  sea el cuadrado más cercano a  $D$ , esto es lo que significa que  $|P_1^2 - D|$  sea minimal. A la vez que buscamos  $P_1$  hay que verificar también que  $Q_0 \mid (P_1 B_{-1} + A_{-1})$ . Ya que  $Q_0 = 1$ , esta condición no nos preocupa mucho; por tanto, simplemente buscamos el cuadrado más cercano a 67. Es fácil ver que es  $64 = P_1^2$ , entonces  $P_1 = 8$ . Inmediatamente hacemos

$$Q_1 = \frac{|P_1^2 - D|}{Q_0} = \frac{|(64) - 67|}{(1)} = \frac{|-3|}{1} = 3 \quad .$$

También, de (1.30):

$$A_0 = \frac{A_{-1}P_1 + DB_{-1}}{Q_0} = \frac{(1)(8) + (67)(0)}{(1)} = 8$$

y

$$B_0 = \frac{B_{-1}P_1 + A_{-1}}{Q_0} = \frac{(0)(8) + (1)}{(1)} = 1 \quad .$$

Ahora calculemos la fila de  $n = 2$ . Buscamos el cuadrado  $P_2^2$  más cercano a 67 tal que  $Q_1 \mid (P_2B_0 + A_0)$ . Ya 8 no es porque  $3 \nmid [(8)(1) + 8] = 16$ . Vemos que  $P_2 = 7$ , pues,  $3 \mid [(7)(1) + 8] = 15$  y no hay otro que cumpla esta condición y cuyo cuadrado esté más próximo a 67. Entonces

$$Q_2 = \frac{|P_2^2 - D|}{Q_1} = \frac{|(7)^2 - 67|}{(3)} = \frac{|49 - 67|}{3} = \frac{|-18|}{3} = 6 \quad .$$

De nuevo, de (1.30):

$$A_1 = \frac{A_0P_2 + DB_0}{Q_1} = \frac{(8)(7) + (67)(1)}{(3)} = \frac{56 + 67}{3} = \frac{123}{3} = 41$$

y

$$B_1 = \frac{B_0P_2 + A_0}{Q_1} = \frac{(1)(7) + (8)}{(3)} = \frac{7 + 8}{3} = \frac{15}{3} = 5 \quad .$$

Como dijimos, el proceso termina cuando algún  $|Q_n| = 1, 2, 4$ . En este ejemplo, ocurre cuando  $n = 4$  donde  $Q_4 = 2$ , por eso está resaltado en **negrita**.

Ya que  $221^2 - 67 \cdot 27^2 = -2$ , obtenemos  $T = 221^2 + 1 = 48842$ ,  $U = 27 \cdot 221 = 5967$  como una solución de la ecuación de Pell  $T^2 - 67U^2 = 1$ . Respecto a esta técnica, Hankel (1965) afirmó, “Está más allá de cualquier elogio; ciertamente es lo mejor que se alcanzó en la teoría de los números antes de Lagrange” (p. 202). Desafortunadamente, los indios no proporcionaron una prueba de que el método cíclico siempre funcionaría. Parece que se conformaron con el conocimiento empírico que daba la impresión de que era

así, y lo usaron para resolver (1.5) con  $D = 61, 67, 97, 103$ . No fue hasta finales de la década de los 30 y comienzos de la del 40 del siglo pasado que apareció una prueba de que el método cíclico siempre produciría un valor de  $Q_i = 1$ , proporcionada por Ayyangar (1892-1953) (1940-1941). Él notó que el proceso podría representarse como la expansión de  $\sqrt{D}$  en un tipo de fracción continua semirregular que siempre sería periódica. Recordemos que las *fracciones continuas semirregulares* están definidas por

$$\llbracket b_1, b_2, b_3, \dots \rrbracket = \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \ddots}}},$$

donde los enteros  $b_i \geq 2$  (Alkawkas, 2009, pp. 3-4).

Un número de ideas erróneas continúan circulando sobre el método cíclico. Una de estas es que fue descubierto por Lagrange (1736-1813). Este no es el caso, como Selenius ha apuntado. Lagrange hizo uso de fracciones continuas simples, que no necesariamente son lo mismo que las fracciones continuas semirregulares implícitamente empleadas por el método cíclico. Con frecuencia, el algoritmo es atribuido a Bhaskara II, pero como menciona Shankar Shukla (1918-2007) (1954), Bhaskara no reclama ser el autor del método, y como Jayadeva, quien trabajó en el siglo X o antes, había descubierto una variante de la técnica, parece que debió haber sido desarrollado mucho antes del tiempo de Bhaskara (p. 1 & p. 20). Finalmente, está la creencia, quizá debido a Tannery (1843-1904) (1912-1937), que el método cíclico se deriva de influencias griegas (pp. 226-253). A pesar del análisis de Tannery, parece haber poca evidencia sólida que soporte esto. El simple hecho es que, como ya mencionamos, realmente no sabemos lo que los griegos sabían acerca de la ecuación de Pell. Lo que sí sabemos, no obstante, es que los métodos indios despliegan una historia de desarrollo estable y refinamiento que incluye el descubrimiento del método cíclico, y esto sugiere muy fuertemente que la posición de Hankel (1965) de que los indios maduraron la técnica por ellos mismos es la correcta (pp. 203-204).



## 1.6. Fermat y sus sucesores

La historia de la ecuación de Pell se reanuda con el reto propuesto en 1657 a Frénicle (c. 1604-1674) en particular y a los matemáticos en general por parte de Fermat. A través de su investigación, lo más probable es que Fermat había llegado a reconocer la naturaleza fundamental de la ecuación de Pell. Él pide una prueba de la siguiente afirmación:

Dado cualquier número [positivo]  $[D]$  cualquiera que no sea un cuadrado, hay también un número infinito de cuadrados tales que, si el cuadrado es multiplicado por el número dado y se adiciona la unidad al producto, el resultado es un cuadrado (Fermat, 1657, pp. 333-335).

Posteriormente exige una regla general por la cual puedan ser determinadas las soluciones del problema y, como ejemplos, preguntaba las soluciones cuando  $D = 109, 149, 433$ .

La historia de cómo la segunda parte de este desafío fue resuelta por Brouncker (1620-1684) y Wallis ha sido muy bien contada por Weil y Mahoney (1939-2008) (1994). Enfatizamos que, aunque el método de Brouncker es equivalente al que será descrito, él no pensó sobre este en esta forma exactamente.

Sean  $P, Q, R \in \mathbb{Z}$ , donde  $Q \neq 0$ ,

$$P^2 - QR = D > 0 \quad ,$$

y  $D$  es un entero no cuadrado. Pongamos

$$F(X, Y) = QX^2 - 2PXY + RY^2 \quad (1.31)$$

y sean  $\rho$  y  $\rho'$  los ceros de  $F(x, 1)$ . Ya que  $D$  no es un cuadrado, sabemos que  $\rho, \rho' \notin \mathbb{Q}$ . Brouncker parece haber usado el siguiente resultado, aunque no da ninguna prueba de este.

**Proposición 1.5.** *Supóngase  $\rho > 1$  y  $\rho' < 0$ . Si  $F(X, Y) = 1$ , donde  $X, Y \in \mathbb{Z}$  y  $X > Y > 1$ , entonces  $[\rho] < X/Y < [\rho] + 1$ .*

*Prueba.* Como  $F(X, Y) = 1$ , podemos asumir que  $X = qY + Z$ , donde  $0 < Z < Y$ . De otro modo, si  $X = qY$ ,

$$F(X, Y) = 1 = QX^2 - 2PXY + RY^2 = Q(qY)^2 - 2P(qY)Y + RY^2$$

que puede ser factorizado como

$$Y^2(q^2Q - 2qP + R) = 1 \quad .$$

Y dado que estamos trabajando con enteros solamente, los únicos valores posibles para  $Y$  son  $\pm 1$ , lo que contradice la hipótesis  $Y > 1$ .

También,

$$|Q||X - \rho'Y||X - \rho Y| = 1 \quad . \quad (1.32)$$

Comentemos (1.32). Si desarrollamos

$$Q(X - \rho'Y)(X - \rho Y) = QX^2 - (\rho + \rho')QXY + \rho\rho'QY^2 \quad ,$$

y consideramos que

$$F(x, 1) = 0 = Q(x - \rho')(x - \rho) = Qx^2 - (\rho + \rho')Qx + \rho\rho'Q \quad ,$$

o sea que los coeficientes  $Q = Q$ ,  $-(\rho + \rho')Q = -2P$  y  $\rho\rho'Q = R$ . Es decir,

$$QX^2 - (\rho + \rho')QXY + \rho\rho'QY^2 = QX^2 - 2PXY + RY^2 = F(X, Y) = 1 \quad .$$

Como  $\rho' < 0$ , tenemos  $|X - \rho'Y| = X - \rho'Y > X > 1$ . También observamos que  $X - \rho Y = (q - \rho)Y + Z$ ; así que, si  $q - \rho < -1$ , entonces  $X - \rho Y < -Y + Z \leq -1$ , y si  $q - \rho > 0$ , entonces  $X - \rho Y > Z \geq 1$ . En cualquiera de los dos casos,  $|X - \rho Y| > 1$ , lo que es imposible por (1.32). Se sigue entonces que

$$-1 < q - \rho < 0 \Rightarrow \rho - 1 < q < \rho$$

o lo que es lo mismo  $q = \lfloor \rho \rfloor$ . Así, tenemos el resultado deseado.  $\square$

Si sustituimos  $X = qY + Z$  en (1.31), tenemos

$$F'(Y, Z) = Q'Y^2 - 2P'YZ + R'Z^2 \quad ,$$

donde  $Q' = q^2Q - 2qP + R$ ,  $P' = P - qQ$ ,  $R' = Q$ , y

$$P'^2 - Q'R' = D \quad , \quad (1.33)$$

como se puede comprobar sustituyendo las variables del miembro izquierdo y recordando que  $P^2 - QR = D$ .

Si factorizamos la expresión para  $Q'$ , tenemos

$$Q' = q^2Q - 2qP + R = Q \left( \frac{P + \sqrt{D}}{Q} - q \right) \left( \frac{P - \sqrt{D}}{Q} - q \right) . \quad (1.34)$$

Si despejamos  $Q'R'$  en (1.33) y notamos que  $R' = Q$ ,

$$P'^2 - D = Q'R' = Q'Q = (P' + \sqrt{D})(P' - \sqrt{D}) .$$

Tomando la última de las igualdades y dividiendo por  $Q'^2$ , tenemos

$$\frac{Q}{Q'} = \left( \frac{P' + \sqrt{D}}{Q'} \right) \left( \frac{P' - \sqrt{D}}{Q'} \right) .$$

De lo anterior y de (1.34), llegamos a

$$\left( \frac{P + \sqrt{D}}{Q} - q \right) \left( \frac{P - \sqrt{D}}{Q} - q \right) = \left( \frac{1}{\frac{P' + \sqrt{D}}{Q'}} \right) \left( \frac{1}{\frac{P' - \sqrt{D}}{Q'}} \right) .$$

Finalmente, se tiene que

$$\frac{P' - \sqrt{D}}{Q'} = \frac{1}{\frac{P + \sqrt{D}}{Q} - q} , \quad \frac{P' + \sqrt{D}}{Q'} = \frac{1}{\frac{P - \sqrt{D}}{Q} - q} ,$$

como se puede comprobar multiplicando cada una y notando las expresiones para  $Q'$ ,  $R'$  y  $P'$ .

Así, si  $\tau$  y  $\tau'$  son los ceros de  $F'(x, 1)$ , entonces  $\tau = 1/(\rho - q)$ ,  $\tau' = 1/(\rho' - q)$ . Si  $\rho > 1$ ,  $\rho' < 0$ , y  $q = \lfloor \rho \rfloor$ , entonces  $\tau > 1$ ,  $\tau' < 0$ .

Con estas observaciones preliminares, podemos ahora describir la muy ingeniosa técnica de Brouncker. Supongamos que  $(T, U)$  es una solución de  $T^2 - DU^2 = 1$  y hacemos  $Q_0 = 1$ ,  $P_0 = 0$ ,  $R_0 = -D$ ,  $X_0 = T$ , y  $X_1 = U$ . Definimos la nueva forma cuadrática  $F_0(X_0, X_1) = Q_0X_0^2 - 2P_0X_0X_1 + R_0X_1^2 = 1$  y

$\rho_0 = \sqrt{D}$ ,  $\rho'_0 = -\sqrt{D}$  son los ceros de  $F_0(x, 1)$ . Poniendo  $q_0 = \lfloor \rho_0 \rfloor$  y sustituyendo  $q_0 X_1 + X_2$  para  $X_0$  en  $F_0(X_0, X_1)$  obtenemos  $F_1(X_1, X_2) = 1$  con  $0 < X_2 < X_1$ . Aquí,

$$Q_1 = q_0^2 Q_0 - 2q_0 P_0 + R_0 \quad , \quad P_1 = P_0 - q_0 Q_0 \quad , \quad R_1 = Q_0 \quad .$$

Ponemos  $\rho_1 = 1/(\rho_0 - q_0)$ ,  $q_1 = \lfloor \rho_1 \rfloor$ , y  $X_1 = q_1 X_2 + X_3$  ( $0 < X_3 < X_2$ ) y calculamos  $F_2(X_2, X_3) = 1$ , etcétera. De hecho, si  $F_i(X_i, X_{i+1}) = 1$  ( $0 < X_{i+1} < X_i$ ), hacemos

$$\rho_i = \frac{1}{\rho_{i-1} - q_{i-1}} \quad , \quad (1.35)$$

$q_i = \lfloor \rho_i \rfloor$ , y

$$X_i = q_i X_{i+1} + X_{i+2} \quad (1.36)$$

en  $F_i$  para obtener  $F_{i+1}(X_{i+1}, X_{i+2}) = 1$  con

$$Q_{i+1} = \frac{P_{i+1}^2 - D}{Q_i} \quad , \quad P_{i+1} = P_i - q_i Q_i \quad , \quad R_{i+1} = Q_i \quad ,$$

por (1.33).

Como la secuencia  $\{X_i\}$  es una secuencia de enteros positivos estrictamente decreciente (para incrementos de  $i$ ), este proceso debe hacer un alto con  $X_j = 1$ ,  $X_{j+1} = 0$  para algún  $j \geq 0$ . Para encontrar  $T$  y  $U$ , todo lo que es necesario hacer es proceder hacia atrás usando (1.36) una vez todos los valores de  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_{j-1}$  hayan sido determinados.

Ahora veamos el ejemplo del proceso para el caso de

$$T^2 - 13U^2 = 1 \quad . \quad (1.37)$$

Aquí, en el primer paso simplemente adoptamos la forma de (1.37). Hacemos  $q_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor = \lfloor \sqrt{13} \rfloor = 3$ . En  $F_0$ , vemos que  $Q_0 = 1$ ,  $P_0 = 0$  y  $R_0 = -13$ . Procedemos a calcular  $R_1, P_1$  y  $Q_1$ :

$$R_1 = Q_0 = 1 \quad ,$$

$$P_1 = P_0 - q_0 Q_0 = (0) - (3)(1) = 0 - 3 = -3 \quad ,$$

y

$$Q_1 = q_0^2 Q_0 - 2q_0 P_0 + R_0 = (3)^2(1) - 2(3)(0) + (-13) = 9 - 0 - 13 = -4 \quad .$$

Obtenemos entonces  $F_1(X_1, X_2) = Q_1 X_1^2 - 2P_1 X_1 X_2 + R_1 X_2^2 = -4X_1^2 + 6X_1 X_2 + X_2^2$ .

Para la segunda línea, por (1.35) tenemos

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho_0 - q_0} = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} = \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \cdot \frac{\sqrt{13} + 3}{\sqrt{13} + 3} = \frac{\sqrt{13} + 3}{13 - 9} = \frac{\sqrt{13} + 3}{4} \quad ,$$

por lo que  $q_1 = \lfloor \rho_1 \rfloor = 1$ . Entonces

$$R_2 = Q_1 = -4 \quad ,$$

$$P_2 = P_1 - q_1 Q_1 = (-3) - (1)(-4) = -3 + 4 = 1 \quad ,$$

y

$$Q_2 = \frac{P_2^2 - D}{Q_1} = \frac{(1)^2 - (13)}{(-4)} = \frac{-12}{-4} = 3 \quad .$$

Así,  $F_2(X_2, X_3) = Q_2 X_2^2 - 2P_2 X_2 X_3 + R_2 X_3^2 = 3X_2^2 - 2X_2 X_3 - 4X_3^2$ . Y así sucesivamente.

$F_0(X_0, X_1) = X_0^2 - 13X_1^2 \quad ,$	$q_0 = \lfloor \sqrt{13} \rfloor = 3 \quad ;$
$F_1(X_1, X_2) = -4X_1^2 + 6X_1 X_2 + X_2^2 \quad ,$	$q_1 = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{13}}{4} \right\rfloor = 1 \quad ;$
$F_2(X_2, X_3) = 3X_2^2 - 2X_2 X_3 - 4X_3^2 \quad ,$	$q_2 = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{13}}{3} \right\rfloor = 1 \quad ;$
$F_3(X_3, X_4) = -3X_3^2 + 4X_3 X_4 + 3X_4^2 \quad ,$	$q_3 = \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \right\rfloor = 1 \quad ;$
$F_4(X_4, X_5) = 4X_4^2 - 2X_4 X_5 - 3X_5^2 \quad ,$	$q_4 = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \right\rfloor = 1 \quad ;$
$F_5(X_5, X_6) = -X_5^2 + 6X_5 X_6 + 4X_6^2 \quad ,$	$q_5 = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{13}}{1} \right\rfloor = 6 \quad ;$
$F_6(X_6, X_7) = 4X_6^2 - 6X_6 X_7 - X_7^2 \quad ,$	$q_6 = \left\lfloor \frac{3 + \sqrt{13}}{4} \right\rfloor = 1 \quad ;$
$F_7(X_7, X_8) = -3X_7^2 + 2X_7 X_8 + 4X_8^2 \quad ,$	$q_7 = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{13}}{3} \right\rfloor = 1 \quad ;$

$$\begin{aligned}
F_8(X_8, X_9) &= 3X_8^2 - 4X_8X_9 - 3X_9^2, & q_8 &= \left\lfloor \frac{2 + \sqrt{13}}{3} \right\rfloor = 1; \\
F_9(X_9, X_{10}) &= -4X_9^2 + 2X_9X_{10} + 3X_{10}^2, & q_9 &= \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{13}}{4} \right\rfloor = 1; \\
F_{10}(X_{10}, X_{11}) &= X_{10}^2 - 6X_{10}X_{11} - 4X_{11}^2.
\end{aligned}$$

Observamos que  $F_{10}(X_{10}, X_{11}) = 1$  puede ser fácilmente resuelta con  $X_{10} = 1$  y  $X_{11} = 0$ . Ahora podemos encontrar, empleando (1.36),

$$\begin{aligned}
X_9 &= q_9X_{10} + X_{11} = 1, & X_8 &= q_8X_9 + X_{10} = 2, & X_7 &= 3, \\
X_6 &= 5, & X_5 &= 33, & X_4 &= 38, \\
X_3 &= 71, & X_2 &= 109, & X_1 &= 180, \\
X_0 &= 649.
\end{aligned}$$

y ponemos  $T = 649$ ,  $U = 180$  como una solución a (1.37).

Brouncker empleó su método para encontrar soluciones a varias ecuaciones de Pell difíciles, incluyendo  $x^2 - 433y^2 = 1$ . Esto fue una gran hazaña de cálculo, debido a que el valor de  $y$  es un número de 19 dígitos. No obstante, ni él ni Wallis ni Frénicle fueron capaces de proporcionar una prueba de que la ecuación de Pell podía ser solucionada siempre (no trivialmente) para cualquier valor positivo no cuadrado de  $D$ . Fermat (1959) tomó nota de esto y afirmó que él tenía tal prueba “por medios de *descenso* debida y apropiadamente aplicados” (p. 433). Desafortunadamente, Fermat no dejó más información acerca de su demostración que este comentario. Hofmann (1900-1973) en 1943 y, con mayor éxito, Weil (1984, sección XIII) han intentado reconstruir lo que pudo haber sido el método de Fermat. Mientras que puede que nunca sepamos de qué se trataba, de todos modos, es muy probable que Fermat tuviera realmente una prueba. El hecho de que él seleccionara 109, 149, y 433 para valores de  $D$  como ejemplos para su desafío es particularmente sugestivo porque las correspondientes ecuaciones de Pell tienen soluciones no triviales con valores enormes, hablando de ambos.

El método de Brouncker fue modificado y extendido por Euler, quien se percató de que, como parece ser de (1.35), las fracciones continuas podían ser usadas para generar un algoritmo eficiente para resolver (1.5). No obstante, incluso aunque él había divisado todas las herramientas importantes, se quedó corto probando que su método funcionaría para

cualquier  $D$  no cuadrado. Como ya se mencionó, el desarrollo de tal técnica fue primero hecho por Lagrange en un trabajo más bien burdo, el cual él mismo mejoró más tarde.

La ecuación de Pell atrajo la mirada de más matemáticos que eventualmente enriquecieron su estudio. Matemáticos de la talla de Gauss le prestaron atención. De hecho, en 1799, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) representó la ecuación  $x^2 = ny^2 + 1$  como  $x^2 - Dy^2 = \pm 1$  al publicar su célebre obra *Disquisitiones Arithmeticae*, donde expone la factorización única en cuerpos complejos y, a partir del conjugado, define la norma de un elemento  $\alpha = a + b\sqrt{D}$

$$N(\alpha) = (a + b\sqrt{D})(a - b\sqrt{D}) = a^2 - Db^2 = \pm 1 \quad .$$

Que permite una forma bastante eficiente de encontrar todas las soluciones de (1.5) una vez encontrada la solución  $(t, u)$  con el mínimo valor de  $t + u\sqrt{D}$  con  $t, u > 0$ . Tal solución es la *solución fundamental* de la ecuación de Pell. Como ya mencionamos, Lagrange demostró que la ecuación de Pell siempre tiene infinitas soluciones no triviales, para cualquier  $D$  no cuadrado. Sea  $(x, y)$  una de estas soluciones. Entonces

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \quad .$$

También

$$t^2 - Du^2 = \pm 1 \quad .$$

Por lo que

$$(t^2 - Du^2)^n = (\pm 1)^n \quad ,$$

para  $n \in \mathbb{Z}^+$  si tratamos con la ecuación (1.5); pero si tratamos con la *ecuación negativa de Pell*

$$x^2 - Dy^2 = -1 \quad , \tag{1.38}$$

$n = 2k - 1$  con  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Podemos igualar

$$x^2 - Dy^2 = (t^2 - Du^2)^n$$

y luego factorizar

$$(x + y\sqrt{D})(x - y\sqrt{D}) = [(t + u\sqrt{D})(t - u\sqrt{D})]^n = (t + u\sqrt{D})^n(t - u\sqrt{D})^n \quad .$$

Asumimos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y\sqrt{D} = (t + u\sqrt{D})^n \\ x - y\sqrt{D} = (t - u\sqrt{D})^n \end{cases} \quad .$$

Cuyas soluciones encontramos fácilmente

$$\begin{cases} x = \frac{(t + u\sqrt{D})^n + (t - u\sqrt{D})^n}{2} \\ y = \frac{(t + u\sqrt{D})^n - (t - u\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \end{cases} \quad . \quad (1.39)$$

Asumir la otra opción del sistema de ecuaciones lineales solo nos arrojará el conjugado de la que obtuvimos en (1.39), es decir, con

$$y = -\frac{(t + u\sqrt{D})^n - (t - u\sqrt{D})^n}{2\sqrt{D}} \quad ,$$

que también es solución.

Así, empleando (1.39), obtenemos todas las soluciones de (1.5) a partir de la solución fundamental  $(t, u)$  que podemos obtener con el método de las fracciones continuas. Incluso todas las soluciones de (1.38) siempre que  $n$  sea impar positivo.

Tanto la ecuación de Pell como su contraparte negativa tienen su respectiva solución fundamental para el mismo  $D$ . Si tomamos una solución que no sea la fundamental en lugar de  $(t, u)$  en (1.39), digamos una  $(x, y)$  que se obtiene a partir de la fundamental con  $n > 1$ , y la empleamos para obtener más soluciones, estas serán las que se consigan con la solución fundamental empleando múltiplos del  $n$  que le corresponde a  $(x, y)$ . Por lo que hacer uso de otra solución que no sea la fundamental dejará por fuera una infinidad de soluciones al emplear las ecuaciones de Gauss. Además, la ecuación negativa de Pell tiene la observación de que tiene solución si y solo si el periodo del desarrollo en fracción simple continua de  $\sqrt{D}$  es impar.



Tomemos como ejemplo (1.5) con  $D = 3$ . Procedemos a buscar el desarrollo en fracción continua simple de  $\sqrt{3}$ . Obviamente

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{a_1} .$$

Por lo que

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{a_2} .$$

Así,

$$a_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{3} + 1 = 2 + \frac{1}{a_3} .$$

Viendo que

$$a_3 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = a_1 .$$

Entonces

$$\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}] .$$

Notamos que tiene periodo 2. El primer convergente al expandir esta fracción continua simple hasta el segundo coeficiente parcial es

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} .$$

Entonces el par  $(2, 1)$  es solución de  $T^2 - 3U^2 = 1$ . En efecto, es su solución fundamental, pues,  $(2)^2 - 3(1)^2 = 1$ , y no existe otro par de enteros  $(x, y)$  tal que  $x + y\sqrt{3} < 2 + \sqrt{3}$ , con  $x, y > 0$ . Empleando esta solución fundamental y (1.39) encontramos todas las soluciones de la ecuación de Pell con  $D = 3$ . La Tabla 1.2 detalla sus primeras diez soluciones no triviales, y los numeradores y denominadores parciales de  $\sqrt{3}$  calculados cada dos cocientes incompletos a partir del que proporciona la solución fundamental.

Para realizar los cálculos, se escribió un programa empleando el software Wolfram Mathematica en su versión estable 12.0.0.0 de 64 bits

desarrollado por Wolfram Research. El código se detalla en el Apéndice A. Obtendremos todas las soluciones a la ecuación de Pell para determinado  $D$  con este programa.

**Tabla 1.2.** Diez primeras soluciones no triviales de la ecuación de Pell con  $D = 3$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares.

$n$	$(x, y)$	$p_{2n-1}/q_{2n-1}$
1	(2, 1)	2/1
2	(7, 4)	7/4
3	(26, 15)	26/15
4	(97, 56)	97/56
5	(362, 209)	362/209
6	(1351, 780)	1351/780
7	(5042, 2911)	5042/2911
8	(18817, 10864)	18817/10864
9	(70226, 40545)	70226/40545
10	(262087, 151316)	262087/151316

Las ecuaciones (1.39) nos proporcionan una manera más directa de calcular las soluciones no triviales de la ecuación de Pell una vez conseguimos la solución fundamental. Pero no nos hace prescindir de un

método alternativo para conseguir esta solución fundamental, pues, da por sentado que la conocemos de antemano.

Ahora, si intentamos buscar las soluciones a  $T^2 - 3U^2 = -1$ , no encontraremos jamás un par de enteros que la satisfaga. Esto es porque el periodo del desarrollo en fracción continua simple de  $\sqrt{3}$  es 2, que es par; y la ecuación negativa de Pell tiene solución si y solo si este periodo es impar, como ya mencionamos arriba.

Vamos a demostrar este resultado. Para ello nos remitiremos a resultados ya demostrados en trabajos de graduación anteriores ya mencionados.

**Teorema 1.6.** *La ecuación  $x^2 - Dy^2 = -1$  tiene solución si y solo si el periodo del desarrollo en fracción simple continua de  $\sqrt{D}$  es impar.*

*Prueba.* Parte de la demostración del Teorema # 2.3.1 en el trabajo de tesis *La Ecuación de Pell* de Navarrete y Martínez, en la página 39, contiene el resultado

$$p_k^2 - Dq_k^2 = (-1)^k ,$$

que en la notación y convenciones (iniciamos a contar los convergentes desde el índice 0) que hemos estado utilizando, y para  $s$  siendo el menor periodo del desarrollo en fracción continua simple de  $\sqrt{D}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ , y tomando en cuenta que al iniciar desde 0 hay un desfase en los signos, escribimos

$$p_{ks-1}^2 - Dq_{ks-1}^2 = (-1)^{ks} ,$$

donde  $p_{ks-1}$  y  $q_{ks-1}$  son los  $ks - 1$  numeradores y denominadores parciales.

Si  $s$  es impar, entonces tenemos

$$p_{ks-1}^2 - Dq_{ks-1}^2 = \begin{cases} -1, & k \text{ impar} \\ 1, & k \text{ par} \end{cases} . \quad (1.40)$$

Y si  $s$  es par, tenemos

$$p_{ks-1}^2 - Dq_{ks-1}^2 = 1 , \quad (1.41)$$

para cualquier  $k$ .

Ahora supongamos que  $D = a_0^2 + 1$  donde  $a_0 \geq 1$ . Evidentemente,  $\sqrt{D} = \sqrt{a_0^2 + 1} = a_0 + 1/a_1$ . Así,

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0} \cdot \frac{\sqrt{D} + a_0}{\sqrt{D} + a_0} = \frac{\sqrt{D} + a_0}{D - a_0^2} = \sqrt{D} + a_0 = 2a_0 + \frac{1}{a_1} .$$

Por tanto, si  $D = a_0^2 + 1$ , entonces  $\sqrt{D} = [a_0; \overline{2a_0}]$ . Luego, si  $p_{k-1}/q_{k-1}$  es el convergente  $k - 1$  de  $[a_0; \overline{2a_0}]$ , por (1.40), y como  $s = 1$ , obtenemos

$$p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = -1 ,$$

con  $k$  impar. Entonces la solución fundamental de (1.38) son los números  $t = p_0 = a_0$ ,  $u = q_0 = 1$ . Para las demás soluciones de (1.38) en enteros positivos  $(t, u)$  tenemos  $u > 1$ .

Si  $D \neq a_0^2 + 1$ ,  $a_0 > 0$ , entonces, si  $(t, u)$  es una solución de la ecuación negativa de Pell, tenemos  $u > 1$  porque de otro modo  $u = 1$ ,  $t^2 - D = -1$ , es decir que,  $D = t^2 + 1$ , contrario a la asunción concerniente a  $D$ . En lo que sigue, podemos asumir que  $(t, u)$  es una solución de (1.38) con  $u > 1$ . Por lo tanto, sea

$$\frac{t}{u} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}] , \tag{1.42}$$

con  $k$  siendo un número impar. Para ver que tal representación existe notamos que si  $k - 1$  fuese impar, para  $a_{k-1} > 1$  el número  $a_{k-1} - 1 + 1/1$  podría ser escrito en el lugar de  $a_{k-1}$ , pudiendo representar  $t/u = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1} - 1, 1]$ ; y para  $a_{k-1} = 1$  podemos reemplazar  $a_{k-2} + 1/a_{k-1}$  por  $a_{k-2} + 1$ , terminando con  $t/u = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-2} + 1]$ . En todos los casos, encontramos una representación en fracción continua simple de  $t/u$  con  $k$  impar.

Y sea también  $t'/u' = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-2}]$  el penúltimo convergente de (1.42). Esto es para  $k \geq 3$ , puesto que  $u > 1$ . Por el Teorema 2.1.3.3 de la página 28 del ya citado trabajo de tesis, donde está demostrado, y adaptado con las consideraciones anteriormente mencionadas, tenemos

$$p_{k'}q_{k'-1} - q_{k'}p_{k'-1} = (-1)^{k'-1} .$$

Haciendo  $k' = k - 1$ , escribimos

$$tu' - ut' = -1 \quad .$$

Restando esta de la igualdad  $t^2 - Du^2 = -1$ , obtenemos

$$t(u' - t) = u(t' - Du) \quad .$$

En virtud de (1.42), tenemos  $0 < t/u - a_0 \leq 1$ , entonces

$$0 < t - a_0u \leq u \quad . \quad (1.43)$$

En vista del hecho de que  $t$  y  $u$  son primos relativos (porque  $t^2 - Du^2 = -1$ ), vemos que para un entero  $l$  las igualdades

$$u' - t = lu \quad , \quad t' - Du = lt \quad (1.44)$$

se mantienen. Luego sumamos  $a_0u$  a ambos lados de  $u' - t = lu$

$$u' - (t - a_0u) = (l + a_0)u \quad . \quad (1.45)$$

De las desigualdades  $0 < u' < u$  y de (1.43) inferimos que  $|u' - (t - a_0u)| < u$ , que con (1.45) da  $l + a_0 = 0$ , así que  $l = -a_0$ , entonces por (1.44)

$$u' = t - a_0u \quad , \quad t' = Du - a_0t \quad ,$$

y consecuentemente, factorizando por  $\sqrt{D}$ ,

$$\frac{t(a_0 + \sqrt{D}) + t'}{u(a_0 + \sqrt{D}) + u'} = \frac{t\sqrt{D} + Du}{t + u\sqrt{D}} = \sqrt{D} \quad ; \quad (1.46)$$

pero, por (1.42) y por su penúltima reducida ( $t'/u'$ ), y viendo cómo se definen las relaciones de recurrencia para las convergentes de una fracción continua simple (ver tesis citada), el lado izquierdo de (1.46) es igual a

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_0 + \sqrt{D}] \quad .$$

Así, por (1.46), la fracción continua simple para  $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}]$ , siendo el convergente número  $k - 1$  el expresado en (1.42). Se sigue de esto que  $k$  es el número de términos del periodo de la fracción continua simple de  $\sqrt{D}$ . Este periodo no necesariamente es el más corto. Denotemos por  $s$  el menor periodo de esta fracción continua regular. Claramente,  $s \mid k$  por lo que  $k = sn$ , donde  $n$  es un entero positivo. Para cualquier solución  $(t, u)$  de la ecuación diofántica  $x^2 - Dy^2 = -1$ , el número  $t/u$  es un convergente de la

fracción continua simple para  $\sqrt{D}$ ; de hecho, es el convergente número  $ns - 1$ , donde  $s$  es el número de términos del periodo más corto de esta fracción continua simple y  $n$  es un número entero positivo impar. Por consiguiente, de (1.40), si  $s$  es impar, cualquier reducida número  $ns - 1$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) define una solución de la ecuación  $x^2 - Dy^2 = -1$  en enteros. Pero si  $s$  es par, entonces, por (1.41), ningún convergente número  $ns - 1$  da una solución de la ecuación (1.38).  $\square$

Ahora veamos el ejemplo de solucionar (1.38) con  $D = 13$ . Al resolver (1.37) con la técnica de Brouncker, dejamos implícito el desarrollo en fracción continua simple de  $\sqrt{13}$ . Si calculamos  $\rho_{10}$  notamos que es exactamente  $\rho_5$ . Así, escribimos  $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$ , y notamos que  $s = 5$  (su periodo es impar). Considerando los  $ns - 1$  convergentes, para  $n = 1, 3, 5, \dots$ , buscamos la solución fundamental con el menor valor de  $n$ , entonces la reducida número  $(1)(5) - 1 = 4$  nos proporciona esta solución:

$$[3; 1, 1, 1, 1] = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{18}{5} .$$

En efecto,  $(18)^2 - 13(5)^2 = -1$ . De hecho, (1.40) explica por qué en la búsqueda de la solución de (1.37) tuvimos que llevar el proceso hasta obtener  $q_9$ , pues, es donde  $n = 2$  y  $ns - 1 = (2)(5) - 1 = 9$  (nótese que  $n$  es par para las soluciones de (1.37)). Podemos entonces presentar la Tabla 1.3 que detalla las primeras diez soluciones no triviales para la ecuación negativa de Pell, y los numeradores y denominadores parciales de  $\sqrt{13}$  calculados cada diez cocientes incompletos a partir de aquel que proporciona la solución fundamental. (Véase el Apéndice A).

**Tabla 1.3.** Diez primeras soluciones no triviales de (1.38) con  $D = 13$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares.

$n$	$(x, y)$	$p_{5n-1}/q_{5n-1}$
1	(18, 5)	$\frac{18}{5}$
3	(23382, 6485)	$\frac{23382}{6485}$
5	(30349818, 8417525)	$\frac{30349818}{8417525}$
7	(39394040382, 10925940965)	$\frac{39394040382}{10925940965}$
9	(51133434066018, 14181862955045)	$\frac{51133434066018}{14181862955045}$
11	(66371158023650982, 18408047189707445)	$\frac{66371158023650982}{18408047189707445}$
13	(86149711981264908618, 23893631070377308565)	$\frac{86149711981264908618}{23893631070377308565}$
15	(111822259780523827735182, 31013914721302556809925)	$\frac{111822259780523827735182}{31013914721302556809925}$
17	(145145207045407947135357618, 40256037414619648361974085)	$\frac{145145207045407947135357618}{40256037414619648361974085}$
19	(188398366922679734857866452982, 52252305550261582271285552405)	$\frac{188398366922679734857866452982}{52252305550261582271285552405}$

Y también la Tabla 1.4 que presenta las primeras diez soluciones no triviales de la ecuación (1.5) con  $D = 13$ , y los numeradores y denominadores parciales de  $\sqrt{13}$  calculados cada diez cocientes incompletos a partir de aquel que proporciona la solución fundamental. Recordemos que la solución fundamental (649, 180) la encontramos al resolver (1.37) con el método de Brouncker. Para mayor información del cálculo de los valores en la Tabla 1.4 consúltese el Apéndice A.

**Tabla 1.4.** Diez primeras soluciones no triviales de (1.5) con  $D = 13$ , con las ecuaciones de Gauss y con el método de fracciones continuas regulares.

$n$	$(x, y)$	$p_{5n-1}/q_{5n-1}$
2	(649, 180)	$\frac{649}{180}$
4	(842401, 233640)	$\frac{842401}{233640}$
6	(1093435849, 303264540)	$\frac{1093435849}{303264540}$
8	(1419278889601, 393637139280)	$\frac{1419278889601}{393637139280}$
10	(1842222905266249, 510940703520900)	$\frac{1842222905266249}{510940703520900}$
12	(2391203911756701601, 663200639532988920)	$\frac{2391203911756701601}{663200639532988920}$
14	(3103780835237293411849, 860833919173116097260)	$\frac{3103780835237293411849}{860833919173116097260}$



16	$(4028705132934095091878401,$ $1117361763886065161254560)$	$\frac{4028705132934095091878401}{1117361763886065161254560}$
18	$(5229256158767620191964752649,$ $1450334708690193406192321620)$	$\frac{5229256158767620191964752649}{1450334708690193406192321620}$
20	$(6787570465375238075075157060001,$ $1882533334518107155172472208200)$	$\frac{6787570465375238075075157060001}{1882533334518107155172472208200}$

El problema de determinar todos los números  $D$  para los cuales la ecuación negativa de Pell tiene solución o no, es decir, aquellos con fracción continua simple para su raíz cuadrada con periodo impar, es un acertijo abierto que estimula a los matemáticos y teóricos de los números. Una condición necesaria, pero no suficiente para que (1.38) tenga solución es que  $D$  no sea divisible por 4 ni por ningún primo de la forma  $4k + 3$ . Cremona y Odoni demostraron en 1989 que la proporción de números  $D$  libres de cuadrados divisibles por primos de la forma  $4k + 1$  para los cuales la ecuación negativa de Pell tiene solución es al menos del 40% (pp. 16-28).

Una publicación relativamente reciente de H. W. Lenstra (nacido en 1949) (2002) en la *Notices of the American Mathematical Society* (pp. 182-192) y un informe dado por H. C. Williams (nacido en 1943) en la *2000 Millennial Conference on Number Theory* indican que la eficiente generación de soluciones de una ecuación de Pell ordinaria es un área viva de investigación en las ciencias de la computación (2002, pp. 397-435). Williams menciona que más de 100 artículos que tratan sobre la ecuación o tienen alguna relación con la misma han aparecido en la década de 1990 y llama la atención para interesarse en la parte de los criptógrafos. Además, la ecuación de Pell es parte de un área central de la Teoría Algebraica de Números que contempla las formas cuadráticas y la estructura de los anillos de enteros en los cuerpos de números algebraicos. Incluso al nivel específico de las ecuaciones diofánticas cuadráticas, hay problemas abiertos, y los análogos de mayor grado de la ecuación de Pell, particularmente más allá del tercero, no parecen haber sido bien estudiados.

## Capítulo II: Algunas situaciones en las que emerge

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

*“Un escritor antiguo dijo que la aritmética y la geometría son las alas de las matemáticas; yo creo que se puede decir sin hablar metafóricamente que estas dos ciencias son el fundamento y esencia de todas las ciencias que se ocupan de la cantidad. No solo son la base, también son, por así decirlo, los toques finales; pues, siempre que se ha llegado a un resultado, para poder utilizarlo, es necesario traducirlo a números o líneas; traducirlo en números requiere la ayuda de la aritmética, traducirlo en líneas requiere el uso de la geometría”. (Wikiquote, 2020).*

Joseph Louis Lagrange, *Dans Les Leçons Élémentaires sur les Mathématiques*, 1795

Ahora veamos ciertos problemas en los que surge la ecuación de Pell cuando procedemos con su resolución. El método para resolver cada uno implica la capacidad de solucionar ya sea (1.5) o (1.38). Esto ya lo discutimos en el capítulo anterior, y está bien detallado en los trabajos de graduación ya mencionados.

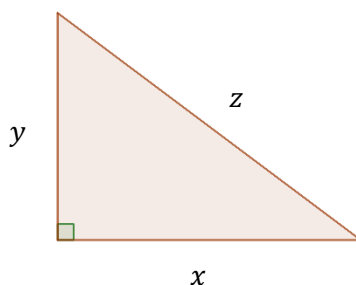
### 2.1. Tripletas pitagóricas y triángulos rectos con dos lados consecutivos

El *Teorema de Pitágoras* es uno de los resultados más elegantes de la geometría euclidiana: La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo recto es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa. La implicación recíproca también es cierta: Si  $a$  y  $b$  son las longitudes de dos de los lados de un triángulo, y  $c$  es la del más largo, siempre que  $a^2 + b^2 = c^2$ , entonces el triángulo es recto, donde el ángulo de  $90^\circ$  es opuesto al lado de longitud  $c$ .

Un triángulo recto de lados con longitudes enteras es un *triángulo pitagórico*.

Numerosas pruebas del teorema de Pitágoras usando varias técnicas pueden ser encontradas en la literatura matemática. Este teorema tiene ramificaciones más allá de la geometría.

Denotemos por  $x$ ,  $y$  las longitudes de los catetos del triángulo pitagórico, además de  $z$  siendo el largo de su hipotenusa (Véase la Figura 2.1). Entonces  $x$ ,  $y$ ,  $z$  satisfacen la ecuación diofántica no lineal  $x^2 + y^2 = z^2$  (nuestra ecuación (1.1)). Tal tripleta  $(x, y, z)$  es una *terna pitagórica*. Cada terna pitagórica corresponde a un triángulo pitagórico, y viceversa.



**Figura 2.1.** Triángulo pitagórico.

En la Sección 1.1, presentamos algunas soluciones a (1.1), una de ellas es  $(3, 4, 5)$ . Esta lleva a infinitas soluciones  $(3d, 4d, 5d)$  donde  $d$  es cualquier entero positivo (hablando de longitudes enteras de segmentos), pero podemos extender esta cantidad a todo el conjunto de los enteros, pues,  $(3d)^2 + (4d)^2 = (5d)^2$ . De hecho, en esa misma sección del Capítulo I aparece la parametrización de todas las soluciones para la ecuación pitagórica. También mencionamos que existe una infinidad de soluciones enteras para las que  $\text{MCD}(x, y, z) = 1$ . Se dice que tal trío, tripleta o terna es *primitiva*.

Es sencillo ver que todo trío pitagórico es múltiplo de una terna pitagórica primitiva. Sea  $(x, y, z)$  una tripleta pitagórica arbitraria y  $\text{MCD}(x, y, z) = d$ . Entonces  $x = du$ ,  $y = dv$ ,  $z = dw$  para algunos enteros positivos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , con  $\text{MCD}(u, v, w) = 1$ . Ya que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ (du)^2 + (dv)^2 &= (dw)^2 \\ d^2(u^2 + v^2) &= d^2w^2 \\ u^2 + v^2 &= w^2 \quad , \end{aligned}$$

se puede restringir la discusión a las ternas pitagóricas primitivas.

¿Pueden las longitudes de los lados de un triángulo pitagórico primitivo ser enteros consecutivos? Claramente, sí; (3, 4, 5) es el ejemplo más obvio. De hecho, es el único triángulo pitagórico en el que las medidas de todos sus lados son enteros consecutivos; esto puede confirmarse empleando álgebra elemental, pues, si  $l$  es el lado de menor medida, entonces

$$\begin{aligned} l^2 + (l + 1)^2 &= (l + 2)^2 \\ l^2 + l^2 + 2l + 1 &= l^2 + 4l + 4 \\ l^2 - 2l - 3 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

que tiene raíces  $l_1 = 3$  y  $l_2 = -1$ , y solo es válida  $l = 3$ .

¿Existen más triángulos pitagóricos primitivos con al menos dos lados de medidas que son enteros consecutivos? En el capítulo anterior, mencionamos el triángulo de lados 20, 21, 29. ¿Existen más? De ser así, ¿cómo los encontramos? Para investigar tales triángulos pitagóricos primitivos, debemos tener  $x = y + 1$  o  $y = x + 1$ . Empleando la parametrización  $(n^2 - m^2, 2mn, m^2 + n^2)$  para cualquier terna pitagórica primitiva  $(x, y, z)$ , debemos tener

$$n^2 - m^2 = 2mn + 1$$

o

$$2mn = n^2 - m^2 + 1 \quad ,$$

así que, reordenando y completando cuadrados, obtenemos

$$(n - m)^2 - 2m^2 = 1$$

o

$$(n - m)^2 - 2m^2 = -1 \quad .$$

Haciendo  $u = n - m$ ,  $v = m$ , restringimos a  $n > m$  para que todos los lados sean enteros positivos, combinamos ambas en  $u^2 - 2v^2 = \pm 1$ .

Ya podemos decir, sin temor a equivocarnos, que hay infinitos triángulos pitagóricos primitivos distintos donde las medidas de sus catetos son enteros consecutivos. Esto se desprende del hecho de que reducimos el problema a solucionar las ecuaciones de Pell para  $D = 2$ , que, al menos en su versión positiva, siempre tiene infinitas soluciones no triviales, como discutimos en el capítulo anterior. Además, como  $\sqrt{2} = [1; \bar{2}]$ , su periodo mínimo en fracción continua regular es 1 que es impar; por tanto, también la ecuación negativa de Pell tiene infinitas soluciones no triviales para el mismo valor de  $D$ .

En la Tabla 2.1 presentamos las primeras diez ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con catetos consecutivos que surgen al resolver (1.5) con  $D = 2$ .

**Tabla 2.1.** Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con catetos consecutivos que surgen al resolver (1.5) con  $D = 2$ .

Generadores		Triángulos Pitagóricos Primitivos con Catetos Consecutivos		
$n$	$m$	$x = n^2 - m^2$	$y = 2mn$	$z = n^2 + m^2$
5	2	21	20	29
29	12	697	696	985
169	70	23661	23660	33461
985	408	803761	803760	1136689
5741	2378	27304197	27304196	38613965
33461	13860	927538921	927538920	1311738121
195025	80782	31509019101	31509019100	44560482149

1136689	470832	1070379110497	1070379110496	1513744654945
6625109	2744210	36361380737781	36361380737780	51422757785981
38613965	15994428	1235216565974041	1235216565974040	1746860020068409

Para obtener estas soluciones y las demás en esta sección, se empleó el código escrito en Wolfram Mathematica 12.0 del Apéndice A y el del Apéndice B en cuadernos distintos.

Podemos realizar observaciones interesantes a partir de la Tabla 2.1. Para esto, denotemos por  $k$  el número de fila, empezando la cuenta en 1. Notamos patrones en los últimos dígitos de los números de cada columna, por ejemplo, en la del parámetro  $n$  la secuencia sería 5, 9, 9, 5, 1, 1, y se repite. Cada columna presenta su propia secuencia. No es difícil comprobar que los generadores siguen las recurrencias definidas por

$$\begin{pmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

con  $k \geq 1$ , y estableciendo

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Iterando (2.1) con sus valores iniciales podemos encontrar una expresión para los  $k$ -ésimos términos de las recurrencias

$$\begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Estas recurrencias son consecuencia de las recurrencias que vimos en la Sección 1.4 para los números diagonales y laterales que solucionan (1.19), evidentemente con valores pares para el exponente (en este caso estamos viendo la ecuación positiva de Pell). Esto se debe a que  $(u, v)$  es solución de (1.19) que no es más que  $u^2 - 2v^2 = \pm 1$ . Para la Tabla 2.1 resolvimos  $u^2 - 2v^2 = 1$ ; por tanto, adoptamos valores pares del exponente en (1.19). Por las parametrizaciones  $(u, v) = (n - m, n)$ , podemos escribir

$$\begin{pmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} ,$$

obteniendo así (2.1).

Estudiando las recurrencias (2.2) con ecuaciones modulares (mod 10), entendemos el patrón de las columnas que notamos. Recordemos que la potencia nula de la matriz cuadrada es la matriz identidad con la misma dimensión.

No obstante, una observación aún más interesante es que las hipotenusas  $z$  son valores que adopta el generador  $n$  para otro triángulo. Veamos esto en detalle.

Como  $(u_\kappa, v_\kappa)$  son soluciones de (1.19), estas corresponden a las recurrencias  $(d_n, s_n)$  usadas para aproximar  $\sqrt{2}$ . Por las parametrizaciones, tenemos

$$\begin{pmatrix} n_\kappa \\ m_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\kappa \\ v_\kappa \end{pmatrix} ,$$

es decir,  $n_\kappa = u_\kappa + v_\kappa = v_{\kappa+1}$ ,  $m_\kappa = v_\kappa$ , con  $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ .

Ahora calculamos  $z_\kappa = n_\kappa^2 + m_\kappa^2 = v_{\kappa+1}^2 + v_\kappa^2$ . Si tomamos el sistema (1.39) y empleamos la solución fundamental de la ecuación negativa de Pell con  $D = 2$ ,  $(1, 1)$ , para definir  $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ ,  $\beta = 1 - \sqrt{2}$ , podemos escribir

$$\begin{cases} u_\kappa = \frac{\alpha^\kappa + \beta^\kappa}{\alpha + \beta} \\ v_\kappa = \frac{\alpha^\kappa - \beta^\kappa}{\alpha - \beta} \end{cases} , \quad (2.3)$$

notando que  $\alpha + \beta = 2$ ,  $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha\beta = -1$ . Estas son las fórmulas tipo *Binet* para los números  $u_\kappa$ ,  $v_\kappa$  que solucionan  $u_\kappa^2 - 2v_\kappa^2 = (-1)^\kappa$ , con  $\kappa \geq 1$ . Los números  $u_\kappa$ ,  $v_\kappa$  se llaman *números de Pell-Lucas* y *números de Pell*, respectivamente, y tienen muchas propiedades interesantes. Las fórmulas (2.3) reciben ese nombre por su similitud con las fórmulas de Binet que resultan en el estudio de las recurrencias de los números de Lucas y de los

números de Fibonacci. Son llamadas así, en honor al matemático francés Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856), aunque ya eran conocidas por Abraham de Moivre (1667-1754) y Daniel Bernoulli (1700-1782). François Édouard Anatole Lucas (1842-1891) trabajó los números que llevan su nombre y demostró muchas de sus propiedades.

Nos interesa la segunda ecuación de (2.3), tenemos

$$z_k = v_{k+1}^2 + v_k^2 = \left( \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} \right)^2 + \left( \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right)^2 ,$$

desarrollando los cuadrados,

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{\alpha^{2k+2} - 2\alpha^{k+1}\beta^{k+1} + \beta^{2k+2} + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2k+1}(\alpha - \beta) - 2\alpha^k\beta^k(\alpha\beta) - \beta^{2k+1}(\alpha - \beta) + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k} + \alpha^{2k+1}\beta + \alpha\beta^{2k+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2k+1}(\alpha - \beta) - 2\alpha^k\beta^k(\alpha\beta) - \beta^{2k+1}(\alpha - \beta) + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k} + \alpha^{2k}(\alpha\beta) + (\alpha\beta)\beta^{2k}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2k+1}(\alpha - \beta) + 2\alpha^k\beta^k - \beta^{2k+1}(\alpha - \beta) + \alpha^{2k} - 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k} - \alpha^{2k} - \beta^{2k}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2k+1}(\alpha - \beta) - \beta^{2k+1}(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{\alpha^{2k+1} - \beta^{2k+1}}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

que no es más que  $v_{2k+1}$ , es decir,

$$z_k = v_{2k+1} = n_{2k} . \quad (2.4)$$

Para  $\kappa$  par, tendremos las soluciones de (1.5) con  $D = 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  en la Tabla 2.1. O sea que  $\kappa = 2k$ , siendo  $k$  el número de la fila de la Tabla 2.1.

Ahora veamos los triángulos pitagóricos primitivos que resultan de resolver  $u^2 - 2v^2 = -1$ . La Tabla 2.2 muestra los primeros diez. De nuevo, consúltense el Apéndice A y el Apéndice B para más detalles de cómo se calcularon estos resultados.



**Tabla 2.2.** Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con catetos consecutivos que surgen al resolver (1.38) con  $D = 2$ .

Generadores		Triángulos Pitagóricos Primitivos con Catetos Consecutivos		
$n$	$m$	$x = n^2 - m^2$	$y = 2mn$	$z = n^2 + m^2$
2	1	3	4	5
12	5	119	120	169
70	29	4059	4060	5741
408	169	137903	137904	195025
2378	985	4684659	4684660	6625109
13860	5741	159140519	159140520	225058681
80782	33461	5406093003	5406093004	7645370045
470832	195025	183648021599	183648021600	259717522849
2744210	1136689	6238626641379	6238626641380	8822750406821
15994428	6625109	211929657785303	211929657785304	299713796309065

Otra vez, asignamos  $k \geq 1$  a cada fila de la Tabla 2.2 y observamos una situación similar a la de la Tabla 2.1. De hecho, se cumple (2.1) con  $(n_1, m_1) = (2, 1)$  y, en lugar de (2.4), tenemos  $z_k = m_{2k}$ . Para  $\kappa = 2k - 1$  en (2.3), tendremos las soluciones de (1.38) con  $D = 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$  en la Tabla 2.2.

Podemos fusionar ambas tablas y tener los primeros veinte triángulos pitagóricos primitivos con catetos consecutivos. Esta nueva tabla sería el resultado de solucionar  $u_k^2 - 2v_k^2 = (-1)^k$ , donde  $k \geq 1$  es el número de fila.

La primera fila de esta nueva tabla es la primera fila de la Tabla 2.2, la segunda es la primera de la Tabla 2.1, la tercera es la segunda fila de la Tabla 2.2, y así sucesivamente se van alternando. En lugar de (2.1), tendríamos

$$\begin{pmatrix} n_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} ,$$

y

$$\begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en vez de (2.2).

Además, se cumple  $z_k = v_{2k+1} = m_{2k+1} = n_{2k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Hemos encontrado los triángulos pitagóricos primitivos con catetos que difieren en 1, pero ¿qué hay de los triángulos con un cateto menor que su hipotenusa en una unidad? Claro, el triángulo correspondiente a la terna (3, 4, 5) es uno de ellos y aparece en la Tabla 2.2, pero no hay más ternas con estas características en ninguno de los resultados anteriores.

Este problema es mucho más sencillo. Sea el triángulo pitagórico de lados  $(x, y, z)$  con  $z = y + 1$ , entonces

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (y + 1)^2 \\ x^2 &= 2y + 1 \quad . \end{aligned}$$

Por lo que  $x$  es impar, digamos  $x = 2l + 1$  con  $l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ . Luego,  $y = 2l^2 + 2l$ . Así, tenemos la Tabla 2.3 con los diez primeros triángulos pitagóricos, todos de lados  $(2l + 1, 2l(l + 1), 2l(l + 1) + 1)$ . ¿Son primitivas estas ternas? Vemos que cumplen con la parametrización para todas las tripletas pitagóricas primitivas si  $m = l$ ,  $n = l + 1$ , así que sus triángulos pitagóricos correspondientes son primitivos.

**Tabla 2.3.** Diez primeras ternas pitagóricas primitivas para triángulos pitagóricos con un cateto igual a la medida de su hipotenusa reducida en uno.

Generador	Triángulos Pitagóricos Primitivos con un Cateto y su Hipotenusa Consecutivos		
$l$	$x = 2l + 1$	$y = 2l(l + 1)$	$z = 2l(l + 1) + 1$
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221

Sin embargo, este problema no tiene nada que ver con  $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ .

## 2.2. Números poligonales simultáneos

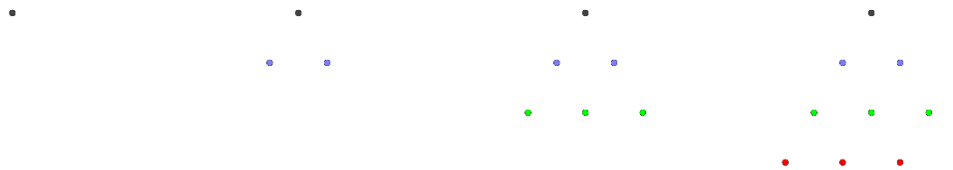
Frecuentemente empleamos ilustraciones para clarificar conceptos e ilustrar relaciones en todas las ramas de las matemáticas. Los *números figurados* proveen un enlace así entre la teoría de números y la geometría; son enteros positivos que pueden ser representados por patrones geométricos. Aunque los pitagóricos usualmente reciben el crédito por su

descubrimiento, los antiguos chinos parecen haber originado estas representaciones alrededor de 500 años antes que Pitágoras (c. 570–c. 495 ANE). Muchos siglos después, en 1665, Pascal (1623-1662) escribió un libro sobre algunas de estas representaciones, *Traité du triangle arithmétique* (Tratado sobre el triángulo aritmético).

Los *números poligonales* son un caso especial de los números figurados; son enteros positivos que pueden ser representados por polígonos regulares de  $n$  lados, donde  $n \geq 3$ , también llamados *n-gonos regulares* o *enógonos regulares*. Cuando  $n = 3, 4, 5$ , son llamados *números triangulares*, *cuadrados*, *pentagonales*, respectivamente. Los números poligonales tienen muchas propiedades interesantes, el lector puede profundizar por sí mismo en ellas; no obstante, nos limitaremos a presentar brevemente los números triangulares, cuadrados y pentagonales.

Los números triangulares son los más sencillos. Con frecuencia, vemos arreglos triangulares de objetos en el mundo. En el juego de billar, las 15 bolas son puestas inicialmente en una configuración triangular. En los supermercados, a veces, encontramos frutas, como manzanas o naranjas, dispuestas en orden triangular.

De manera general, un *número triangular*  $\Delta_n$  es un entero positivo que puede ser representado por un acomodo triangular equilátero. Los primeros cuatro números triangulares son  $\Delta_1 = 1$  (empezamos todas las sucesiones de números poligonales con 1),  $\Delta_2 = 3$ ,  $\Delta_3 = 6$  y  $\Delta_4 = 10$ . Pueden ser representados pictóricamente en la Figura 2.2.



**Figura 2.2.** Los primeros cuatro números triangulares.

Como se puede apreciar, los vamos construyendo agregando  $i$  puntos a la línea número  $i$ . El  $n$ -ésimo número triangular se obtiene al sumar los primeros  $n$  enteros positivos:

$$\Delta_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} . \quad (2.5)$$

Como ejemplo,  $\Delta_8 = \frac{8(9)}{2} = 36 = 6^2$  (Véase la Figura 2.3). También  $\Delta_{36} = \frac{36(37)}{2} = 666$ , el *número de la Bestia* según el libro de *Revelaciones* o *Apocalipsis* del texto sagrado del cristianismo, pero que en China es considerado de la buena suerte y puede significar “todo va sin contratiempos”.



**Figura 2.3.** 36 canicas en un arreglo triangular.

También podemos definir  $\Delta_n$  recursivamente:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 \\ \Delta_n &= \Delta_{n-1} + n, \quad n \geq 2 . \end{aligned}$$

Los números triangulares satisfacen una basta cantidad de propiedades interesantes. Quizá la más simple y obvia es el hecho de que la suma de cualesquiera dos números triangulares consecutivos es un cuadrado, es decir, usando (2.5),

$$\Delta_{n-1} + \Delta_n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 - n + n^2 + n}{2} = n^2 .$$

Podemos hablar de un problema abierto referente a los triángulos pitagóricos y los números triangulares. En 1949, el matemático polaco Zarankiewicz (1902-1959) preguntó si hay o no triángulos pitagóricos cuyos lados son números triangulares. Es interesante notar que hay al menos uno:  $\Delta_{132}^2 + \Delta_{143}^2 = 8778^2 + 10296^2 = 183060900 = 13530^2 = \Delta_{164}^2$ . No se conoce si existe algún otro de estos triángulos pitagóricos.

De manera análoga, un *número cuadrado*  $\diamond_n$  es un entero positivo que puede ser representado por un acomodo cuadrangular equilátero. Los primeros cuatro números cuadrados son  $\diamond_1 = 1$ ,  $\diamond_2 = 4$ ,  $\diamond_3 = 9$  y  $\diamond_4 = 16$  (Figura 2.4).



**Figura 2.4.** Cuatro primeros números cuadrados.

Vemos que se van agregando más unidades de forma que siempre se tenga un ordenamiento cuadrado. Las unidades están igualmente espaciadas en los lados de cada arreglo. No es difícil notar que cada número cuadrado se obtiene sumando un número impar al anterior; más precisamente, tenemos la recurrencia

$$\begin{aligned} \diamond_1 &= 1 \\ \diamond_n &= \diamond_{n-1} + 2n - 1, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Podemos llegar a una expresión más directa para  $\diamond_n$  notando que es la suma de los  $n$  primeros impares:

$$\diamond_n = 1 + 3 + 5 + \dots + [2(n - 1) - 1] + (2n - 1) = \sum_{i=1}^n (2i - 1) \quad ,$$

o sea,

$$\diamond_n = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = 2 \frac{n(n + 1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2 \quad , \quad (2.6)$$

que nos lo decía ya nuestra engañosa intuición.

Al deducir (2.6) ya notamos una de las propiedades de los números cuadrados, el  $n$ -ésimo cuadrado es igual a la suma de los  $n$  primeros impares positivos. Gráficamente también es fácil ver la propiedad que ya mencionamos de que la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado.

Calculando el sexto número cuadrado,  $\diamond_6 = (6)^2 = 36 = \Delta_8$  como ya vimos. De hecho, las mismas canicas de la Figura 2.3 fueron reordenadas para la Figura 2.5.



**Figura 2.5.** 36 canicas en un acomodo cuadrado.

El 36 es un *número triangular cuadrado* o *cuadrado triangular*. Estos números poligonales que pueden ser representados tanto por polígonos de  $j$  lados como por polígonos de  $k$  lados ( $j \neq k$ ) son llamados *números poligonales simultáneos*.

¿Existen más números cuadrados triangulares? De ser así, ¿cómo los encontramos? Para investigarlo, supongamos  $\Delta_n = \diamond_m$ , esto es

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= m^2 \\ n^2 + n &= 2m^2 \\ n^2 + n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 2m^2 \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 2m^2 \\ (2n+1)^2 - 1 &= 2(2m)^2 \\ (2n+1)^2 - 2(2m)^2 &= 1 \end{aligned} .$$

Haciendo  $T = 2n + 1$ ,  $D = 2$ ,  $U = 2m$ , tenemos (1.5) otra vez. Los valores de las recurrencias que resuelven (1.19) con exponente par son las soluciones (con ambas componentes positivas) de  $T^2 - 2U^2 = 1$ , cuya solución fundamental es (3, 2). Podemos representar todas las soluciones  $(T_k, U_k)$  con

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{2(k-1)} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

$T_1 = 3$  es impar,  $U_1 = 2$  es par.  $T_2$  es la suma del producto de un impar (3) por un impar ( $T_1$ ) más el producto de un par (4) por otro par ( $U_1$ ), es decir, sumo un impar a un par, por lo que  $T_2$  es impar. De modo similar, podemos concluir que  $U_2$  es par, pues,  $U_2 = 2T_1 + 3U_1$ . Entendemos que todos los  $T_k$  serán impares y los  $U_k$ , pares. Por tanto, hay un número cuadrado triangular por cada solución no trivial de la ecuación de Pell con  $D = 2$ . Puesto que

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

estos son

$$\begin{pmatrix} n_k \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Consecuentemente hay infinitos de estos números, como Euler descubrió en 1730. La Tabla 2.4 compendia los primeros veinte cuadrados triangulares.

**Tabla 2.4.** Veinte primeros números cuadrados triangulares.

$n$	$m$	$\Delta_n = \diamond_m$
1	1	1
8	6	36
49	35	1225
288	204	41616

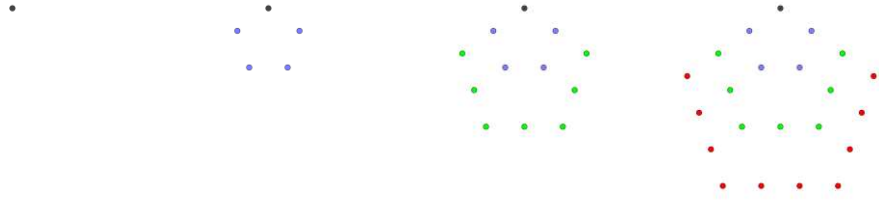


1681	1189	1413721
9800	6930	48024900
57121	40391	1631432881
332928	235416	55420693056
1940449	1372105	1882672131025
11309768	7997214	63955431761796
65918161	46611179	2172602007770041
384199200	271669860	73804512832419600
2239277041	1583407981	2507180834294496361
13051463048	9228778026	85170343853180456676
76069501249	53789260175	2893284510173841030625
443365544448	313506783024	98286503002057414584576
2584123765441	1827251437969	3338847817559778254844961
15061377048200	10650001844790	113422539294030403250144100
87784138523761	62072759630771	3853027488179473932250054441
511643454094368	361786555939836	130889512058808083293251706896

Véase el Código B.2 del Apéndice B para más información sobre los cálculos para la Tabla 2.4.

¿Tiene sentido siquiera calcular o representar estos números que para nuestra intuición llegan a ser enormes cantidades? Algunos podrían argumentar que no. ¿Por qué el autor realiza los cálculos hasta el  $\Delta_{511643454094368}$ ? Primero, porque puedo. Esto tiene una implicación importante respecto de las capacidades y herramientas de las que disponemos quienes nos queremos dedicar al estudio de las matemáticas. Computar estas cantidades me tomó casi ningún esfuerzo (más precisamente, lo hizo mi computadora ejecutando Wolfram), cosa que hubiera tomado mucho más tiempo y trabajo en la época de Euler, por ejemplo; no sería una tarea imposible, pero no una tan ligera tampoco. Segundo, porque quiero. El conocimiento matemático nos permite comprender propiedades profundas en estas cantidades que, de otra forma, quizá para nosotros simplemente significarían “muchísimo”. Sé que si tuviera exactamente 130889512058808083293251706896 canicas, *exempli gratia*, el tiempo, el espacio, la energía y la paciencia suficientes, podría disponerlas en un arreglo triangular siguiendo las reglas que hemos expuesto; y también, en un cuadrado con 361786555939836 canicas por cada lado. Las matemáticas permiten al humano asomarse a casi entender el infinito. ¿Para qué sirve eso? No indagaré en las aplicaciones de este conocimiento específicamente, mas me reservaré el derecho a compartir que las implicaciones prácticas del saber matemático muchas veces son resultado de un descubrimiento de correspondencias entre este y problemas prácticos. Aunque siempre podemos intentar hacer nuestra propia matemática si no encontramos nada en este campo que nos permita describir y/o resolver nuestra situación...

Sigamos con los números pentagonales. Tal como los números triangulares y los números cuadrados, los números pentagonales son números poligonales. Los *números pentagonales*  $\diamondsuit_n$  son enteros positivos que pueden ser representados geoméricamente por pentágonos regulares. En la Figura 2.6 podemos apreciar dichas representaciones para los primeros cuatro números pentagonales:  $\diamondsuit_1 = 1$ ,  $\diamondsuit_2 = 5$ ,  $\diamondsuit_3 = 12$  y  $\diamondsuit_4 = 22$ .



**Figura 2.6.** Primeros cuatro números pentagonales.

Como podemos apreciar, siempre iniciamos los números poligonales con un elemento que represente la unidad ubicado en un vértice que será común a todos los demás polígonos con la misma cantidad  $r$  de lados en los que ordenemos el resto de unidades. Los dos lados con este vértice en común se van prolongando a medida que seguimos buscando el siguiente número  $r$ -gonal. Por tanto, todos los  $r$ -gonos compartirán también estos dos lados. Así podemos establecer reglas generales para construir cualquier número poligonal de  $r$  lados. Sea  $\textcircled{R}_{n-1}$  el número con una representación geométrica en un polígono de  $r$  lados y con ordinal  $n - 1$ , entonces el siguiente número  $r$ -gonal  $\textcircled{R}_n$  se construirá añadiendo  $r - 2$  lados más con  $n$  unidades cada uno. Considerando que estos tienen  $r - 3$  vértices en común, restamos esta cantidad de  $n(r - 2)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \textcircled{R}_1 &= 1 \\ \textcircled{R}_n &= \textcircled{R}_{n-1} + n(r - 2) - (r - 3), \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

La recurrencia (2.7) nos permite calcular los  $n$  primeros números poligonales que pueden ser acomodados en polígonos regulares de  $r$  lados. Para los números pentagonales, tenemos  $r = 5$ , por lo que  $\textcircled{R}_n = \textcircled{P}_n$ , obteniendo un caso particular de (2.7):

$$\begin{aligned} \textcircled{P}_1 &= 1 \\ \textcircled{P}_n &= \textcircled{P}_{n-1} + 3n - 2, \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Así,

$$\textcircled{P}_n = 1 + 4 + 7 + \dots + [3(n - 1) - 2] + (3n - 2) = \sum_{i=1}^n (3i - 2) \quad ,$$

resultando

$$\diamond_n = \sum_{i=1}^n (3i - 2) = 3 \frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{n(3n-1)}{2}, \quad (2.9)$$

como podemos concluir al haber iterado (2.8).

Calculemos con (2.9), por ejemplo,

$$\diamond_{81} = \frac{(81)[3(81) - 1]}{2} = \frac{(81)(242)}{2} = (81)(121) = (9^2)(11^2) = 99^2 = \diamond_{99} .$$

Existe entonces al menos un *número cuadrado pentagonal* o *pentagonal cuadrado* aparte del 1, el 9801. Surge de inmediato la pregunta: ¿hay más números cuadrados pentagonales? Asumimos  $\diamond_n = \diamond_m$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{n(3n-1)}{2} &= m^2 \\ 3n^2 - n &= 2m^2 \\ 3 \left[ n^2 - \frac{n}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \right] &= 2m^2 \\ 3 \left[ \left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \right] &= 2m^2 \\ 6 \left[ \left(n - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \right] &= (2m)^2 \\ (6n-1)^2 - 1 &= 6(2m)^2 \\ (6n-1)^2 - 6(2m)^2 &= 1 \end{aligned} .$$

Haciendo  $T = 6n - 1$ ,  $U = 2m$ , llevamos el problema a resolver (1.5) con  $D = 6$ . Tenemos que tomar las soluciones  $(T, U)$  que tengan las formas de las parametrizaciones que hemos hecho. Busquemos recurrencias para  $(T, U)$ , resolvamos el problema para cualquier  $D$ .

**Teorema 2.1.** *Sean las recurrencias de enteros positivos*

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{k-1} \\ U_{k-1} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

donde  $(t, u)$  es la solución fundamental de  $x^2 - Dy^2 = (-1)^s$ , con  $s$  siendo el menor periodo del desarrollo en fracción continua regular de  $\sqrt{D}$  ( $k \geq 1$ ). Si

$$T_{k-1}^2 - DU_{k-1}^2 = (-1)^{s(k-1)},$$

entonces

$$T_k^2 - DU_k^2 = (-1)^{sk} .$$

*Prueba.* Tenemos

$$\begin{aligned} T_k^2 - DU_k^2 &= (tT_{k-1} + DuU_{k-1})^2 - D(uT_{k-1} + tU_{k-1})^2 \\ &= (t^2 - Du^2)(T_{k-1}^2 - DU_{k-1}^2) \end{aligned} ,$$

por la identidad de Brahmagupta. Entonces

$$T_k^2 - DU_k^2 = (t^2 - Du^2)(T_{k-1}^2 - DU_{k-1}^2) = (-1)^s (-1)^{s(k-1)} = (-1)^{sk} . \quad \square$$

**Corolario 2.2.** *Se sigue que*

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.11)$$

$k \geq 0$ .

*Prueba.* Con  $k = 0$ , tenemos la solución trivial de la ecuación de Pell. Para  $k = 1$ ,  $(T_1, U_1) = (t, u)$  que es la solución fundamental de (1.5) o (1.38) de acuerdo a la paridad de  $s$  como ya hemos discutido. Aplicando (2.10) a la hipótesis de inducción, llegamos a (2.11).  $\square$

(2.11) tiene la misma utilidad que (1.39) para calcular las soluciones  $(x, y)$  de  $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ , siempre teniendo la solución fundamental  $(t, u)$ .

Por el Corolario 2.2, retomando el problema de los números cuadrados pentagonales, para  $D = 6$ ,  $\sqrt{6} = [2; \overline{2,4}]$  así que  $s = 2$ ,  $(t, u) = (5, 2)$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.12)$$

con  $k \geq 0$ . Con (2.12), vemos que  $T_0 \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $U_0 \equiv 0 \pmod{2}$ , consecuentemente

$$T_1 \equiv 5(T_0) + 12(U_0) \equiv 5 \pmod{6} ,$$

además de

$$U_1 \equiv 2(T_0) + 5(U_0) \equiv 0 \pmod{2} .$$

Todos los  $U_k$  son pares. Obtengamos

$$T_2 \equiv 5(T_1) + 12(U_1) \equiv 25 \equiv 1 \pmod{6} ,$$

pudiendo inferir ya que

$$T_k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{6}, & k \text{ par} \\ 5 \pmod{6}, & k \text{ impar} \end{cases} \wedge U_k \equiv 0 \pmod{2} .$$

Cuando  $k$  es impar, las soluciones coinciden con las parametrizaciones realizadas, pues,  $T_k = 6n_k - 1 \equiv -1 \equiv 5 \pmod{6}$ . Tenemos entonces la Tabla 2.5 con los diez primeros cuadrados pentagonales.

**Tabla 2.5.** Primeros diez números cuadrados pentagonales.

$n$	$m$	$\diamondsuit_n = \heartsuit_m$
1	1	1
81	99	9801
7921	9701	94109401
776161	950599	903638458801
76055841	93149001	8676736387298001
7452696241	9127651499	83314021887196947001
730288175761	894416697901	799981229484128697805801
71560788528321	87643708742799	7681419682192581869134354401
7012226987599681	8588189040096401	73756990988431941623299373152801
687126683996240401	841554882220704499	708214619789503821274338711878841001

Para más detalles de la obtención de estas respuestas, véase el Apéndice B.

Encontramos cuadrados triangulares y cuadrados pentagonales, ¿existirán números pentagonales triangulares o triangulares pentagonales? Supongamos  $\Delta_n = \diamond_m$ , luego

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{m(3m-1)}{2} \\ n^2 + n &= 3m^2 - m \\ \left[ n^2 + n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] &= 3 \left[ m^2 - \frac{m}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} \right] \\ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} &= 3 \left[ \left( m - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{36} \right] \\ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 &= 3 \left( m - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \\ \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 &= 3 \left( m - \frac{1}{6} \right)^2 + \frac{1}{6} \\ 3(2n+1)^2 &= (6m-1)^2 + 2 \\ (6m-1)^2 - 3(2n+1)^2 &= -2 \end{aligned}$$

Si tenemos  $X = 6m - 1$ ,  $Y = 2n + 1$ , reducimos el problema a solucionar  $X^2 - 3Y^2 = -2$ . Este es un caso particular de la *ecuación generalizada de Pell*

$$x^2 - Dy^2 = k, \quad k \in \mathbb{Z}^* \quad (2.13)$$

Recordemos que  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Si  $(x_1, y_1)$  es una solución de (2.13), siendo también  $(t, u)$  la solución fundamental de (1.5), entonces, por la identidad (1.2) de composición de Brahmagupta, tenemos que  $(x_1t + Dy_1u, x_1u + y_1t)$  también es solución de (2.13). Esta nueva solución de (2.13) se llama *múltiplo de Pell de  $(x_1, y_1)$* . Estas soluciones pertenecen a la misma *clase de soluciones* de (2.13). Una clase de soluciones tiene asociada una *solución fundamental*  $(x_1, y_1)$  de (2.13), con  $y_1$  entero positivo, donde para toda solución  $(x, y)$  de la misma clase,  $y_1 \leq y$ . Puede haber más de una solución fundamental de (2.13). Podemos establecer la recurrencia

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

para  $k \geq 1$ , siendo  $(x_1, y_1)$  la primera solución de (2.13) con la que partimos. Con (2.14), podemos generar infinitas soluciones de (2.13) *asociadas* con  $(x_1, y_1)$ .

Resolvamos entonces  $X^2 - 3Y^2 = -2$ , que tiene una solución evidente  $(1, 1)$ . Pero esta no nos proporciona valores enteros para  $m, n$ . Ya sabemos que la solución fundamental de (1.5) con  $D = 3$  es  $(2, 1)$ , esta nos permite obtener todas las soluciones de  $X^2 - 3Y^2 = -2$  asociadas a  $(1, 1)$ . Estudiando la recurrencia para estos valores con ecuaciones modulares, tal como lo hicimos para los cuadrados pentagonales, encontramos

$$x_k \equiv \begin{cases} 1 \pmod{6}, & k \text{ impar} \\ 5 \pmod{6}, & k \text{ par} \end{cases} \wedge y_k \equiv 1 \pmod{2} .$$

Entonces las soluciones con  $k$  par nos devolverán valores enteros  $(m, n)$ . Calculemos la solución asociada a  $(1, 1)$  con  $k = 2$ :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(2)-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

que retornan los valores  $m = \frac{5+1}{6} = 1, n = \frac{3-1}{2} = 1$ . Número triangular pentagonal que ya conocíamos. El siguiente lo encontramos con  $k = 4$ :

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 71 \\ 41 \end{pmatrix} ,$$

por lo que  $m = \frac{71+1}{6} = 12, n = \frac{41-1}{2} = 20$ . Respondemos a nuestra pregunta anterior con el pentágono triangular

$$\Delta_{20} = \diamond_{12} = \frac{(20)[(20) + 1]}{2} = \frac{(12)[3(12) - 1]}{2} = 210 .$$

Plasmamos los primeros quince números triangulares pentagonales en la Tabla 2.6.

**Tabla 2.6.** Quince primeros números triangulares pentagonales.

$n$	$m$	$\Delta_n = \diamond_m$
1	1	1
20	12	210



285	165	40755
3976	2296	7906276
55385	31977	1533776805
771420	445380	297544793910
10744501	6203341	57722156241751
149651600	86401392	11197800766105800
2084377905	1203416145	2172315626468283465
29031639076	16761424636	421418033734080886426
404358569165	233456528757	81752926228785223683195
5631988329240	3251629977960	15859646270350599313653420
78443478040201	45289363162681	3076689623521787481625080301
1092576704233580	630799454299572	596861927316956420835951924990
15217630381229925	8785902997031325	115788137209866023854693048367775

Consúltese el Código B.4 del Apéndice B para mayores detalles de los cálculos para la Tabla 2.6.

Encontramos números triangulares cuadrados, cuadrados pentagonales y triangulares pentagonales. ¿Qué hay de los números triangulares cuadrados pentagonales? Buscamos los enteros positivos  $l, m, n$  tales que  $\Delta_l = \diamond_m = \hept_n$ , es decir,

$$\frac{l(l+1)}{2} = m^2 = \frac{n(3n-1)}{2} .$$

Se han buscado soluciones de este sistema chequeando los números pentagonales triangulares hasta cierto límite para ver si alguno también es cuadrado. Aparte de  $\Delta_1 = \diamond_1 = \heptagon_1 = 1$ , empleando este enfoque se encuentra que ninguno de los primeros 9690 números pentagonales son cuadrados, mostrando entonces que no hay ningún otro número triangular cuadrado pentagonal menor a  $10^{22166}$  (Weisstein, 2003). Eric Weinstein (nacido en 1969) es creador y desarrollador del sitio web *MathWorld*, el recurso online de matemáticas más ampliamente accedido en el mundo, siendo también un prolífico comunicador de las matemáticas.

Es casi una certeza, pues, que no exista otra solución, aunque pareciera aún no haber prueba publicada de este hecho. No obstante, un reciente trabajo de Sillcox (2003 & 2006) puede que haya resuelto el problema finalmente. Este trabajo hace uso de una publicación de Anglin (1996) que prueba que el sistema de ecuaciones simultáneas de Pell

$$\begin{cases} x^2 - Ry^2 = 1 \\ z^2 - Sy^2 = 1 \end{cases} ,$$

tiene exactamente 19900 soluciones, donde los valores  $R < S \leq 200$ . Por ejemplo, si  $R = 11$ ,  $S = 56$ , entonces  $(199, 60, 449)$  es una solución. Sillcox luego mostró que el problema de los números triangulares cuadrados pentagonales es equivalente a resolver

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ z^2 - 6y^2 = 1 \end{cases} ,$$

que son precisamente las dos ecuaciones que hemos resuelto para encontrar los números triangulares cuadrados y los números cuadrados pentagonales, respectivamente, esta vez resueltas simultáneamente; poniendo así al problema en las cotas de la prueba de Anglin. Para  $R = 2$ ,  $S = 6$ , solo existe  $(3, 2, 5)$ , que llevan a las soluciones triviales  $l = m = n = 1$ .

Finalizamos esta sección con un ejercicio para el lector. Verifíquese que  $\Delta_{285} = \diamond_{165} = \heptagon_{143} = 40755$ . Pista: empléese (2.7) para obtener una expresión para el  $n$ -ésimo número hexagonal  $\heptagon_n$ .

### 2.3. Números triangulares que difieren en 1 de un cuadrado

De regreso a los números triangulares, busquemos aquellos que difieran en 1 de algún cuadrado, si los hay. Esto es,  $|\Delta_n - m^2| = 1$  donde  $m$  es un entero positivo. Por ejemplo,  $|\Delta_2 - 2^2| = |3 - 2^2| = 1$  y  $|\Delta_4 - 3^2| = |10 - 3^2| = 1$ .

La condición  $|\Delta_n - m^2| = 1$  implica que

$$\begin{aligned}\Delta_n - m^2 &= \pm 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} - m^2 &= \pm 1 \\ n^2 + n - 2m^2 &= \pm 2 \quad .\end{aligned}$$

Multiplicando por 4 y completando cuadrados, obtenemos las ecuaciones de Pell

$$x^2 - 2y^2 = -7 \quad (2.15)$$

o

$$x^2 - 2y^2 = 9 \quad , \quad (2.16)$$

donde  $x = 2n + 1$ ,  $y = 2m$ ; por lo que  $x \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $y \equiv 0 \pmod{2}$ .

Vamos a profundizar en el tratamiento de (2.13) cuando tiene solución. Comprobemos el siguiente resultado.

**Proposición 2.3.** *Dos soluciones  $(x_m, y_m)$ ,  $(x_n, y_n)$  de  $x^2 - Dy^2 = k$ , con  $k \in \mathbb{Z}^*$ , pertenecen a la misma clase si y solo si  $x_m x_n \equiv Dy_m y_n \pmod{|k|}$  y  $x_m y_n \equiv y_m x_n \pmod{|k|}$ .*

*Prueba.* Por (2.14), si dos soluciones están asociadas a una solución fundamental  $(x_1, y_1)$  de (2.13), también están asociadas entre sí. Esto es, si  $m > n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^{m-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^{m-n} \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^{m-n} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad ,$$

donde  $(t, u)$  es la solución fundamental de (1.5). Entonces si  $l = m - n \geq 1$ ,

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}^l \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad (2.17)$$

que equivale a componer  $l$  veces  $x_n^2 - Dy_n^2 = k$  con  $t^2 - Du^2 = 1$ . Es decir,

$$(x_n^2 - Dy_n^2)(t^2 - Du^2)^l = (x_n T_l - Dy_n U_l)^2 - D(y_n T_l - x_n U_l)^2 \quad , \quad (2.18)$$

donde

$$T_l^2 - DU_l^2 = (t^2 - Du^2)^l \quad ,$$

como vimos en la deducción de (1.39) en el primer capítulo. También  $(T_l, U_l)$  es solución de la ecuación de Pell. Entonces de (2.17) y (2.18), que  $(x_m, y_m)$ ,  $(x_n, y_n)$  estén asociadas equivale a

$$x_m = x_n T_l - Dy_n U_l \quad , \quad y_m = y_n T_l - x_n U_l \quad . \quad (2.19)$$

Calculando

$$\begin{aligned} x_m x_n - Dy_m y_n &= (x_n T_l - Dy_n U_l)x_n - D(y_n T_l - x_n U_l)y_n \\ &= x_n^2 T_l - Dx_n y_n U_l - Dy_n^2 T_l + Dx_n y_n U_l \\ &= T_l(x_n^2 - Dy_n^2) \\ &= T_l k \quad ; \end{aligned}$$

luego,  $x_m x_n \equiv Dy_m y_n \pmod{|k|}$ . De modo similar, concluimos que  $x_m y_n \equiv y_m x_n \pmod{|k|}$ .

Ahora, si  $x_m x_n \equiv Dy_m y_n \pmod{|k|}$  y también  $x_m y_n \equiv y_m x_n \pmod{|k|}$ , tenemos que

$$(x_m^2 - Dy_m^2)(x_n^2 - Dy_n^2) = k^2 = (x_m x_n - Dy_m y_n)^2 - D(x_m y_n - x_n y_m)^2 \quad ,$$

es decir,

$$\left( \frac{x_m x_n - Dy_m y_n}{k} \right)^2 - D \left( \frac{x_m y_n - x_n y_m}{k} \right)^2 = 1 \quad .$$

Los números entre paréntesis en esta última expresión solucionan la ecuación de Pell, son enteros en virtud de la hipótesis. Por tanto, hagamos

$$T_l = \frac{x_m x_n - Dy_m y_n}{k} \quad , \quad U_l = \frac{x_m y_n - x_n y_m}{k} \quad ;$$

y evaluemos

$$\begin{aligned}
x_n T_l - D y_n U_l &= x_n \left( \frac{x_m x_n - D y_m y_n}{k} \right) - D y_n \left( \frac{x_m y_n - x_n y_m}{k} \right) \\
&= \frac{x_m x_n^2 - D x_n y_m y_n - D x_m y_n^2 + D x_n y_n y_m}{k} \\
&= \frac{x_m (x_n^2 - D y_n^2)}{k} \\
&= x_m .
\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
y_n T_l - x_n U_l &= y_n \left( \frac{x_m x_n - D y_m y_n}{k} \right) - x_n \left( \frac{x_m y_n - x_n y_m}{k} \right) \\
&= \frac{x_m x_n y_n - D y_m y_n^2 - x_m x_n y_n + x_n^2 y_m}{k} \\
&= \frac{y_m (x_n^2 - D y_n^2)}{k} \\
&= y_m .
\end{aligned}$$

Es decir, se cumple (2.19) que, como ya vimos, equivale a que ambas soluciones están asociadas.  $\square$

Esta proposición junto con el siguiente potente teorema nos auxilia a la hora de resolver (2.13).

**Teorema 2.4.** *Sea  $(t, u)$  la solución fundamental de  $T^2 - DU^2 = 1$  y  $(x_1, y_1)$  una solución fundamental de  $x^2 - Dy^2 = k$ , donde  $k \neq 0$ . Entonces*

- (i)  $0 < |x_1| \leq \sqrt{\frac{k(t+1)}{2}} \wedge 0 \leq y_1 \leq u \sqrt{\frac{k}{2(t+1)}}$ , si  $k > 0$ ;
- (ii)  $0 \leq |x_1| \leq \sqrt{\frac{|k|(t-1)}{2}} \wedge 0 < y_1 \leq u \sqrt{\frac{|k|}{2(t-1)}}$ , de otro modo.

*Prueba.* Ya que  $(-x_1, y_1)$  también es solución de (2.13), podemos suponer que  $x_1$  es positivo. Haciendo  $l = n = 1$ , en (2.18)

$$(x_1^2 - D y_1^2)(t^2 - D u^2) = (x_1 t - D y_1 u)^2 - D(y_1 t - x_1 u)^2, \quad (2.20)$$

tenemos una solución asociada a la solución fundamental  $(x_1, y_1)$ . Por definición de la solución fundamental,

$$x_1 \leq x_1 t - D y_1 u, \quad ,$$

con  $x_1 > 0$ .

Tenemos entonces que

$$x_1^2(t-1)^2 \geq D^2y_1^2u^2 = (x_1^2 - k)(t^2 - 1) \quad , \quad (2.21)$$

como se puede apreciar al despejar  $Dy_1^2$ ,  $Du^2$  de las respectivas ecuaciones de Pell.

De (2.21),

$$\frac{t-1}{t+1} \geq 1 - \frac{k}{x_1^2} \quad ,$$

y finalmente

$$x_1^2 \leq \frac{k(t+1)}{2} \quad . \quad (2.22)$$

Esto prueba la primera desigualdad de (i). Ahora sumemos  $Dy_1^2$  a ambos miembros de (2.22),

$$\begin{aligned} x_1^2 + Dy_1^2 &\leq \frac{k(t+1)}{2} + Dy_1^2 \\ x_1^2 + Dy_1^2 &\leq \frac{k(t+1)}{2} + (x_1^2 - k) \\ Dy_1^2 &\leq \frac{k(t+1) - 2k}{2} \\ Dy_1^2 &\leq \frac{k(t-1)}{2} \cdot \frac{t+1}{t+1} \\ Dy_1^2 &\leq \frac{k(t^2-1)}{2(t+1)} \\ Dy_1^2 &\leq \frac{kDu^2}{2(t+1)} \\ y_1 &\leq u \sqrt{\frac{k}{2(t+1)}} \quad . \end{aligned}$$

Puede  $y_1$  ser nulo como caso especial (cuando  $k$  es un cuadrado). Además, por definición de la solución fundamental, de todas las segundas componentes de las soluciones de la misma clase,  $y_1$  es el menor positivo. Demostrando así la segunda desigualdad de (i).

Ahora toquemos el caso  $k < 0$ . Esta vez, además de poder suponer que  $x_1$  es positivo, cuando  $-Dy_1^2 = k$ ,  $x_1 = 0$ . Por tanto,  $x_1 \geq 0$ . Por (2.20); además, por la definición de solución fundamental, se tiene:

$$y_1 t - x_1 u \geq y_1 > 0 \quad ,$$

que, de manera similar al caso anterior, lleva a

$$Dy_1^2(t-1)^2 \geq Du^2x_1^2 \quad ,$$

multiplicando por  $D$ . Sustituyendo  $Dy_1^2$ ,  $Du^2$

$$\begin{aligned} (x_1^2 - k)(t-1)^2 &\geq (t^2 - 1)x_1^2 \\ 1 - \frac{k}{x_1^2} &\geq \frac{t+1}{t-1} \\ -\frac{2}{t-1} &\geq \frac{k}{x_1^2} \\ -\frac{k(t-1)}{2} &\geq x_1^2 \\ \frac{|k|(t-1)}{2} &\geq x_1^2 \quad . \end{aligned}$$

Esto demuestra la primera desigualdad de (ii). Ahora, si sumamos  $Dy_1^2$  a ambos miembros de esta última desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{|k|(t-1)}{2} + (x_1^2 - k) &\geq x_1^2 + Dy_1^2 \\ \frac{|k|(t-1)}{2} + |k| &\geq Dy_1^2 \\ \frac{|k|(t+1)}{2} \cdot \frac{t-1}{t-1} &\geq Dy_1^2 \\ \frac{|k|(t^2-1)}{2(t-1)} &\geq Dy_1^2 \\ \frac{|k|u^2}{2(t-1)} &\geq y_1^2 \quad , \end{aligned}$$

donde  $y_1$  nunca puede ser nulo, pues,  $k < 0$ . □

El Teorema 2.4 nos indica que hay una cantidad finita de soluciones fundamentales para (2.13), consecuentemente habrá un conjunto finito de clases de soluciones que tendrán asociadas, cada una, una solución fundamental de la ecuación generalizada de Pell.

Ya tenemos herramientas para resolver cualquier ecuación generalizada de Pell, incluidas (2.15) y (2.16). Resolvamos la primera. Ya sabemos que la solución fundamental de la ecuación de Pell con  $D = 2$  es  $(t, u) = (3, 2)$ ; esta vez,  $k = -7$ . El Teorema 2.4 nos dice que debemos tener

$$0 \leq |x_1| \leq \sqrt{\frac{|-7|[(3) - 1]}{2}} = \sqrt{7} \quad , \quad 0 < y_1 \leq (2) \sqrt{\frac{|-7|}{2[(3) - 1]}} = \sqrt{7} \quad ,$$

donde  $x_1 \neq 0$ , evidentemente. Esto limita nuestra búsqueda de soluciones fundamentales a ocho pares  $(\pm 2, 1)$ ,  $(\pm 1, 1)$ ,  $(\pm 2, 2)$ ,  $(\pm 1, 2)$ , de los cuales solo son soluciones  $(\pm 1, 2)$ . Evaluando las congruencias de la Proposición 2.3,

$$(+1)(-1) \not\equiv (2)(2)(2) \pmod{|-7|} \quad ,$$

que ya basta para concluir que estas soluciones no están asociadas, es decir, no pertenecen a la misma clase. Pero evaluemos la otra también:

$$(+1)(2) \not\equiv (2)(-1) \pmod{|-7|} \quad .$$

Todas las soluciones  $(x_k, y_k)$  de (2.15) están dadas por las recurrencias

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

con  $k \in \mathbb{Z}$  (donde la potencia  $A^{-k}$  de la matriz invertible  $A$  es  $(A^{-1})^k$ ). Podemos calcular las seis primeras soluciones positivas de cada recurrencia:  $(5, 4)$ ,  $(31, 22)$ ,  $(181, 128)$ ,  $(1055, 746)$ ,  $(6149, 4348)$ ,  $(35839, 25342)$  para la primera. Y  $(1, 2)$ ,  $(11, 8)$ ,  $(65, 46)$ ,  $(379, 268)$ ,  $(2209, 1562)$ ,  $(12875, 9104)$  para la segunda. Fusionando ambas clases, tenemos  $(1, 2)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(11, 8)$ ,  $(31, 22)$ ,  $(65, 46)$ ,  $(181, 128)$ ,  $(379, 268)$ ,  $(1055, 746)$ ,  $(2209, 1562)$ ,  $(6149, 4348)$ ,  $(12875, 9104)$ ,  $(35839, 25342)$  que son las primeras doce soluciones con ambas componentes positivas para (2.15), y se alternan entre las dos clases. Se puede apreciar que estos pares satisfacen los requerimientos de paridad para cada componente que se desprendieron de las parametrizaciones hechas al conseguir (2.15) y (2.16). Con estas soluciones, tenemos los primeros números triangulares iguales a un cuadrado menos 1, y son expuestos en la Tabla 2.7.



**Tabla 2.7.** Primeros once números triangulares menores que un cuadrado en 1.

$n$	$m$	$\diamond_m$	$\Delta_n = \diamond_m - 1$
2	2	4	3
5	4	16	15
15	11	121	120
32	23	529	528
90	64	4096	4095
189	134	17956	17955
527	373	139129	139128
1104	781	609961	609960
3074	2174	4726276	4726275
6437	4552	20720704	20720703
17919	12671	160554241	160554240

De manera similar, con la ecuación (2.16), tenemos

$$0 < |x_1| \leq \sqrt{\frac{(9)[(3) + 1]}{2}} = 3\sqrt{2} \quad , \quad 0 \leq y_1 \leq (2) \sqrt{\frac{(9)}{2[(3) + 1]}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad .$$

Esta vez probamos con los 24 pares  $(\pm 1, 0)$ ,  $(\pm 2, 0)$ ,  $(\pm 3, 0)$ ,  $(\pm 4, 0)$ ,  $(\pm 1, 1)$ ,  $(\pm 2, 1)$ ,  $(\pm 3, 1)$ ,  $(\pm 4, 1)$ ,  $(\pm 1, 2)$ ,  $(\pm 2, 2)$ ,  $(\pm 3, 2)$ ,  $(\pm 4, 2)$ ; de los cuales solo son solución  $(\pm 3, 0)$ . Aplicando las congruencias de la Proposición 2.3,

$$(+3)(-3) \equiv (2)(0)(0) \pmod{9} \quad ,$$

también

$$(+3)(0) \equiv (0)(-3) \pmod{|9|} .$$

Luego, pertenecen a la misma clase. Tenemos todas las soluciones  $(x_k, y_k)$  de (2.16) dadas por las recurrencias

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Las siguientes once soluciones son:  $(9, 6)$ ,  $(51, 36)$ ,  $(297, 210)$ ,  $(1731, 1224)$ ,  $(10089, 7134)$ ,  $(58803, 41580)$ ,  $(342729, 242346)$ ,  $(1997571, 1412496)$ ,  $(11642697, 8232630)$ ,  $(67858611, 47983284)$ ,  $(395508969, 279667074)$ . La primera componente es impar y la segunda, par. Podemos entonces obtener los valores de la Tabla 2.8 que muestra los primeros once números triangulares mayores que algún cuadrado en 1.

**Tabla 2.8.** Primeros once números triangulares mayores que un cuadrado en 1.

$n$	$m$	$\diamond_m$	$\Delta_n = \diamond_m + 1$
4	3	9	10
25	18	324	325
148	105	11025	11026
865	612	374544	374545
5044	3567	12723489	12723490
29401	20790	432224100	432224101
171364	121173	14682895929	14682895930
998785	706248	498786237504	498786237505

5821348	4116315	16944049179225	16944049179226
33929305	23991642	575598885856164	575598885856165
197754484	139833537	19553418069930369	19553418069930370

Como vemos, hay infinitos números triangulares que difieren de algún cuadrado en 1, ya sean mayores o menores a su correspondiente cuadrado.

## 2.4. Sumas de enteros consecutivos

En 1993, Zhang Zaiming del Yuxi Teachers' College, Yuxi, Yunnan, China, propuso el siguiente problema (Zaiming, 1993, p. 271) que muestra que la ecuación de Pell puede aparecer en lugares inesperados.

Encuéntrese todos los pares  $(m, n)$  de enteros positivos tales que

$$1 + 2 + \cdots + m = (m + 1) + (m + 2) + \cdots + n .$$

Un ejemplo de una solución sería el par  $(14, 20)$ , donde al sumar los primeros catorce enteros positivos resulta la suma de hacerlo con los enteros que queden hasta 20, es decir, desde el 15 hasta el 20:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 105 .$$

Para solucionarlo, vemos que podemos aplicar (2.5) al miembro izquierdo directamente. Además, claramente  $m < n$ , y podemos ver también que el miembro derecho tiene  $n - m$  sumandos todos progresivamente mayores que  $m$  en 1, 2, ...,  $n - m$ . Entonces estamos sumando los primeros  $n - m$  enteros positivos, y a cada uno le sumamos  $m$ . Esto es, a la suma de los  $n - m$  primeros enteros positivos, le agregamos  $m$  unas  $n - m$  veces. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} \frac{m(m+1)}{2} &= \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} + (n-m)m \\ m(m+1) &= (n-m)(n-m+1) + 2(n-m)m \\ 2m(m+1) &= n(n+1) \\ 2\left[m^2 + m + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] &= n^2 + n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} &= \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned} ,$$

multiplicando por 4 y reordenando

$$(2n+1)^2 - 2(2m+1)^2 = -1 .$$

Haciendo  $T = 2n + 1$ ,  $U = 2m + 1$ , tenemos (1.38) con  $D = 2$ . Por (2.11),

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (2.23)$$

sabiendo que la solución fundamental de la ecuación negativa de Pell con  $D = 2$  es  $(1, 1)$ . Necesitamos que tanto  $T$  como  $U$  sean impares para conseguir valores enteros de  $m, n$ . Para  $k = 0$ ,  $T_0$  es impar,  $U_0$ , par. Por tanto,

$$T_1 = (1)(T_0) + (2)(U_0) \equiv 1 \pmod{2} ,$$

que implica que todas las  $T_k$  son impares. También

$$U_1 = (1)(T_0) + (1)(U_0) \equiv 1 \pmod{2} ,$$

y

$$U_2 = (1)(T_1) + (1)(U_1) \equiv 0 \pmod{2} ;$$

que quiere decir que los  $U_k$  que son impares son todos aquellos con  $k$  impar. De hecho, aquellos  $(T_k, U_k)$  con  $k$  par son soluciones de (1.5), no de (1.38). Por tanto, las soluciones de la ecuación negativa de Pell con  $D = 2$  conseguidas con (2.23) arrojarán valores enteros positivos de  $m, n$ .

Estas son las soluciones que nos interesan. Con  $k = 1$ , tenemos la solución fundamental que nos remite a  $m = n = 0$ . La Tabla 2.9 muestra los primeros veinte pares que solucionan el problema que, como ya habrá inferido el lector, son infinitos.

**Tabla 2.9.** Veinte primeros  $(m, n)$  de enteros positivos tales que  $\sum_{i=1}^m i = \sum_{i=m+1}^n i$ .

$n$	$m$	$\sum_{i=1}^m i = \sum_{i=m+1}^n i$
3	2	3
20	14	105
119	84	3570
696	492	121278
4059	2870	4119885
23660	16730	139954815
137903	97512	4754343828
803760	568344	161507735340
4684659	3312554	5486508657735
27304196	19306982	186379786627653
159140519	112529340	6331426236682470
927538920	655869060	215082112260576330
5406093003	3822685022	7306460390622912753
31509019100	22280241074	248204571168918457275
183648021599	129858761424	8431648959352604634600

1070379110496	756872327472	286427860046819639119128
6238626641379	4411375203410	9730115592632515125415755
36361380737780	25711378892990	330537502289458694625016545
211929657785303	149856898154532	11228544962248963102125146778
1235216565974040	873430010034204	381439991214175286777629973910

Véase el Código B.5 del Apéndice B para más detalles de estos cálculos.

## 2.5. Sumas de $n$ y $n + 1$ cuadrados consecutivos

Ahora veamos el problema de encontrar cierta cantidad  $n$  de enteros consecutivos cuyos cuadrados sumados totalicen la suma de  $n + 1$  cuadrados de enteros consecutivos. Esto es, soluciones para la ecuación diofántica

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \cdots + (x + n - 1)^2 = y^2 + (y + 1)^2 + (y + 2)^2 + \cdots + (y + n)^2 ,$$

donde  $x, y$  son cualesquiera enteros.  $13^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$  es un ejemplo.

Escribamos  $z = x - y$  para luego reordenar y desarrollar el miembro izquierdo (MI):

$$\begin{aligned} \text{MI} &= x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + \cdots + (x + n - 1)^2 \\ &= (y + z)^2 + (y + z + 1)^2 + (y + z + 2)^2 + \cdots + (y + z + n - 1)^2 \\ &= [(y) + z]^2 + [(y + 1) + z]^2 + [(y + 2) + z]^2 + \cdots + [(y + n - 1) + z]^2 \\ &= y^2 + 2yz + z^2 + (y + 1)^2 + 2(y + 1)z + z^2 + \cdots + (y + n - 1)^2 + 2(y + n - 1)z + z^2 \\ &= y^2 + (y + 1)^2 + (y + 2)^2 + \cdots + (y + n - 1)^2 + 2z[y + (y + 1) + \cdots + (y + n - 1)] + nz^2 , \end{aligned}$$

donde notamos que los primeros  $n$  términos de esta última línea están también en el miembro derecho. Por tanto, la ecuación diofántica del problema se reduce a

$$2z[y + (y + 1) + (y + 2) + \dots + (y + n - 1)] + nz^2 = (y + n)^2$$

$$2z \left[ ny + \frac{n(n-1)}{2} \right] + nz^2 = (y + n)^2 ,$$

por (2.5). Entonces, distribuyendo  $2z$  dentro del corchete y desarrollando el cuadrado,

$$2nyz + n^2z - nz + nz^2 = y^2 + 2ny + n^2$$

$$n^2(z - 1) + nz(z - 1) = y^2 + 2ny(1 - z) ,$$

completando el cuadrado en el miembro derecho

$$n^2(z - 1) + nz(z - 1) + n^2(1 - z)^2 = y^2 + 2ny(1 - z) + n^2(1 - z)^2$$

$$n(z - 1)(n + z + nz - n) = [y + n(1 - z)]^2$$

$$n(n + 1)z(z - 1) = [y + n(1 - z)]^2 .$$

Como vimos en la Sección 2.2, hay números cuadrados triangulares. Por tanto, sea  $n(n + 1) = a^2b$ , con  $b$  siendo libre de cuadrados (para  $b = 2$ , vimos que hay infinitas soluciones). Un número *libre de cuadrados* no es divisible por un cuadrado perfecto distinto de 1. Entonces  $a^2b \mid [y + n(1 - z)]^2$ , así que, como  $b$  es libre de cuadrados,  $ab \mid [y + n(1 - z)]$ . Viendo esto último más en detalle: si  $a^2b \mid M^2$  con  $b$  libre de cuadrados y  $M = y + n(1 - z)$ , entonces tenemos

$$M^2 = a^2bk ,$$

para algún entero  $k$ . Así,

$$M = a\sqrt{bk} .$$

Y debido a que  $M$  es entero,  $\sqrt{bk}$  es también un entero. Pero como  $b$  es libre de cuadrados,  $\sqrt{b}$  es irracional. Esto quiere decir que debemos tener  $k = bw^2$ , para algún entero  $w$ . Por tanto,

$$M = abw .$$

Luego,  $ab \mid M$ . Escribimos, pues,

$$y + n(1 - z) = abw , \tag{2.24}$$

$w \in \mathbb{Z}$ . Continuamos con

$$\begin{aligned} n(n+1)z(z-1) &= [y+n(1-z)]^2 \\ a^2bz(z-1) &= a^2b^2w^2 \\ z^2 - z + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= bw^2 + \frac{1}{4} \\ \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 &= bw^2 + \frac{1}{4} \\ (2z-1)^2 - 4bw^2 &= 1 \end{aligned} ,$$

que no es más que la ecuación de Pell con  $D = 4b$ , velando que las soluciones tengan primera componente impar. Entonces reducimos el problema a solucionar  $v^2 - 4bw^2 = 1$ , donde  $v = 2z - 1$ , además de  $4b$  no cuadrado perfecto.

Una vez encontradas  $v, w$  para una  $b$  dada libre de cuadrados, encontramos  $z$ , que con la parametrización  $z = x - y$ , y con (2.24), resolvemos el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{cases} x - y = \frac{v+1}{2} \\ -nx + (n+1)y = abw - n \end{cases} ,$$

obteniendo

$$\begin{cases} x = \frac{(n+1)v - (n-1)}{2} + abw \\ y = n\frac{v-1}{2} + abw \end{cases} . \tag{2.25}$$

Hemos demostrado entonces el siguiente teorema.

**Teorema 2.5. (Alder & Simons, 1967).** *Escribiendo  $n(n+1) = a^2b$  con  $b$  libre de cuadrados, resolver*

$$\underbrace{x^2 + (x+1)^2 + \dots + (x+n-1)^2}_{n \text{ cuadrados}} = \underbrace{y^2 + (y+1)^2 + \dots + (y+n)^2}_{n+1 \text{ cuadrados}} \tag{2.26}$$

*es lo mismo que resolver*

$$v^2 - 4bw^2 = 1 \quad , \tag{2.27}$$

con



$$x = \frac{(n + 1)v - (n - 1)}{2} + abw \quad , \quad y = n \frac{v - 1}{2} + abw \quad . \quad \square$$

Si  $v = 2n + 1$ ,  $w = a$ , entonces  $x = 2n^2 + 2n + 1$ ,  $y = 2n^2 + n$ :  $5^2 = 3^2 + 4^2$ ,  $13^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ ,  $25^2 + 26^2 + 27^2 = 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030$ ,  $41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2 = 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 7230$ , ..., así sucesivamente para  $n \geq 1$ .

Notamos que hay infinitas soluciones para el problema. De hecho, para cada número cuadrado triangular hay infinitas soluciones, y como ya mencionamos, en estos casos  $b = 2$ .

Tomemos, por ejemplo, el segundo cuadrado triangular de la Tabla 2.4: con 36 tenemos  $n(n + 1) = 6^2 \cdot 2$ , como vimos  $n = 8$ . Esto convierte a (2.27) en la ecuación  $v^2 - 8w^2 = 1$ , es decir, (1.5) con  $D = 8$ . Sabemos que  $\sqrt{8} = [2; \overline{1, 4}]$ , dando la solución fundamental (3, 1). Tenemos todas las soluciones con (2.11), y con un estudio con ecuaciones modulares (mod 2), concluimos que todas las soluciones para  $v$  son impares. Por tanto, toda solución de la ecuación de Pell con  $D = 8$  proporciona soluciones  $(x, y)$  para (2.26) a través de (2.25). Para ilustrar este proceso, encontremos  $(x, y)$  que se desprende de la solución fundamental (3, 1). Como vimos, están fijos  $a = 6$ ,  $b = 2$ ,  $n = 8$ ; con la solución fundamental  $v = 3$ ,  $w = 1$ . Por (2.25), tenemos

$$\begin{cases} x = \frac{(n + 1)v - (n - 1)}{2} + abw = \frac{[(8) + 1](3) - [(8) - 1]}{2} + (6)(2)(1) = 22 \\ y = n \frac{v - 1}{2} + abw = (8) \frac{(3) - 1}{2} + (6)(2)(1) = 20 \end{cases} .$$

Resultando en la suma de  $n = 8$  cuadrados consecutivos igual a la de otros  $n + 1 = 9$  cuadrados consecutivos

$$\begin{aligned} 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 + 29^2 &= 5244 \\ 20^2 + 21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 + 25^2 + 26^2 + 27^2 + 28^2 &= 5244 \quad . \end{aligned}$$

Del mismo modo, la siguiente solución  $(17)^2 - 8(6)^2 = 1$  proporciona las sumas

$$\begin{aligned} 145^2 + 146^2 + 147^2 + 148^2 + 149^2 + 150^2 + 151^2 + 152^2 &= 176460 \\ 136^2 + 137^2 + 138^2 + 139^2 + 140^2 + 141^2 + 142^2 + 143^2 + 144^2 &= 176460 \quad . \end{aligned}$$

La Tabla 2.10 presenta las primeras diez soluciones para los valores de  $n$  de la Tabla 2.4, considerando la solución fundamental  $(v, w) = (3, 1)$ , pues, recordemos que para cada número triangular cuadrado hay infinitas soluciones a (2.26). Como estamos considerando los cuadrados triangulares,  $b = 2$  además de que  $a$  adopta el valor de  $m$ , en la Tabla 2.4, que corresponde al  $n$ -ésimo número triangular igual al  $m$ -ésimo cuadrado.

**Tabla 2.10.** Diez soluciones  $(n, x, y)$  de (2.26) correspondientes a los primeros diez números cuadrados triangulares con la solución fundamental de (1.5) con  $D = 8$ .

$n$	$x$	$y$	$\sum_{i=0}^{n-1} (x + i)^2 = \sum_{i=0}^n (y + i)^2$
1	5	3	25
8	22	20	5244
49	121	119	1040025
288	698	696	205929840
1681	4061	4059	40773127361
9800	23662	23660	8072873631900
57121	137905	137903	1598388207995345
332928	803762	803760	316472792321141184
1940449	4684661	4684659	62660014491446121225
11309768	27304198	27304196	12406366396514408139420

La diferencia constante  $x - y = 2$ , se debe sencillamente a que nos limitamos a emplear la solución fundamental en la que  $v = 3$ , por lo que de la primera ecuación del sistema lineal que nos llevó a (2.25) resulta

$$x - y = \frac{v + 1}{2} = \frac{(3) + 1}{2} = 2 \quad .$$

El Código B.6 del Apéndice B muestra el programa escrito para obtener los números de la Tabla 2.10.

Surge la curiosidad sobre otros valores para  $b$  distintos del 2. ¿Funcionará cualquier  $b$  libre de cuadrados? Buscamos  $n, a$  con

$$\begin{aligned} n(n + 1) &= a^2b \\ n^2 + n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= a^2b + \frac{1}{4} \\ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - a^2b &= \frac{1}{4} \\ (2n + 1)^2 - 4a^2b &= 1 \quad , \end{aligned}$$

es decir, una ecuación similar a (2.27). Es la ecuación de Pell con  $D = 4b$ , con la exigencia de que tenga alguna solución cuya primera componente sea impar. Por (2.11), no es difícil notar que si  $2 \mid t$  en la solución fundamental  $(t, u)$  de (1.5) con  $D = 4b$ , entonces todas las  $T_k$  serán pares. Por tanto, funcionan aquellas  $b$  en las que  $t$  sea impar, que son todos los valores no cuadrados de  $b$ , pues, si existiera alguna solución  $(T_k, U_k)$  con  $T_k = 2c, c \in \mathbb{Z}$ , tendríamos

$$\begin{aligned} (2c)^2 - 4a^2b &= 1 \\ 4(c^2 - a^2b) &= 1 \quad , \end{aligned}$$

lo que es imposible.

Esto quiere decir que cada solución de (2.27) tendrá infinitas soluciones para (2.26). Y ya sabemos que (2.27) tiene infinitas soluciones.

Aclaremos esto último con un ejemplo. Si  $b = 3$ , entonces  $D = 4(3) = 12$ , con solución fundamental  $(7)^2 - 12(2)^2 = 1$ . Esto quiere decir que  $2n + 1 = 7$ , o sea,  $n = 3$ . También que  $a = 2$ , empleando  $n(n + 1) = a^2b$ . Tomando la misma solución fundamental para asignarla a  $(v, w) = (7, 2)$ , tenemos

$$\begin{cases} x = \frac{(n + 1)v - (n - 1)}{2} + abw = \frac{[(3) + 1](7) - [(3) - 1]}{2} + (2)(3)(2) = 25 \\ y = n\frac{v - 1}{2} + abw = (3)\frac{(7) - 1}{2} + (2)(3)(2) = 21 \end{cases} ,$$

por (2.25), resultando una de las sumas que ya presentamos luego del Teorema 2.5 cuando  $w = a$ . Pero además podemos tomar la siguiente solución  $(v, w) = (97, 28)$ ,

$$\begin{cases} x = \frac{(n+1)v - (n-1)}{2} + abw = \frac{[(3)+1](97) - [(3)-1]}{2} + (2)(3)(28) = 361 \\ y = n\frac{v-1}{2} + abw = (3)\frac{(97)-1}{2} + (2)(3)(28) = 312 \end{cases},$$

que nos arrojan las sumas

$$\begin{aligned} 361^2 + 362^2 + 363^2 &= 393134 \\ 312^2 + 313^2 + 314^2 + 315^2 &= 393134 \end{aligned} .$$

Con el mismo  $b = 3$ , con otra solución para  $D = 12$ , digamos la siguiente,  $(97)^2 - 12(28)^2 = 1$ , tenemos  $2n + 1 = 97$ , entonces  $n = 48$ . También,  $a = 28$ . Ahora hagamos  $(v, w) = (7, 2)$  de nuevo. Entonces

$$\begin{cases} x = \frac{(n+1)v - (n-1)}{2} + abw = \frac{[(48)+1](7) - [(48)-1]}{2} + (28)(3)(2) = 316 \\ y = n\frac{v-1}{2} + abw = (48)\frac{(7)-1}{2} + (28)(3)(2) = 312 \end{cases},$$

Lo que nos da

$$\begin{aligned} 316^2 + 317^2 + \dots + 362^2 + 363^2 &= 5541704 \\ 312^2 + 313^2 + \dots + 359^2 + 360^2 &= 5541704 \end{aligned} .$$

Pero si hacemos  $(v, w) = (97, 28)$ , obtenemos  $(x, y) = (4705, 4656)$ , donde las sumas respectivas totalizan 1073227400.

Para  $b = 5$ , plasmamos las primeras 25 soluciones  $(n, x, y)$  de (2.26) en la Tabla 2.11.

**Tabla 2.11.** Veinticinco soluciones  $(n, x, y)$  de (2.26) dado  $b = 5$ .

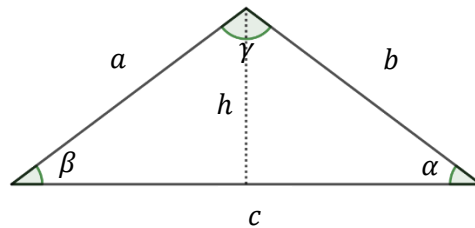
$(v, w)$  $(2n + 1, a)$	$(9, 2)$	$(161, 36)$	$(2889, 646)$	$(51841, 11592)$	$(930249, 208010)$
$(9, 2)$	$(4, 41, 36)$	$(4, 761, 680)$	$(4, 13681, 12236)$	$(4, 245521, 219600)$	$(4, 4405721, 3940596)$
$(161, 36)$	$(80, 685, 680)$	$(80, 12961, 12880)$	$(80, 233245, 231800)$	$(80, 4186081, 4160160)$	$(80, 75116845, 74651720)$
$(2889, 646)$	$(1444, 12241, 12236)$	$(1444, 231881, 231800)$	$(1444, 4173161, 4171716)$	$(1444, 74896561, 74870640)$	$(1444, 1343976481, 1343511356)$
$(51841, 11592)$	$(25920, 219605, 219600)$	$(25920, 4160241, 4160160)$	$(25920, 74872085, 74870640)$	$(25920, 1343744641, 1343718720)$	$(25920, 24112738805, 24112273680)$
$(930249, 208010)$	$(465124, 3940601, 3940596)$	$(465124, 74651801, 74651720)$	$(465124, 1343512801, 1343511356)$	$(465124, 24112299601, 24112273680)$	$(465124, 432681601001, 432681135876)$

Véase el Código B.6 del Apéndice B para más detalles de los cálculos para la Tabla 2.11.

Para curiosidad del lector, las sumas de la última solución presentada son ambas iguales a 87077524111754398705745220750.

## 2.6. Triángulos heronianos con lados consecutivos

Un *triángulo heroniano*, o *triángulo aritmético*, es un triángulo cuyos lados y área son todos racionales. Así, sus alturas también son racionales. Debido a esto, algunos matemáticos también lo llaman *triángulo racional*. Cuando sus lados son enteros, algunos autores le dicen *triángulo entero*. Dado un triángulo heroniano como el de la Figura 2.7 con las longitudes de sus lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , con ángulos opuestos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , respectivamente. La altura que se muestra en la figura es  $h$ , el *semi perímetro*  $\sigma$  del triángulo está dado por  $(a + b + c)/2$ .



**Figura 2.7.** Triángulo heroniano.

Entonces su área  $H$  es

$$H = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb \operatorname{sen} \alpha \quad ,$$

elevamos al cuadrado y empleamos la identidad trigonométrica pitagórica

$$H^2 = \frac{1}{4}(bc)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{4}{16}(bc)^2(1 - \cos^2 \alpha) \quad .$$

Distribuyendo y factorizando

$$H^2 = \frac{1}{16}[4(bc)^2 - 4(bc)^2 \cos^2 \alpha] = \frac{1}{16}(2bc + 2bc \cos \alpha)(2bc - 2bc \cos \alpha) \quad .$$

Por la ley de cosenos  $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$ , tenemos

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{16} [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)][2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] \\ &= \frac{1}{16} [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c) \frac{1}{2}(b + c - a) \frac{1}{2}(a + b - c) \frac{1}{2}(a - b + c) \quad . \end{aligned}$$

Por la definición del semi perímetro, llegamos a

$$H^2 = \sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c) \quad , \quad (2.28)$$

esto es

$$H = \sqrt{\sigma(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)} \quad ,$$

la fórmula de Herón para el área de un triángulo dadas las longitudes de sus tres lados (cualesquiera números reales positivos). Su descubrimiento se atribuye al matemático griego Herón de Alejandría que vivió en el siglo I NE.

El problema es encontrar algún triángulo heroniano entero de área entera con lados consecutivos:  $a - 1, a, a + 1$ . Entonces  $\sigma = 3a/2$ , y de (2.28),

$$H^2 = \sigma(\sigma - a)(\sigma - a + 1)(\sigma - a - 1) = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a + 2}{2} \cdot \frac{a - 2}{2} \quad .$$

Resulta entonces que

$$(4H)^2 = 3a^2(a^2 - 4) \quad .$$

De esta última, vemos que  $a$  no puede ser impar puesto que, de serlo, el miembro derecho sería impar mientras que el izquierdo es par, lo que nos lleva a una contradicción. Por consiguiente, pongamos  $a = 2T, T \in \mathbb{Z}$ ; así que

$$H^2 = 3T^2(T^2 - 1) \quad . \quad (2.29)$$

Debido a que el área  $H$  del triángulo es un entero positivo, debemos tener

$$T^2 - 1 = 3U^2 \quad , \quad (2.30)$$

con  $U$  entero. Es decir,

$$T^2 - 3U^2 = 1 \quad , \quad (2.31)$$

la ecuación positiva de Pell con  $D = 3$  cuyas primeras diez soluciones no triviales se presentan en la Tabla 1.2.

Tomando las soluciones para  $T$  en (2.31), que es la primera componente de la solución, y duplicándola tenemos  $a$ ; luego, los lados consecutivos del triángulo heroniano. Conseguimos su área de inmediato observando (2.30) en (2.29), resultando  $H = 3TU$ .

Si tomamos la solución (2,1) fundamental de (2.31), encontramos  $a = 4$  y  $H = 6$ . Los otros dos lados del triángulo son 3 y 5, es decir, nuestro triángulo pitagórico con los tres lados consecutivos.

La Tabla 2.12 presenta los primeros diez triángulos heronianos con sus tres lados consecutivos.

**Tabla 2.12.** Diez primeros triángulos heronianos con sus tres lados consecutivos.

$(T, U)$	$a$	$H$
(2, 1)	4	6
(7, 4)	14	84
(26, 15)	52	1170
(97, 56)	194	16296
(362, 209)	724	226974
(1351, 780)	2742	3161340
(5042, 2911)	10084	44031786



(18817, 10864)	37634	613283664
(70226, 40545)	140452	8541939510
(262087, 151316)	524174	118973869476

### 2.7. Ecuaciones diofánticas dobles

Gracias a Diofanto tenemos un problema que quizá sea uno de los que despertó el interés de Fermat en la ecuación que es tema central de esta tesis. Se trata de resolver las ecuaciones diofánticas para el entero  $t$  tal que  $10t + 9 = x^2$ ,  $5t + 4 = y^2$ . Combinando ambas ecuaciones, tenemos

$$t = \frac{x^2 - 9}{10} = \frac{y^2 - 4}{5} \quad , \quad (2.32)$$

que se reducen a

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad . \quad (2.33)$$

Tenemos una vez más la ecuación de Pell con  $D = 2$ . Sólo nos interesan las soluciones enteras para  $t$ ; por tanto, empleamos las soluciones  $(x, y)$  tales que  $x^2 \equiv 9 \pmod{10}$ ,  $y^2 \equiv 4 \pmod{5}$ . Estas congruencias nos permiten evaluar si hay soluciones válidas que proporcionen valores enteros para  $t$ . En este caso es sencillo, claramente son las soluciones en las que simultáneamente  $x \equiv 3, 7 \pmod{10}$ ,  $y \equiv 2, 3 \pmod{5}$ . Esto nos da cuatro posibles casos en los que las soluciones son válidas.

Podemos hacer un tratamiento modular de las soluciones de (2.33) con el auxilio de (2.11) del Corolario 2.2. En este caso, con la solución fundamental  $(3, 2)$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

donde si  $k = 1$  proporciona la solución trivial  $t = 0$ . Calculando  $x_2 = 3x_1 + 4y_1 \equiv 3x_1 + 2(2y_1) \equiv 3(3) + 2[2(2)] \equiv 17 \equiv 7 \pmod{10}$ . También tenemos  $2y_2 = 4x_1 + 3(2y_1) \equiv 4(3) + 3[2(2)] \equiv 24 \equiv 4 \pmod{10}$ . Multiplicamos por 2 la congruencia módulo 5 para hacerla módulo 10 con el fin de facilitar los cálculos, así que tenemos que fijarnos que  $2y \equiv 4, 6 \pmod{10}$ . Aquí, con  $k = 2$ , ya tenemos un caso válido.

Para  $k = 3$ ,  $x_3 \equiv 3(7) + 2(4) \equiv 9 \pmod{10}$ ,  $2y_3 \equiv 4(7) + 3(4) \equiv 0 \pmod{10}$ . Con  $k = 4$ ,  $x_4 \equiv 3(9) + 2(0) \equiv 7 \pmod{10}$ ,  $2y_4 \equiv 4(9) + 3(0) \equiv 6 \pmod{10}$ . Surge aquí otro caso donde hay solución.  $k = 5$  da  $x_5 \equiv 3(7) + 2(6) \equiv 3 \pmod{10}$ ,  $2y_5 \equiv 4(7) + 3(6) \equiv 6 \pmod{10}$  que es el último caso posible. Buscando el siguiente, lo vemos aparecer cuando  $k = 7$ , donde  $x_7 \equiv 3 \wedge 2y_7 \equiv 4 \pmod{10}$ . Al calcular  $y_7 = 80782$ , vemos entonces que el caso donde  $(x_k, y_k) \equiv (3, 2) \pmod{10}$  vuelve a aparecer cuando  $k = 7$ . Cumpliendo un ciclo con periodo 6. Afirmamos entonces que existen soluciones siempre que  $k$  no sea congruente con 0 o 3 módulo 6.

Una vez tenemos las soluciones de (2.33) que cumplan con esta condición para  $k$ , podemos calcular  $t$  con (2.32).

Ilustremos esto con  $k = 2$ , donde  $(x_2, y_2) = (17, 12)$ . Entonces

$$t_2 = \frac{x_2^2 - 9}{10} = \frac{(17)^2 - 9}{10} = 28 \quad ,$$

o bien

$$t_2 = \frac{y_2^2 - 4}{5} = \frac{(12)^2 - 4}{5} = 28 \quad .$$

Se presentan las primeras ocho soluciones para el problema de Diofanto en la Tabla 2.13.

**Tabla 2.13.** Ocho primeras soluciones enteras  $t$  para  $10t + 9 = x^2$ ,  $5t + 4 = y^2$ .

$k$	$(x_k, y_k)$	$t_k$
1	(3, 2)	0
2	(17, 12)	28
4	(577, 408)	33292
5	(3363, 2378)	1130976
7	(114243, 80782)	1305146304
8	(665857, 470832)	44336554444
10	(22619537, 15994428)	51164345409436
11	(131836323, 93222358)	1738081606216032

No podemos evitar preguntarnos qué características deben tener los enteros  $a, b, c, d$  tales que encontrar el entero  $t$  con  $at + b = x^2$ ,  $ct + d = y^2$  se reduzca a solucionar alguna ecuación de Pell. De forma similar,

$$t = \frac{x^2 - b}{a} = \frac{y^2 - d}{c} \quad , \quad (2.34)$$

que nos lleva a

$$cx^2 - ay^2 = bc - ad \quad . \quad (2.35)$$

Si hacemos  $a/c = D$  un entero positivo no cuadrado perfecto además de  $k = b - Dd \neq 0$ , (2.35) se transforma en (2.13) siempre que  $ac \neq 0$ . Con las soluciones de la ecuación generalizada de Pell dados  $D, k$ , empleamos (2.34) para encontrar  $t$  siempre que  $x^2 \equiv b \pmod{a}$ ,  $y^2 \equiv d \pmod{c}$ .

Por ejemplo, si  $a = 21$ ,  $b = 15$ ,  $c = 3$ ,  $d = 1$ , entonces  $D = a/c = 21/3 = 7$ . También  $k = b - Dd = 15 - (7)(1) = 8$ . Tenemos entonces

$$x^2 - 7y^2 = 8 \quad . \quad (2.36)$$

Como  $\sqrt{7} = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]$ , la solución fundamental de  $x^2 - 7y^2 = 1$  es  $(8, 3)$ . Ya que  $k > 0$ , por (i) del Teorema 2.4, tenemos que las cotas para las soluciones fundamentales  $(x_1, y_1)$  de (2.36) son

$$0 < |x_1| \leq \sqrt{\frac{(8)[(8) + 1]}{2}} = 6 \quad , \quad 0 \leq y_1 \leq (3) \sqrt{\frac{(8)}{2[(8) + 1]}} = 2 \quad .$$

Evaluando los 36 pares, se encuentra que solo son soluciones  $(\pm 6, 2)$ . Sometiéndolas a las congruencias de la Proposición 2.3

$$(-6)(+6) \equiv (7)(2)(2) \pmod{|8|} \quad ,$$

y

$$(-6)(2) \equiv (2)(6) \pmod{|8|} \quad ;$$

se concluye que ambas están asociadas. Podemos tomar  $(x_1, y_1) = (6, 2)$  como solución fundamental de (2.36). Con esta, se obtiene la solución  $t_1 = 1$  aplicando (2.34).

Ahora, lo siguiente es preguntarse si 15 es residuo cuadrático módulo 21, y si 1 es residuo cuadrático módulo 3. Esto abre los casos en los que se deben cumplir las congruencias  $x \equiv 6, 15 \pmod{21}$ ,  $y \equiv 1, 2 \pmod{3}$ . Con (2.14) podemos establecer

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

para todas las soluciones de (2.36). Se omitirá el estudio modular de estas recurrencias que nos ayuda a saber específicamente cuáles  $n$  proporcionan soluciones  $(x_n, y_n)$  que llevan a un valor entero para  $t_n$ . Al tomar  $n = 2$ , encontramos  $(x_2, y_2) = (90, 34)$  que da  $t_2 = 385$ . También  $(x_3, y_3) = (1434, 542)$  resultando  $t_3 = 97921$ . Podemos comprobar que solo se cumplen los casos en los que  $x \equiv 6 \pmod{21}$  cuando  $x$  es positivo, y hay soluciones enteras de  $t_n$  para todo  $n$  entero. Al tomar los opuestos de  $x$  en estas soluciones,

tenemos los casos en los que  $x \equiv 15 \pmod{21}$ . Entonces toda solución de (2.36) otorga una solución para  $t$ .

Para finalizar, un ejercicio para el lector: con  $(a, b, c, d) = (21, 15, 3, 1)$ , verificar que  $t_7 = 407554884696961$ .

## 2.8. Aproximaciones racionales a $\sqrt{D}$

En la Sección 1.4, se presentaron recurrencias que solucionan (1.19) relacionada directamente con la ecuación de Pell y su contraparte negativa. Observamos que la razón de los valores de estas recurrencias se aproxima a  $\sqrt{2}$ . Esta propiedad se puede extender para aproximar  $\sqrt{D}$  valiéndonos de las soluciones a su correspondiente ecuación de Pell.

Al despejar  $D$  en (1.5), tenemos

$$D = \frac{T^2}{U^2} - \frac{1}{U^2} ,$$

calculando la raíz cuadrada a ambos miembros

$$\sqrt{D} = \sqrt{\frac{T^2}{U^2} - \frac{1}{U^2}} . \quad (2.37)$$

Siendo  $D$  un entero positivo no cuadrado perfecto,  $\sqrt{D}$  es irracional; es decir, no se puede representar como una razón  $a/b$  de dos enteros  $a$  y  $b \neq 0$ . Este es un hecho bien conocido. En los trabajos de graduación anteriores ya mencionados en el Capítulo I, se demuestra que  $\sqrt{D}$  tiene un desarrollo en fracción continua regular periódica. Y que los numeradores y denominadores de los cocientes reducidos tienen cada uno una recurrencia que los determina. Con estas recurrencias, observamos que a medida que avanzamos calculando las reducidas tanto los numeradores como los denominadores se van haciendo cada vez mayores a los numeradores y denominadores previos, respectivamente. Recordemos que al calcular soluciones no triviales para la ecuación de Pell, efectivamente avanzamos en obtener reducidas correspondientes a posiciones cada vez mayores del desarrollo en fracción continua regular de  $\sqrt{D}$ , de acuerdo al periodo que

tenga el mismo. Por tanto, a medida que buscamos soluciones cada vez mayores para  $U$ , (2.37) nos permite escribir

$$\sqrt{D} \approx \frac{T}{U} . \quad (2.38)$$

Esto significa que las soluciones para (1.5) pueden ser empleadas para formular aproximaciones racionales de  $\sqrt{D}$ . De hecho, todas las reducidas de su desarrollo en fracción continua simple sirven para este fin. Naturalmente, entre más grande sea  $U$ , mejor es la aproximación de (2.38); pues, el término  $1/U^2$  se hace cada vez más despreciable.

Si empezamos con cualquier número irracional  $\xi$  del que tenemos su desarrollo en fracción continua regular, el convergente  $p_k/q_k$  es la “mejor” aproximación a  $\xi$  de todas las fracciones racionales (razón de dos enteros con el denominador no nulo) con denominador  $q_k$  o menor. Este hecho se establece en el siguiente teorema que, por brevedad, nos ahorraremos su demostración, los teoremas previos que aprovecha esta y sus respectivas demostraciones. Para estudiar en mayor detalle este resultado, remitimos al lector a la Sección 7.5 del texto *An Introduction to the Theory of Numbers* de Niven, Zuckerman y Montgomery presentado en las referencias. Este resultado puede ser desarrollado en futuros trabajos que le den seguimiento a este tema con todos sus pormenores.

**Teorema 2.6.** *Si  $a/b$  es un número racional con denominador positivo tal que  $|\xi - a/b| < |\xi - p_k/q_k|$  para algún  $k \geq 1$ , entonces  $b > q_k$ . De hecho, si  $|b\xi - a| < |q_k\xi - p_k|$  para algún  $k \geq 0$ , entonces  $b \geq q_{k+1}$ .  $\square$*

Este teorema nos dice que, si tenemos una fracción que se aproxime más al número irracional deseado de lo que lo hace uno de los convergentes, entonces esto necesariamente tiene que ser con una fracción con un denominador mayor al denominador del convergente con el que comparamos la aproximación. Resultado que toma mucha relevancia cuando buscamos la mayor aproximación (esto es, con la menor diferencia respecto a  $\xi$ ) y tenemos limitaciones para realizar los cálculos, viéndonos obligados a restringirnos a cierta cantidad de dígitos para el denominador. La mejor aproximación racional que obtendremos con esta limitación será la que proporcione el convergente. Cualquiera que disminuya el error, necesitará que excedamos las limitaciones que tenemos en esa situación.

Eventualidad que se presenta comúnmente al realizar cálculos, ya sea manualmente o con ayuda de una computadora.

Vamos a aproximar, por ejemplo,  $\sqrt{37} = [6; \overline{12}]$ . Como su periodo es 1, impar, la ecuación negativa de Pell con  $D = 37$  tiene solución. Su solución fundamental es  $(6, 1)$ . Claro, como era de esperarse, las soluciones de (1.38) también nos sirven para obtener aproximaciones racionales de  $\sqrt{D}$ , pues, también corresponden a convergentes de su desarrollo en fracción continua simple. Entonces, por (2.11),

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 37 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$k > 0$  (evitamos la trivial por  $T_0/U_0 = 1/0$ ). Donde las soluciones para (1.38) las obtenemos con  $k$  impar, y las de (1.5), con  $k$  par.

A medida que avanzamos en los cálculos para  $k$ , las aproximaciones que obtengamos se van a alternar de manera similar a como lo hacen las aproximaciones que obtenemos con el Algoritmo 1.1 del Capítulo I. Esto se debe al signo de la ecuación de Pell que se alterna entre valores impares y pares de  $k$ . Despejando  $\sqrt{D}$  como al obtener (2.37) y fijándonos en el signo de  $1/U^2$  se hace más evidente esta observación.

Calculemos el error  $\varepsilon$  que nos permitirá evaluar la calidad de nuestra aproximación. Simplemente es

$$\varepsilon = \left| \sqrt{D} - \frac{T}{U} \right| = \left| \sqrt{\frac{T^2}{U^2} - \frac{1}{U^2}} - \frac{T}{U} \right| = \frac{1}{U} \left| \sqrt{T^2 - 1} - T \right|.$$

Siendo positivo el  $-1$  dentro del radical cuando tratamos con una solución de la ecuación negativa de Pell.

En la Tabla 2.14 se presentan las nueve aproximaciones a  $\sqrt{37}$  que obtenemos con  $1 \leq k \leq 9$  en (2.39) junto con su respectivo error.

**Tabla 2.14.** Aproximaciones a  $\sqrt{37}$  que obtenemos con  $1 \leq k \leq 9$  en (2.39).

$k$	$\frac{T_k}{U_k}$	$T_k/U_k$	$\varepsilon_k$
1	$\frac{6}{1}$	6	0,08276253029821934
2	$\frac{73}{12}$	6,083333333333333 ...	0,0005708030351136983
3	$\frac{882}{145}$	6,082758620689655 ...	0,000003909608564503413
4	$\frac{10657}{1752}$	6,082762557077626 ...	$2,677940598445291 \times 10^{-8}$
5	$\frac{128766}{21169}$	6,08276253011479 ...	$1,834287852854151 \times 10^{-10}$
6	$\frac{1555849}{255780}$	6,082762530299476 ...	$1,257092497013034 \times 10^{-12}$
7	$\frac{18798954}{3090529}$	6,082762530298211 ...	$8,437724444337329 \times 10^{-15}$
8	$\frac{227143297}{37342128}$	6,082762530298219 ...	$7,980884856828543 \times 10^{-16}$
9	$\frac{2744518518}{451196065}$	6,0827625302982196886 ...	$4,037741722717989 \times 10^{-19}$

La cantidad de ceros a la derecha de la coma decimal menos uno en la expansión decimal del error representa la cantidad de cifras a la derecha de la coma decimal que son correctas y definitivas en el valor decimal de  $\sqrt{37}$ .



Esto equivale a tomar el valor absoluto del exponente de la notación científica del error y restarle dos. Tal cantidad es también la de los dígitos correctos a la derecha de la coma decimal en la aproximación de  $\sqrt{37}$ .

Las soluciones a las ecuaciones de Pell hacen converger más o menos rápido la aproximación dependiendo del tamaño del periodo de la fracción continua regular de  $\sqrt{D}$ .

Consúltense el Código B.7 del Apéndice B para más detalles de los cálculos de la Tabla 2.14. Y con esta sección, finalizamos este capítulo de aplicaciones triviales de la ecuación de Pell.

## Capítulo III: Resolviendo la ecuación diofántica

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

*“Quizá el tema [de este libro] le parezca bastante difícil porque aún no es conocimiento familiar y la comprensión de los principiantes se confunde fácilmente con los errores; pero con su inspiración y mi instrucción le será fácil dominarlo, pues, la inteligencia clara respaldada por buenas lecciones es una ruta rápida al conocimiento”. (Wikiquote, 2020).*

Diofanto de Alejandría, *Arithmetica*, c. 250 NE, siguiendo la dedicatoria al dios Dionisio como cita Paul Drijvers en *Secondary Algebra Education* (2011)

Este último capítulo es dedicado a un problema no tan sencillo en el que es de mucha ayuda el manejo de la teoría de la ecuación Jayadeva-Bhaskara, y cómo saber resolverla proporciona un puente para encontrar soluciones al problema principal. Algo similar a las situaciones presentadas en el capítulo anterior.

### 3.1. Ecuaciones diofánticas cuadráticas con dos incógnitas

En esta sección, vamos a demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *Toda ecuación indeterminada de segundo grado, que contenga dos incógnitas, puede ser reducida a*

$$T^2 - AU^2 = B \quad . \quad (3.1)$$

*Prueba.* Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (3.2)$$

cualquier *ecuación indeterminada de segundo grado*, donde  $x, y$  son dos incógnitas, siendo  $a, b, c, d, e, f$  números conocidos (incluso cero; pero  $a, b, c$  no todos nulos a la vez); entonces digamos, que (3.2) puede, en todo caso, ser reducida a la forma más sencilla (3.1).

Primero, multiplicamos (3.2) por  $4a$ , que da

$$4a^2x^2 + 4abxy + 4acy^2 + 4adx + 4aey + 4af = 0 \quad ;$$

sumamos  $b^2y^2 + 2bdy + d^2$  a ambos miembros, y transponemos: teniendo

$$(2ax + by + d)^2 = (by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f) \quad ,$$

o

$$2ax + by + d = \sqrt{(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)} \quad . \quad (3.3)$$

Y, para abreviar (3.3), pongamos

$$\begin{cases} U = \sqrt{(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)} \\ A = b^2 - 4ac \\ 2g = 2bd - 4ae \\ h = d^2 - 4af \end{cases} \quad ; \quad (3.4)$$

Esto es, en el radicando de (3.3),  $A$  representa los múltiplos de  $y^2$ ,  $2g$  los múltiplos de  $y$ , y  $h$  la cantidad correspondiente al término independiente. Ahora, las sustituciones de (3.4) facilitan las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} U = 2ax + by + d \\ U^2 = Ay^2 + 2gy + h \end{cases} \quad .$$

Multiplicando la segunda por  $A$ , tenemos

$$A^2y^2 + 2Agy + Ah = AU^2 \quad ;$$

sumando  $g^2$ , se convierte en

$$(Ay + g)^2 - AU^2 = g^2 - Ah \quad .$$

Estableciendo  $T = Ay + g$ ,  $g^2 - Ah = B$ , tendremos (3.1). □

La cantidad  $A = b^2 - 4ac$  en (3.4) es el *discriminante* de (3.2).

Es obvio que los valores de  $x$ ,  $y$  en (3.2) se deducen inmediatamente de las soluciones de (3.1). Si  $a \neq 0$ ,  $A \neq 0$ , tenemos

$$y = \frac{T - g}{A} \quad ,$$

y de  $U = 2ax + by + d$ ,

$$x = \frac{U - d - by}{2a} ;$$

que sustituyendo para  $y$ , obtenemos

$$x = \frac{(U - d)A - (T - g)b}{2aA} .$$

Podemos tomar los signos de  $T$ ,  $U$  a conveniencia para obtener soluciones  $(x, y)$  de (3.2).

También es obvio, siempre que los coeficientes en (3.2) sean racionales, que valores racionales de  $T$ ,  $U$ , remitirán valores racionales de  $x$ ,  $y$ . Sin embargo, si buscamos valores enteros para (3.2) con coeficientes enteros, entonces debemos emplear valores de  $T$  y de  $U$  que retornen valores enteros para  $x$  y para  $y$ . Esto es, que  $A \mid (T - g)$  y  $2aA \mid [(U - d)A - (T - g)b]$  a la vez.

Hay una manera más sencilla de concebir el resultado de la Proposición 3.1, en caso de que (3.2) sea una ecuación diofántica. La reescribimos como

$$ax^2 + (by + d)x + cy^2 + ey + f = 0 ,$$

Vemos que si alguna solución existe para  $y$ , entonces el discriminante (de una cuadrática con una incógnita)

$$(by + d)^2 - 4a(cy^2 + ey + f)$$

debe ser un cuadrado perfecto. Luego,

$$(b^2 - 4ac)y^2 + 2(bd - 2ae)y + d^2 - 4af = U^2$$

para algún entero  $U$ . Si ponemos  $A = b^2 - 4ac$ ,  $g = bd - 2ae$ ,  $h = d^2 - 4af$ , tenemos la ecuación cuadrática para  $y$ ,

$$Ay^2 + 2gy + h - U^2 = 0 ,$$

cuyo discriminante debe también ser un cuadrado perfecto. Entonces

$$4g^2 - 4A(h - U^2) = 4T^2$$

o

$$g^2 - A(h - U^2) = T^2 \quad ,$$

para algún entero  $T$ . Haciendo  $B = g^2 - Ah$ , y reordenando, llegamos a (3.1). Luego, si (3.2) diofántica tiene una solución en enteros, también la tendrá (3.1). Más aún, de todas las soluciones enteras de la ecuación (3.1) en su versión diofántica podemos obtener, recorriendo hacia atrás nuestros pasos en la deducción, todas las soluciones enteras de la ecuación original (3.2) con coeficientes enteros (Coppel, 2009, p. 195).

## 3.2. Parametrizaciones de Lehmer

### 3.2.1. Infinitas parametrizaciones de soluciones de $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

En un artículo publicado en 1953, Mordell (1888-1972) discute las soluciones de la ecuación diofántica

$$x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = m \quad (3.5)$$

donde además bosqueja la información disponible hasta el momento sobre (3.5) y otras que se derivan de su estudio. Remarca que más allá de  $(1, 1, 1)$ ,  $(-5, 4, 4)$  no conocía más soluciones de

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3 \quad ;$$

y que debe ser muy difícil, sin duda, averiguar algo sobre cualesquiera otras soluciones (Mordell, 1953, p. 505).

En otra publicación de 1955, Miller (1906-1981) y Woollett comentan que tras la sugerencia del profesor Mordell, intentaron buscar más soluciones con la ayuda de la computadora electrónica (EDSAC) en el Cambridge University Mathematical Laboratory (Miller & Woollett, 1955, p. 101). Es más, ellos ampliaron la búsqueda de soluciones para incluir todas aquellas soluciones de

$$x^3 + y^3 + z^3 = k \quad , \quad (3.6)$$

con  $0 \leq k \leq 100$ ,  $|z| \leq |y| \leq |x| \leq 3164$ . No encontraron más soluciones para el caso  $k = 3$ . Se dieron 345 soluciones primitivas, para las cuales  $\text{MCD}(x, y, z) = 1$ ,  $|x| \leq 3164$ . Entre estas, figuran, en la página 108 de la revista en la que realizaron la publicación, 21 soluciones no triviales, además de la trivial  $(1, 0, 0)$ , para cuando  $k = 1$ .

En esa misma entrega de la revista, en el artículo que le seguía al de Miller y Woollett, Mordell define una *solución primitiva* de (3.6) como una terna  $(x, y, z)$  en la que  $|z| \leq |y| \leq |x|$ , además de  $(y + z)(x + z)(x + y) \neq 0$ . También, comenta que es bien sabido que para  $k = a^3, 2a^3$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ), algunas de las soluciones enteras de (3.6) pueden expresarse como polinomios en un parámetro; aquí presenta que cuando  $k = 1$ ,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad , \quad (3.7)$$

entonces son solución

$$x = 9t^4 \quad , \quad y = -9t^4 + 3t \quad , \quad z = -9t^3 + 1 \quad , \quad (3.8)$$

donde  $t$  es cualquier entero.

Mordell observó que de las 22 soluciones presentadas por Miller y Woollett, solo 9 de estas surgen de (3.8), que corresponden a cuando  $|t| \leq 4$  (Mordell, 1955, p. 111). Además, agrega “la razón para la preponderancia es, pienso, que cuando  $k = a^3$ , existen soluciones paramétricas de otro tipo que parecen haber sido pasadas por alto por otros escritores hasta el presente” (Mordell, 1955, p. 111). En la Tabla 3.1 mostramos los resultados para  $k = 1$  que encontraron Miller y Woollett.

Si reemplazamos  $t = 1$  en (3.8), obtendremos la terna  $(0, 0, 1)$ . Ajustándola a la definición de solución primitiva, simplemente se coloca la terna  $(1, 0, 0)$  que es la misma, salvo el orden. Solo se hace esto para acomodar las variables de las ternas a la definición de solución primitiva que ellos manejan.

**Tabla 3.1.** Soluciones de (3.6) con  $k = 1$ , o sea, (3.7), presentadas por Miller y Woollett, y su correspondencia con la parametrización (3.8) cuando sea pertinente.

$x$	$y$	$z$	$t$
1	0	0	0
9	-8	-6	+1
-12	10	9	-1
-103	94	64	
144	-138	-71	+2
-150	144	73	-2
172	-138	-135	
-249	235	135	
-495	438	334	
505	-426	-372	
577	-486	-426	
729	-720	-242	+3
-738	729	244	-3
904	-823	-566	
1010	-812	-791	
1210	-1207	-236	
-1544	1537	368	
-1852	1738	1033	
-1988	1897	1010	
2304	-2292	-575	+4
-2316	2304	577	-4
3097	-2820	-1938	

Al año siguiente, Lehmer (1905-1991) publica un artículo en la misma revista que será el que veamos más en detalle en este capítulo, indagando en la demostración del año anterior de Mordell de que había otras parametrizaciones para cuando  $k = 1$ . Según Lehmer, “el propósito de este artículo es exhibir una secuencia infinita de soluciones paramétricas explícitas de [(3.7)] en las cuales [(3.8)] es la más simple” (Lehmer, 1956, pp. 275-276). Sin embargo, ninguna de las nuevas soluciones que obtiene yace entre las soluciones que presentan Miller y Woollett en su trabajo. Dice que las dos más pequeñas que encuentra

$$\begin{aligned} x &= 3753 & , & & y &= -2676 & , & & z &= -3230 & , \\ x &= 3753 & , & & y &= -5262 & , & & z &= 4528 & , \end{aligned} \quad (3.9)$$

son muy grandes y no cumplen los criterios del estudio de Miller y Woollett de 1955 para ellos haberlas encontrado (Lehmer, 1956, p. 276). “Así que hay todavía algunas soluciones tabuladas sin explicación por parte de cualquier fórmula conocida” (Lehmer, 1956, p. 276). Lehmer concluye su artículo mostrando cómo algunas de estas soluciones generan una infinidad de nuevas soluciones.

La cadena infinita de soluciones paramétricas de (3.7) está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.** *Si definimos la secuencia de ternas de enteros  $(x_k, y_k, z_k)$  por los valores iniciales*

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, z_0) &= (9t^4, 3t - 9t^4, 1 - 9t^3) \\ (x_1, y_1, z_1) &= (9t^4, -3t - 9t^4, 1 + 9t^3) \end{aligned} \quad , \quad (3.10)$$

*y por las recurrencias*

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2(216t^6 - 1)x_n - x_{n-1} - 108t^4 \\ y_{n+1} &= 2(216t^6 - 1)y_n - y_{n-1} - 108t^4 \\ z_{n+1} &= 2(216t^6 - 1)z_n - z_{n-1} + 216t^6 + 4 \end{aligned} \quad , \quad (3.11)$$

*donde  $t$  es un parámetro entero, entonces*

$$x_k^3 + y_k^3 + z_k^3 = 1 \quad .$$

Antes de demostrar el teorema, haremos algunos comentarios. Las recurrencias (3.11) pueden ser empleadas con un valor fijo de  $t$  para generar



un número ilimitado de soluciones numéricas de (3.7), o alternativamente con un parámetro libre  $t$  para producir un número ilimitado de polinomios  $x_n(t)$ ,  $y_n(t)$ ,  $z_n(t)$ , satisfaciendo (3.7). La primera tripleta de estos polinomios es

$$\begin{cases} x_1 = 9t^4 \\ y_1 = -9t^4 - 3t \\ z_1 = 9t^3 + 1 \end{cases} .$$

Los siguientes polinomios son

$$\begin{cases} x_2 = 2(216t^6 - 1)(9t^4) - (9t^4) - 108t^4 = 3^3t^4(2^43^2t^6 - 5) \\ y_2 = 2(216t^6 - 1)(-9t^4 - 3t) - (3t - 9t^4) - 108t^4 = -3t(6^4t^9 + 2^43^3t^6 + 3^3t^3 - 1) \\ z_2 = 2(216t^6 - 1)(9t^3 + 1) - (1 - 9t^3) + 216t^6 + 4 = 2^43^5t^9 + 2^33^4t^6 - 3^2t^3 + 1 \end{cases} ,$$

en concordancia con (3.10) y (3.11).

Del mismo modo, el siguiente trío de polinomios soluciones de (3.7) resultan en

$$\begin{cases} x_3 = 3^2t^4(2^83^6t^{12} - 2^43^317t^6 + 17) \\ y_3 = -3t(2^83^7t^{15} + 2^83^6t^{12} + 6^47t^9 - 6^4t^6 - 21t^3 + 1) \\ z_3 = 6^8t^{15} + 6^7t^{12} - 2^43^6t^9 - 2^33^4t^6 + 9t^3 + 1 \end{cases} .$$

Las soluciones (3.9) son entonces

$$\begin{array}{ccc} x_2(1) & , & y_2(1) & , & z_2(1) & , \\ x_2(-1) & , & y_2(-1) & , & z_2(-1) & . \end{array}$$

Además, las recurrencias (3.11) pueden emplearse para generar  $x_k$ ,  $y_k$ ,  $z_k$  para valores negativos del entero  $k$ . Veamos la primera. Tenemos que observar que los valores iniciales  $x_0 = x_1 = 9t^4$ . Podemos expresar esto como  $x_0(t) = x_1(-t)$ , por la potencia par del parámetro  $t$ . Ahora, procediendo por inducción matemática, supongamos que

$$x_{-k}(t) = x_{k+1}(-t) .$$

Cuando  $k = 0$ , encontramos la igualdad que acabamos de obtener a partir de los valores iniciales. Despejamos  $x_{n-1}$  en la primera de (3.11),

$$x_{n-1}(t) = 2(216t^6 - 1)x_n(t) - x_{n+1}(t) - 108t^4 .$$

Hagamos  $n = -k$ :

$$\begin{aligned}
x_{-(k+1)}(t) &= 2(216t^6 - 1)x_{-k}(t) - x_{-(k-1)}(t) - 108t^4 \\
&= 2(216t^6 - 1)x_{k+1}(-t) - x_k(-t) - 108t^4 \\
&= x_{k+2}(-t) \quad ,
\end{aligned}$$

lo que comprueba nuestra suposición inicial por inducción matemática. Dada la potencia par de las condiciones iniciales, así como también las potencias de  $t$  en la recurrencia, podemos concluir que  $x_{-k}(t) = x_{k+1}(-t) = x_{k+1}(t)$ .

De manera similar, observamos que  $y_0(t) = y_1(-t) = 3t - 9t^4$ , suponiendo entonces que

$$y_{-k}(t) = y_{k+1}(-t) \quad .$$

Despejamos  $y_{n-1}$  en la segunda recurrencia de (3.11)

$$y_{n-1}(t) = 2(216t^6 - 1)y_n(t) - y_{n+1}(t) - 108t^4 \quad ,$$

y ponemos  $n = -k$ ,

$$\begin{aligned}
y_{-(k+1)}(t) &= 2(216t^6 - 1)y_{-k}(t) - y_{-(k-1)}(t) - 108t^4 \\
&= 2(216t^6 - 1)y_{k+1}(-t) - y_k(-t) - 108t^4 \\
&= y_{k+2}(-t) \quad ,
\end{aligned}$$

por la hipótesis de inducción supuesta, y la recurrencia evaluada en  $-t$ .

Análogamente,  $z_0(t) = z_1(-t) = 1 - 9t^3$ . Y asumiendo que

$$z_{-k}(t) = z_{k+1}(-t) \quad ,$$

de manera similar a las dos primeras recurrencias, tenemos

$$\begin{aligned}
z_{-(k+1)}(t) &= 2(216t^6 - 1)z_{-k}(t) - z_{-(k-1)}(t) + 216t^6 + 4 \\
&= 2(216t^6 - 1)z_{k+1}(-t) - z_k(-t) + 216t^6 + 4 \\
&= z_{k+2}(-t) \quad .
\end{aligned}$$

Quedamos entonces con

$$\begin{aligned}
x_{-k}(t) &= x_{k+1}(-t) = x_{k+1}(t) \\
y_{-k}(t) &= y_{k+1}(-t) \\
z_{-k}(t) &= z_{k+1}(-t) \quad .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Así, como explica Lehmer, si  $t$  es fijo, obtenemos información nueva desde valores negativos de  $k$  (sabiendo (3.12)); mientras que si  $t$  no está fijo, la consideración de  $k$  negativos es redundante (Lehmer, 1956, p. 277).

Ahora procedamos a demostrar el Teorema 3.2.

*Prueba.* La solución paramétrica (3.8) es tal que

$$x + y = 3t \quad ,$$

también

$$1 - z = 9t^3 = 3t^2(3t) \quad ,$$

es decir,

$$1 - z = 3t^2(x + y) \quad . \quad (3.13)$$

Según expresa Lehmer, el propósito del teorema es producir infinitas soluciones de (3.7) para las que (3.13) se mantenga. Es decir, induce parametrizaciones similares a (3.8) que solucionen (3.7).

Sustituyendo  $z$  de (3.13) en (3.7), tenemos

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + [1 - 3t^2(x + y)]^3 &= 1 \\ x^3 + y^3 + 1 - 9t^2(x + y) + 27t^4(x + y)^2 - 27t^6(x + y)^3 &= 1 \\ (x + y)[(x^2 - xy + y^2) - 9t^2 + 27t^4(x + y) - 27t^6(x + y)^2] &= 0 \quad , \end{aligned}$$

simplificando y reacomodando

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 27t^6(x + y)^2 - 27t^4(x + y) + 9t^2 \\ x^2 - xy + y^2 &= 27t^6(x^2 + 2xy + y^2) - 27t^4(x + y) + 9t^2 \quad , \end{aligned}$$

esto es,

$$(27t^6 - 1)x^2 + (54t^6 + 1)xy + (27t^6 - 1)y^2 - 27t^4x - 27t^4y + 9t^2 = 0 \quad . \quad (3.14)$$

Es decir, llegamos a una ecuación indeterminada de segundo grado. Un caso particular de (3.2). La Proposición 3.1 ya nos comprobó que esta puede ser llevada a una ecuación generalizada de Pell, por lo que las soluciones  $(x, y)$  están dadas por esta. En la sección anterior vimos que el discriminante de esta ecuación indeterminada de segundo grado es justamente el  $D$  de la ecuación generalizada de Pell. En este caso, el discriminante

$$\begin{aligned}
A &= (54t^6 + 1)^2 - 4(27t^6 - 1)(27t^6 - 1) \\
&= 2916t^{12} + 108t^6 + 1 - 2916t^{12} + 108t^6 + 108t^6 - 4 \\
&= 324t^6 - 3 \\
&= D
\end{aligned}$$

y sus soluciones, como ya vimos en la Sección 2.2 y en el Teorema 2.4, dependen de la solución fundamental de (1.5) con  $D = A$ . Pero en este caso,  $D = 324t^6 - 3$  es un polinomio en un parámetro entero  $t$ . Por tanto, para resolver

$$\xi^2 - D\eta^2 = 1 \quad , \quad (3.15)$$

con el  $D$  dado, tenemos que notar que  $\xi, \eta$  también deben ser polinomios en  $t$ . Digamos que  $\xi = P(t)$ ,  $\eta = Q(t)$ ; separemos a los polinomios en sus términos en función de  $t$  y aquellos independientes, o sea,  $P(t) = p(t) + i$ , además de  $Q(t) = q(t) + j$ , con  $i, j$  enteros con  $p(t), q(t)$  sin término independiente. Entonces, empleando (3.15)

$$[p(t) + i]^2 - (324t^6 - 3)[q(t) + j]^2 = 1$$

llegamos a

$$p^2(t) + 2ip(t) + i^2 - 324t^6q^2(t) - 648t^6jq(t) - 324t^6j^2 + 3q^2(t) + 6jq(t) + 3j^2 = 1 \quad .$$

Separando los términos en función de  $t$  de los independientes, tenemos

$$p^2(t) + 2ip(t) - 324t^6q^2(t) - 648t^6jq(t) - 324t^6j^2 + 3q^2(t) + 6jq(t) = 0 \quad , \quad (3.16)$$

y

$$i^2 + 3j^2 = 1 \quad . \quad (3.17)$$

La única solución en enteros válida para (3.17) es  $i = \pm 1, j = 0$ . Sustituyendo en (3.16), conseguimos

$$p^2(t) \pm 2p(t) - 324t^6q^2(t) + 3q^2(t) = 0 \quad .$$

Si el grado de  $p$  es  $\text{gr}(p) = l$ ,  $\text{gr}(q) = m$ , entonces solo tiene solución válida el sistema

$$\begin{cases} 2l = 2m + 6 \\ l = 2m \end{cases} \quad ,$$

que nos permite asumir que

$$\begin{cases} p^2(t) = 324t^6 q^2(t) \\ \mp 2p(t) = 3q^2(t) \end{cases} . \quad (3.18)$$

Dividiendo ambas, llegamos a

$$p(t) = \mp \frac{2}{3}(324t^6) = \mp 216t^6 ,$$

tomando el valor positivo de  $P(t) = p(t) + i = \mp 216t^6 \pm 1$ , tenemos que la primera componente de la solución fundamental es  $\xi_1 = 216t^6 - 1$ .

De la segunda ecuación en (3.18), tenemos

$$\mp 2p(t) = \mp 2(\mp 216t^6) = 432t^6 = 3q^2(t) ,$$

que resulta en  $q(t) = \pm 12t^3$ . Tomamos también la positiva, así que  $\eta_1 = 12t^3$ . Podemos comprobar que  $(216t^6 - 1, 12t^3)$  es la solución fundamental de (3.15). Tenemos, por tanto, todas las soluciones fundamentales de las infinitas ecuaciones positivas de Pell con  $D = 324t^6 - 3$ , donde  $t$  es cualquier entero.

La solución fundamental  $(\xi_1, \eta_1) = (216t^6 - 1, 12t^3)$  conforma la matriz que relaciona a todas las soluciones  $(T_k, U_k)$  asociadas de (3.1) con los coeficientes  $A, B$  correspondientes a (3.14), como se desprende de (2.14). Si  $(T_{k-1}, U_{k-1})$  es una solución de la ecuación generalizada de Pell correspondiente a (3.14) (como vimos en la Proposición 3.1), es posible encontrar la siguiente solución asociada

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & D\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{k-1} \\ U_{k-1} \end{pmatrix} . \quad (3.19)$$

Como ya mencionamos, (3.14) es un caso particular de (3.2). Entonces los coeficientes

$$\begin{aligned} a &= 27t^6 - 1 , & d &= -27t^4 , \\ b &= 54t^6 + 1 , & e &= -27t^4 , \\ c &= 27t^6 - 1 , & f &= 9t^2 . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ya sabemos que  $A = D = 324t^6 - 3$ . También, en la sección previa, vimos que  $B = g^2 - Ah$ , con  $g, h$  dados por (3.4). Para llegar a (3.11), necesitamos calcular

$$\begin{aligned} g &= bd - 2ae \\ &= (54t^6 + 1)(-27t^4) - 2(27t^6 - 1)(-27t^4) \\ &= -27t^4(54t^6 + 1 - 54t^6 + 2) \\ &= -81t^4 \end{aligned} ,$$

por (3.20).

Además, las parametrizaciones  $T = Ay + g$ ,  $U = 2ax + by + d$ , con las que demostramos la Proposición 3.1, permiten escribir

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} . \quad (3.21)$$

Ahora, (3.19) lleva a

$$\begin{pmatrix} T_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ U_{n-1} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \xi_1 & A\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 & A\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix}^{-1} \right] \begin{pmatrix} T_n \\ U_n \end{pmatrix} ,$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} T_{n+1} \\ U_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_{n-1} \\ U_{n-1} \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} \xi_1 & A\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 & -A\eta_1 \\ -\eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} T_n \\ U_n \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \begin{pmatrix} T_n \\ U_n \end{pmatrix} , \quad (3.22)$$

donde  $I$  es la matriz identidad  $2 \times 2$ . Considerando (3.21) en (3.22), tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \right] + 2 \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \left[ \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right] .$$

Despejando el corchete del miembro izquierdo, llegamos a

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \left[ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} ,$$

o

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \left[ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \frac{1}{2aA} \begin{pmatrix} b & -A \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{aA} \begin{pmatrix} b & -A \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} .$$

Factorizando por  $\frac{1}{aA}$  y por  $\begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1}{aA} \left[ \begin{pmatrix} b & -A \\ -2a & 0 \end{pmatrix} - \xi_1 \begin{pmatrix} b & -A \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} ,$$

o

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{1 - \xi_1}{aA} \begin{pmatrix} b & -A \\ -2a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} ,$$

que podemos escribir como

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} = 2\xi_1 I \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \frac{\xi_1 - 1}{aA} \begin{pmatrix} Ad - bg \\ 2ag \end{pmatrix} . \quad (3.23)$$

Calculando

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1 - 1}{aA} (Ad - bg) &= \frac{(216t^6 - 1) - 1}{(27t^6 - 1)(324t^6 - 3)} [(324t^6 - 3)(-27t^4) - (54t^6 + 1)(-81t^4)] \\ &= \frac{2(108t^6 - 1)(-81t^4)(108t^6 - 1 - 54t^6 - 1)}{3(27t^6 - 1)(108t^6 - 1)} \\ &= -\frac{2(81t^4)(54t^6 - 2)}{3(27t^6 - 1)} \\ &= -\frac{4(81t^4)(27t^6 - 1)}{3(27t^6 - 1)} \\ &= -108t^4 \end{aligned} .$$

También

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1 - 1}{aA} (2ag) &= 2 \frac{\xi_1 - 1}{A} g \\ &= 2 \frac{(216t^6 - 1) - 1}{(324t^6 - 3)} (-81t^4) \\ &= -\frac{4(108t^6 - 1)(81t^4)}{3(108t^6 - 1)} \\ &= -108t^4 \end{aligned} .$$

Es decir, (3.23) resulta ser

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} + x_{n-1} \\ y_{n+1} + y_{n-1} \end{pmatrix} &= 2\xi_1 I \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -108t^4 \\ -108t^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(216t^6 - 1)x_n \\ 2(216t^6 - 1)y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -108t^4 \\ -108t^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(216t^6 - 1)x_n - 108t^4 \\ 2(216t^6 - 1)y_n - 108t^4 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

donde ambas componentes son precisamente las dos primeras recurrencias de (3.11), respectivamente.

Empleando estas dos y (3.13), encontramos la tercera recurrencia. Tenemos

$$\begin{aligned}
1 - z_{n+1} &= 3t^2(x_{n+1} + y_{n+1}) \\
1 - z_{n+1} &= 3t^2[(2\xi_1 x_n - x_{n-1} - 108t^4) + (2\xi_1 y_n - y_{n-1} - 108t^4)] \\
1 - z_{n+1} &= 2\xi_1[3t^2(x_n + y_n)] - 3t^2(x_{n-1} + y_{n-1}) - 108t^4(6t^2) \\
1 - z_{n+1} &= 2\xi_1(1 - z_n) - (1 - z_{n-1}) - 648t^6 \\
z_{n+1} &= 2\xi_1 z_n - z_{n-1} + 648t^6 + 1 - 2\xi_1 + 1 \\
z_{n+1} &= 2(216t^6 - 1)z_n - z_{n-1} + 648t^6 - 2(216t^6 - 1) + 2 \\
z_{n+1} &= 2(216t^6 - 1)z_n - z_{n-1} + 216t^6 + 4
\end{aligned}$$

Al ser  $x_{n+1}, y_{n+1}$  soluciones de (3.14), empleando (3.13) la llevamos a (3.7). Es decir,  $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$  en (3.11) también es solución de la ecuación diofántica  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .  $\square$

### 3.2.2. Expresiones más explícitas para las recurrencias del Teorema 3.2

Lehmer agrega que la formulación recursiva del Teorema 3.2 puede ser reemplazada por una más explícita (Lehmer, 1956, p. 277).

Por el Corolario 2.2, las soluciones de (3.15) están determinadas por la solución fundamental a través de (2.11). Adaptando esta última a la nomenclatura que empleamos para demostrar el Teorema 3.2, tenemos

$$\begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & A\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

$k \geq 0$  entero. La identidad de composición de Brahmagupta (1.2) nos garantiza que podemos componer cualesquiera dos soluciones de (1.5) y obtener una más. Esto y (3.24) nos permite formar una matriz parecida a la que formamos con la solución fundamental para componer con otras soluciones y así obtener más, es decir,

$$\begin{pmatrix} \xi_k & A\eta_k \\ \eta_k & \xi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 & A\eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{pmatrix}^k,$$

que nos ayuda a expresar (2.14) como

$$\begin{pmatrix} T_k \\ U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_k & A\eta_k \\ \eta_k & \xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 \\ U_0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$



considerando (3.19).

Tomando en cuenta (3.21) en (3.25)

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_k & A\eta_k \\ \eta_k & \xi_k \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right] ,$$

despejamos  $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \xi_k & A\eta_k \\ \eta_k & \xi_k \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & A \\ 2a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} g \\ d \end{pmatrix} \right\} .$$

Realizamos todas las operaciones para llegar a

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = -\frac{1}{2aA} \begin{pmatrix} [bg - A(2ax_0 + d)]\xi_k + A[(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g]\eta_k + Ad - bg \\ -2a(Ay_0 + g)\xi_k - 2aA(2ax_0 + by_0 + d)\eta_k + 2ag \end{pmatrix} ,$$

reordenando un poco, tenemos

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = -\frac{1}{2aA} \begin{pmatrix} -2aAx_0\xi_k + A[(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g]\eta_k - (Ad - bg)(\xi_k - 1) \\ -2aAy_0\xi_k - 2aA(2ax_0 + by_0 + d)\eta_k - 2ag(\xi_k - 1) \end{pmatrix} . \quad (3.26)$$

Ahora, si definimos  $\alpha = \xi_1 + \eta_1\sqrt{A}$ ,  $\beta = \xi_1 - \eta_1\sqrt{A}$ , podemos aplicar (1.39) para  $\xi_k, \eta_k$  que son soluciones de (3.15)

$$\begin{aligned} \xi_k &= \frac{\alpha^k + \beta^k}{2} \\ \eta_k &= \frac{\alpha^k - \beta^k}{2\sqrt{A}} , \end{aligned} \quad (3.27)$$

definiendo además la cantidad

$$\zeta_k = \frac{3}{A}(\xi_k - 1) , \quad (3.28)$$

teniendo presente que  $\alpha + \beta = 2\xi_1$ ,  $\alpha - \beta = 2\eta_1\sqrt{A}$ ,  $\alpha\beta = 1$ . A pesar de su aspecto,  $\xi_k, \eta_k, \zeta_k$  son polinomios en  $t$ . El caso de (3.27) es fácil verlo al ser ambas soluciones de (3.15), pero podemos verificarlo de otra manera que nos ayuda con (3.28). Aplicaremos inducción matemática para demostrar que

$$\begin{aligned}
\xi_{k+1} &= 2\xi_1\xi_k - \xi_{k-1} \\
\eta_{k+1} &= 2\xi_1\eta_k - \eta_{k-1} \\
\zeta_{k+1} &= 2\xi_1\zeta_k - \zeta_{k-1} + 4 \quad .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para la primera de (3.29), sabemos que  $\xi_1 = 216t^6 - 1$ . También  $\eta_1 = 12t^3$ . Calculemos

$$\begin{aligned}
\xi_2 &= \frac{(\xi_1 + \eta_1\sqrt{A})^2 + (\xi_1 - \eta_1\sqrt{A})^2}{2} \\
&= \frac{\xi_1^2 + 2\xi_1\eta_1\sqrt{A} + A\eta_1^2 + \xi_1^2 - 2\xi_1\eta_1\sqrt{A} + A\eta_1^2}{2} \\
&= \xi_1^2 + A\eta_1^2 \quad ,
\end{aligned}$$

que también es un polinomio en  $t$ . Entonces la primera componente de las dos primeras soluciones de (3.15) son polinomios en términos de  $t$ . En general, si tomamos las primeras componentes de dos soluciones consecutivas, digamos  $\xi_{k-1}$ ,  $\xi_k$ , empleando (3.27) computamos

$$\begin{aligned}
2\xi_1\xi_k - \xi_{k-1} &= 2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha^k + \beta^k}{2}\right) - \left(\frac{\alpha^{k-1} + \beta^{k-1}}{2}\right) \\
&= \frac{\alpha^{k+1} + \alpha\beta^k + \alpha^k\beta + \beta^{k+1} - \alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{k+1} + (\alpha\beta)\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}(\alpha\beta) + \beta^{k+1} - \alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{2} \\
&= \frac{\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}}{2} \\
&= \xi_{k+1} \quad ,
\end{aligned}$$

vemos que la que les sigue es una combinación lineal de ambas. Por tanto,  $\xi_{k+1}$  también es un polinomio en función de  $t$ .

Análogamente, para la segunda de (3.29),

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \frac{(\xi_1 + \eta_1\sqrt{A})^2 - (\xi_1 - \eta_1\sqrt{A})^2}{2\sqrt{A}} \\
&= \frac{\xi_1^2 + 2\xi_1\eta_1\sqrt{A} + A\eta_1^2 - \xi_1^2 + 2\xi_1\eta_1\sqrt{A} - A\eta_1^2}{2\sqrt{A}} \\
&= 2\xi_1\eta_1 \quad ,
\end{aligned}$$

es un polinomio en  $t$ . Comprobamos que

$$\begin{aligned}
2\xi_1\eta_k - \eta_{k-1} &= 2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{2\sqrt{A}}\right) - \left(\frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{2\sqrt{A}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{k+1} - \alpha\beta^k + \alpha^k\beta - \beta^{k+1} - \alpha^{k-1} + \beta^{k-1}}{2\sqrt{A}} \\
&= \frac{\alpha^{k+1} - (\alpha\beta)\beta^{k-1} + \alpha^{k-1}(\alpha\beta) - \beta^{k+1} - \alpha^{k-1} + \beta^{k-1}}{2\sqrt{A}} \\
&= \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{2\sqrt{A}} \\
&= \eta_{k+1}
\end{aligned}$$

asimismo, es un polinomio en  $t$ .

En cuanto a la tercera de (3.29), el primer valor de (3.28) es

$$\zeta_1 = \frac{3}{A}(\xi_1 - 1) = \frac{3[(216t^6 - 1) - 1]}{(324t^6 - 3)} = \frac{3(2)(108t^6 - 1)}{3(108t^6 - 1)} = 2 \quad ;$$

seguida por

$$\begin{aligned}
\zeta_2 &= \frac{3}{A}(\xi_2 - 1) \\
&= \frac{3[(\xi_1^2 + A\eta_1^2) - 1]}{(324t^6 - 3)} \\
&= \frac{[(216t^6 - 1)^2 + (324t^6 - 3)(12t^3)^2] - 1}{108t^6 - 1} \\
&= \frac{46656t^{12} - 432t^6 + 1 + 46656t^{12} - 432t^6 - 1}{108t^6 - 1} \\
&= \frac{2(46656t^{12} - 432t^6)}{108t^6 - 1} \\
&= \frac{864t^6(108t^6 - 1)}{108t^6 - 1} \\
&= 864t^6
\end{aligned}$$

ambos polinomios en  $t$ . Entonces  $2\xi_1\zeta_k - \zeta_{k-1} + 4$  es igual a

$$\begin{aligned}
 &= 2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \left[ \frac{3}{A}(\xi_k - 1) \right] - \left[ \frac{3}{A}(\xi_{k-1} - 1) \right] + 4 \\
 &= \frac{3}{2A} [(\alpha + \beta)(\alpha^k + \beta^k - 2) - (\alpha^{k-1} + \beta^{k-1} - 2)] + 4 \\
 &= \frac{3}{2A} (\alpha^{k+1} + \alpha\beta^k - 2\alpha + \alpha^k\beta + \beta^{k+1} - 2\beta - \alpha^{k-1} - \beta^{k-1} + 2) + 4 \\
 &= \frac{3}{2A} [\alpha^{k+1} + (\alpha\beta)\beta^{k-1} - 2\alpha + \alpha^{k-1}(\alpha\beta) + \beta^{k+1} - 2\beta - \alpha^{k-1} - \beta^{k-1} + 2] + 4 \\
 &= \frac{3}{2A} (\alpha^{k+1} - 2\alpha + \beta^{k+1} - 2\beta + 2) + 4 \\
 &= \frac{3}{2A} \left( \alpha^{k+1} - 2\alpha + \beta^{k+1} - 2\beta + 4 - 2 + \frac{8A}{3} \right) \\
 &= \frac{3}{2A} \left[ \alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 2(\alpha + \beta - 2) - 2 + \frac{8A}{3} \right] .
 \end{aligned}$$

Observemos que  $\alpha + \beta = 2\xi_1$ , además que del resultado para  $\zeta_1$  ya calculado, o de los polinomios  $A$ ,  $\xi_1$  en sí mismos,

$$\frac{A}{3} = \frac{\xi_1 - 1}{2} ;$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 2\xi_1\zeta_k - \zeta_{k-1} + 4 &= \frac{3}{2A} [\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 4(\xi_1 - 1) - 2 + 4(\xi_1 - 1)] \\
 &= \frac{3}{2A} (\alpha^{k+1} + \beta^{k+1} - 2) \\
 &= \frac{3}{A} \left( \frac{\alpha^{k+1} + \beta^{k+1}}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{3}{A} (\xi_{k+1} - 1) \\
 &= \zeta_{k+1} ,
 \end{aligned}$$

que, igualmente, es un polinomio en  $t$ .

Ya que no tenemos dudas de que (3.27) y (3.28) determinan polinomios que dependen de  $t$ , podemos retomar (3.26). Continuamos con

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\xi_k - \frac{(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g}{2a}\eta_k + \frac{(Ad - bg)}{2aA}(\xi_k - 1) \\ y_0\xi_k + (2ax_0 + by_0 + d)\eta_k + \frac{g}{A}(\xi_k - 1) \end{pmatrix} ,$$

que con (3.28),

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \xi_k - \frac{(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g}{2a} \eta_k + \frac{(Ad - bg)}{6a} \zeta_k \\ y_0 \xi_k + (2ax_0 + by_0 + d) \eta_k + \frac{g}{3} \zeta_k \end{pmatrix} . \quad (3.30)$$

Ahora calculemos  $2ax_0 + by_0 + d$ , recordando (3.10) y (3.20):

$$\begin{aligned} 2ax_0 + by_0 + d &= 2(27t^6 - 1)(9t^4) + (54t^6 + 1)(3t - 9t^4) + (-27t^4) \\ &= 486t^{10} - 18t^4 + 162t^7 - 486t^{10} + 3t - 9t^4 - 27t^4 \\ &= 162t^7 - 54t^4 + 3t \end{aligned} .$$

Entonces  $(2ax_0 + by_0 + d)b$  es

$$\begin{aligned} (2ax_0 + by_0 + d)b &= (162t^7 - 54t^4 + 3t)(54t^6 + 1) \\ &= 8748t^{13} - 2916t^{10} + 162t^7 + 162t^7 - 54t^4 + 3t \\ &= 8748t^{13} - 2916t^{10} + 324t^7 - 54t^4 + 3t \end{aligned} .$$

Obtenemos también

$$\begin{aligned} -Ay_0 - g &= -(324t^6 - 3)(3t - 9t^4) - (-81t^4) \\ &= -972t^7 + 2916t^{10} + 9t - 27t^4 + 81t^4 \\ &= 2916t^{10} - 972t^7 + 54t^4 + 9t \end{aligned} ,$$

por lo que  $(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g$  resulta ser

$$\begin{aligned} 8748t^{13} - 648t^7 + 12t &= 8748t^{13} - 324t^7 - 324t^7 + 12t \\ &= 324t^7(27t^6 - 1) - 12t(27t^6 - 1) \\ &= 12t(27t^6 - 1)^2 \\ &= 2a^2(6t) \end{aligned} .$$

Luego, el factor de  $\eta_k$  para  $x_k$  en (3.30) es

$$-\frac{(2ax_0 + by_0 + d)b - Ay_0 - g}{2a} = -6t(27t^6 - 1) = -(162t^7 - 6t) .$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} \frac{(Ad - bg)}{6a} &= \frac{[(324t^6 - 3)(-27t^4) - (54t^6 + 1)(-81t^4)]}{6(27t^6 - 1)} \\ &= -\frac{81t^4(108t^6 - 1 - 54t^6 - 1)}{6(27t^6 - 1)} \\ &= -27t^4 \end{aligned} .$$

Y, fácilmente, vemos que  $\frac{g}{3} = -27t^4$  también. Por lo que (3.30) se reduce a

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9t^4\xi_k - (162t^7 - 6t)\eta_k - 27t^4\zeta_k \\ (3t - 9t^4)\xi_k + (162t^7 - 54t^4 + 3t)\eta_k - 27t^4\zeta_k \end{pmatrix} . \quad (3.31)$$

Esto implica que  $x_k, y_k$  son polinomios en  $t$ .

Ahora apliquemos (3.13) para encontrar  $z_k$ :

$$\begin{aligned} z_k &= 1 - 3t^2(x_k + y_k) \\ &= 1 - 3t^2[3t\xi_k - (54t^4 - 9t)\eta_k - 54t^4\zeta_k] \\ &= -9t^3\xi_k + (162t^6 - 27t^3)\eta_k + 162t^6\zeta_k + 1 . \end{aligned}$$

Con esta última y con (3.31), escribimos

$$\begin{aligned} x_k &= 9t^4\xi_k - (162t^7 - 6t)\eta_k - 27t^4\zeta_k \\ y_k &= (3t - 9t^4)\xi_k + (162t^7 - 54t^4 + 3t)\eta_k - 27t^4\zeta_k \\ z_k &= -9t^3\xi_k + (162t^6 - 27t^3)\eta_k + 162t^6\zeta_k + 1 . \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como aparece en el artículo de Lehmer, salvo una errata, supongo que de la revista.

Se puede verificar que (3.32) tiene los valores iniciales apropiados en (3.10) y que también satisface las correspondientes relaciones recursivas (3.11). Por ejemplo, hagámoslo para las expresiones de  $x_k$  de (3.32) y de  $x_n$  en (3.11). Por (3.32), tenemos

$$x_{k-1} = 9t^4\xi_{k-1} - (162t^7 - 6t)\eta_{k-1} - 27t^4\zeta_{k-1} ,$$

también

$$x_k = 9t^4\xi_k - (162t^7 - 6t)\eta_k - 27t^4\zeta_k .$$

Sustituyendo en el miembro derecho de la respectiva recurrencia de (3.11), que como vimos en (3.23), podemos abreviarlo como  $2\xi_1 x_k - x_{k-1} - 108t^4$ , siendo

$$\begin{aligned} &= 2\xi_1[9t^4\xi_k - (162t^7 - 6t)\eta_k - 27t^4\zeta_k] - [9t^4\xi_{k-1} - (162t^7 - 6t)\eta_{k-1} - 27t^4\zeta_{k-1}] - 108t^4 \\ &= 9t^4[2\xi_1\xi_k - \xi_{k-1}] - (162t^7 - 6t)[2\xi_1\eta_k - \eta_{k-1}] - 27t^4[2\xi_1\zeta_k - \zeta_{k-1} + 4] \\ &= 9t^4\xi_{k+1} - (162t^7 - 6t)\eta_{k+1} - 27t^4\zeta_{k+1} , \end{aligned}$$

por (3.29). Y esto es precisamente  $x_{k+1}$ . Las otras dos se verifican de manera similar.

**3.2.3. Otras soluciones no incluidas en las parametrizaciones del Teorema 3.2**

Lehmer finaliza su artículo de seis páginas agregando que hay otras soluciones de (3.7), no incluidas en las soluciones paramétricas dadas anteriormente, que aún así dan cabida a un número ilimitado de otras soluciones (Lehmer, 1956, p. 278). Estas son soluciones  $(x, y, z)$  para las cuales

$$\lambda(x + y) = 1 - z \tag{3.33}$$

para algún entero  $\lambda$ , donde, para evitar los casos previos, asumimos que  $\lambda$  no es de la forma  $3t^2$ . Cuando  $\lambda = 3t^2$ , (3.33) es (3.13) que nos lleva al Teorema 3.2 con las soluciones paramétricas ahí descritas. La tabla de Miller y Woollett, para (3.7), contiene ocho de estas soluciones en las que se cumple (3.33) con  $\lambda \neq 3t^2$ , listadas por  $\lambda$ .

**Tabla 3.2.** Tabla que presenta Lehmer de las soluciones para (3.7) de la tabla de Miller y Woollett que cumplen con (3.33) para  $\lambda \neq 3t^2$ .

$\lambda$	$x$	$y$	$z$
4	10	-12	9
4	172	-138	-135
4	1010	-812	-791
7	9	-8	-6
7	94	-103	64
7	904	-823	-566
7	3097	-2820	-1938
55	1537	-1544	386
79	1210	-1207	-236

Aquí Lehmer comete un error al incluir  $\lambda = 55$ , pues, la terna que presenta no es solución de (3.7). Como vimos en la Tabla 3.1, el valor correcto para  $z$  es 368. Y no hay valor entero de  $\lambda$  para poder usar (3.33) con la terna  $(-1544, 1537, 368)$ . Desconocemos el motivo por el cual Lehmer no se apega a la definición de terna primitiva para presentar todos los datos de la Tabla 3.2, pero sospechamos que no le da importancia ya que ni siquiera menciona esta noción en su artículo.

De manera similar, cuando llegamos a (3.14), tanto (3.7) como (3.33) implican

$$(1 - \lambda^3)x^2 - (1 + 2\lambda^3)xy + (1 - \lambda^3)y^2 + 3\lambda^2x + 3\lambda^2y - 3\lambda = 0 \quad , \quad (3.34)$$

en lugar de (3.20) se tendría

$$\begin{aligned} a &= 1 - \lambda^3 & , & \quad d = 3\lambda^2 & , \\ b &= -(1 + 2\lambda^3) & , & \quad e = 3\lambda^2 & , \\ c &= 1 - \lambda^3 & , & \quad f = -3\lambda & . \end{aligned} \quad (3.35)$$

También

$$g = bd - 2ae = -(1 + 2\lambda^3)(3\lambda^2) - 2(1 - \lambda^3)(3\lambda^2) = -9\lambda^2 \quad . \quad (3.36)$$

Y, como ya sabemos, las soluciones de (3.34) dependen de las sucesivas soluciones de la ecuación de Pell

$$\xi^2 - A\eta^2 = 1 \quad , \quad A = 12\lambda^3 - 3 \quad . \quad (3.37)$$

Ya que en los casos considerados en la Tabla 3.2,  $\lambda - 1$  es divisible por 3, el número  $A$  es divisible por 9. Pues,

$$\begin{aligned} A &= 12\lambda^3 - 3 \\ &= 9\lambda^3 + 3\lambda^3 - 3 \\ &= 9\lambda^3 + 3(\lambda^3 - 1) \\ &= 9\lambda^3 + 3(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \\ &= 9\Delta \quad . \end{aligned}$$

Entonces (3.37) puede abordarse como

$$\xi^2 - \Delta(3\eta)^2 = \xi^2 - \Delta\theta^2 = 1 \quad , \quad \Delta = \frac{4\lambda^3 - 1}{3} \quad , \quad (3.38)$$



donde  $\theta = 3\eta$ . Esto da la ventaja de tener que buscar soluciones fundamentales de la ecuación de Pell para un  $D$  menor. Especialmente notable es esta ventaja, cuando hacemos cálculos manuales (cuando buscamos la expansión en fracción continua regular de  $\sqrt{D}$ ) o computaciones con números enormes.

El caso en el que  $\lambda = 4$  envuelve

$$\Delta = \frac{4\lambda^3 - 1}{3} = \frac{4(4)^3 - 1}{3} = \frac{255}{3} = 85 \quad ,$$

por (3.38). Ya que  $\sqrt{85} = [9; \overline{4, 1, 1, 4, 18}]$ , su periodo  $s = 5$  es impar, entonces la solución fundamental está en la novena reducida, siendo  $(\xi_1, \theta_1) = (285769, 30996)$ . Por tanto, la solución fundamental para (3.37), con  $A = 9 \cdot 85 = 765$ , tiene  $\eta_1 = 10332$ , también por (3.38).

Ahora consideremos los valores de (3.35) con  $\lambda = 4$ :

$$\begin{aligned} a &= -63 & , & & d &= 48 & , \\ b &= -129 & , & & e &= 48 & , \\ c &= -63 & , & & f &= -12 & . \end{aligned}$$

Además,  $g = -9\lambda^2 = -144$ , por (3.36).

Si en (3.23) calculamos la cantidad  $\frac{\xi_1 - 1}{aA}(Ad - bg)$ , notamos que esta solo es entera adoptando un valor negativo para  $\xi_1$ . Y no hay ningún problema con esto, pues, podemos componer cualesquiera soluciones de (1.5) para obtener otra. O lo que es lo mismo, con cualquier solución de (1.5), puedo formar la matriz con la que obtener múltiplos de Pell de otra dada. Obtengamos, pues,

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1 - 1}{aA}(Ad - bg) &= \frac{(-285769) - 1}{(-63)(765)} [(765)(48) - (-129)(-144)] \\ &= \frac{-285770}{-48195} (18144) \\ &= 107584 \quad . \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
 \frac{\xi_1 - 1}{aA} (2ag) &= 2 \frac{\xi_1 - 1}{A} g \\
 &= 2 \frac{(-285769) - 1}{(765)} (-144) \\
 &= 2 \frac{285770}{(765)} (144) \\
 &= 107584 \quad .
 \end{aligned}$$

Y  $2\xi_1 = 2(-285769) = -571538$ . Por consiguiente, en (3.23), tenemos que

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= -571538x_n - x_{n-1} + 107584 \\
 y_{n+1} &= -571538y_n - y_{n-1} + 107584 \\
 z_{n+1} &= -571538z_n - z_{n-1} - 289132 \quad .
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

La tercera de (3.39) la conseguimos empleando (3.33) con las dos primeras. O sea,

$$\begin{aligned}
 1 - z_{n+1} &= (4)(-571538x_n - x_{n-1} + 107584 - 571538y_n - y_{n-1} + 107584) \\
 1 - z_{n+1} &= -571538[4(x_n + y_n)] - 4(x_{n-1} + y_{n-1}) + 8(107584) \\
 1 - z_{n+1} &= -571538(1 - z_n) - (1 - z_{n-1}) + 8(107584) \\
 z_{n+1} &= -571538z_n - z_{n-1} + 571538 + 1 - 860672 + 1 \\
 z_{n+1} &= -571538z_n - z_{n-1} - 289132 \quad .
 \end{aligned}$$

Sin embargo, para poder emplear (3.39), se necesitan dos soluciones consecutivas, obtenidas de dos soluciones asociadas de la ecuación generalizada de Pell correspondiente a (3.34). Podemos empezar con cualquiera de la Tabla 3.2 asociada a  $\lambda = 4$ . Tomemos  $(x_0, y_0, z_0) = (10, -12, 9)$  como ejemplo. Lamentablemente, no podemos tomar cualquiera de las otras y asumir que es la siguiente, pues, desconocemos si esta segunda que tomamos es resultado de la siguiente solución asociada a  $(T_0, U_0)$  correspondiente al par  $(x_0, y_0)$  solución de (3.34). Debemos obtener la siguiente,  $(T_1, U_1)$ , a partir de  $(T_0, U_0)$ . Primero buscamos el par  $(T_0, U_0)$  al que corresponde  $(x_0, y_0)$ , lo hacemos con el auxilio de (3.21)

$$\begin{pmatrix} T_0 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 765 \\ -126 & -129 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -144 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9324 \\ 336 \end{pmatrix} \quad .$$

Luego, buscamos el par  $(T_1, U_1)$  asociado por la misma matriz que empleamos para llegar a (3.39). Usando (3.19), tenemos

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -285769 & (765)(10332) \\ 10332 & -285769 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9324 \\ 336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5320247436 \\ -192353952 \end{pmatrix} \quad .$$

De nuevo, empleamos (3.21) despejando  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 765 \\ -126 & -129 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 5320247436 \\ -192353952 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -144 \\ 48 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{96390} \begin{pmatrix} -129 & -765 \\ 126 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5320247580 \\ -192354000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5593538 \\ 6954572 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Con estas dos y con (3.33), encontramos que

$$z_1 = -4(-5593538 + 6954572) + 1 = -5444135 .$$

Por ende,  $(x_1, y_1, z_1) = (-5593538, 6954572, -5444135)$  es la siguiente solución asociada a  $(x_0, y_0, z_0) = (10, -12, 9)$  de (3.7). Se obtienen infinitas soluciones más a partir de estas por medio de (3.39).

*Nota:* El lector debe tener en cuenta que, al momento de verificar que  $(-5593538, 6954572, -5444135)$  es solución de  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ , su máquina calculadora puede presentar errores de coma flotante debido a una mantisa inadecuada para estas cantidades. Esta misma observación se aplica a todas las verificaciones que haya podido realizar respecto a los datos expuestos en el presente trabajo.

Lehmer también calculó  $(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1})$  con la misma tripleta inicial. Ya obtenidas  $(T_0, U_0)$ , simplemente despejamos  $(T_{-1}, U_{-1})$  en (3.19), aplicando los índices que corresponden:

$$\begin{pmatrix} T_{-1} \\ U_{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -285769 & (765)(10332) \\ 10332 & -285769 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -9324 \\ 336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8772876 \\ 317184 \end{pmatrix} .$$

Luego, buscamos, de modo similar,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ y_{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 765 \\ -126 & -129 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 8772876 \\ 317184 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -144 \\ 48 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{96390} \begin{pmatrix} -129 & -765 \\ 126 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8773020 \\ 317036 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14258 \\ 11468 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Y con (3.33), tenemos que  $z_{-1} = 11161$ . Así,  $(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1}) = (-14258, 11468, 11161)$ , como se puede comprobar fácilmente, es también solución de (3.7).

Si se hubiese empleado la solución que intercambia las dos primeras componentes para la inicial, es decir,  $(x_0, y_0, z_0) = (-12, 10, 9)$ , se intercambiaría  $(x_{-1}, y_{-1}, z_{-1})$  con  $(y_1, x_1, z_1)$ , además de  $(x_1, y_1, z_1)$  con  $(y_{-1}, x_{-1}, z_{-1})$ .

Si en cambio, tomamos  $(x_0, y_0, z_0) = (172, -138, -135)$ , llegamos a que  $(x_1, y_1, z_1) = (-812, 1010, -791)$ . Que es la otra que queda con  $\lambda = 4$  en la Tabla 3.2, salvo permutación de  $x, y$ .

Y si tomamos  $(x_0, y_0, z_0) = (1010, -812, -791)$ , entonces  $(x_1, y_1, z_1) = (-138, 172, -135)$ . Que también es la otra queda con  $\lambda = 4$  en la Tabla 3.2, salvo permutación de  $x, y$ . O sea, ambas llevan la una a la otra; en consecuencia, están relacionadas, salvo el orden de las primeras dos componentes.

Aplicando (3.39), para el primer caso donde  $(x_0, y_0, z_0) = (172, -138, -135)$ , encontramos

$$(x_2, y_2, z_2) = (-577145658, 464196268, 451797561) \quad .$$

Para el segundo caso donde  $(x_0, y_0, z_0) = (1010, -812, -791)$ , tenemos

$$(x_2, y_2, z_2) = (-98196140, 78978818, 76869289) \quad .$$

En la situación en la que  $\lambda = 7$ , tenemos que lidiar con la ecuación de Pell, donde  $\Delta = [4(7)^3 - 1]/3 = 457$ ,

$$\xi^2 - 457\theta^2 = 1 \quad ,$$

con solución fundamental (obtenida con el Código A.1)

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 6983244756398928218113 \\ \theta_1 &= 326662411570389853632 \quad . \end{aligned}$$

Por lo que  $\eta_1 = 108887470523463284544$ , con  $A = 9 \cdot 457 = 4113$ . Lehmer notó que esta solución fundamental enorme permitía concluir que ninguna de las otras soluciones de la Tabla 3.2 con  $\lambda = 7$  estaban simplemente relacionadas

(Lehmer, 1956, p. 279). Y da el ejemplo de que la última,  $(x_0, y_0, z_0) = (3097, -2820, -1938)$  genera

$$\begin{aligned}x_1 &= 2157232752187946774 \\y_1 &= -1964429523102862535 \\z_1 &= -1349622603595589672 \quad .\end{aligned}$$

Llegamos a esta solución siguiendo el camino que recorrimos para  $\lambda = 4$ , pero en este caso  $\lambda = 7$ . Solo tenemos cuidado con (3.35), (3.19) y (3.21). En este caso, también tomamos la  $\xi_1$  negativa.

Luego, quedan los casos en los que  $\lambda = 55$  (que no es ningún caso realmente en el contexto de solucionar (3.7), pero sí podemos ver la ecuación de Pell correspondiente a ese valor de  $\lambda$ ) y 79, según Lehmer, son “incluso más desalentadores” (Lehmer, 1956, p. 280). En estos casos, respectivamente, las ecuaciones de Pell son

$$\xi^2 - 221833\theta^2 = 1$$

con  $\Delta = [4(55)^3 - 1]/3 = 221833$ ,

$$\xi^2 - 657385\theta^2 = 1 \quad ,$$

de manera similar; “cuyas soluciones fundamentales son desconocidas” (Lehmer, 1956, p. 280). Debido a que las fracciones continuas involucradas tienen cada una más de sesenta términos en el periodo, estas soluciones son ciertamente grandes (Lehmer, 1956, p. 280). Así termina Lehmer su interesante artículo en donde vio que podía aplicar la teoría conocida de la ecuación de Pell para poder resolver una ecuación diofántica más complicada que involucra cubos, y sus sumas. Él buscaba parametrizaciones, alentado por el trabajo previo de Mordell donde demuestra que hay soluciones paramétricas de otro tipo que han sido pasadas por alto por otros autores hasta ese momento. En este sentido, Lehmer las encontró, y trató algunas soluciones que no están ligadas a las parametrizaciones del Teorema 3.2 para algún valor de  $t$ . Estas se despliegan en la Tabla 3.2.

No obstante, hoy podemos obtener la solución fundamental de (1.5) con  $D = 221833$  empleando el Código A.1 que escribí en Wolfram. El periodo de la fracción continua regular de  $\sqrt{221833}$  es de 171. Por lo que tendríamos que

buscar su reducida número 341, pues, la 170 nos da la solución de la ecuación negativa de Pell. La solución fundamental, con  $A = 1996497$ , es  $\xi_1 =$   
 1007681442724933239300917251033968727911769011251843972633030638824  
 3364337515471860073093358617335473274046124403283656057568900190876  
 777324111063197778044977479217113604638753922702429652993; siendo  
 $\eta_1 = 71316320782165723933158688321153491737695591424281574748569024$   
 921191466800621979429376273239333875965464070510814357080218468394  
 59851623935223598049071080036137273153652448187113363681728.

En el caso de  $\lambda = 79$ , el periodo de  $\sqrt{657385}$  es de 717; y la solución fundamental de (1.5) con  $A = 5916465$  es  $\xi_1 =$

694904996708459680295303255855486327328809178103549076711764008493  
 9290089453101506322807848014115142381483301483095596661242218073158  
 1237709343877565847773595056418037707125383143462465472710310935696  
 1496174418295132387261050631106111895843203150629573831540067054649  
 4963824152282121191667638222431557388994874554101780980936821811539  
 3588240576571947417495546118601823330218894159261256460006843454784  
 3430420952446632651574588780012037422525340918600485071641586171135  
 525863283951521718691753583871616606060025201306368123860655588017  
 0788138617782098434030366979251001463830112240941676979747050760515  
 3618013720463503452075854039932195517587541069542212609014957992273  
 6940807086064001626642158369. Con  $\eta_1 =$   
 2856895037228638496630477653301385151641896095837352696883441630112  
 8948760885621229023410788368780415244582370841339037440495575960089

0698255694858713785889477108985618894402707070351617468641057204389  
 7341505416805817645606183221089415446394081934129708258368683496220  
 7207031779628124539350655941465488095287884510324370888668185607203  
 6191445875187460729136183466122951284697958998224935494874577910320  
 7214469708377554925728599459414986007815186943663850225191061936412  
 0989539625670937611110904855896257678225468569802434683650735673346  
 1948249893860750951474583646162943797068950335015266990722537649258  
 9996166510122846101076754944358614722962849578054543533987946858146  
 337732081320034351546968.

Se puede verificar esta solución fundamental en el portal

<https://defuse.ca/big-number-calculator.htm>

y cualquier otro cálculo que involucre números muy grandes.

En efecto, Lehmer tenía razón: las soluciones de  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$  que surgen de este par son bastante grandes.

Es interesante añadir que cualquier terna solución de (3.7) con los signos de todas sus componentes cambiados, es solución de  $x^3 + y^3 + z^3 = -1$ .

Con respecto a (3.6), Booker (nacido en 1976) y Sutherland (2020) encontraron soluciones no triviales para varios valores de  $k$ , incluida

$$(569936821221962380720)^3 + (-569936821113563493509)^3 + (-472715493453327032)^3 = 3,$$

aplicando mejoras para los métodos empleados hasta entonces para encontrar dichas soluciones. Los cálculos involucraron varios cientos de años-núcleo de procesamiento, pero fueron completados en unas pocas semanas gracias a la red Charity Engine que consta de alrededor de medio millón de computadoras personales (Booker & Sutherland, 2020, p. 15).

Aquí concluimos este capítulo.

## Conclusiones

*“Sin embargo, no hay que olvidar que Gödel siempre se opuso expresamente a dicha concepción de las matemáticas [una concepción formalista o sintáctica de las matemáticas, como la del positivismo lógico y de la Escuela de Hilbert] y que sostuvo, en cambio, un conceptualismo realista o platónico, según el cual las entidades matemáticas (por ejemplo, los conjuntos) existen independientemente de nosotros y que las percibimos gracias a una facultad especial (algo así como una ‘intuición’). De acuerdo con Gödel, las matemáticas no eran, en el fondo, tan diferentes a las ciencias empíricas, pues, buscaban aproximarse al conocimiento de una realidad objetiva y no a algo que fuera una mera construcción o invención nuestra”. (Harada, 2006, p. 37).*

Eduardo Harada, en *Gödelitis: usos y abusos del Teorema de Gödel*, 2006

Los registros de la ecuación diofántica  $x^2 - Dy^2 = 1$  donde  $D \neq k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , se remontan a los antiguos griegos. Sin embargo, las soluciones no triviales conocidas para algunos valores de  $D$  eran más el resultado de métodos de tanteo o simple inspección. Esto radica en que no hay una regla general sencilla para encontrar cuadrados de la forma  $Dy^2 + 1$ , o criterios para elegir algún entero y que resulten en un cuadrado para esta.

Pasaron varios siglos hasta que los matemáticos indios desarrollaron el método chakravala. Este es capaz de resolver toda ecuación de Pell y se basa en la identidad de composición de Brahmagupta. No obstante, se supo que la ecuación de Pell siempre tenía al menos una solución no trivial gracias a Lagrange. Para entonces, Brouncker había aplicado su procedimiento para encontrar las soluciones fundamentales para distintos valores de  $D$ . Siguiendo la intención de Euler al ponerle nombre a la ecuación, debió llamarla *ecuación de Brouncker*. Aunque historiadores de las matemáticas indios prefieren darle mérito a los matemáticos que aportaron al desarrollo de la chakravala, el primer método en funcionar para cualquier caso particular de esta ecuación diofántica.

Aparte de la chakravala, el tratamiento y estudio de la ecuación de Pell impulsó el desarrollo de las fracciones continuas, gracias a los matemáticos indios también. Noción que ya existía antes de que se notara su utilidad para tratar esta ecuación en particular, y que es muy útil como alternativa para representar números reales (aparte de la expansión



decimal) y ha sido empleada en algunas demostraciones de la irracionalidad o trascendencia de algunos números reales como  $\pi$  o  $e$ , así como para generar números trascendentes.

En el Capítulo I, se demuestra que la ecuación de Pell siempre tiene al menos una solución no trivial. La clave del razonamiento es el principio del palomar de Dirichlet que, con una ingeniosa desigualdad, nos garantiza infinitos pares solución. También se demuestra que para la ecuación negativa de Pell existe solución solo cuando es impar el periodo de la fracción continua simple de  $\sqrt{D}$ . La demostración es similar a la que concluye que ciertos convergentes de la fracción continua regular de  $\sqrt{D}$  proporcionan soluciones para la ecuación de Pell.

Dada la solución fundamental, hay formas de prescindir de las fracciones continuas para encontrar todas las demás soluciones no triviales de la ecuación de Pell. Esta emerge en las consideraciones para resolver problemas como: buscar triángulos pitagóricos con lados consecutivos; encontrar números triangulares cuadrados, cuadrados pentagonales o triangulares pentagonales; números triangulares que difieren en 1 de un cuadrado; sumas de enteros consecutivos; sumas de cuadrados consecutivos; encontrar triángulos heronianos de área entera con lados consecutivos; ecuaciones diofánticas dobles; o las aproximaciones racionales a  $\sqrt{D}$ . Varios de estos problemas requirieron saber cómo encontrar soluciones de la ecuación generalizada de Pell cuando existen. También requirieron un buen ojo y parametrizaciones oportunas para reducir el problema a encontrar las soluciones de alguna de las variantes de la ecuación diofántica que es tema principal de este trabajo.

Esto se constata fuertemente en el tratamiento de la ecuación diofántica  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$  que abarca el tercer capítulo y donde se encuentran infinitas parametrizaciones para algunas de sus soluciones. En este capítulo también se expone una forma de aprovechar las soluciones de una ecuación generalizada de Pell determinada para encontrar las soluciones de una ecuación diofántica indeterminada de segundo grado con dos incógnitas, siempre que existan soluciones.

Conviene tener nociones de los métodos que resuelven la ecuación de Pell y de sus implicaciones en caso de que nos crucemos con algún problema en el que esta aparezca. Desde una visión más utilitaria, el manejo de estos problemas podría llegar a ser de interés a algún arquitecto o artista que quiera incluir algunos de estos triángulos enteros en sus obras. En Ciencia de los materiales, probablemente sea relevante encontrar diversas formas de acomodar un número fijo de átomos o moléculas, ya sea en un arreglo cristalino triangular equilátero o uno cuadrado, etcétera; y así mismo,

teorizar o fabricar estructuras interatómicas con el mismo número de partículas en sus cortes transversales, teniendo distintos arreglos poligonales regulares. A un físico de partículas, a un astrónomo o a un cosmólogo también puede serles de interés un método más para aproximar racionalmente  $\sqrt{D}$  tanto como se desee, en caso de que alguna constante adopte este valor en sus mediciones indirectas de altísima precisión.

Hay también sistemas criptográficos basados, entre otras cosas, en la teoría de la ecuación de Pell.

No sabemos cuándo se nos aparecerá una ecuación de Pell salvaje por ahí y este trabajo, con los ya mencionados, aspira a motivar su estudio y tratamiento. Más aún, a la búsqueda y descubrimiento de esos problemas en los que esta pueda surgir, o en los que sea útil alguna de las herramientas relacionadas con la misma.

Una de las conclusiones relevantes de este trabajo, no por el tema en sí, sino por todo lo que exigió: en el estudio y profundización de un tópico, fases básicas para una investigación (a pesar de que en sentido estricto, esta tesis no es una investigación), se puso en evidencia lo crucial que es tener el apoyo o estar afiliado a alguna institución asociada a revistas académicas, editoriales, desarrolladores de software y demás herramientas de las que uno pueda disponer, además de recursos, tiempo y buena retroalimentación para la actividad.

## Recomendaciones

A menudo, mientras más profundizamos en un tema, se abren nuevas preguntas. El conocimiento es una labor abierta al aporte de todos. Por eso exhortamos a quien desee participar en la ampliación de lo ya expuesto a que ponga su granito de arena. Aquí mencionamos algunas rutas a modo de sugerencia con las que optar para realizar algún aporte adicional.

- Se puede exponer el estudio o tratamiento matemático que gira en torno a las ecuaciones diofánticas mencionadas en el Capítulo I: la ecuación del último teorema de Fermat, la ecuación de Ljunggren, la de Catalan-Mihăilescu, la de Ramanujan-Nagell. Así como también cualquier ecuación diofántica que haya retado a los matemáticos o haya generado preguntas que impulsen el avance de las matemáticas.
- Se puede indagar en qué más se ha avanzado en el estudio de la ecuación diofántica  $w^3 + x^3 + y^3 + z^3 = m$  desde la década de 1950, mencionada en el tercer capítulo.
- En el primer capítulo también mencionamos la prueba de Ayyangar que implica que el método chakravala resuelve toda ecuación de Pell. Su publicación requiere un estudio cuidadoso, y probablemente exija además estudiar las bases para comprenderla satisfactoriamente.
- Profundizar en el tratamiento algebraico de la ecuación de Pell con cuerpos cuadráticos. Esto se expone brevemente en *La Ecuación de Pell* de Navarrete y Martínez (2009), pero hay muchos resultados más que pueden servir como tema central de un trabajo de graduación.
- En el Capítulo II, mencionamos los números de Pell y Pell-Lucas, íntimamente relacionados con  $x^2 - 2y^2 = (-1)^k$ . Al estudiar sus propiedades, aparecen identidades de Pell, se relacionan con el triángulo de Pascal, se encuentran funciones generadoras para la familia de estos números, caminos de Pell, triángulos de Pell, polinomios de Pell y de Pell-Lucas, mosaicos de Pell, híbridos Pell-Fibonacci y muchos resultados interesantes adicionales.
- Variando el valor de  $D$  en  $x^2 - Dy^2 = (-1)^k$  se pueden realizar estudios análogos a los del punto anterior, potencialmente. En caso de encontrarse algo interesante, se pueden dar nombres a las familias de números con las propiedades descubiertas, si aún no los tienen.
- El problema abierto de encontrar más triángulos pitagóricos cuyos lados son números triangulares igualmente es una opción. Este problema es mencionado en el segundo capítulo.

- Se puede bosquejar el trabajo de Sillcox sobre el problema de los números triangulares cuadrados pentagonales mencionado en el Capítulo II.
- Otro problema abierto es el de determinar todos los  $D$  para los que la ecuación negativa de Pell tiene solución no trivial. Este problema ha sido abordado por varios matemáticos, quienes han llegado a resultados interesantes. Una discusión de estos resultados es un buen tema de tesis.
- El Capítulo I también menciona que el estudio de los análogos de mayor grado de la ecuación de Pell es un terreno poco explorado y puede llegar a ser nicho de resultados originales. Además, también puede que nuevas técnicas matemáticas surjan de los métodos que resuelvan alguna de estas ecuaciones diofánticas.
- La ecuación de Pell también tiene aplicaciones en la seguridad de la información y su intercambio. Restringirse solo a este tema puede servir para abarcar la discusión completa de una tesis de licenciatura en Matemáticas, y probablemente más.

## Referencias

- A. A. Krishnaswami Ayyangar. (23 de julio de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=A. A. Krishnaswami Ayyangar&oldid=969179130>
- Abraham de Moivre. (15 de septiembre de 2019). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Abraham de Moivre&oldid=978595809>
- Aiyangar, S. R. (2000). *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan* (Vol. 159). American Mathematical Soc..
- Alder, H. L., & Simons, W. H. (1967).  $n$  and  $n + 1$  Consecutive Integers with Equal Sums of Squares. *The American Mathematical Monthly*, 74(1), pp. 28-30.
- Alkawkas, G. (2009). Semi-regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function, *The Ramanujan Journal - RAMANUJAN J.* 25(3).
- Andrew Booker (mathematician). (15 de enero de 2021). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Andrew Booker \(mathematician\)&oldid=1000441693](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Andrew Booker (mathematician)&oldid=1000441693)
- André Weil. (2 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Andr%C3%A9 Weil&oldid=976424282>
- Andrew Wiles. (14 de junio de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Andrew Wiles&oldid=962561904>
- Anglin, W. (1996). Simultaneous Pell Equations. *Mathematics of computation*, 65(213), pp. 355–359.
- Archimedes's cattle problem. (3 de mayo de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedes%27s\\_cattle\\_problem&oldid=954574298](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Archimedes%27s_cattle_problem&oldid=954574298)
- Aryabhata. (7 de Agosto de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Aryabhata&oldid=971631193>

- Atencio, E. A. (2007). *ECUACIÓN DE PELL*. Universidad de Panamá. Panamá, República de Panamá.
- Ayyangar, K. A. A. (1940). Theory of the nearest square continued fraction, *J. Mysore Univ. Sect A. 1*, pp. 21-32.
- Ayyangar, K. A. A. (1941). Theory of the nearest square continued fraction, *J. Mysore Univ. Sect A. 1*, pp. 97-117.
- Barbeau, E. J. (2006). *Pell's equation*. Springer. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Barlow, P. (1811). *An Elementary Investigation of the Theory of Numbers: With Its Application to the Indeterminate and Diophantine Analysis, the Analytical and Geometrical Division of the Circle, and Several Other Curious Algebraical and Arithmetical Problems*. J. Johnson and Company. Londres, Imperio Británico.
- Beiler, A. H. (1964). *Recreations in the Theory of Numbers*. Dover. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Bernard Frénicle de Bessy. (20 de enero de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bernard\\_Fr%C3%A9nicle\\_de\\_Bessy&oldid=936740632](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Bernard_Fr%C3%A9nicle_de_Bessy&oldid=936740632)
- Bhaskara II. (4 de diciembre de 2019). En *Wikipedia*. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Bhaskara\\_II&oldid=121775455](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Bhaskara_II&oldid=121775455)
- Blaise Pascal. (5 de octubre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Blaise\\_Pascal&oldid=981970658](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Blaise_Pascal&oldid=981970658)
- Booker, A. R., & Sutherland, A. V. (2020). *On a question of Mordell*. arXiv preprint arXiv:2007.01209.
- Brahmagupta's identity. (9 de junio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Brahmagupta%27s\\_identity&oldid=961528228](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Brahmagupta%27s_identity&oldid=961528228)
- Carl Friedrich Gauß. (10 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Carl\\_Friedrich\\_Gau%C3%9F&oldid=203544018](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Carl_Friedrich_Gau%C3%9F&oldid=203544018)
- Carl Friedrich Gauss. (9 de septiembre de 2020). En *Wikiquote*. [https://en.wikiquote.org/w/index.php?title=Carl\\_Friedrich\\_Gauss&oldid=2852709](https://en.wikiquote.org/w/index.php?title=Carl_Friedrich_Gauss&oldid=2852709)

- Christian Leiste. (8 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Christian\\_Leiste&oldid=202601589](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Christian_Leiste&oldid=202601589)
- Cicero. (9 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Cicero&oldid=977556392>
- Colbrooke, H. T. (1817). *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of Brahme Gupta and Bhascara*. John Murray. Londres, Imperio Británico.
- Coppel, W. A. (2009). *Number Theory: An introduction to mathematics*. Edición II. Springer. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Cremona, J. E., & Odoni, R. W. K. (1989). Some density results for negative Pell equations; an application of graph theory, *Journal of the London Mathematical Society, Second Series*, 39(1), pp. 16–28.
- D. H. Lehmer. (19 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=D.\\_H.\\_Lehmer&oldid=979224708](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=D._H._Lehmer&oldid=979224708)
- Daniel Bernoulli. (12 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Daniel\\_Bernoulli&oldid=978022359](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Daniel_Bernoulli&oldid=978022359)
- David Fowler (mathematician). (17 de julio de 2018). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=David\\_Fowler\\_\(mathematician\)&oldid=850677708](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=David_Fowler_(mathematician)&oldid=850677708)
- Derrick Henry Lehmer. (2 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Derrick\\_Henry\\_Lehmer&oldid=976291888](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Derrick_Henry_Lehmer&oldid=976291888)
- Dickson, L. E. (1919). *History of the Theory of Numbers*, Carnegie Institution of Washington, Publication No. 256. Dover Publications. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. Princeton University Press. Nueva Jersey, los Estados Unidos de América.
- Diophantus. (10 de noviembre de 2020). En *Wikiquote*. <https://en.wikiquote.org/w/index.php?title=Diophantus&oldid=2889860>

- Édouard Lucas. (13 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%89douard\\_Lucas&oldid=972821342](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%89douard_Lucas&oldid=972821342)
- Eduard Jan Dijksterhuis. (4 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eduard\\_Jan\\_Dijksterhuis&oldid=976731652](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eduard_Jan_Dijksterhuis&oldid=976731652)
- Eneström, G. (1902). Über der Ursprung der Benennung “Pellsche Gleichung”. *Bibliotheca Mathematica*, 3(2), pp. 204-207.
- Euclides. (5 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Euclides&oldid=129037703>
- Eugène Charles Catalan. (6 de abril de 2018). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eug%C3%A8ne\\_Charles\\_Catalan&oldid=835150110](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eug%C3%A8ne_Charles_Catalan&oldid=835150110)
- Euler, L. (1845). *Correspondence, Mathématique et Physique* P. H. Fuss (ed.), Vol. T1 (pp. 35-39). Academia Imperial de Ciencias. San Petersburgo, Imperio Ruso.
- Farkas Bolyai. (27 de marzo de 2020). En *Wikipedia*. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Farkas\\_Bolyai&oldid=124602119](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Farkas_Bolyai&oldid=124602119)
- Fermat, P. (1657). *Œuvres de Fermat, Vol. II*. Gauthier-Villars, 1891-1912. París, República Francesa.
- Fibonacci number. (26 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fibonacci\\_number&oldid=980404449](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fibonacci_number&oldid=980404449)
- Fowler, D. H. (1999). *The Mathematics of Plato’s Academy: A new reconstruction*. Edición II. Clarendon Press. Oxford, Reino Unido de Gran Bretaña e Irlanda del Norte.
- Fraser, P. M. (1972). *Ptolemaic Alexandria*. The Clarendon Press. Oxford, Imperio Británico.
- Greatest common divisor. (26 de octubre de 2014). En *Encyclopedia of Mathematics*. [https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Greatest\\_common\\_divisor&oldid=34063](https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Greatest_common_divisor&oldid=34063)



- Gustaf Eneström. (19 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gustaf\\_Enestr%C3%B6m&oldid=202925253](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gustaf_Enestr%C3%B6m&oldid=202925253)
- Gustav Wertheim (Mathematiker). (12 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gustav\\_Wertheim\\_\(Mathematiker\)&oldid=201816254](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gustav_Wertheim_(Mathematiker)&oldid=201816254)
- Hankel, H. (1965). *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*. Edición II. Georg Olms Verlag. Hildesheim, República Federal de Alemania.
- Harada, E. (2006). Gödelitis: usos y abusos del Teorema de Gödel. *Elementos: Ciencia y cultura*, 13(064), pp. 31-38.
- Harry L. Nelson. (23 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Harry\\_L.\\_Nelson&oldid=969152440](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Harry_L._Nelson&oldid=969152440)
- Heath, T. L. (1964). *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*. Edición II. Dover. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Heinrich Konen. (21 de agosto de 2019). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Heinrich\\_Konen&oldid=911891139](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Heinrich_Konen&oldid=911891139)
- Hendrik Lenstra. (13 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hendrik\\_Lenstra&oldid=978154910](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hendrik_Lenstra&oldid=978154910)
- Hermann Hankel. (13 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermann\\_Hankel&oldid=972666580](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Hermann_Hankel&oldid=972666580)
- Herón de Alejandría. (13 de octubre de 2020). En *Wikipedia*. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Her%C3%B3n\\_de\\_Alejaandr%C3%ADa&oldid=130041036](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Her%C3%B3n_de_Alejaandr%C3%ADa&oldid=130041036)
- Ilan Vardi. (23 de abril de 2020). En *Wikipedia*. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ilan\\_Vardi&oldid=199213571](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ilan_Vardi&oldid=199213571)
- J. C. P. Miller. (20 de noviembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=J.\\_C.\\_P.\\_Miller&oldid=989691882](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=J._C._P._Miller&oldid=989691882)

- Jacobson, M. J., & Williams, H. C. (2009). *Solving the Pell Equation*. Springer. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Jacques Philippe Marie Binet. (22 de septiembre de 2019). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jacques\\_Philippe\\_Marie\\_Binet&oldid=917248042](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Jacques_Philippe_Marie_Binet&oldid=917248042)
- Johann Rahn. (14 de julio de 2020). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Johann\\_Rahn&oldid=967621515](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Johann_Rahn&oldid=967621515)
- John Pell. (30 de julio de 2020). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John\\_Pell&oldid=970279487](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Pell&oldid=970279487)
- John Wallis. (3 de agosto de 2020). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John\\_Wallis&oldid=970893886](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=John_Wallis&oldid=970893886)
- Joseph Ehrenfried Hofmann. (2 de diciembre de 2019). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Joseph\\_Ehrenfried\\_Hofmann&oldid=928913733](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Joseph_Ehrenfried_Hofmann&oldid=928913733)
- Joseph Louis Lagrange. (27 de junio de 2020). En *Wikiquote*.  
[https://en.wikiquote.org/w/index.php?title=Joseph\\_Louis\\_Lagrange&oldid=2816278](https://en.wikiquote.org/w/index.php?title=Joseph_Louis_Lagrange&oldid=2816278)
- Joseph-Louis Lagrange. (7 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*.  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Joseph-Louis\\_Lagrange&oldid=977271556](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Joseph-Louis_Lagrange&oldid=977271556)
- Julius Friedrich Wurm. (7 de diciembre de 2015). En *Wikisource*.  
[https://de.wikisource.org/w/index.php?title=Julius\\_Friedrich\\_Wurm&oldid=2479823](https://de.wikisource.org/w/index.php?title=Julius_Friedrich_Wurm&oldid=2479823)
- Konen, H. (1901). *Geschichte der Gleichung  $t^2 - Du^2 = 1$* . S. Hirzel. Leipzig, Estado Imperial de Alemania.
- Koshy, T. (2014). *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*. Springer. Massachusetts, los Estados Unidos de América.
- Kraitchik, M. (1942). *Mathematical Recreations*. Dover Publications. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Lehmer, D. H. (1956). On the Diophantine Equation  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ . *Journal of the London Mathematical Society*, 31(3), pp. 275-280.

- Lenstra, H. W. (2002). Solving the Pell Equation, *Notices of the American Mathematical Society*, 49, pp. 182–192.
- Leonhard Euler. (11 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard\\_Euler&oldid=972369762](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Leonhard_Euler&oldid=972369762)
- Louis J. Mordell. (3 de diciembre de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Louis\\_J.\\_Mordell&oldid=992158158](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Louis_J._Mordell&oldid=992158158)
- Mahoney, M. S. (1994). *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*. Edición II. Princeton University Press. Nueva Jersey, los Estados Unidos de América.
- Matiyasevich, Y. Y. (1993). *Hilbert's tenth problem*. MIT Press. Massachusetts, los Estados Unidos de América.
- Michael Sean Mahoney. (14 de abril de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Michael\\_Sean\\_Mahoney&oldid=950945516](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Michael_Sean_Mahoney&oldid=950945516)
- Miller, J. C. P., & Woollett, M. F. C. (1955). Solution of the Diophantine Equation  $x^3 + y^3 + z^3 = k$ . *Journal of the London Mathematical Society*, 30(1), pp. 101-110.
- Mordell, L. J. (1953). On the integer solutions of the equation  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = n$ . *Journal of the London Mathematical Society*, 28(4), pp. 500-510.
- Mordell, L. J. (1955). On an Infinity of Integer Solutions of  $ax^3 + ay^3 + bz^3 = bc^3$ . *Journal of the London Mathematical Society*, 30(1), pp. 111-113.
- Nagell, T. (1961). The Diophantine equation  $x^2 + 7 = 2^n$ , *Arkiv. for Mat.* 4, pp. 185–187.
- Navarrete, J. R., & Martínez, N. (2009). *La Ecuación de Pell*. Universidad de Panamá. Panamá, República de Panamá.
- Nelson, H. L. (1980-81). A Solution to Archimedes' Cattle Problem, *Journal of Recreational Mathematics*, Vol. 13(3), pp. 162-176.
- Niven, I., & Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L. (1991). *An introduction to the theory of numbers*. Edición V. John Wiley & Sons. Nueva York, los Estados Unidos de América.

- Paul Tannery. (22 de marzo de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Paul\\_Tannery&oldid=946850215](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Paul_Tannery&oldid=946850215)
- Pierre de Fermat. (18 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pierre\\_de\\_Fermat&oldid=968276808](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pierre_de_Fermat&oldid=968276808)
- Plato. (11 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Plato&oldid=977868208>
- Polígono. (25 de septiembre de 2020). En *Wikipedia*. <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Pol%C3%ADgono&oldid=129553274>
- Preda Mihăilescu. (17 de junio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Preda\\_Mih%C4%83ilescu&oldid=963114811](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Preda_Mih%C4%83ilescu&oldid=963114811)
- Principio del palomar. (9 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Principio\\_del\\_palomar&oldid=127599669](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Principio_del_palomar&oldid=127599669)
- Pythagoras. (3 de octubre de 2020). En *Wikipedia*. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pythagoras&oldid=981583666>
- Quotable Mathematics. (17 de noviembre de 2019). *Bhaskara II - Collected Quotes*. <https://quotablemath.blogspot.com/2019/11/bhaskara-ii-collected-quotes.html>
- Rahn, J. H. (1668). *An Introduction to Algebra*, T. Brancker (traducción al inglés). Moses Pitt. Londres, Reinos de Inglaterra, Escocia e Irlanda.
- Richard Taylor (mathematician). (18 de junio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Richard\\_Taylor\\_\(mathematician\)&oldid=963288820](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Richard_Taylor_(mathematician)&oldid=963288820)
- Scriba, C. J. (1992). IN MEMORIAM Clas-Olof Selenius. *Historia Mathematica*, 19(3), pp. 325-327.
- Shankar Shukla, K. (1954). Acarya Jayadeva, the mathematician, *Ganita* 5(1), pp. 1-20.
- Sierpinski, W. (1988). *Elementary theory of numbers*, (Edición II en inglés por Schinzel, A.). PWN & Elsevier. Varsovia, República Popular de Polonia.

- Srinivasa Ramanujan. (25 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Srinivasa\\_Ramanujan&oldid=974941621](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Srinivasa_Ramanujan&oldid=974941621)
- Srinivasiengar, C. N. (1967). *The history of ancient Indian mathematics*. World Press. Calcuta, República de India.
- Steiner, R., & Tzanakis, N. (1991). Simplifying the solution of Ljunggren's equation  $X^2 + 1 = 2Y^4$ . *Journal of Number Theory*, 37(2), pp. 123-132.
- Tannery, P. (1912-1937). *Sur la mesure de circle d'Archimède*, Mémoires Scientifiques, T. I., Toulouse 1912-1937, pp. 226-253.
- Teón de Esmirna. (19 de Agosto de 2020). En *Wikipedia*. <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Te%C3%B3n de Esmirna&oldid=128598292>
- Thomas Heath (classicist). (21 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Thomas\\_Heath\\_\(classicist\)&oldid=968755261](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Thomas_Heath_(classicist)&oldid=968755261)
- Thomas, I. (1980). *Greek Mathematical Works*, Loeb Classical Library, Vol. 335, 362. Harvard University Press. Massachusetts, los Estados Unidos de América.
- Trygve Nagell. (22 de marzo de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Trygve\\_Nagell&oldid=946877411](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Trygve_Nagell&oldid=946877411)
- User:Robert G. Wilson v. (24 de abril de 2020). En *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®) Wiki*. [https://oeis.org/w/index.php?title=User:Robert\\_G.\\_Wilson\\_v&oldid=1639670](https://oeis.org/w/index.php?title=User:Robert_G._Wilson_v&oldid=1639670)
- Weil, A. (1984). *Number Theory. An Approach Through History from Hammurapi to Legendre*. Birkhäuser. Boston, los Estados Unidos de América.
- Weisstein, E. W. (2003). *Pentagonal Square Triangular Number*. En *MathWorld* – Un Recurso Web de Wolfram. <https://mathworld.wolfram.com/PentagonalSquareTriangularNumber.html>
- Weisstein, E. W. (2005). *Catalan's Conjecture*. En *MathWorld* – Un Recurso Web de Wolfram. <https://mathworld.wolfram.com/CatalansConjecture.html>

- Wertheim, G. (1902). Die Algebra des Johann Heinrich Rahn (1659) und die englische übersetzung derselben. *Bibliotheca Mathematica*, 3(1), pp. 113-116.
- Whitford, E. E. (1912). *The Pell Equation*. College of the City of New York. Nueva York, los Estados Unidos de América.
- Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Annals of mathematics*, pp. 443-551.
- Wilhelm Ljunggren. (19 de julio de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wilhelm\\_Ljunggren&oldid=968478096](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Wilhelm_Ljunggren&oldid=968478096)
- William Brouncker, 2nd Viscount Brouncker. (16 de agosto de 2020). En *Wikipedia*. [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=William\\_Brouncker,\\_2nd\\_Viscount\\_Brouncker&oldid=973386072](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=William_Brouncker,_2nd_Viscount_Brouncker&oldid=973386072)
- Williams, H. C. (2002). Solving the Pell's Equation, *Proceedings of the Millennial Conference on Number Theory*, pp. 397-435, editado por Bennett, M. A. et al. Peter, A. K. Massachusetts, los Estados Unidos de América. (Catálogo de la American Mathematical Society: MR1956288 11D09 (11A55)).
- Williams, H. C., & German, R. A., & Zarnke, C. R. (1965). Solution of the Cattle Problem of Archimedes, *Mathematics of Computation – Math. Comput.*, 19, pp. 671-674.
- Wurm, J. F. (1830). Review of J. G. Hermann's pamphlet: De Archimedis Problemate Bovino, Leipzig, 1828, *Jahrbücher für Philologie und Pädagogik*, 14, pp. 194-202.
- Zaiming, Z. (1993). Problem 502, *College Mathematics Journal* 24, p. 271.

## Anexos

### Apéndice A

**Código A.1.** Programa escrito en Wolfram Mathematica 12 para solucionar ecuaciones de Pell.

```
d = 13; {Slider[Dynamic[n], {0, 20, 1}], Dynamic[n]}
      |desliz... |dinámico |dinámico
{
  ────────────────────, 11}

s = Length[Part[ContinuedFraction[Sqrt[d]], 2]]
      |longitud |parte |fracción continua |raíz cuadrada
t = Numerator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[d], s]]]
      |numerador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
u = Denominator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[d], s]]]
      |denominador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
ContinuedFraction[Sqrt[d], s * n]
      |fracción continua |raíz cuadrada
F = FromContinuedFraction[%]
      |desde fracción continua
R = Numerator[F]^2 - d * Denominator[F]^2
      |numerador |denominador
5
18
5
{3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1,
  1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1}
66 371 158 023 650 982
18 408 047 189 707 445
-1

x = Round[(t + u * Sqrt[d])^n + (t - u * Sqrt[d])^n / 2]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada
y = Round[(t + u * Sqrt[d])^n - (t - u * Sqrt[d])^n / (2 * Sqrt[d])]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada |raíz cuadrada
P = x^2 - d * y^2
66 371 158 023 650 982
18 408 047 189 707 445
-1
```



El Código A.1 del programa fue empleado en Wolfram Mathematica en su versión estable 12.0.0.0 de 64 bits para realizar los cálculos.

Con este programa, dado un entero positivo no cuadrado  $D$ , se puede obtener las primeras 20 soluciones de la ecuación de Pell para  $\sqrt{D}$  con periodo par en su desarrollo en fracción continua simple. De otro modo, nos proporciona las primeras 10 soluciones de (1.5) (cuando  $n$  es par) y las 10 primeras de la ecuación negativa de Pell ( $n$  impar).

El Código A.1 está ejecutado para  $D = 13$  y  $n = 11$ . La primera línea asigna a  $d$  el valor 13, y además establece un deslizador dinámico con el que le daremos a  $n$  el valor deseado de  $n$  (11 en este caso). La siguiente línea lee el periodo más corto del desarrollo en fracción continua simple de  $\sqrt{D}$  y se lo asigna a  $s$ . A continuación, se le asigna a  $t$  el numerador de la reducida en la posición  $s - 1$  (Wolfram empieza a contar las reducidas desde 1 y no desde 0, por eso se pone  $s$  solamente en el argumento de la posición en la función `ContinuedFraction`). De modo similar, guardamos en  $u$  el valor del denominador de dicha reducida. Estos dos últimos pasos tienen el propósito de que el mismo programa calcule la solución fundamental de la ecuación solo con los parámetros de entrada  $d$ ,  $n$ . Luego, calcula la expansión en fracción continua simple de  $\sqrt{D}$  hasta la posición  $sn - 1$ . La línea siguiente obtiene la reducida en dicha posición. Y la línea de asignación de  $R$  es para verificar que el par del numerador y el denominador de esta reducida efectivamente es solución a la ecuación de Pell o su versión negativa. Luego, se aprecian los valores de salida de este proceso.

Las siguientes tres líneas de código calculan soluciones a la ecuación con la idea de emplear (1.39) teniendo la solución fundamental calculada en la primera parte. Y se verifica que también es solución a la misma ecuación. Se puede apreciar que el numerador de la reducida coincide con el valor de  $x$ . También que el del denominador es el mismo que el de  $y$ . Aquí empleamos la función `Round` de redondeo porque esta versión de Wolfram da la respuesta representada algebraicamente y no la expansión decimal del entero, y la función `DecimalForm` tampoco emite la respuesta como se desea. Se comprueba que efectivamente  $x$ ,  $y$  son solución de la ecuación de Pell en la línea de asignación de la variable  $P$ .



## Apéndice B

**Código B.1.** Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar ternas pitagóricas primitivas correspondientes a triángulos pitagóricos con lados consecutivos.

```
{{d, n}, {x, y}}
{{ñ, m} = Values[Solve[x == ñ - m && y == m, {ñ, m}]]
      |valores |resuelve
X = ñ^2 - m^2
Y = 2 * m * ñ
Z = ñ^2 + m^2
Clear[ñ, m]
      |borra
{{2, 10}, {3363, 2378}}

{{5741, 2378}}

27 304 197

27 304 196

38 613 965
```

Este trozo de código corresponde a un cuaderno adicional para solucionar el problema descrito y resuelto en la Sección 2.1. Toma los valores determinados en el Código A.1 detallado en el Apéndice A y trabaja con ellos. Aquí está desplegado para un cálculo particular. La primera línea es para verificar los valores de entrada con los que realiza los cálculos.

La segunda línea de código asigna a  $\tilde{n}$  y a  $m$  los valores que buscamos de  $n$ ,  $m$ , respectivamente, al buscar triángulos pitagóricos primitivos con lados de longitudes consecutivas. Antes de asignarlos, los calcula con la función `Solve`, empleando el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} u = n - m \\ v = m \end{cases},$$

donde  $u$ ,  $v$  son las soluciones para la correspondiente ecuación de Pell, y que en el Código A.1 son asignadas a  $x$ ,  $y$ , respectivamente, por lo que son recicladas en el Código B.1.

Las siguientes tres líneas calculan las medidas de los lados de estos triángulos.

La última borra los valores previos de las variables  $\tilde{n}$ ,  $m$  para que la segunda línea las vuelva a ver como incógnitas en un nuevo cálculo, y las vuelva a asignar a ellas mismas.

Los elementos no resaltados en negrita son los resultados para la ejecución del programa con los valores que se pueden observar en la primera lista (la primera línea sin negrita).

Es sencillo escribir un trozo de código para que el software calcule e imprima una tabla con todos los valores dentro de un rango deseado, pero no es el propósito de este trabajo entrar en tantos detalles respecto al lenguaje de programación de Wolfram.

**Código B.2.** Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números cuadrados triangulares.

```
{{d, n}, {x, y}}
{{ñ, m}} = Values[Solve[x == 2 * ñ + 1 && y == 2 * m, {ñ, m}]]
[valores [resuelve]
ñ * (ñ + 1) / 2
m^2
Clear[ñ, m]
[borra]
{{2, 40}, {1 023 286 908 188 737, 723 573 111 879 672}}
>{{511 643 454 094 368, 361 786 555 939 836}}
130 889 512 058 808 083 293 251 706 896
130 889 512 058 808 083 293 251 706 896
```

Este trozo es muy similar al anterior. Las líneas tercera y cuarta calculan el número triangular y el número cuadrado, respectivamente, para comprobar que efectivamente son el mismo.

Del mismo modo es similar el Código B.3 utilizado para calcular los cuadrados pentagonales.

**Código B.3.** Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números cuadrados pentagonales.

```
{{d, n}, {x, y}}
{{ñ, m} = Values[Solve[x == 6 * ñ - 1 && y == 2 * m, {ñ, m}]]
      |valores |resuelve
ñ * (3 * ñ - 1) / 2
m^2
Clear[ñ, m]
|borra
{{6, 1}, {5, 2}}
{{1, 1}}
1
1
```

El Código B.4 fue el bloque empleado para los cálculos de los números triangulares pentagonales.

**Código B.4.** Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar números triangulares pentagonales.

```

{{d, n}, {t, u}}
M = MatrixForm[MatrixPower[{{t, d * u}, {u, t}}, n - 1].{{1}, {1}}]
  [forma de mat· [potencia matricial]
X = M[[1, 1]]
Y = M[[1, 2]]
{{ñ, m}} = Values[Solve[X == 6 * m - 1 && Y == 2 * ñ + 1, {ñ, m}]]
  [valores [resuelve]
m * (3 * m - 1) / 2
ñ * (ñ + 1) / 2
Clear[ñ, m]
[borra]
{{3, 4}, {2, 1}}

( 71 )
( 41 )

{71}
{41}
{{20, 12}}

210
210

```

En el Código B.4 empleamos la solución fundamental para que en la segunda línea se calcule la potencia de la matriz de (2.14) para los valores necesarios en la Tabla 2.6, a la vez que la multiplicamos por el vector que representa la solución de la ecuación generalizada de Pell que nos toca resolver en este caso. Las dos líneas siguientes toman los valores arrojados por el vector resultante y asigna a la variable X la primera componente de M; a Y, la segunda.

La siguiente línea resuelve los sistemas correspondientes a las parametrizaciones del problema. Los valores de (m, ñ) son los de (m, n). Las que siguen calculan respectivamente el m-ésimo número pentagonal y el n-

ésimo número triangular. Comprobamos que son iguales. Podríamos incluir una línea con una función lógica que evalúe si efectivamente los números poligonales son iguales, especialmente útil si llegamos a trabajar con números muy grandes.

**Código B.5.** Bloque adicional escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar sumas de enteros consecutivos.

```

{{d, n}, {x, y}}
{{ñ, m} = Values[Solve[x == 2 * ñ + 1 && y == 2 * m + 1, {ñ, m}]]
|valores |resuelve
a = Sum[i, {i, 1, m}]
b = Sum[i, {i, m + 1, ñ}]
a == b
Clear[ñ, m]
|borra
{{2, 9}, {1393, 985}}
{{696, 492}}
121278
121278
True

```

El Código B.5 calcula los valores  $m, n$  que resuelven el problema de la Sección 2.4, o sea que satisfacen  $1 + 2 + \dots + m = (m + 1) + (m + 2) + \dots + n$  a partir de las soluciones arrojadas al ejecutar el Código A.1 con los valores que disponemos en su resolución, y las asignan a las variables  $m, \tilde{n}$ , respectivamente.

Posteriormente, calcula y asigna a las variables  $a, b$  los valores correspondientes a las sumas de cada miembro de la igualdad que es condición del problema. La condición lógica  $a == b$  pregunta si  $a$  es igual a  $b$ , notamos que el valor de salida en la ejecución presentada en el Código B.5 es True, como se espera.

**Código B.6.** Programa escrito en Wolfram Mathematica 12 para encontrar sumas de cuadrados consecutivos.

```

b = 3; d = 4 * b; {Slider[Dynamic[n], {0, 41, 1}], Dynamic[n]}
      |desliz... |dinámico |dinámico
{Slider[Dynamic[r], {0, 41, 1}], Dynamic[r]}
      |desliz... |dinámico |dinámico
s = Length[Part[ContinuedFraction[Sqrt[b]], 2]]
      |longitud |parte |fracción continua |raíz cuadrada
t = Numerator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[b], s]]]
      |numerador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
u = Denominator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[b], s]]]
      |denominador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
x = Round[(t + u * Sqrt[b]) ^ n + (t - u * Sqrt[b]) ^ n / 2]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada
y = Round[(t + u * Sqrt[b]) ^ n - (t - u * Sqrt[b]) ^ n / (2 * Sqrt[b])]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada |raíz cuadrada
S = Length[Part[ContinuedFraction[Sqrt[d]], 2]]
      |longitud |parte |fracción continua |raíz cuadrada
v = Numerator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[d], S]]]
      |numerador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
w = Denominator[FromContinuedFraction[ContinuedFraction[Sqrt[d], S]]]
      |denominador |desde fracción continua |fracción continua |raíz cuadrada
V = Round[(v + w * Sqrt[d]) ^ r + (v - w * Sqrt[d]) ^ r / 2]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada
W = Round[(v + w * Sqrt[d]) ^ r - (v - w * Sqrt[d]) ^ r / (2 * Sqrt[d])]
      |entero más próx... |raíz cuadrada |raíz cuadrada |raíz cuadrada
P = x^2 - b * y^2
{{ñ, m} = Values[Solve[x == 2 * ñ + 1 && y == 2 * m, {ñ, m}]}]
      |valores |resuelve
X = ((ñ + 1) * V - (ñ - 1)) / 2 + m * b * W
Y = ñ * (V - 1) / 2 + m * b * W
S1 = Sum[(X + i) ^ 2, {i, 0, ñ - 1}]
S2 = Sum[(Y + i) ^ 2, {i, 0, ñ}]
S1 == S2
Clear[ñ, m]
      |borra

```

El Código B.6 nos permite calcular las sumas de  $n$  cuadrados consecutivos que son iguales a la de otros  $n + 1$  cuadrados consecutivos. Este bloque se ejecuta independientemente de cualquier otro bloque. Su entrada consta del valor libre de cuadrados  $b$  y de las distintas soluciones a

la correspondiente ecuación de Pell (Véase la Sección 2.5) obtenidas con el deslizador dinámico  $n$ .

Las primeras líneas son similares a las del Código A.1 para solucionar cualquier ecuación de Pell con  $D = b$ , obtener la solución fundamental y las primeras soluciones, pero también soluciona la ecuación de Pell con  $D = 4b$  y encuentra las soluciones para el problema de dicha sección, además del valor de ambas sumas. Finalmente, comprueba que estas sumas son iguales.

El deslizador  $n$  nos permite variar el valor de  $n$  que no necesariamente serán iguales ( $n = 2n$  cuando  $\sqrt{D}$  tiene periodo impar en su desarrollo en fracción continua regular), pues,  $n$  depende de la solución que estemos calculando con el deslizador. El deslizador  $r$  nos permite encontrar más soluciones para el mismo valor de  $n$  (sin variar el deslizador  $n$ , claro está).

**Código B.7.** Bloque escrito en Wolfram Mathematica 12 para calcular aproximaciones racionales a  $\sqrt{D}$  y su error.

```
{d, n}
{x, y}
A = N[x / y, 20]
  [valor numérico]
e = N[Abs[Sqrt[x^2 - (-1)^n] - x] / y, 16]
  [raíz cuadrada]
{37, 1}
{6, 1}
6.00000000000000000000
0.08276253029821969
```

El sencillo Código B.7 nos calcula la expansión decimal de las reducidas correspondientes a las soluciones de las ecuaciones de Pell con el fin de aproximar  $\sqrt{D}$ . También arroja el resultado para el error de dicha aproximación.

Luis  
Monterrosa

Firmado digitalmente por Luis Monterrosa  
 DN: C=PA, OU=Escuela de Matemática,  
 O=Universidad de Panamá, CN=Luis  
 Monterrosa,  
 E=luiseneluniversoelegante@gmail.com  
 Razón: Soy el autor de este documento  
 Ubicación: Página 162, Final del documento  
 Fecha: 2021.05.18 21:09:21-05'00'  
 Foxit Reader Versión: 10.1.3