

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
ESCOLA DE ENGENHARIA - CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

**ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR DISTRIBUIÇÃO NORMAL
GENERALIZADA (GNDO) PARA PROBLEMAS DE ENGENHARIA
ESTRUTURAL**

por

Daniel Moreira Dufloth

Monografia apresentada ao Departamento de Engenharia Mecânica da Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Engenheiro Mecânico.

Porto Alegre, setembro de 2023.

CIP - Catalogação na Publicação

Dufloth, Daniel Moreira
ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR DISTRIBUIÇÃO NORMAL
GENERALIZADA (GNDO) PARA PROBLEMAS DE ENGENHARIA
ESTRUTURAL./Daniel Moreira Dufloth. -- 2023.
15 f.
Orientador : Herbert Martins Gomes.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação) --
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Escola de
Engenharia, Curso de Engenharia Mecânica, Porto Alegre, BR-
RS, 2021.

1. Otimização Estrutural. 2. Distribuição Normal
Generalizada. 3. Treliças. 4. Meta-heurística. I. Gomes,
Herbert Martins, orient. II. Título.

Elaborada pelo Sistema de Geração Automática de Ficha Catalográfica da UFRGS com os
dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Daniel Moreira Duflath

**ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR DISTRIBUIÇÃO NORMAL GENERALIZADA
(GNDO) PARA PROBLEMAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL.**

ESTA MONOGRAFIA FOI JULGADA ADEQUADA COMO PARTE DOS
REQUISITOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
ENGENHEIRO MECÂNICO
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELA BANCA EXAMINADORA DO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Prof. Dr. Ignácio Iturrioz
Coordenador do Curso de Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Herbert Martins Gomes

Comissão de Avaliação:

Prof. Dr. Herbert Martins Gomes (Presidente)

Prof^a. Dra. Letícia Fleck Fadel Miguel

Prof. Dr. Walter Jesus Paucar Casas

Porto Alegre, setembro de 2023.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Herbert Martins Gomes pela orientação, dedicação e disponibilidade durante todas as etapas da elaboração deste trabalho.

Aos familiares e amigos que me apoiaram e tornaram tudo isso possível.

ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO POR DISTRIBUIÇÃO NORMAL GENERALIZADA (GNDO) PARA PROBLEMAS DE ENGENHARIA ESTUTURAL

Daniel Moreira Dufloth
daniel.dufloth@ufrgs.br

Resumo. Problemas de otimização podem ser resolvidos por diversos métodos clássicos e/ou estocásticos. Para problemas onde os critérios de suavidade, diferenciabilidade e convexidade não podem ser assegurados de antemão, os métodos meta-heurísticos resultam, em geral, em melhores soluções. Entretanto diversos destes algoritmos necessitam de ajustes em seus parâmetros, o que pode demandar testes iniciais para descobrir qual a melhor combinação destes parâmetros para obter bons resultados. Neste ponto, um algoritmo que não precise da definição de parâmetros heurísticos se torna bastante atrativo. A proposta do GNDO (Generalized Normal Distribution Optimization) é de não ter parâmetros heurísticos, de forma que o próprio algoritmo os defina durante a otimização. Neste trabalho serão comparados alguns exemplos benchmark de treliças da literatura, utilizando-se o algoritmo GNDO e algumas outras meta-heurísticas, avaliando sua eficiência e robustez frente a múltiplas inicializações.

Palavras-chave: otimização estrutural; distribuição normal generalizada; treliças; meta-heurística.

Generalized normal distribution (GNDO) optimization algorithm for engineering problems

Abstract. Optimization problems can be solved by several classical and/or stochastic methods. For problems where the criteria of smoothness, differentiability and convexity cannot be guaranteed in advance, metaheuristic methods usually result in better solutions. However, many of these algorithms require adjustments to their parameters, which may require initial tests to find out what is the best combination of these parameters to obtain good results. At this point, an algorithm that does not need heuristic parameter setting is very important. The proposal of Generalized Normal Distribution Optimization GNDO is not to have heuristic parameters, so that the algorithm itself defines them along the optimization process. In this paper, we will compare some benchmark examples of truss structures from literature using the GNDO algorithm and some other metaheuristics, evaluating its efficiency and robustness against multiple initializations.

Keywords: structural optimization; generalized normal distribution; truss structures; metaheuristics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação.....	1
1.2	Objetivos	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	1
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	2
3.1	O Algoritmo <i>Generalized Normal Distribution Optimization</i> (GNDO).....	2
3.1.1	Fase de exploração local	2
3.1.2	Fase de exploração global	3
3.2	Pseudocódigo para a implementação do GNDO.....	3
3.3	Análise estrutural e modal de treliças espaciais.....	4
3.4	Metodologia	5
4	RESULTADOS.....	6
4.1	Exemplo de otimização de uma treliça plana de 10 barras com massas adicionais em alguns nós e com restrições de frequências naturais	6
4.2	Exemplo de otimização de uma treliça espacial de 72 barras com massas adicionais em alguns nós e com restrições de frequências naturais	8
4.3	Exemplo de otimização de uma treliça espacial de 200 barras com massas adicionais e com restrições de frequências naturais	11
5	CONCLUSÃO	14
5.1	Sugestões para trabalhos futuros.....	14
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	15
	ANEXO.....	17

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Impacto que a (a) exploração local e (b) global têm em cada solução candidata no GNDO (adaptado de Zhang, 2020).....	4
Figura 2 – Treliça plana de 10 barras com massas adicionadas (m_i) aos nós (Adaptado de Sedaghati, 2005).	6
Figura 3 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 10 barras).....	7
Figura 4 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência. (Problema treliça 10 barras).....	8
Figura 5 – Treliça espacial de 72 barras com massas adicionadas (m_i) aos nós (Adaptado de Sedaghati, 2005).....	9
Figura 6 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 72 barras).....	10
Figura 7 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência (Problema treliça 72 barras).....	10
Figura 8 – Esquema para a treliça plana de 200 elementos e suas dimensões, nós e elementos (Adaptado de Kaveh, 2016).	11
Figura 9 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 200 barras).....	12
Figura 10 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência (Problema treliça 200 barras).....	14

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pseudocódigo do Algoritmo GNDO padrão (Adaptado de Zhang et al., 2020).	4
Tabela 2 – Comparação de resultados de áreas (cm ²) para exemplo treliça 10 barras e o GNDO.	7
Tabela 3 – Comparação de resultados de áreas (cm ²) para exemplo treliça espacial de 72 barras.....	9
Tabela 4 – Comparação de resultados de áreas (cm ²) para exemplo treliça espacial de 200 barras..	13

1 INTRODUÇÃO

A otimização desempenha um papel fundamental na engenharia, pois permite encontrar soluções eficientes e econômicas para uma ampla gama de problemas. Através da otimização, é possível maximizar o desempenho de um sistema, minimizar custos, reduzir o consumo de energia, otimizar o uso de recursos, melhorar a qualidade de um produto, entre outras coisas.

A otimização está presente em diversas áreas da engenharia, como engenharia civil, engenharia mecânica, engenharia elétrica, engenharia de produção, e em cada uma dessas áreas, a otimização desempenha um papel específico e essencial. Por exemplo, na engenharia civil, a otimização pode ser usada para projetar estruturas mais eficientes, reduzir o consumo de materiais e minimizar os custos de construção. Na engenharia mecânica, a otimização pode ser aplicada para melhorar o desempenho de máquinas e equipamentos, reduzir o peso de componentes sem comprometer a segurança e otimizar processos de fabricação.

Some-se a isto o fato de que para lidar de forma prática com problemas complexos que envolvem múltiplas variáveis, restrições e objetivos conflitantes, a otimização se faz presente e necessária. Com a ajuda de técnicas e algoritmos de otimização, é possível explorar o espaço de soluções, encontrar a melhor configuração possível e tomar decisões embasadas nestas informações.

1.1 Motivação

Embora existam várias abordagens meta-heurísticas, algumas características desejáveis comuns a esses algoritmos incluem a exploração do espaço de procura juntamente com características de refinamento da busca, a necessidade de terem um número pequeno de parâmetros para serem ajustados para o bom desempenho do algoritmo, terem a menor quantidade de chamadas à função objetivo reduzindo o custo computacional, possuírem robustez em encontrar repetidamente bons valores independente de estimativas iniciais da qual partam para encontrar este ótimo, e a sua facilidade em implementação em termos de algoritmos.

Neste ponto, a literatura tem mostrado que o GNDO (*Generalized Normal Distribution Optimization*) é um dos algoritmos que apresenta grande parte destas características desejáveis, principalmente a da ausência de parâmetros heurísticos para serem ajustados, facilitando o seu uso nos mais diversos tipos de problemas.

1.2 Objetivos

Este trabalho consiste na implementação de um algoritmo GNDO para a solução de alguns problemas *benchmark* da literatura em Engenharia, mais especificamente a minimização da massa de estruturas treliçadas com restrições de frequências naturais e sua comparação de desempenho com outras meta-heurísticas existentes. Assim, é feita a implementação em algoritmo da metodologia do GNDO, a partir das equações indicativas no seu trabalho original e acoplada a problemas selecionados de engenharia estrutural para otimização. Outros algoritmos serão utilizados para comparar em robustez e eficácia os resultados obtidos com o uso do GNDO.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Métodos meta-heurísticos vêm sendo estudados para problemas de otimização com características estocásticas há bastante tempo. O método GNDO foi proposto por Zhang et al., 2020, baseado no modelo de distribuição normal, como uma alternativa que não precisasse da definição de parâmetros heurísticos, bastando apenas o tamanho da população e critérios para finalização. O objetivo é o da sua aplicação na obtenção de parâmetros desconhecidos em modelos de sistemas fotovoltaicos, especificamente os parâmetros de modelos de diodos únicos e diodos duplos em sistema fotovoltaico. Os autores relatam resultados excelentes quando comparados com algoritmos

do estado da arte em otimização meta-heurística. Sendo comparados algoritmos padrões populares assim como algoritmos avançados, tendo suplantado os mesmos em suítes de testes com eficiência (menos chamadas à função objetivo) e robustez (menor dispersão dos resultados para múltiplas rodadas), sendo o resultado do teste estatístico Wilcoxon de postos sinalizados o parâmetro indicativo da superioridade do algoritmo.

Uma outra aplicação do método GNDO, agora na área médica, é feita por Abdel-Basset et al., 2021. A maximização da classificação de dados médicos como doenças cardíacas, câncer de pele e mama são utilizadas do repositório aberto UC1 (Dua e Graff, 2019) da Universidade da Califórnia. Os autores introduzem uma nova técnica chamada seleção de características que propõe um aprimoramento do GNDO para evitar a alta velocidade de convergência do método, chamado de *Improved General Normal Distribution Optimization* (IGNDO), obtendo melhores resultados. Outros aperfeiçoamentos já foram aplicados ao método, como o dinâmico (Tubishat et al., 2022) e o discreto-contínuo (Montoya et al., 2022).

Khodadadi e Mirjalili, 2022, avaliaram o GNDO para otimização do peso de treliças com restrições de frequência natural, comparando-o com outros algoritmos meta-heurísticos. Os exemplos compreenderam uma treliça espacial de 72 barras, um domo treliçado de 120 barras e uma treliça plana de 200 barras. Eles ressaltam no trabalho a estabilidade, confiabilidade e eficiência do método nos problemas analisados, onde sistematicamente o GNDO resultou quando não maior eficiência (mesmo resultado indicado pela literatura, entretanto com um menor número de chamadas à função objetivo), melhor acurácia e robustez (resultados da função objetivo melhor que os indicados pela literatura e sistematicamente com desvios-padrão menores para múltiplas inicializações do algoritmo).

Zhang, 2023 propôs uma modificação do GNDO chamado de *Elite-Driven General Normal Distribution Optimization* (EDGNDO), utilizando três operadores de busca local e três de busca global, baseados num procedimento de busca em banco de dados salvo das soluções de elite. Ressaltam que a melhoria proposta ainda mantém o algoritmo com apenas tamanho da população e critério de finalização como parâmetros para utilizar o método. A suíte de testes CEC 2017 foi utilizada, a qual contém problemas unimodais e multimodais, e os resultados indicaram a superioridade do EDGNDO frente ao GNDO padrão.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 O Algoritmo *Generalized Normal Distribution Optimization* (GNDO)

O algoritmo GNDO é baseado na teoria da distribuição normal proposta por Zhang, 2020. O valor médio de uma distribuição normal de um vetor de variáveis está relacionado à média da população de funções objetivo de soluções potenciais de indivíduos. O valor mais provável e mais frequente (moda) está associado ao melhor valor até então da distribuição normal. A dispersão das soluções potenciais está associada ao desvio padrão da distribuição normal. Assim, o algoritmo proposto pelo autor possui duas fases: uma de exploração global e outra de exploração local, as quais alternam de forma aleatória durante o processo de procura.

3.1.1 Fase de exploração local

Para a fase de exploração local, a atualização da movimentação das soluções locais é feita conforme:

$$\mathbf{v}_i^t = \boldsymbol{\mu}_i^t + \boldsymbol{\delta}_i^t \times \boldsymbol{\eta}_i^t \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

com N sendo o tamanho da população, t a iteração atual, $\boldsymbol{\mu}_i^t$ o vetor de médias das posições das soluções potenciais, $\boldsymbol{\delta}_i^t$ é o desvio padrão generalizado do indivíduo i na iteração t , $\boldsymbol{\eta}_i^t$ é o fator de penalização para o indivíduo i na iteração t , e finalmente \mathbf{v}_i^t é o vetor tentativo de movimentação para

uma nova posição da solução potencial i . Cada um dos parâmetros colocados anteriormente é definido como:

$$\boldsymbol{\mu}_i^t = \frac{1}{3}(\mathbf{x}_i^t + \mathbf{x}_{best}^t + \mathbf{M}_i^T), \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\delta}_i^t = \sqrt{\frac{1}{3}[(\mathbf{x}_i^t - \boldsymbol{\mu}_i^t)^2 + (\mathbf{x}_{best}^t - \boldsymbol{\mu}_i^t)^2 + (\mathbf{M}_i^T - \boldsymbol{\mu}_i^t)^2]}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\eta}_i^t = \begin{cases} \sqrt{-\log(\beta_1)} \times \cos(2\pi\beta_2) & \text{se } \phi_1 \leq \phi_2 \\ \sqrt{-\log(\beta_1)} \times \cos(2\pi\beta_2 + \pi) & \text{se } \phi_1 > \phi_2 \end{cases}, \quad (4)$$

sendo \mathbf{x}_{best}^t a posição da melhor solução candidata na iteração t , \mathbf{M}_i^T a posição média das soluções candidatas na iteração t avaliada como $\mathbf{M}_i^T = (1/N) \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i^t$. Também, semelhante como ocorre no algoritmo genético e com objetivo de não perder a melhor solução encontrada ao passar-se pelos processos anteriores, implementa-se o mecanismo de seleção do tipo: $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t$ se $f(\mathbf{v}_i^t) < f(\mathbf{x}_i^t)$ e $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t$ se $f(\mathbf{v}_i^t) \geq f(\mathbf{x}_i^t)$.

3.1.2 Fase de exploração global

Para a fase de exploração global, (Zhang, 2020) indica a seguinte forma de movimentação:

$$\mathbf{v}_i^t = \mathbf{x}_i^t + \varphi \times (|F_1| \times \mathbf{v}_{random,1}^t) + (1 - \varphi) \times (|F_2| \times \mathbf{v}_{random,2}^t) \quad (5)$$

A segunda parcela à direita da igualdade corresponde ao termo de exploração local e o terceiro termo à exploração global. F_1 e F_2 correspondem a números aleatórios com distribuição normal padrão (média 0 e desvio padrão 1) e φ é um número aleatório uniforme entre 0 e 1. $\mathbf{v}_{random,1}^t$ e $\mathbf{v}_{random,2}^t$ são vetores aleatórios gerados da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{random,1}^t = \begin{cases} \mathbf{x}_i^t - \mathbf{x}_p^t & \text{se } f(\mathbf{v}_i^t) < f(\mathbf{x}_p^t) \\ \mathbf{x}_p^t - \mathbf{x}_i^t & \text{se } f(\mathbf{v}_i^t) \geq f(\mathbf{x}_p^t) \end{cases}, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_{random,2}^t = \begin{cases} \mathbf{x}_q^t - \mathbf{x}_r^t & \text{se } f(\mathbf{v}_q^t) < f(\mathbf{x}_r^t) \\ \mathbf{x}_r^t - \mathbf{x}_q^t & \text{se } f(\mathbf{v}_q^t) \geq f(\mathbf{x}_r^t) \end{cases}, \quad (7)$$

onde p , q , e r são inteiros diferentes ($p \neq q \neq r$) selecionados aleatoriamente dentre o número de soluções potenciais (N). Novamente o mecanismo de seleção final na fase de exploração local é empregado, ou seja, $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{v}_i^t$ se $f(\mathbf{v}_i^t) < f(\mathbf{x}_i^t)$ e $\mathbf{x}_i^{t+1} = \mathbf{x}_i^t$ se $f(\mathbf{v}_i^t) \geq f(\mathbf{x}_i^t)$.

Ainda a partir de uma probabilidade aleatória uniforme de troca de exploração local para global, p_s , ambas estratégias são alternadas durante o processo de otimização.

3.2 Pseudocódigo para a implementação do GNDO

A seguir indica-se na Tabela 1 o pseudocódigo de implementação do algoritmo GNDO com seus passos principais, adaptado de Zhang, 2020. Na Figura 1, resumidamente indica-se o impacto que a estratégia do GNDO tem sobre a exploração local e a global na atualização de cada solução candidata. Percebe-se que a exploração local é muito parecida com a estratégia utilizada com o algoritmo PSO (*Particle Swarm Optimization*), com a diferença que se utiliza a posição média das soluções candidatas ao invés da melhor solução guardada pela memória da solução candidata do indivíduo i .

Para a fase de exploração global a estratégia lembra a mesma utilizada pelo algoritmo DEA (*Differential Evolution Algorithm*), buscando a informação de 3 posições de soluções aleatórias da população de soluções. A ideia de alternar as duas estratégias evita que as tendências de movimento da solução pelas duas estratégias sejam rivalizadas e façam perder sua efetividade.

Tabela 1 – Pseudocódigo do Algoritmo GNDO padrão (Adaptado de Zhang et al., 2020).

Algoritmo GNDO	
(a)	Definições iniciais: Tamanho da população N , Limites superiores e inferiores dos vetores das variáveis $\mathbf{x}_{min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{max}$, defina a iteração atual como $t=0$.
(b)	Atualize o número de iterações, $t \leftarrow t + 1$;
(c)	Inicialização aleatória da população inicial N e avaliação das respectivas funções, $f_i(\mathbf{x}_i^t)$;
(d)	Atualize o número de chamadas à função, $nfun \leftarrow nfun + N$;
(e)	Definição da melhor solução até então, \mathbf{x}_{best}^t ;
(f)	Enquanto um certo critério de parada não seja atingido faça:
(g)	Para $i=1$ até N
(h)	Gere uma probabilidade de troca de procura local para global, p_s .
(i)	Se $p_s > 0,5$
(j)	Faça a exploração local (Equações (1) a (4));
(k)	Caso contrário
(l)	Faça a exploração global (Equações (5) a (7));
(m)	Fim do Se
(n)	Fim do Para
(o)	Atualize o número de avaliações da função $nfun \leftarrow nfun + N$;
(p)	Atualize da melhor solução até então, \mathbf{x}_{best}^t ;
(q)	Atualize o número de iterações, $t \leftarrow t + 1$;
(r)	Fim do Enquanto

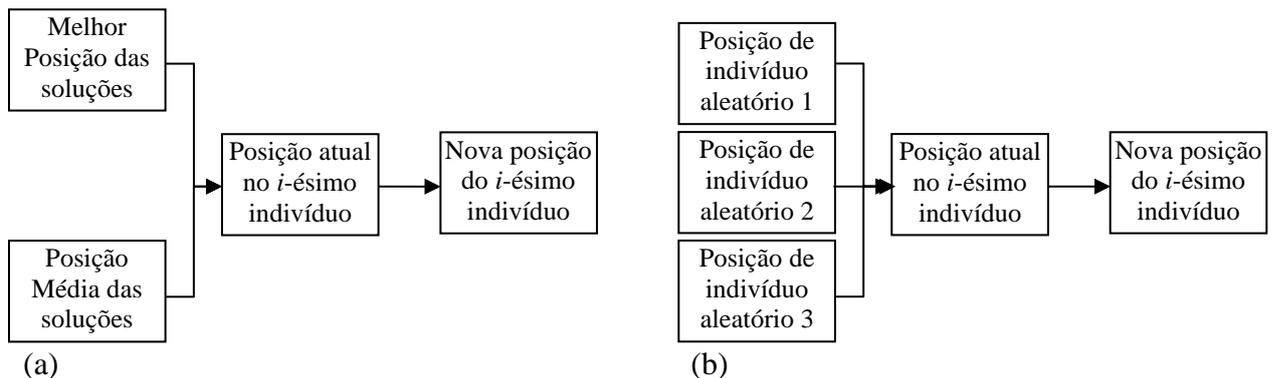


Figura 1 – Impacto que a (a) exploração local e (b) global têm em cada solução candidata no GNDO (adaptado de Zhang, 2020).

3.3 Análise estrutural e modal de treliças espaciais

Para as simulações numéricas apresentadas neste trabalho, como as estruturas analisadas serão apenas de treliças, uma formulação em elementos finitos com elementos de barras rotuladas será empregada. Este tipo de modelagem permite determinar as forças de tração e compressão nas barras, seus deslocamentos e suas frequências naturais. Assim, para trabalhar de forma genérica, utilizou-se elementos de treliça espacial com 3 graus de liberdade por nó. Com o método da rigidez, um sistema de equações é resolvido para determinar as incógnitas do problema como deslocamento, reações de apoio e forças nas barras exigida em cada nó. O comportamento individual de cada barra é expresso a partir de suas equações constitutivas e de compatibilidade. Uma vez obtida a matriz de rigidez do elemento no sistema de coordenadas local, esta é rotacionada para o sistema de coordenadas global para montar as equações de equilíbrio. A matriz de rigidez no sistema de coordenadas global é definida como (Ferreira, 2009):

$$[\mathbf{K}_e] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{R}], \quad (8)$$

onde $[\mathbf{K}_e]$ é a matriz de rigidez no sistema global do elemento, $[\mathbf{R}]$ é a matriz de rotação e $[\mathbf{k}]$ a matriz de rigidez em coordenadas locais. Para a obtenção da matriz global $[\mathbf{K}]$ da estrutura procede-se à superposição das matrizes $[\mathbf{K}_e]$ de cada elemento barra, utilizando-se a numeração dos graus de liberdades efetivos. O sistema de equações de equilíbrio de forças para barras de treliças espaciais, para um vetor de carregamentos externos $\{\mathbf{F}\}$ pode ser escrito como:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (9)$$

onde $\{\mathbf{U}\}$ é o vetor que contém os deslocamentos para cada grau de liberdade da estrutura.

Para a verificação das frequências naturais e modos de vibração das estruturas treliçadas uma análise modal da estrutura pode ser feita sendo possível determinar as frequências naturais e os modos de vibração. Esta análise é necessária visto que os exemplos que serão vistos têm como restrição de desigualdade os valores das frequências naturais da estrutura. A matriz de massa para o elemento é avaliada de acordo com a formulação consistente para barras de treliças espaciais como indicado em Ferreira, 2009. A partir da expressão da energia cinética associada ao elemento, obtém-se a matriz de massa consistente para o sistema global de coordenadas:

$$[\mathbf{M}_e] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{m}] [\mathbf{R}], \quad (10)$$

onde $[\mathbf{M}_e]$ é a matriz consistente do elemento em coordenadas globais, e $[\mathbf{m}]$ a matriz de massa consistente em coordenadas locais. Assim, resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores a seguir, obtém-se as frequências e modos naturais de vibração:

$$([\mathbf{K}] - [\lambda][\mathbf{M}])[\Phi] = [\mathbf{0}], \quad (11)$$

onde $[\lambda] = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$ é a matriz diagonal com os autovalores (quadrado da frequência natural) de cada modo i , e $[\Phi] = [\{\phi_1\}, \dots, \{\phi_n\}]$ é a matriz de autovetores correspondentes aos autovalores, onde em cada coluna há o vetor das formas modais dos modos i , ou seja, da forma natural de vibrar. No Anexo deste trabalho estão as respectivas matrizes para o caso de treliça espacial.

3.4 Metodologia

Serão realizados testes em problemas *benchmark* da literatura utilizando o algoritmo implementado neste trabalho. Para cada exemplo se fará uma campanha de testes independentes para avaliar a robustez do algoritmo frente a múltiplas reinicializações partindo-se de soluções iniciais diferentes, sendo apresentados ao final as médias, desvios-padrão, valores máximos e mínimos para estes testes. Quando possível será comparado o resultado final com resultados apresentados na literatura para verificar a robustez do algoritmo implementado.

Desta forma, os problemas aqui analisados podem ser colocados como um problema de otimização para treliças definido matematicamente como a minimização da massa da estrutura, segundo Sedaghati (2005), representada por:

$$\text{Min}\{M(A) = \sum_{i=1}^{N_e} \rho_i L_i A_i\}, \quad (12)$$

onde ρ_i, L_i e A_i são a densidade, o comprimento e a área da seção transversal do i -ésimo elemento, respectivamente. Neste caso, a estrutura está sujeita a N_ω restrições de frequência natural, dadas por:

$$g_k(A) = \tilde{\omega}_k^2 - \omega_k^2 \leq 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N_\omega, \quad (13)$$

onde ω_k e $\tilde{\omega}_k$ são a frequência natural e seu valor especificado do k -ésimo elemento, respectivamente. O problema é analisado através de elementos finitos para então ser incorporado ao processo de otimização. Neste trabalho o método das penalizações é empregado para levar em conta as restrições

impostas. Assim a função objetivo é “penalizada”, sendo acrescentada do valor do grau de violação da restrição dado pela Equação (13) e indicado na Equação (14):

$$M^*(A) = M(A) + \gamma \times \max (g_k(A), 0), \quad (14)$$

onde M^* é a função penalizada, γ é um fator de penalização (10^3 neste trabalho) e $\max (g_k(A), 0)$ apenas contabiliza a restrição que for violada.

4 RESULTADOS

4.1 Exemplo de otimização de uma treliça plana de 10 barras com massas adicionais em alguns nós e com restrições de frequências naturais

Neste exemplo *benchmark* da literatura (Sedaghati, 2005), uma treliça plana de 10 barras com massas concentradas em alguns nós é otimizada quanto ao seu peso, tendo como restrições as 3 primeiras frequências naturais. A Figura 2 indica a geometria desta treliça, onde $L=9,144$ m (360 in), $E=6,89 \times 10^{10}$ Pa, densidade de $\rho = 2770$ kg/m³ e massas concentradas (círculos pretos) de $m_i=454$ kg.

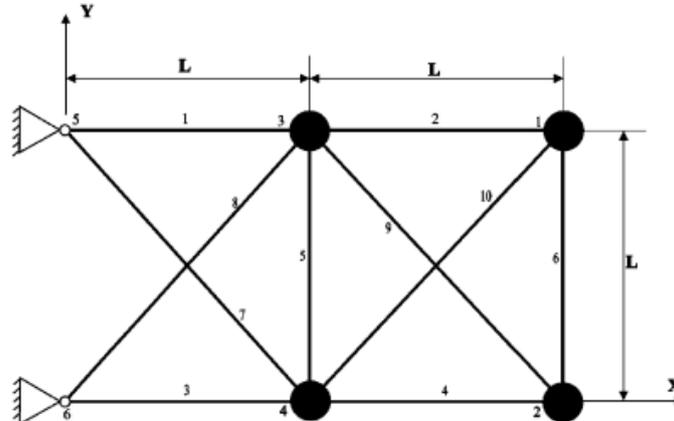


Figura 2 – Treliça plana de 10 barras com massas adicionadas (m_i) aos nós (Adaptado de Sedaghati, 2005).

No projeto inicial todas as seções transversais têm áreas de $129,03$ cm² (20 in²) e a massa inicial é de $3810,39$ kg (8392,94 lbm). A estrutura é projetada com a restrição de que tenha a primeira frequência fundamental igual a 7 Hz, a segunda maior ou igual a 15 Hz e a terceira frequência fundamental maior ou igual a 20 Hz. O resultado reportado pelo autor para a mínima massa foi de $537,01$ kg (1182,85 lbm) (Tabela 2). O valor mínimo de área de seção transversal admitido é de $64,52$ mm² (0,1 in²).

Foram realizadas 30 rodadas independentes do algoritmo utilizando apenas 50 partículas (único parâmetro ajustável do método) com um critério de tolerância para parada de 1×10^{-8} para o vetor de variáveis de projeto ótimas. Na Tabela 2 encontram-se os resultados obtidos com o algoritmo aqui implementado do GNDO e dois algoritmos baseados em gradientes (SQP) indicado em Sedaghati (2005), o Método da Força (FM) e o Método dos Deslocamentos (DM). A comparação restringe-se a estes dois métodos por serem aqueles presentes no artigo original, com propriedades e geometrias originais. Há uma grande confusão originada em trabalhos posteriores devido à adoção de um módulo elástico para o alumínio diferente daquele indicado no artigo original de Sedaghati, 2005.

Observa-se o bom resultado encontrado pelo GNDO neste exemplo. Na Figura 3(a) é apresentada a curva de convergência típica para a melhor rodada independente para a função objetivo de massa. Na Figura 3(b) é mostrado o gráfico de convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações.

Tabela 2 – Comparação de resultados de áreas (cm²) para exemplo treliça 10 barras e o GNDO.

Restrições Elementos	Método		
	DM, Sedaghati (2005)	FM, Sedaghati (2005)	GNDO (Este trabalho)
	$f_1, f_2, f_3=7,00; 17,62; 20,00$	$f_1, f_2, f_3=7,00; 17,62; 20,00$	$f_1, f_2, f_3=7,00; 16,18; 20,00$
1	38,619	38,245	35,636
2	18,239	9,916	14,918
3	38,252	38,619	35,637
4	9,910	18,232	14,919
5	4,419	4,419	6,45
6	4,200	4,194	4,623
7	24,110	20,097	24,065
8	20,084	24,097	24,068
9	11,452	13,890	12,585
10	13,897	11,451	12,585
Massa (kg)	537,01	537,01	532,02
Máximo (kg)	-	-	538,04
Média (kg)	-	-	533,30
Desvio Padrão (kg)	-	-	0,00294
No. Iterações	637	705	1479
Tempo de CPU(s)	25,96	21,62	21,63

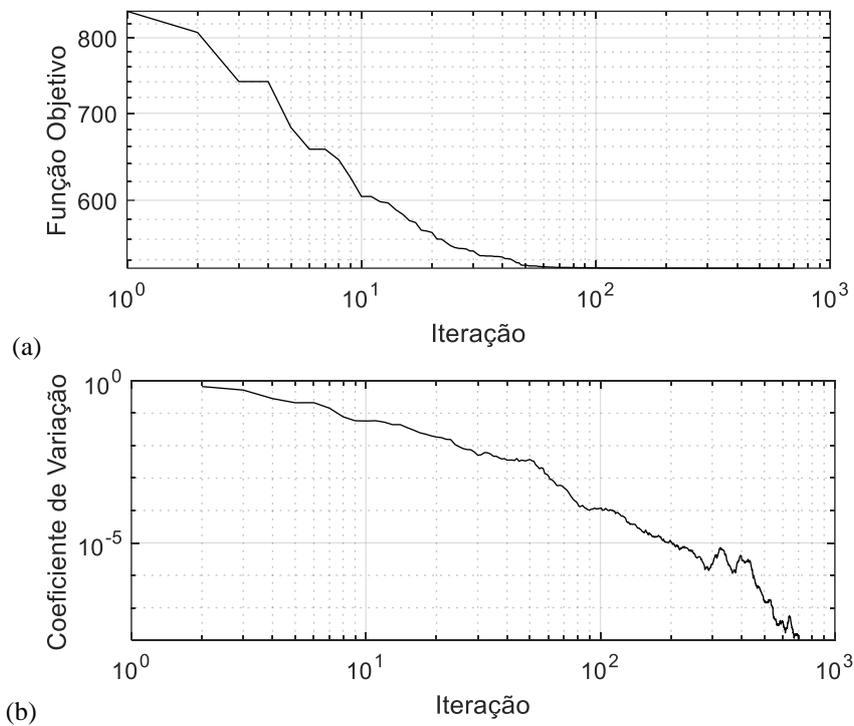


Figura 3 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 10 barras).

Percebe-se que ao final das iterações do algoritmo GNDO, a maior parte das soluções encontram-se muito próximas umas das outras (Figura 4a e b), indicando a convergência para uma solução final.

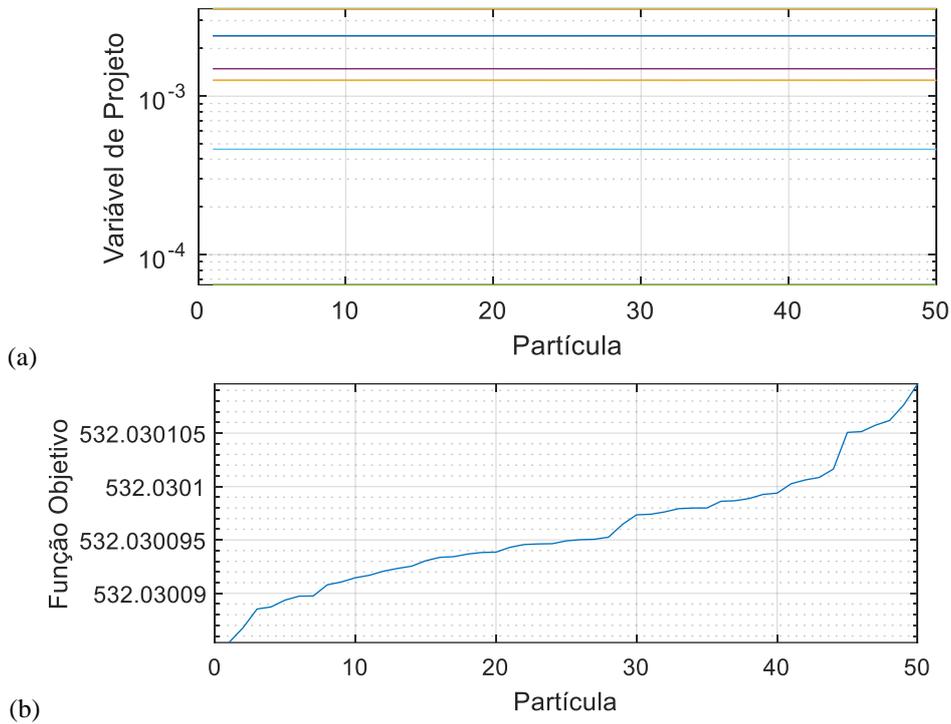


Figura 4 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência. (Problema treliça 10 barras).

4.2 Exemplo de otimização de uma treliça espacial de 72 barras com massas adicionais em alguns nós e com restrições de frequências naturais

Neste exemplo, uma treliça espacial de 72 barras e massas concentradas nos 4 nós superiores é otimizada também com restrições de frequência natural tendo as áreas de grupos de barras como variáveis de projeto. Os dados do problema são apresentados em Khodadadi e Mirjalili, (2022). O caso analisado é o de restrição $f_1 = 4$ Hz e de $f_3 \leq 6$ Hz. As propriedades para este exemplo são $E=6,89 \times 10^{10}$ Pa, densidade de $\rho=2770$ kg/m³ e cada massa adicional de $m_i=2270$ kg (5000 lbm). A Figura 5 ilustra a geometria, onde $a = 1,524$ m. A área mínima admitida é 64,52 mm². Foram realizadas 30 rodadas independentes do algoritmo utilizando apenas 50 partículas (único parâmetro ajustável do método) com um critério de tolerância para parada de 1×10^{-8} para o vetor de variáveis de projeto ótimas.

A Tabela 3 indica os resultados obtidos por este trabalho utilizando o GNDO assim como resultados de outros trabalhos utilizando outros métodos heurísticos e também não-heurísticos. Percebe-se que o resultado da versão do código GNDO implementada neste trabalho programada desde o início ($f_{obj} = 324,2256$ kg) superou inclusive o resultado indicado pelo trabalho original utilizando GNDO, além de apresentar uma dispersão muito baixa, representada pelo baixo desvio padrão das análises independentes ($\sigma_{f_{obj}} = 0,002653$ kg).

Na Figura 6, indica-se os resultados de convergência para uma das 30 rodadas independentes para (a) o valor da função objetivo assim como para (b) o desvio padrão dos resultados da população final. Na Figura 7 é apresentada (a) a curva de convergência desta mesma rodada independente para a função objetivo de massa e (b) o gráfico de convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações.

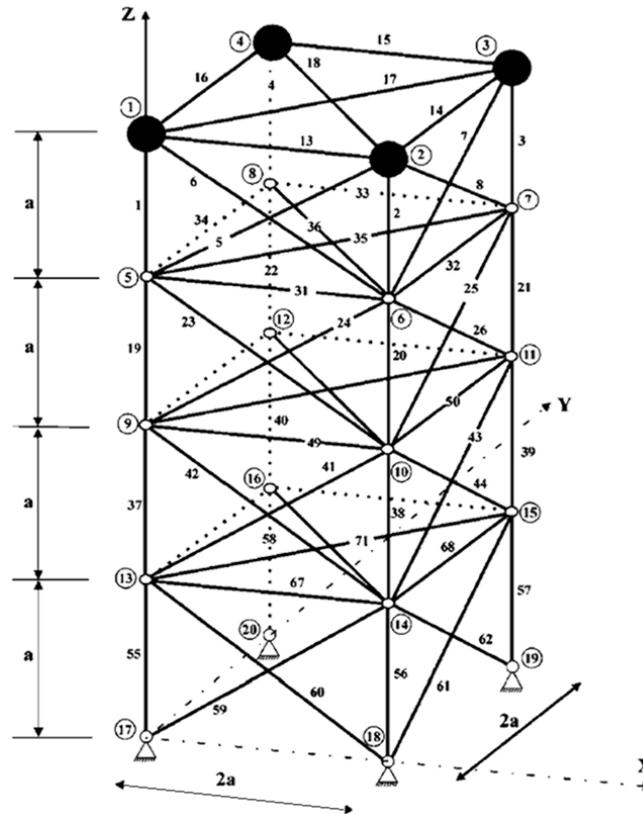


Figura 5 – Treliça espacial de 72 barras com massas adicionadas (m_i) aos nós (Adaptado de Sedaghati, 2005).

Tabela 3 – Comparação de resultados de áreas (cm^2) para exemplo treliça espacial de 72 barras.

Elem.	Método												
	DM [1]	FM [1]	FA [2]	PSO [3]	TWO [4]	CSS [5]	TLBO [6]	SBO [7]	SOS [8]	CBO [9]	VPS [10]	GNDO [11]	GNDO Este trab.
Rest. (Hz)	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=4,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,004$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,002$ $f_3=6,002$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$	$f_1=4,000$ $f_3=6,000$
1-4	3,499	3,499	3,3411	2,987	3,380	2,528	3,5491	3,4917	3,4917	3,3699	3,5017	3,5166	3,4542
5-12	7,932	7,932	7,7587	7,849	8,086	8,704	7,9676	7,9414	7,9414	7,3428	7,934	7,8666	7,8494
13-16	0,645	0,645	0,645	0,645	0,647	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6468	0,645	0,7004	0,6452
17-18	0,645	0,645	0,645	0,645	0,646	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6458	0,645	0,645	0,6452
19-22	8,056	8,056	9,0202	8,765	8,890	8,283	8,1532	8,1154	8,1154	8,0056	8,0215	8,2201	7,9664
23-30	8,011	8,011	8,2567	8,153	8,136	7,888	7,9667	8,0533	8,0533	8,0185	7,9826	7,9806	7,9251
31-34	0,645	0,645	0,645	0,645	0,654	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6458	0,645	0,6484	0,6452
35-36	0,645	0,645	0,645	0,645	0,647	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6457	0,645	0,6561	0,6452
37-40	12,812	12,812	12,045	13,45	13,097	14,66	12,927	12,856	12,856	12,458	12,8175	12,0507	12,6866
41-48	8,061	8,061	8,0401	8,073	8,101	6,793	8,1226	8,0425	8,0425	8,121	8,1129	8,0751	7,9762
49-52	0,645	0,645	0,645	0,645	0,663	0,645	0,6452	0,6451	0,6451	0,646	0,645	0,6452	0,6452
53-54	0,645	0,645	0,645	0,645	0,646	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6459	0,645	0,6457	0,6452
55-58	17,279	17,279	17,38	16,684	16,483	16,46	17,052	17,213	17,213	17,363	17,3362	17,457	17,0945
59-60	8,088	8,088	8,0561	8,0561	7,873	8,809	8,0618	8,0804	8,0804	8,3371	8,101	7,8464	8,0006
67-70	0,645	0,645	0,645	0,645	0,651	0,645	0,645	0,645	0,645	0,646	0,645	0,6478	0,6452
71-72	0,645	0,645	0,645	0,645	0,657	0,645	0,645	0,645	0,645	0,6476	0,645	0,6603	0,6452
Máx.(kg)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	324,2336
Mín.(kg)	327,605	327,605	327,691	328,81	328,83	328,814	327,568	327,55	327,55	324,755	327,649	324,704	324,2256
Média(kg)	-	-	329,89	332,24	336,1	337,70	328,684	327,68	331,122	330,415	327,67	325,909	324,2277
Desv.Pad.(kg)	-	-	2,59	4,23	5,80	5,42	0,73	0,07	4,227	7,706	0,018	1,018	0,002653
No. análises	379	379	10000	42840	-	4000	15000	15000	4000	6000	30000	10000	10000
Tempo de CPU(s)	200,37	227,62	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	25,32

[1] Sedaghati, 2015, [2] Miguel e Miguel, 2012, [3] Gomes, 2011, [4] Kaveh and Zolghadr, 2017, [5] Kaveh and Zolghadr, 2015, [6] Farshchin et al., 2016a, [7] Farshchin et al., 2016b, [8] Tejani et al., 2016, [9] Kaveh e Mahdavi, 2015, [10] Kaveh e Ghazaan, 2017, [11] Khodadadi e Mirjalili, 2022.

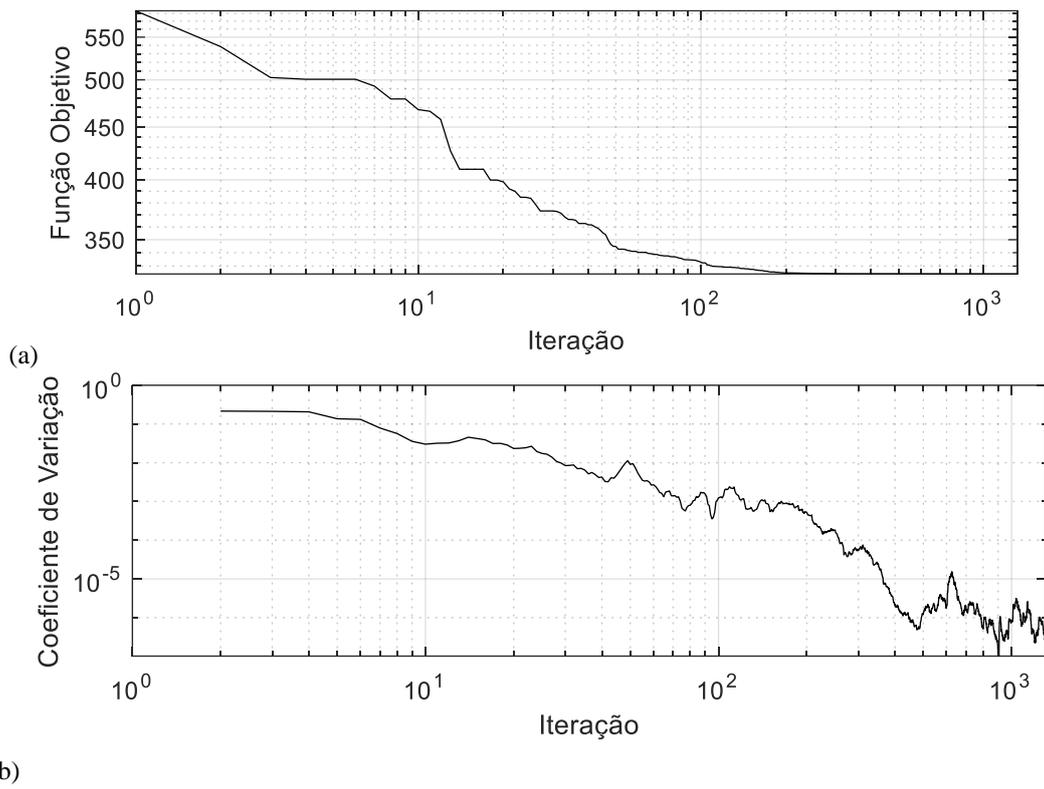


Figura 6 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 72 barras).

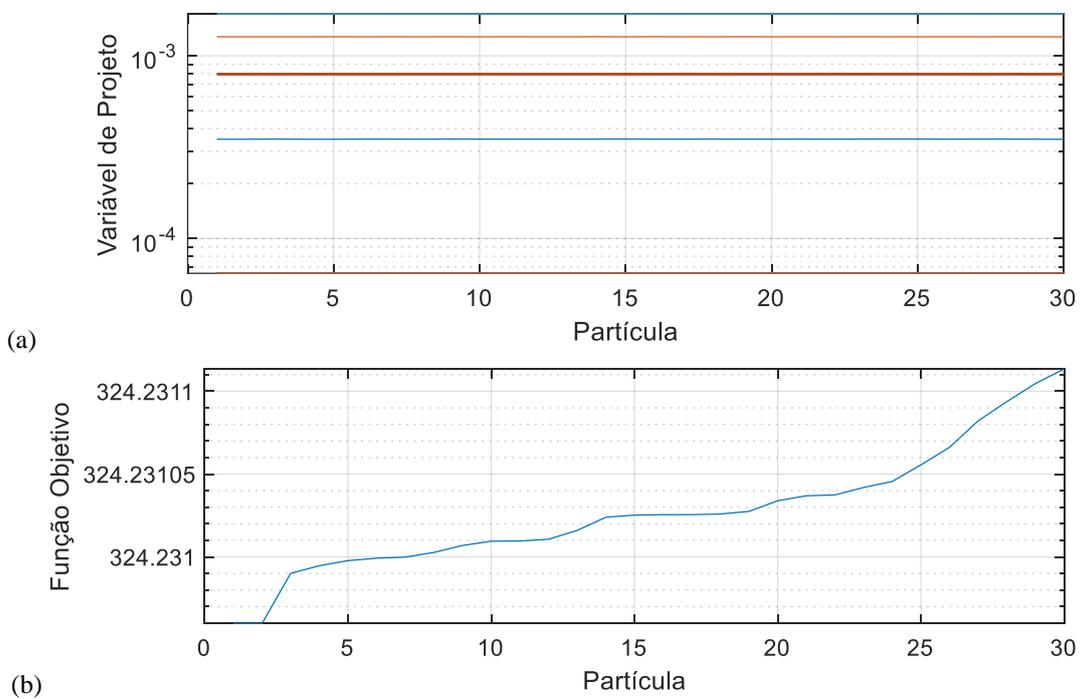


Figura 7 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência (Problema treliça 72 barras).

4.3 Exemplo de otimização de uma treliça espacial de 200 barras com massas adicionais e com restrições de frequências naturais

Este exemplo foi resolvido por outros autores e trata da minimização da massa de uma treliça plana de 200 barras com 29 grupos de áreas de barras como variáveis de projeto. Massas adicionais de 100 kg são adicionadas aos nós de topo da estrutura. As restrições são impostas às primeiras 3 frequências naturais de forma que: $f_1 \geq 5$ Hz, $f_1 \geq 10$ Hz, $f_1 \geq 15$ Hz. As propriedades dos materiais são $E=210$ GPa, densidade de $\rho=7860$ kg/m³ e as áreas mínimas que as barras podem assumir são de 0,1 cm². Os resultados aqui obtidos, usando o GNDO programado, foram comparados com os apresentados em Kaveh (2016). Da mesma forma que no artigo foram feitas 20 análises independentes para obter a média e o desvio padrão. Os resultados são apresentados na tabela 4. A Figura 8 indica a geometria e numeração de nós e barras deste exemplo.

Os 29 grupos de barras estão agrupados como: grupo 1(1-4), grupo 2 (5,8,11,14,17), grupo 3 (19,20,21,22,23,24), grupo 4 (18,25,56,63,94,101,132,139,170,177), grupo 5 (26,29,32,35,38), grupo 6 (6,7,9,10,12,13,15,16,27,28,30,31,33,34,36,37), grupo 7 (39-42), grupo 8 (43,46,49,52,55), grupo 9 (57-62), grupo 10 (64,67,70,73,76), grupo 11 (44,45,47,48,50,51,53,54,65,66,68,69,71,72,74,75), grupo 12 (77-80), grupo 13 (81,84,87,90,93), grupo 14 (95-100), grupo 15 (102,105,108,111,114), grupo 16 (82,83,85,86,88,89,91,92,103,104,106,107,109,110,112,113), grupo 17(115-118), grupo 18(119,122,125,128,131), grupo 19 (133-138), grupo 20(140,143,146,149,152), grupo 21(120,121,123,124,126,127,129,130,141,142,144,145,147,148,150,151), grupo 22(153-156), grupo 23(157,160,163,166,169), grupo 24(171-176), grupo 25(178,181,184,187,190), grupo 26 (158,159,161,162,164,165,167,168,179,180,182,183,185,186,188,189), grupo 27(191-194), grupo 28 (195,197,198, 200), grupo 29 (196,199).

Na Figura 9, indicam-se os resultados de convergência (para a melhor das 20 rodadas independentes) sendo (a) o valor da função objetivo e (b) o desvio padrão dos resultados da população final daquela rodada.

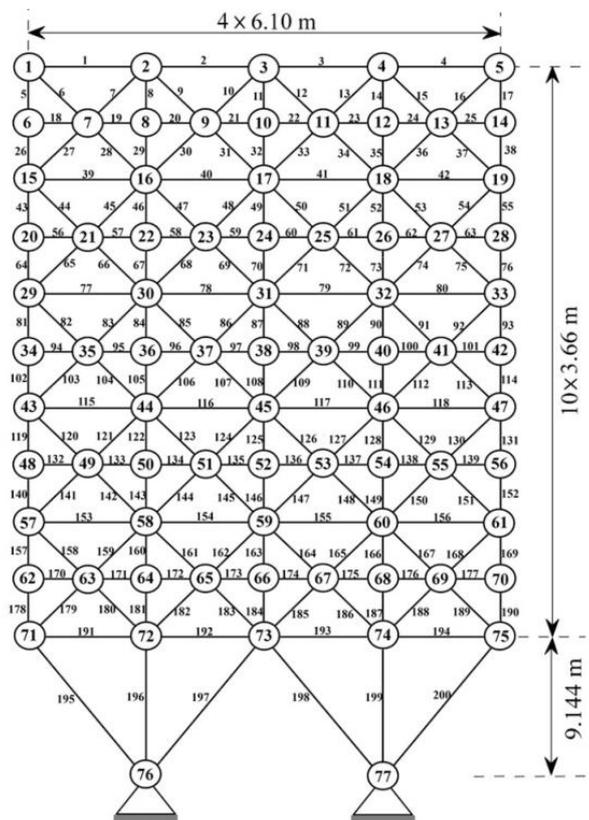


Figura 8 – Esquema para a treliça plana de 200 elementos e suas dimensões, nós e elementos (Adaptado de Kaveh, 2016).

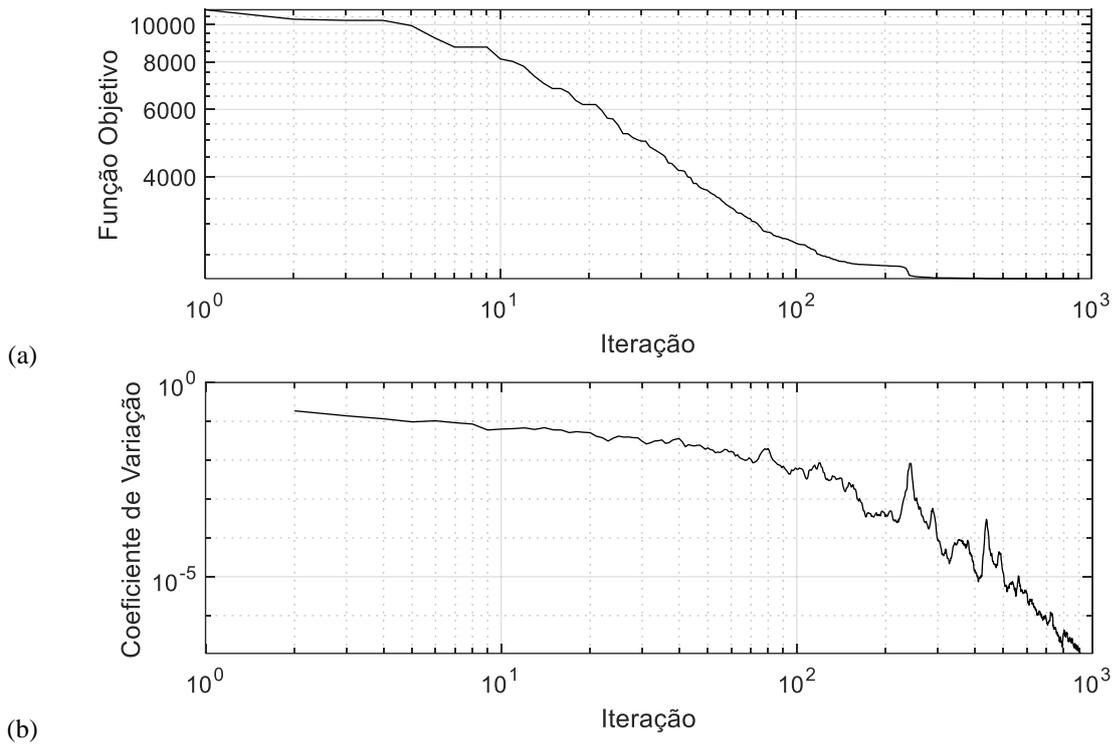


Figura 9 – (a) Convergência da função objetivo ao longo das iterações. (b) Convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações. (Problema treliça 200 barras).

A Tabela 4 indica um resumo dos resultados obtidos por este trabalho utilizando o GNDO assim como resultados de outros trabalhos utilizando outros métodos heurísticos e também não-heurísticos.

Percebe-se que o resultado da versão do código GNDO independentemente programada neste trabalho resultou $f_{obj} = 2159,55$ kg (levemente pior que Kaveh, 2016), com uma dispersão muito baixa, representada pelo baixo desvio padrão das análises independentes $\sigma_{f_{obj}} = 0,0049$ kg.

Na Figura 10 é apresentada (a) a curva de convergência desta mesma rodada independente para a função objetivo de massa e (b) o gráfico de convergência do coeficiente de variação ao longo das iterações.

Tabela 4 – Comparação de resultados de áreas (cm²) para exemplo treliça espacial de 200 barras.

	PSO [1]	CSS [2]	SBO [3]	TLBO [4]	SOS [5]	CBO [6]	ECBO [7]	VPS [8]	GNDO Este trabalho
Restrição (Hz)	$f_1=5,065$ $f_2=13,18$ $f_3=16,097$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 15,9610$ $f_3 = 16,407$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,2141$ $f_3 = 15,0192$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,2171$ $f_3 = 15,038$	$f_1 = 5,0001$ $f_2 = 13,4306$ $f_3 = 15,2645$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,221$ $f_3 = 15,088$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,189$ $f_3 = 15,048$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,2086$ $f_3 = 15,0153$	$f_1 = 5,0000$ $f_2 = 12,2124$ $f_3 = 15,0213$
Grupos									
1	2,4662	1,2439	0,304	0,303	0,4781	0,3059	0,2993	0,3031	0,3038
2	0,1000	1,1438	0,4478	0,4479	0,4481	0,4476	0,4497	0,4496	0,4504
3	0,1000	0,3769	0,1000	0,1001	0,1049	0,1000	0,1000	0,1002	0,1000
4	0,1000	0,1494	0,1000	0,1000	0,1045	0,1001	0,1000	0,1000	0,1000
5	0,1000	0,4835	0,5075	0,5124	0,4875	0,4944	0,5137	0,5086	0,5085
6	2,8260	0,8103	0,8219	0,8205	0,9353	0,8369	0,7914	0,8204	0,8219
7	0,1000	0,4364	0,1003	0,1000	0,1200	0,1001	0,1013	0,1000	0,1000
8	4,6937	1,4554	1,4240	1,4499	1,3236	1,5514	1,4129	1,4210	1,4236
9	0,1000	1,0103	0,1001	0,1001	0,1015	0,1000	0,1019	0,1002	0,1000
10	1,7291	2,1382	1,5929	1,5955	1,4827	1,5286	1,6460	1,5900	1,5906
11	1,8842	0,8583	1,1597	1,1556	1,1384	1,1547	1,1532	1,1530	1,1580
12	0,1000	1,2718	0,1275	0,1242	0,1020	0,1000	0,1000	0,1277	0,1237
13	3,7185	3,0807	2,9765	2,9753	2,9943	2,9980	3,1850	2,9160	2,9721
14	0,1000	0,2677	0,1001	0,1000	0,1562	0,1017	0,1034	0,1009	0,1000
15	2,3450	4,2403	3,2456	3,2553	3,4330	3,2475	3,3126	3,2826	3,2572
16	0,9164	2,0098	1,5818	1,5762	1,6816	1,5213	1,5920	1,5856	1,5851
17	0,1000	1,5956	0,2566	0,2680	0,1026	0,3996	0,2238	0,2794	0,2560
18	7,1603	6,2338	5,1118	5,0692	5,0739	4,7557	5,1227	5,0680	5,0991
19	30,000	2,5793	0,1001	0,1000	0,1068	0,1002	0,1050	0,1004	0,1000
20	6,1670	3,0520	5,4337	5,4281	6,0176	5,1359	5,3707	5,4760	5,4419
21	3,1906	1,8121	2,1016	2,0942	2,0340	2,1181	2,0645	2,1169	2,0969
22	0,2150	1,2986	0,6794	0,6985	0,6595	0,9200	0,5443	0,6939	0,6933
23	18,1871	5,8810	7,6581	7,6663	6,9003	7,3084	7,6497	7,6912	7,6520
24	0,1000	0,2324	0,1006	0,1008	0,2020	0,1185	0,1000	0,1332	0,1007
25	30,000	7,7536	7,9468	7,9899	6,8356	7,6901	7,6754	7,9972	7,9625
26	2,0233	2,6871	2,7835	2,8084	2,6644	3,0895	2,7178	2,7859	2,7962
27	16,0615	12,5094	10,5277	10,4661	12,143	10,6462	10,8141	10,4331	10,5118
28	30,000	29,5704	21,3027	21,2466	22,2484	20,719	21,6349	21,2289	21,3141
29	30,000	8,2910	10,6207	10,734	8,9378	11,7463	10,352	10,7392	10,6931
Máx.(kg)	-	-	-	-	-	-	-	-	2159,57
Mín.(kg)	3987,61	2259,86	2156,51	2156,54	2180,32	2161,15	2158,08	2156,62	2159,55
Média(kg)	5027,78	N/A	2156,79	2157,54	2303,3	2447,52	2159,93	2159,46	2159,55
Desv.Pad.(kg)	708,95	N/A	0,21	1,54	83,58	301,29	1,57	2,79	0,004953
No. análises	20.000	10.000	23.000	23.000	10.000	20.000	20.000	16.420	20.000

[1] Kaveh e Ghazaan, 2017, [2] Kaveh and Zolghadr, 2015, [3] Farshchin et al., 2016a, [4] Farshchin et al., 2016b, [5] Tejani et al., 2016, [6] Kaveh and Zolghadr, 2015, [7] Kaveh e Ghazaan, 2016, [8] Kaveh, 2016.

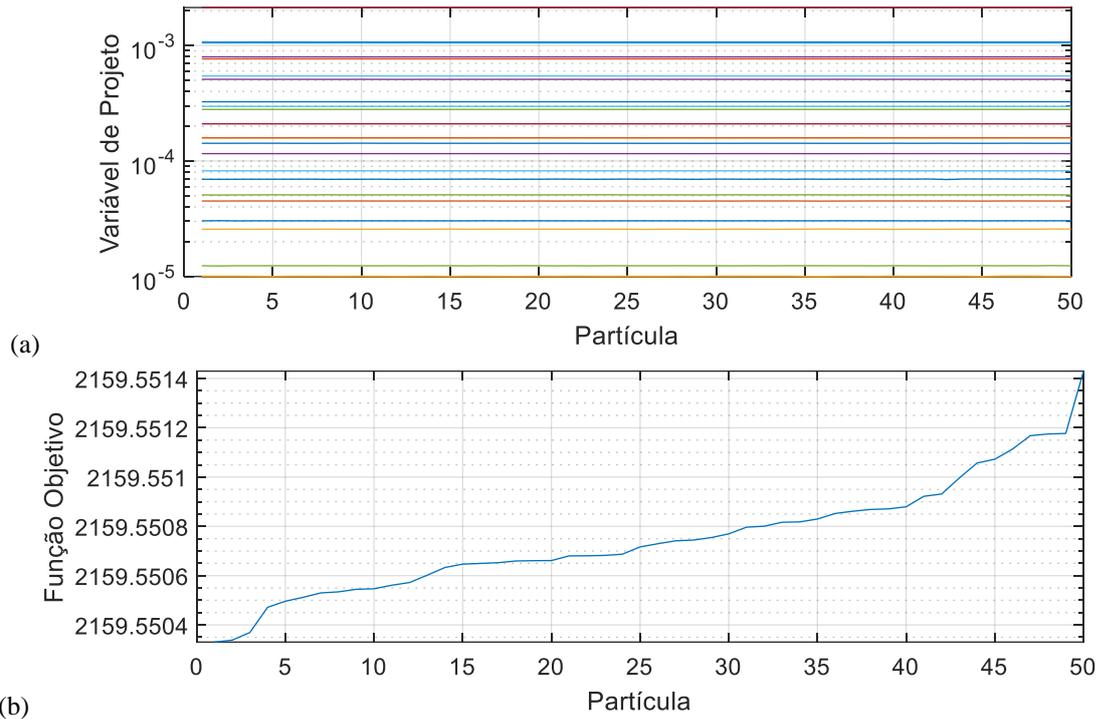


Figura 10 – (a) Valores das variáveis de projeto por partícula após convergência. (b) Valores das funções objetivos por partícula após convergência (Problema treliça 200 barras).

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivos a solução de problemas *benchmark* da literatura em Engenharia, especificamente a minimização da massa de estruturas treliçadas sujeitas à restrição de frequências naturais, através da implementação de um algoritmo GNDO, e sua comparação de desempenho com outras meta-heurísticas existentes. Esses objetivos foram de fato alcançados.

O algoritmo se mostrou bastante robusto, confirmado pelo baixo desvio padrão das múltiplas rodadas feitas. Em alguns exemplos resultou-se em soluções melhores que as apresentadas na literatura, com todas as restrições atendidas.

Ainda, o GNDO se mostrou muito vantajoso em relação a outros algoritmos, visto que não necessita do ajuste de outros parâmetros heurísticos além do número de partículas.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros há a possibilidade de estender as mesmas análises para outros algoritmos meta-heurísticos e comparar os resultados obtidos. Também se pode avaliar outros exemplos *benchmark* de treliças com restrições além de frequências naturais, como de tensão mecânica e de deslocamentos e de flambagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdel-Basset, M.; Mohamed, R.; Chakraborty, R. K.; Ryan, M. J.; Nam, Y.; Abouhawash, M. **“Medical Feature Selection Approach Based on Generalized Normal Distribution Algorithm”**. Computers, Materials & Continua Tech Science Press. DOI:10.32604/cmc.2021.017854
- Dua, D.; Graff, C. **“UCI Machine Learning Repository”**. Irvine, CA: University of California, School of Information and Computer Science. Disponível em <http://archive.ics.uci.edu/ml>, Acessado em 01/05/2023.
- Farshchin, M., Camp, C.V., Maniat, M. **“Multi-class teaching–learning-based optimization for truss design with frequency constraints”**. Eng Struct, 106:355-369, 2016a.
- Farshchin, M., Camp, C.V., Maniat, M. **“Optimal design of truss structures for size and shape with frequency constraints using a collaborative optimization strategy”**. Expert Syst Appl, 66:203-218, 2016b.
- Gomes, H. M. **“Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm”**. Expert Syst Appl. 38(1):957-968, 2011.
- Kaveh, A. **“Advances in metaheuristic Algorithms for Optimal design of Structures”**. Springer, 2nd. Edition. 631p. 2016. DOI:10.1007/978-3-319-46173-1.
- Kaveh, A., Ghazaan, M.I. **“Vibrating particles system algorithm for truss optimization with multiple natural frequency constraints”**. Acta Mech, 228(1):307-322, 2017.
- Kaveh, A., Mahdavi, V.R. **“Colliding-bodies optimization for truss optimization with multiple frequency constraints”**. J Comput Civ Eng, 29(5):4014078, 2015.
- Kaveh, A., Zolghadr, A. **“An improved CSS for damage detection of truss structures using changes in natural frequencies and mode shapes”**. Adv. Eng. Softw., 80:93-100, 2015.
- Kaveh, A., Zolghadr, A. **“Truss shape and size optimization with frequency constraints using tug of war optimization”**. Asian J Civ Eng, 7(2):311-333, 2017.
- Kaveh A, Ilchi Ghazaan, M. **“Truss optimization with dynamic constraints using UECBO”**. Adv. Comput. Design, 1(2):119–138. 2016. DOI: 10.12989/acd.2016.1.2.119.
- Khodadadi, N.; Mirjalili, S. **“Truss optimization with natural frequency constraints using generalized normal distribution optimization”**, Applied Intelligence, 52:10384-10397, 2022. DOI: 10.1007/s10489-021-03051-5
- Miguel LFF, Miguel LFF. **“Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms”**. Expert Syst Appl, 39(10):9458-9467, 2012.
- Montoya, O. D.; Gil-Gonzalez, W.; Grisales-Noreña, L. F. **“Solar photovoltaic integration in monopolar DC networks via the GNDO algorithm”**. Algorithms, 15, 277, 2022. DOI:10.3390/a15080277.
- Sedaghati, R. **“Benchmark studies in structural design optimization using the force method. Intern. J. of Solids and Structures”**, V.42, pp.5848-5871, 2005.
- Tejani, G. G., Savsani, V.J., Patel, V.K. **“Adaptive symbiotic organisms search (SOS) algorithm for structural design optimization”**. J Comput Des Eng, 3(3):226-249, 2016.
- Tubishat, M.; Rawshdeh, Z.; Jarrat, H.; Elgamal, Z. M., Elnagar, A.; Alrashdan, M. T. **“Dynamic generalized normal distribution optimization for feature selection”**. Neural Computing and Applications, 34:17355-17370, 2022. DOI:10.1007/s00521-022-07398-9

Zhang, Y. “**An improved generalized normal distribution optimization and its applications in numerical problems and engineering design problems**”. Artificial Intelligence Review, 56:685-747, 2023. DOI: 10.1007/s10462-022-10182-9

Zhang, Y.; Jin, Z.; Mirjalili, S. “**Generalized normal distribution optimization and its applications in parameter extraction of photovoltaic models**”. Energy Conversion and Management 224. 2020. DOI: 10.1016/j.enconman.2020.113301

ANEXO

$$[\mathbf{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Figura A.1 – Matriz de rigidez no sistema de coordenadas locais de barra de uma treliça espacial.

$$[\mathbf{m}] = \rho AL \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Figura A.2 – Matriz de massa consistente no sistema de coordenadas locais de treliça espacial.

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{bmatrix}$$

onde $\{\xi_1, \eta_1, \zeta_1\}$ são os cossenos diretores do eixo local x da barra para com os eixos globais X, Y e Z. Similarmente $\{\xi_2, \eta_2, \zeta_2\}$ são os cossenos diretores do eixo local y da barra para com os eixos globais X, Y e Z e $\{\xi_3, \eta_3, \zeta_3\}$ são os cossenos diretores do eixo local z da barra para com os eixos globais X, Y e Z.

Figura A.3– Matriz rotação para barras de treliça espacial.