VARIABEL VOL. 6 NO. 2 (October 2023): 77-81
p-ISSN: 2593-302X dan e-ISSN: 2599-3038

Perumusan Hamiltonian Hidrodinamika Kuantum Nonrelativistik

Andika Kusuma Wijaya[1], Sumarli[2]
STKIP Singkawang, Singkawang, Indonesia
andika@stkipsingkawang.ac.id[1,*)], sumarliphysics@gmail.com[2]
[*)]*Corresponding author*

Kata Kunci:
Teori Medan Geometrik; Hamiltonian; Persamaan Madelung; Struktur Pre-Simplektik

ABSTRAK
Penelitian ini bertujuan untuk merumuskan Hamiltonian hidrodinamika kuantum nonrelativistik yang tidak terkopling medan elektromagnetik dalam ruang fase kovarian dan kerangka geometri simplektik yang dibatasi dalam permukaan Cauchy $\sum_t = R^3 \times R$. Metode dalam penelitian ini merupakan kajian teoritik matematik untuk mencari struktur pre-simplektik dan Hamiltonian Persamaan Madelung nonrelativistic. Hasil yang diperoleh yaitu simplektik forma-satu, simplektik forma-2 dan Hamiltonian hidrodinamika kuantum nonrelativistik yang identik dengan yang diungkapkan oleh Spera (2016).

The Hamiltonian Formulation of Nonrelativistic Quantum Hydrodynamics

Keywords:
Geometric Field Theory; Hamiltonian; Madelung Equation; Pre-Simplectic Structure

ABSTRACT
This study aimed to formulate the Hamiltonian of nonrelativistic quantum hydrodynamics that is not coupled to electromagnetic fields in the covariant phase space and in the framework of symplectic geometry bounded in the Cauchy surface $\sum_t = R^3 \times R$. The method in this research was a mathematical theoretical study to find the pre-symplectic structure and Hamiltonian of the nonrelativistic Madelung Equation. The results obtained were forma-one symplectic, forma-2 symplectic, and Hamiltonian of nonrelativistic quantum hydrodynamics which are identical to those revealed by Spera (2016).

PENDAHULUAN

Mekanika kuantum adalah teori dasar dalam fisika yang memberikan gambaran tentang sifat-sifat fisis alam pada skala atom dan partikel subatomik. Mekanika kuantum merupakan dasar dari semua fisika kuantum termasuk kimia kuantum, teori medan kuantum, teknologi kuantum, dan informasi kuantum. Selain itu, penggambaran mekanika kuantum dapat dipandang sebagai interpretasi misalnya intepretasi Kopenhagen, interpetasi statistik, dan interpretasi hidrodinamika yang diungkapkan oleh Madelung (1927). Persamaan Madelung merupakan interpretasi hidrodinamika bagi mekanika kuantum nonrelativistik (Schonberg, 1954; Sonego, 1991; Delphenich, 2013). Persamaan Madelung terdiri dari persamaan kontinuitas dan persamaan Hamilton Jacobi (Wyatt, 2005).

Perumusan Hamiltonan Persamaan Madelung nonrelativistik dalam penggambaran Hamilton telah dilakukan oleh Spera (2016). Spera menyimpulkan suatu pendekatan pada mekanika kuantum dengan hidrodinamika Madelung-Bohm dan struktur Hamiltonan Persamaan Schrödinger menggunakan (peta moment) *moment map* dan struktur simplektik standar dengan menganggap fungsi kerapatan ρ dan fungsi fase S sebagai pasangan kanonik, yakni ρ sebagai medan fundamental dan S sebagai medan momentum kanonik. Selanjutnya, perumusan Hamiltonan Persamaan Madelung juga dilakukan oleh Von Renesse (2012), Fuchs dkk. (2014), dan Nonnenmacher (2005). Von Renesse (2012) merumuskan pengangkutan optimal (*optimal transport)* dengan penggambaran Schrödinger, sehingga dengan menerapkan Hukum III Newton diperoleh Hamiltonian (aliran/*flow*) Persamaan Madelung, sedangkan Fuchs dkk. (2014) mengkontruksi struktur Lagrangean model fluida kuantum dan merumuskan transformasi Madelung dari pemetaan simplektik submersi, Hamiltonan dari efek magnetik, dan Persamaan Euler-Lagrange dengan gesekan atau *friction* yang dibatasi dari potensial disipatif kuadratik. Selanjutnya, Hamiltonan Persamaan Madelung nonrelativistik juga telah ditinjau oleh Nonnenmacher (2005) menunjukkan bahwa perumusan Hamiltonan beberapa jenis fluida Madelung elektromagnetik mengarah pada interpretasi mekanika fluida untuk efek Aharonov-Bohm dan sebagai bagian kondisi untuk mendapatkan hubungan antara Persamaan Schrödinger dalam mekanika kuantum dan keunikan mekanika fluida Madelung.

Artikel ini bertujuan untuk merumuskan Hamiltonian persamaan Madelung nonrelativistik dalam ruang fase kovarian dan dalam kerangka geometri simplektik. Dalam artikel ini, dibahas beberapa bagian, yaitu (1) pendahuluan, (2) Persamaan Madelung beserta rapat Lagrangian Persamaan Madelung nonrelativistik, (3) perumusan simplektik bagi teori medan geometrik khususnya untuk teori medan nonrelativistik yang diadopsi dari Wijaya, Hermanto, dan Rosyid (2022), (4) struktur simplektik Persamaan Madelung nonrelativistik, (5) Perumusan Hamiltonian hidrodinamika kuantum nonrelativistik yang tidak terkopling medan elektromagnetik dalam kerangka geometri simplektik atau dengan pendekatan dalam ruang fase kovarian untuk teori medan geometrik, di mana permukaan Cauchy dibatasi yaitu $\sum_t = R^3 \times R$. Hasil rumusan Hamiltonian yang diperoleh identik dengan rumusan Hamiltonian yang diungkapkan oleh Spera (2016). Geometri simplektik berperan penting dalam merumuskan dinamika suatu sistem fisis di mana ruang fase sistem klasik tertentu dengan menganggap struktur manifold simplektik. Selain itu, geometri simplektik berperan penting dalam merumuskan kuantisasi (pengkuantuman) baik untuk mekanika klasik maupun dinamika medan. Adapun kemungkinan kuantisasi yang bisa diperoleh yaitu kuantisasi deformasi dan kuantisasi geometrik.

LANDASAN TEORI

Persamaan Madelung

Penjelasan detail dari Persamaan Madelung dapat dilihat di Takabayasi (1953) dan Delphenich (2013). Persamaan mekanika gelombang nonrelativistik dapat dituliskan dalam bentuk Persamaan Schrodinger (1)

$$\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\psi = 0 \tag{1}$$

dengan mensubtitusikan transformasi Madelung $\psi = Re^{\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}}$dan $\rho = |\psi|^2 = R^2$. Selanjutnya dengan memisahkan hasil persamaan kompleks menajdi bagian riil dan imajiner, maka Persamaan Madelung nonrelativistik dapat dituliskan pada Persamaan (2) dan (3)

$$m\dot{\rho} + div(\rho\vec{p}) = 0 \tag{2}$$

$$\dot{S} + \frac{p^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\Delta R}{R} = 0, \tag{3}$$

dengan $\vec{p} = \frac{\nabla S}{m} = m\vec{v}$.

Persamaan (2) disebut juga sebagai persamaan kontinuitas dan Persamaan (3) adalah Persamaan Hamilton-Jacobi. Dengan mensubtitusikan transformasi Madelung ke rapat Lagrangian Persamaan

Schrodinger (Greiner, 2000), maka rapat Lagrangian Persamaan Madelung nonrelativistik dapat dituliskan pada Persamaan (4)

$$L = -\rho\left(S_t + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V + \frac{\hbar^2}{8m}\frac{(\nabla\rho)^2}{\rho^2}\right) \tag{4}$$

Struktur Simplektik bagi Teori Medan

Perumusan simplektik bagi teori medan secara umum dapat dilihat di Crnkovic (1988), Crnkovic dan Witten (1987), Kalinowski dan Piechocki (1996,1999), Woodhouse (1992), dan Forger dan Romero (2005). Tinjauan teori medan nonrelativistik dan masalah kalkulus variasi persamaan medan nonrelativistik yang dihadapi dapat dilihat di Wijaya, Hermanto, dan Rosyid (2022).

Berikut didefinisikan simplektik forma-1 atau potensial simplektik $\theta_L \in TM$ terhadap rapat Lagrangian L dapat dituliskan pada Persamaan (5)

$$\theta_L \coloneqq \int_{\Sigma_t=\Sigma} d\mathcal{V}(x) n_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t^\alpha}. \tag{5}$$

sedangkan untuk struktur pre-simplektik forma-2 medan nonrelativistik dituliskan pada Persamaan (6)

$$\Omega_L \coloneqq \int_{\Sigma_t=R^3\times R} d\mathcal{V}\left[n_t \frac{\partial^2 L}{\partial\varphi^\alpha \partial\varphi_t^\beta} d\varphi^\alpha \wedge d\varphi^\beta + n_t \frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_j^\alpha \partial\varphi_t^\beta} d\varphi_j^\alpha \wedge d\varphi^\beta + n_t \frac{\partial^2 L}{\partial\varphi_t^\alpha \partial\varphi_t^\beta} d\varphi_t^\alpha \wedge d\varphi^\beta\right]. \tag{6}$$

Selanjutnya, dalam kasus ini (M, Ω_L) merupakan suatu manifold simplektik berdimensi infinit maka Persamaan Hamilton dapat dituliskan pada Persamaan (7) dan (8)

$$X \llcorner \Omega_L + \delta H = 0\,,$$

dengan

$$X \coloneqq \int_{\Sigma_t=\Sigma} d\mathcal{V}\left[n^t \varphi_t^\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi^\alpha} + n^u \varphi_{tu}^\alpha \frac{\partial}{\partial\varphi_t^\alpha}\right], \tag{7}$$

$$H \coloneqq \int_{\Sigma_t=\Sigma} d\mathcal{V}\left[\varphi_t^\alpha \frac{\partial L}{\partial\varphi_t^\alpha} - L\right], \tag{8}$$

METODE PENELITIAN

Metode penelitian dalam penelitian ini bersifat kajian teoritik-matematik. Kajian matematik yang digunakan yaitu perumusan Hamiltonian Persamaan Madelung nonrelativistik dengan kerangka geometri simplektik atau dengan pendekatan ruang fase kovarian. Adapun tahap-tahap penelitian yang dilakukan yaitu:

a. Tahap awal
   - Mengkaji Persamaan Madelung nonrelativistik serta struktur simplektik bagi dinamika medan yang telah dijabarkan oleh Wijaya, Hermanto, dan Rosyid (2022),
   - Menelaah rapat Lagrangean Persamaan Madelung, dan
   - Menentukan medan fundamental yang terkait dengan rapat Lagrangean Persamaan Madelung

b. Tahap Penelitian
   - Merumuskan struktur simplektik untuk persamaan medan nonrelativistik,
   - Mengkontruksi struktur simplektik untuk persamaan Madelung nonrelativistik di antaranya potensial simplektik (simplektik forma-1), pre-struktur simplektik, dan struktur simplektik (forma-2),
   - Merumuskan Hamiltonan Persamaan Madelung

c. Tahap akhir yaitu penulisan artikel publikasi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan $\mathcal{M}_M$ merupakan manifold berdimensi infinit yang dikontruksui dari semua himpunan solusi dari Persamaan Euler-Lagrange (Wijaya, Hermanto, & Rosyid, 2022). Rapat Lagrangean Persamaan Madelung nonrelativistik L_M bergantung pada $(\rho, \rho_t, \rho_i, S, S_t, S_i) \in T\mathcal{M}_M$. Selanjutnya,medan vector $X \in T\mathcal{M}_M$ dievaluasi di titik $(\rho, \rho_t, \rho_i, S, S_t, S_i) \in T\mathcal{M}_M$ yang dapat dituliskan pada Persamaan (9)

$$X = \int_{\Sigma} d\mathcal{V}(x) \left[X^{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + X^{\rho_t} \frac{\partial}{\partial \rho_t} + X^{\rho_i} \frac{\partial}{\partial \rho_i} + X^{S} \frac{\partial}{\partial S} + X^{S_t} \frac{\partial}{\partial S_t} + X^{S_i} \frac{\partial}{\partial S_i}\right] \tag{9}$$

dan medan kovektor $X^* \in T\mathcal{M}_M$ dievaluasi di titik $(\rho, \rho_t^*, \rho_i^*, S, S_t^*, S_i^*) \in T\mathcal{M}_M$ yaitu

$$X^* = \int_{\Sigma} d\mathcal{V}(x) \left[X_{\rho}^* d\rho + X_S^* dS + X_{\rho_t}^* d\rho + X_{S_t}^* dS + X_{\rho_i}^* d\rho + X_{S_i}^* dS\right]. \tag{10}$$

Dengan menggunakan Persamaan (5) maka potensial simplektik atau simplektik forma-satu untuk Persamaan Madelung nonrelativistik pada Persamaan (11)

$$\Theta_M = -\int_{\Sigma_t} n_t \rho dS dV \tag{11}$$

Potensial simplektik pada Persamaan (11) identik dengan arus Noether's. Selanjutnya, forma-dua pre-simplektik bagi Persamaan Madelung nonrelativistik yang dievaluasi di titik $(\rho, \rho_t, \rho_i, S, S_t, S_i) \in TM_M$ diperoleh dengan menggunakan turunan eksterior dari potensial simplektik pada Persamaan (11), sehingga diperoleh Persamaan (12)

$$\Omega_M = -\int_{\Sigma_t} n_t d\rho \wedge dS \tag{12}$$

Dalam kasus ini, bahwa determinan matriks forma-dua pre-simplektik ketika dibatasi di permukaan Cauchy $\sum_t = R^3 \times R$ maka pre-simplektik forma-dua Persamaan Madelung nonrelativistik bersifat takmerosot (nondegenerate).

Perumusan Hamiltonian Persamaan Madelung Nonrelativistik

Formulasi Hamiltonan bagi Persamaan Madelung nonrelativistik yang tidak terkopling dengan medan elektromagnetik telah ditinjau dan dilakukan oleh Spera (2016) ketika dia menyelidiki hidrodinamika Madelung-Bohm melalui pendekatan pemetaan momen (*moment map*) dan struktur Hamiltonan persamaan Schrödinger. Dalam tinjauan ketika observabel Hamiltonan dikonstruksi pada keragaman berdimensi tak berhingga yang beranggotakan selesaian bagi persamaan Euler-Lagrange dan dikonstruksi melalui struktur simplektik kanonis yang telah dirumuskan dalam variabel ρ dan S sebagai pasangan kanonis. Pada tinjauan ini, dapat dikonstruksi secara eksplisit perumusan Hamiltonan bagi Persamaan Madelung nonrelativistik. Selanjutnya, hendak dikontruksi Hamiltonan persamaan Madelung nonrelativistik tanpa kehadiran medan elektromagnetik pada manifold pre-simplektik (TM_M, Ω_M) untuk menjelaskan dinamika Hamiltonan fluida kuantum nonrelativistik yang tidak terkopling medan elektromagnetik. Dari Pers (8) dan misalkan observabel Hamiltonan $H_M \in O_M$, maka Hamiltonian fluida kuantum nonrelativistik yang tidak terkopling medan elektromagnetik dapat dituliskan pada Persamaan (13)

$$\mathrm{H}_M(\rho, S) = -\int_{\Sigma_t} dV \left(\frac{\rho(\nabla S)^2}{2m} + \rho V + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho}\right) \tag{13}$$

Hamiltonian pada Persamaan (13) mirip yang diungkapkan oleh Spera (2016). Untuk Hamiltonian Persamaan Madelung dan medan momentum kanonis dan Persamaan Madelung dapat dilihat di Wijaya, Hermanto, dan Rosyid (2022).

KESIMPULAN

Telah dirumuskan Hamiltonian hidrodinamika kuantum nonrelativistik. Hamiltonian Persamaan Madelung yang diperoleh dengan merumuskan secara geometri simplektik dengan pasangan medan fundamental fungsi kerapatan ρ dan fungsi fase S. Perumusan Hamiltonian yang diperoleh mirip yang dikerjakan oleh Spera (2016). Simplektik forma-satu atau identic dengan arus Noether bagi Persamaan Madelung nonrelativistic bisa menjadi salah satu alternatif untuk menentukan simetri dan kelestarian dari Persamaan Madelung nonrelativistik.

DAFTAR PUSTAKA

Crnkovic, C. (1988). Symplectic geometry of the convariant phase space. *Classical and Quantum Gravity*, *5*(12), 1557.

Crnkovic, C., & Witten, E. (1987). Covariant description of canonical formalism in geometrical theories. *Three hundred years of gravitation*, 676-684.

Delphenich, D. H. (2013). A strain tensor that couples to the Madelung stress tensor. *arXiv preprint arXiv:1303.3582*.

Forger, M., & Romero, S. V. (2005). Covariant Poisson brackets in geometric field theory. *Communications in Mathematical Physics*, *256*, 375-410.

Greiner, W. (2000). *Relativistic quantum mechanics* (Vol. 2). springer, Berlin.

Kalinowski, M. W., & Piechocki, W. (1996). Symplectic structure for field theory. *ACTA PHYSICA POLONICA SERIES B*, *27*, 2735-2740.

Kalinowski, M. W., & Piechocki, W. (1999). Geometric Quantization Of Field Theory On Curved Space–Time. *International Journal of Modern Physics A*, *14*(07), 1087-1110.

Nonnenmacher, T. F. (2005, July). Hamiltonian models for the Madelung fluid and generalized Langevin equations. In *Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems: Proceedings of the 1st Ascona-Como International Conference, Held in Ascona, Ticino (Switzerland), June 24–29, 1985* (pp. 470-480). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Sonego, S. (1991). Interpretation of the hydrodynamical formalism of quantum mechanics. *Foundations of physics*, *21*(10), 1135-1181.

Spera, M. (2016). Moment map and gauge geometric aspects of the Schrödinger and Pauli equations. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *13*(04), 1630004.

Takabayasi, T. (1953). Remarks on the formulation of quantum mechanics with classical pictures and on relations between linear scalar fields and hydrodynamical fields. *Progress of Theoretical Physics*, *9*(3), 187-222.

Von Renesse, M. K. (2012). An optimal transport view of Schrödinger's equation. *Canadian mathematical bulletin*, *55*(4), 858-869.

Wijaya, A. K., Hermanto, A., & Rosyid, M. F. (2022). The symplectic geometrical formulation of quantum hydrodynamics. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, *19*(12), 2250194-2285.

Woodhouse, N. M. J. (1992). *Geometric quantization*. Oxford university press.

Wyatt, R. E. (2005). *Quantum dynamics with trajectories: introduction to quantum hydrodynamics* (Vol. 28). Springer Science & Business Media.