MỘT ĐỒNG NHẤT THỨC TRÊN ĐA THỨC ĐỐI XỨNG

Đặng Tuấn Hiệp[a*], Lê Văn Vĩnh[b]

[a]*Khoa Toán-Tin học, Trường Đại học Đà Lạt, Lâm Đồng, Việt Nam*
[b]*Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Văn Lang, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*
[*]*Tác giả liên hệ: Email: hiepdt@dlu.edu.vn*

Lịch sử bài báo
Nhận ngày 26 tháng 3 năm 2020
Chỉnh sửa ngày 26 tháng 5 năm 2020 | Chấp nhận đăng ngày 27 tháng 5 năm 2020

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra và chứng minh một đồng nhất thức trên đa thức đối xứng. Để nhận được đồng nhất thức này, chúng tôi sử dụng lý thuyết nội suy, cụ thể là công thức nội suy Lagrange. Trong phần chứng minh đồng nhất thức, chúng tôi đưa ra hai cách chứng minh khác nhau. Cách chứng minh thứ hai sẽ là bước khởi đầu cho những nghiên cứu xa hơn của chúng tôi liên quan đến các đồng nhất thức trên đa thức đối xứng.

Từ khóa: Công thức nội suy Lagrange; Đa thức đối xứng; Lý thuyết nội suy.

DOI: http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.684(2020)

Loại bài báo: Bài báo nghiên cứu gốc có bình duyệt

AN IDENTITY ON SYMMETRIC POLYNOMIALS

Dang Tuan Hiep[a*], Le Van Vinh[b]

[a] *The Faculty of Mathematics and Computer Science, Dalat University, Lamdong, Vietnam*
[b] *The Faculty of Basic Science, Van Lang University, Hochiminh City, Vietnam*
[*] *Corresponding author: Email: hiepdt@dlu.edu.vn*

Article history
Received: March 26th, 2020
Received in revised form: May 26th, 2020 | Accepted: May 27th, 2020

Abstract

In this paper, we propose and prove an identity on symmetric polynomials. In order to obtain this identity, we use the interpolation theory, in particular, the Lagrange interpolation formula. In the proof of the identity, we propose two different proofs. The second proof will be the first step for our further studies related to identities on symmetric polynomials.

Keywords: Interpolation theory; Lagrange interpolation formula; Symmetric polynomials.

DOI: http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.684(2020)

Article type: (peer-reviewed) Full-length research article

1. GIỚI THIỆU VÀ KẾT QUẢ CHÍNH

Trong toàn bộ bài báo, chúng ta luôn giả sử rằng các đa thức với hệ số trên một trường đặc số không (chẳng hạn trường số thực $\mathbb{R}$). Tuy nhiên khi áp dụng kết quả của bài báo này vào các bài toán trong hình học đại số thì chúng ta cần phải xét các đa thức với hệ số trên trường số phức $\mathbb{C}$.

Cho $P(x)$ là đa thức một biến bậc không lớn hơn $n-1$ và $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ là n giá trị khác nhau từng đôi một, tức là $\lambda_i \neq \lambda_j$ với mọi $i \neq j$. Theo công thức nội suy Lagrange, ta có Công thức I.

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) \frac{\prod_{j\neq i} (x-\lambda_j)}{\prod_{j\neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}. \qquad (I)$$

So sánh hệ số cao nhất hai vế của đẳng thức trên, ta thu được Đồng nhất thức 1.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(\lambda_i)}{\prod_{j\neq i} (\lambda_i - \lambda_j)} = a_{n-1} \qquad (1)$$

Trong đó a_{n-1} là hệ số của x^{n-1} trong đa thức $P(x)$.

Mục tiêu chính của bài báo này là tổng quát Đồng nhất thức 1 cho trường hợp đa thức đối xứng k biến bậc không lớn hơn $k(n-k)$. Để thuận tiện cho phần trình bày công thức, ta sẽ sử dụng ký hiệu $[n] = \{1, \dots, n\}$. Với mỗi tập con $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n]$ thì $\lambda_I = (\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})$ và $I^c = [n] \backslash I$. Nhắc lại rằng một đa thức $P(x_1, \dots, x_k)$ được gọi là đối xứng nếu $P(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)})$,
với mọi hoán vị $\sigma \in S_k$ của tập chỉ số $\{1, 2, \dots, k\}$. Kết quả chính của bài báo là Định lý 1.

Định lý 1. Cho $\mathrm{P}(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{k})$ là một đa thức đối xứng có bậc không lớn hơn $\mathrm{k}(\mathrm{n}-\mathrm{k})$, trong đó k, n là các số nguyên sao cho $0 < \mathrm{k} < \mathrm{n}$. Khi đó, ta có Đồng nhất thức 2.

$$\sum_{I\subset[n], |I|=k} \frac{P(\lambda_I)}{\prod_{i\in I, j\in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)} = \frac{c(k,n)}{k!}, \qquad (2)$$

Trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}, \dots, x_k^{n-1}$ trong khai triển của đa thức đối xứng:

$$P(x_1, \dots, x_k) \prod_{i\neq j} (x_i - x_j).$$

Đồng nhất thức 2 là đặc biệt thú vị bởi những ứng dụng của nó vào hình học của đa tạp Grassmann. Cụ thể, Dang (2019) đã sử dụng Đồng nhất thức 2 để biểu diễn các số giao trên đa tạp Grassmann và từ đó dẫn đến một chứng minh đại số cho công thức Martin cho đa tạp Grassmann.

Thêm một lý do nữa để thấy rằng Đồng nhất thức 2 là đặc biệt thú vị bởi điều sau đây: Nếu $P(x_1, \dots, x_k)$ là một đa thức đối xứng mà các bậc riêng theo từng biến không lớn hơn $n-k$, thì ta có công thức nội suy (Công thức II) được đưa ra và chứng minh bởi Chen & Louck (1996).

$$P(x_1,\dots,x_k)=\sum_{I\subset[n],|I|=k} P(\lambda_I)\frac{\prod_{x\in X,j\in I^c}\left(x-\lambda_j\right)}{\prod_{i\in I,j\in I^c}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)}. \qquad (II)$$

So sánh hệ số cao nhất của đa thức P, ta thu được Đồng nhất thức 3.

$$\sum_{I\subset[n],|I|=k}\frac{P(\lambda_I)}{\prod_{i\in I,j\in I^c}(\lambda_i-\lambda_j)}=d(k,n). \qquad (3)$$

Chú ý rằng, $d(k,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-k},\dots,x_k^{n-k}$ trong đa thức P. Thật ra, Đồng nhất thức 3 chỉ là một trường hợp đặc biệt của đồng nhất thức trong Định lý 1. Thật vậy, Zeilberger (1982) đã chỉ ra rằng $k!$ là hệ số của $x_1^{k-1},\dots,x_k^{k-1}$ trong khai triển của đa thức $\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)$. Nếu các bậc riêng theo từng biến của đa thức P không lớn hơn $n-k$, thì ta có $c(k,n)=(k!)d(k,n)$, trong đó $c(k,n)$ là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1},\dots,x_k^{n-1}$ trong khai triển của đa thức:

$$P(x_1,\dots,x_k)\prod_{j\neq i}\left(x_i-x_j\right).$$

2. CHỨNG MINH KẾT QUẢ CHÍNH

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày hai cách lập luận khác nhau để chứng minh kết quả chính. Chứng minh thứ nhất dựa vào một kết quả cơ bản cho đa thức nhiều biến, đó là định lý chia đa thức nhiều biến. Trong khi đó, chứng minh thứ hai của chúng tôi dựa vào những lập luận giải tích.

2.1 Chứng minh thứ nhất

Đặt

$$F(x_1,\dots,x_k)=P(x_1,\dots,x_k)\prod_{j\neq i}(x_i-x_j).$$

Theo giả thiết, bậc của đa thức F không lớn hơn $k(n-k)+k(k-1)=k(n-1)$. Vì đa thức P là đối xứng, nên đa thức F cũng là đối xứng. Theo định lý chia đa thức nhiều biến (xem Cox, Little, & O'Shea, 2007), tồn tại các đa thức $F_i(x_1,\dots,x_k), i=1,\dots,k$ và $R(x_1,\dots,x_k)$ sao cho

$$R(x_1,\dots,x_k)=F(x_1,\dots,x_k)-\sum_{i=1}^{k}F_i(x_1,\dots,x_k)\prod_{j=1}^{n}(x_i-\lambda_j)$$

và tất cả các bậc riêng theo từng biến của đa thức R không lớn hơn $n-1$. Theo công thức nội suy Lagrange, ta có:

$$R(x_1,\dots,x_k)=\sum_{i_1=1}^{n}R(\lambda_{i_1},x_2,\dots,x_k)L_{i_1}(x_1).$$

Dùng công thức nội suy Lagrange cho các đa thức $R(\lambda_{i_1}, x_2, \ldots, x_k)$, ta có

$$R(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2}^{n} R(\lambda_{i_1}, \lambda_2, \ldots, x_k) L_{i_1}(x_1) L_{i_2}(x_2).$$

Tương tự, lập lại quá trình trên k lần, ta thu được

$$R(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} R(\lambda_I) \prod_{l=1}^{k} L_{i_l}(x_l).$$

Với mỗi tập $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$, ta có $R(\lambda_I) = F(\lambda_I)$. Nếu $i_s = i_t$ với mọi $s \neq t$ thì $R(\lambda_I) = 0$. Vì bậc của F không quá $k(n-1)$, nên hệ số của $x_1^{n-1}, \ldots, x_k^{n-1}$ trong R cũng bằng với hệ số của $x_1^{n-1}, \ldots, x_k^{n-1}$ trong F. Điều này suy ra hệ số của $x_1^{n-1}, \ldots, x_k^{n-1}$ trong F là

$$k! \sum_{I \subset [n], |I|=k} \frac{F(\lambda_I)}{\prod_{i \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Với mỗi $I \subset [n]$, ta có

$$F(\lambda_I) = P(\lambda_I) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

và

$$\prod_{i \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Điều này chỉ ra rằng hệ số của $x_1^{n-1} \ldots x_k^{n-1}$ trong F bằng với

$$k! \sum_{I \subset [n], |I|=k} \frac{P(\lambda_I)}{\prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

2.2. Chứng minh thứ hai

Trước hết, chúng tôi chứng minh hai bổ đề sau đây:

Bổ đề 1. Cho Q(x) là một đa thức bậc $\mathrm{d} + 1$ với hệ số cao nhất bằng 1 và có các nghiệm (có thể là nghiệm phức) phân biệt. Khi đó, ta có Công thức III.

$$\sum_{Q(\alpha)=0} \frac{\alpha^r}{Q'(\alpha)} = \begin{cases} 0 & nếu \quad 0 \leq r < d \\ 1 & nếu \quad r = d \end{cases}. \qquad (III)$$

Chứng minh

Gọi $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_d$ là $d + 1$ nghiệm phân biệt của $Q(x)$. Khi đó, ta có

$$\sum_{Q(\alpha)=0} \frac{\alpha^r}{Q'(\alpha)} = \sum_{i=0}^{d} \frac{\gamma_i^r}{\prod_{i\neq j} (\gamma_i - \gamma_j)}.$$

Áp dụng công thức nội suy Lagrange cho x^r tại các điểm nội suy $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_d$, chúng ta thu được

$$x^r = \sum_{i=0}^{d} \frac{\gamma_i^r \prod_{i\neq j} (x - \gamma_j)}{\prod_{i\neq j} (\gamma_i - \gamma_j)}.$$

Điều này kéo theo

$$\sum_{i=0}^{d} \frac{\gamma_i^r}{\prod_{i\neq j} (\gamma_i - \gamma_j)} = \text{hệ số của } x^d = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad 0 \le r < d \\ 1 & \text{nếu} \quad r = d \end{cases}.$$

Bổ đề 2. Cho $F(x_1, \dots, x_k)$ là một đa thức k biến với bậc không lớn hơn $d_1 + \dots + d_k$ và $Q_1(x), \dots, Q_k(x)$ tương ứng là các đa thức bậc $d_1 + 1, \dots, d_k + 1$ với hệ số cao nhất bằng 1 và có các nghiệm phân biệt. Khi đó, Biểu thức a:

$$\sum_{Q_1(\alpha_1)=\dots=Q_k(\alpha_k)=0} \frac{F(\alpha_1, \dots, \alpha_k)}{Q'_1(\alpha_1)\cdots Q'_k(\alpha_k)} \qquad (a)$$

là độc lập với các đa thức Q_i và bằng với hệ số của đơn thức $x_1^{d_1} \cdots x_k^{d_k}$ trong đa thức $F(x_1, \dots, x_k)$.

Chứng minh.

Do tính chất tuyến tính, chúng ta chỉ cần xem xét các đơn thức

$$F(x_1, \dots, x_k) = x_1^{r_1} \cdots x_k^{r_k},$$

Trong đó $r_1 + \dots + r_k \le d_1 + \dots + d_k$. Biểu thức a phân tích như sau:

$$\left(\sum_{Q_1(\alpha_1)=0} \frac{\alpha_1^{r_1}}{Q'_1(\alpha_1)}\right) \cdots \left(\sum_{Q_k(\alpha_k)=0} \frac{\alpha_k^{r_1}}{Q'_k(\alpha_k)}\right).$$

Theo Bổ đề 1, nếu $r_i = d_i$ với mọi i, thì biểu thức trên bằng 1, trong các trường hợp còn lại thì biểu thức trên bằng 0. Bổ đề được chứng minh.

Để chứng minh Định lý 1, chúng ta sử dụng Bổ đề 2 cho các đa thức sau đây:

$$F(x_1, \dots, x_k) = P(x_1, \dots, x_k) \prod_{i\neq j} (x_i - x_j)$$

và

$$Q_1(x) = \cdots = Q_k(x) = Q(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i).$$

Thật vậy, ta có $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ là n nghiệm phân biệt của $Q(x)$ và đạo hàm

$$Q'(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j).$$

Khi đó, ta có

$$Q'(\lambda_i) = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Với mỗi tập $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, ta có $F(\lambda_I) = 0$ nếu có $i_s = i_t$ với $s \neq t$. Vì F là đa thức đối xứng, nên Biểu thức a trở thành Biểu thức b

$$k! \sum_{I \subset [n], |I| = k} \frac{F(\lambda_I)}{\prod_{i \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)}. \qquad (b)$$

Với mọi $I \subset [n]$, ta có

$$F(\lambda_I) = P(\lambda_I) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

và

$$\prod_{i \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) = \prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{i,j \in I, j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Do vậy, Biểu thức b trở thành

$$k! \sum_{I \subset [n], |I| = k} \frac{P(\lambda_I)}{\prod_{i \in I, j \in I^c} (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Bổ đề 2 nói rằng đó chính là hệ số của đơn thức $x_1^{n-1}, \dots, x_k^{n-1}$ trong đa thức

$$P(x_1, \dots, x_k) \prod_{i \neq j} (x_i - x_j).$$

3. KẾT LUẬN

Kết quả chính (Định lý 1) và chứng minh thứ nhất đã được trình bày trong bài báo (Dang, 2019). Đóng góp chính trong bài báo này là một cách chứng minh hoàn toàn khác để thu được Đồng nhất thức 2. Cách chứng minh này về cơ bản cũng sử sụng lý thuyết nội suy cụ thể là công thức nội suy Lagrange, chúng ta có thể xem cách chứng minh này như là một sự tổng quát của những lập luận trong chứng minh thứ nhất. Điều này cho phép chúng ta sẽ tìm thêm được những áp dụng xa hơn để thu được những đồng nhất thức khác. Đây sẽ là điểm khởi đầu cho những kết quả nghiên cứu xa hơn của chúng tôi liên quan đến các đồng nhất thức trên các đa thức đối xứng.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả thứ nhất bày tỏ sự biết ơn sâu sắc tới William Cherry vì những thảo luận hữu ích liên quan đến chứng minh thứ nhất của đồng nhất thức. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đề tài Khoa học và Công nghệ cấp Bộ mã số B2019-DLA-03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Chen, W. Y. C. & Louck, J. D. (1996). Interpolation for symmetric functions. *Advances in Mathematics, 117*, 147-156.

Cox, D. A., Little, J., & O'Shea, D. (2007). *Ideals, varieties, and algorithms: An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra* (3rd edition). New York, USA: Springer Publishing.

Dang, T. H. (2019). Identities involving (doubly) symmetric polynomials and integrals over Grassmannians. *Fundamenta Mathematicae, 246*(2), 181-191.

Zeilberger, D. (1982). A combinatorial proof of Dyson's conjecture. *Discrete Mathematics, 41*(3), 317-321.