

TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ TÁCH CỤC ĐẦY ĐỦ DUY NHẤT k -TÔ MÀU DANH SÁCH

Lê Xuân Hùng^{a*}

^aKhoa Khoa học Đại cương, Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội, Hà Nội, Việt Nam

*Tác giả liên hệ: Email: lxhung@hunre.edu.vn

Lịch sử bài báo

Nhận ngày 22 tháng 5 năm 2019

Chỉnh sửa ngày 01 tháng 01 năm 2020 | Chấp nhận đăng ngày 13 tháng 01 năm 2020

Tóm tắt

Cho G là đồ thị có n đỉnh. Giả sử với mỗi đỉnh v của G , tồn tại một danh sách $L(v)$ gồm k màu, sao cho có duy nhất một tô màu cho đồ thị G từ các danh sách màu này, khi đó G được gọi là đồ thị duy nhất k -tô màu danh sách. Đồ thị G được gọi là đồ thị tách cực nếu tồn tại phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con của G cảm sinh trên I là đồ thị rỗng và đồ thị con của G cảm sinh trên K là đồ thị đầy đủ. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa bởi Foldes và Hammer (1977). Các đồ thị này được nghiên cứu nhiều trong lý thuyết đồ thị. Bài báo này sẽ nghiên cứu tính chất của đồ thị tách cực đầy đủ khi nó là duy nhất k -tô màu danh sách.

Từ khóa: Đồ thị duy nhất k -tô màu danh sách; Đồ thị tách cực; Tô màu danh sách đỉnh; Tô màu đỉnh.

DOI: [http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.572\(2020\)](http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.572(2020))

Loại bài báo: Bài báo nghiên cứu gốc có bình duyệt

Bản quyền © 2020 (Các) Tác giả.

Cấp phép: Bài báo này được cấp phép theo CC BY-NC 4.0

PROPERTIES OF UNIQUELY k -LIST COLORABLE COMPLETE SPLIT GRAPHS

Le Xuan Hung^{a*}

^aThe Faculty of Basic Sciences, Hanoi University of Natural Resources and Environment, Hanoi, Vietnam

*Corresponding author: Email: lxhung@hunre.edu.vn

Article history

Received: May 22nd, 2019

Received in revised form: January 1st, 2020 | Accepted: January 13th, 2020

Abstract

Let G be a graph with n vertices. Suppose that for each vertex v in G there exists a list $L(v)$ of k colors, such that there is a unique proper coloring for G from this collection of lists, then G is called a uniquely k -list colorable graph. A graph G is called a split graph if there exists a partition $V = I \cup K$ such that the subgraphs of G induced by I and K are empty and complete, respectively. The notion of split graphs was introduced in 1977 by S. Foldes and P. L. Hammer, and these graphs have since received much attention in graph theory. In this paper, we characterize the properties of complete split graphs that are uniquely k -list colorable graphs.

Keywords: List coloring; Split graph; Uniquely k -list colorable graphs; Vertex coloring.

DOI: [http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.572\(2020\)](http://dx.doi.org/10.37569/DalatUniversity.10.2.572(2020))

Article type: (peer-reviewed) Full-length research article

Copyright © 2020 The author(s).

Licensing: This article is licensed under a CC BY-NC 4.0

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tất cả các đồ thị được nói tới trong bài báo này là những đơn đồ thị hữu hạn, vô hướng, không có khuyên, và không có cạnh bội. Nếu G là một đồ thị, thì $V(G)$ (hoặc V) được gọi là *tập đỉnh* và $E(G)$ (hoặc E) được gọi là *tập cạnh*. Tập hợp tất cả các đỉnh là hàng xóm của tập con $S \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $N_G(S)$ (hoặc $N(S)$). Với mỗi đỉnh $v \in V(G)$, ta gọi $|N_G(v)|$ là bậc của đỉnh v , ký hiệu là $deg_G(v)$ (hoặc $deg(v)$). Đồ thị con của G cảm sinh trên tập $U \subseteq V(G)$ được ký hiệu là $G[U]$. Ngoài ra, một số khái niệm và ký hiệu khác được định nghĩa bởi Behazad và Chartrand (1971).

- Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = 0$ được gọi là đồ thị rỗng, ký hiệu là O_n ;
- Đồ thị $G = (V, E)$ có cấp $|V(G)| = n$ và cỡ $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{2}$ được gọi là đồ thị đầy đủ cấp n , ký hiệu là K_n ;
- Đồ thị $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ gọi là đồ thị bù của đồ thị $G = (V, E)$ nếu $\bar{V} = V$ và với mọi $u, v \in \bar{V}$ ta có $uv \in \bar{E} \Leftrightarrow uv \notin E$;
- Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là đồ thị hai phần nếu có một phân hoạch $V = V_1 \cup V_2$ sao cho $G[V_1]$ và $G[V_2]$ là các đồ thị rỗng;
- Đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đồ thị tách cực* nếu tồn tại một phân hoạch $V = I \cup K$ sao cho đồ thị con $G[I]$ là đồ thị rỗng và đồ thị con $G[K]$ là đồ thị đầy đủ.

Đồ thị tách cực được ký hiệu là $S(I \cup K, E)$. Trong đồ thị tách cực thì $G = S(I \cup K, E)$, nếu $deg(v) = |K|$ với mọi $v \in I$ thì đồ thị G được gọi là *đồ thị tách cực đầy đủ*, ký hiệu là $S(|I|, |K|)$. Khái niệm đồ thị tách cực được định nghĩa đầu tiên vào năm 1977 bởi Foldes và Hammer (1977, tr. 311). Các đồ thị này đã và đang được nghiên cứu nhiều bởi vì chúng có liên quan nhiều đến các vấn đề về tổ hợp và khoa học máy tính như: Bài toán đóng gói và xếp ba lô trong quy hoạch nguyên (Chvatal & Hammer, 1977); Lý thuyết Matroid (Foldes & Hammer, 1978); Nghiên cứu hàm Boolean (Peled, 1975); Giải quyết việc xử lý song song trong các chương trình máy tính (Henderson & Zalcstein, 1977); Xác định công việc trong hệ phân tán (Hesham & Hesham, 1993); và Sự tồn tại chu trình Hamilton (Lê, 2018; Ngo & Le, 2004; Ngo & Le, 2005).

Giả sử G là một đồ thị và λ là một số nguyên dương. Một ánh xạ $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ được gọi là λ -tô màu (λ -coloring) của đồ thị G nếu với mỗi cặp đỉnh u, v kề nhau trong G ta luôn có $f(u) \neq f(v)$.

Vấn đề tô màu danh sách được đề cập lần đầu tiên bởi Erdos, Rubin, và Taylor (1979). Cho đồ thị $G = (V, E)$, với mỗi đỉnh $v \in V$ ta cho một danh sách các màu $L(v)$. Nếu c là tô màu đỉnh của G thỏa mãn $c(v) \in L(v)$ với mọi $v \in V$ thì ta gọi c là *tô màu*

danhsách đỉnh (hay *tô màu danhsách*) từ các danhsách $L(v)$. Đồ thị G được gọi là *k-tô màu danhsách* (*k-list colorable*) nếu với mọi họ $(L(v))_{v \in V}$ thỏa mãn $|L(v)| = k$ với mọi $v \in V$, ta luôn có một tô màu đỉnh từ các danhsách $L(v)$. Số nguyên dương k nhỏ nhất để đồ thị G là *k-tô màu danhsách* được gọi là *số nguyên danhsách* (*list-chromatic number*) của G , ký hiệu là $ch(G)$. Nếu có một họ $(L(v))_{v \in V}$ thỏa mãn $|L(v)| = k$ với mọi $v \in V$, sao cho tồn tại duy nhất một *k-tô màu danhsách* cho đồ thị G thì đồ thị G được gọi là *duy nhất k-tô màu danhsách* (*uniquely k-list colorable*), ký hiệu là $UkLC$. Khái niệm đồ thị duy nhất *k-tô màu danhsách* được đưa ra bởi Mahmoodian và Mahdian (1997), đây là bài toán khó, đã và đang được nghiên cứu nhiều, tuy nhiên các kết quả mới chỉ đạt được cho từng lớp đồ thị cụ thể. Vì vậy, đây là vấn đề rất cần được tiếp tục nghiên cứu.

Đối với lớp đồ thị tách cực, vấn đề tính duy nhất tô màu đã được giải quyết triệt để (Lê, 2014), xác định được số nguyên danhsách (Lê, 2016) của lớp đồ thị này. Bài báo này sẽ đưa ra một số tính chất của đồ thị tách cực khi chúng là duy nhất *k-tô màu danhsách*.

2. CÁC KẾT QUẢ LIÊN QUAN

Từ các vấn đề nêu ở Mục 1, ta có:

Bổ đề 1 (Mahmoodian & Mahdian, 1997, tr. 2): Nếu G là đồ thị $UkLC$ thì G cũng là đồ thị $U(k-1)LC$.

Chúng ta nói rằng đồ thị G có tính chất $M(k)$ nếu và chỉ nếu G không là đồ thị duy nhất *k-tô màu danhsách*. Dưới đây là một số lớp đồ thị đặc biệt có tính chất $M(2)$.

Bổ đề 2 (Mahmoodian & Mahdian, 1997, tr. 3): Chu trình, đồ thị đầy đủ, và đồ thị hai phần đầy đủ là những đồ thị có tính chất $M(2)$ (nghĩa là, các đồ thị này không là đồ thị $U2LC$).

Số k nhỏ nhất sao cho G có tính chất $M(k)$ được ký hiệu là $m(G)$. Dưới đây là một số tính chất của $m(G)$.

Bổ đề 3 (Mahmoodian & Mahdian, 1997, tr. 3): Nếu G là đồ thị $UkLC$ thì $k < m(G)$.

Bổ đề 4 (Mahmoodian & Mahdian, 1997, tr. 4): Với mọi đồ thị G ta luôn có $m(G) \leq |E(\overline{G})| + 2$.

Bổ đề 5 (Mahmoodian & Mahdian 1997, tr. 6): Nếu G là đồ thị $UkLC$ thì ta luôn có $|V(G)| \geq 3k - 2$.

Dưới đây là mệnh đề minh họa cho các khái niệm trên:

Mệnh đề 6: Cho đồ thị tách cực đầy đủ $G = S(2,2)$. Khi đó: i) G là đồ thị $U2LC$; ii) G có tính chất $M(3)$; và iii) $m(G) = 3$.

Chứng minh: i) Giả sử đồ thị tách cực đầy đủ $G = S(2,2)$ có tập đỉnh là $I \cup K$, trong đó $I = \{u_1, u_2\}$, $K = \{v_1, v_2\}$. Ta thiết lập danh sách các màu cho mỗi đỉnh như sau:

$$L(u_1) = \{1,3\}, L(u_2) = \{2,3\}, L(v_1) = \{1,3\}, L(v_2) = \{2,3\}.$$

Từ các danh sách màu trên, rõ ràng tồn tại duy nhất một tô màu f cho đồ thị $S(2,2)$ như sau: $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(u_1) = 3, f(u_2) = 3$. Vậy, đồ thị $S(2,2)$ là $U2LC$;

ii) Giả sử là đồ thị $U3LC$, theo *Bổ đề 5* ta có: $|V(G)| \geq 3 \cdot 3 - 2 = 7$, điều này là vô lý vì $|V(G)| = 4$. Do đó G có tính chất $M(3)$;

iii) Từ i) và *Bổ đề 3* ta có: $m(G) > 2$, từ (ii) ta có $m(G) \leq 3$. Do đó $m(G) = 3$.

3. KẾT QUẢ CHÍNH

Từ các kết quả đã có ta suy ra một số tính chất đơn giản dưới đây:

Mệnh đề 7: Giả sử đồ thị tách cực đầy đủ $G = S(m,n)$ là đồ thị $UkLC$ với $k \geq 2$.

Khi đó: i) $m \geq 2$; ii) $k < \frac{m^2 - m + 4}{2}$; và iii) $k \leq \left\lfloor \frac{m+n+2}{3} \right\rfloor$.

Chứng minh: i) Giả sử $m = 1$. Khi đó G là đồ thị đầy đủ K_{n+1} . Theo *Bổ đề 2*, G có tính chất $M(2)$, điều này trái với giả thiết G là đồ thị $UkLC$ với $k \geq 2$;

ii) Dễ dàng nhận thấy $|E(\overline{G})| = \frac{m(m-1)}{2}$. Từ *Bổ đề 4* suy ra

$$m(G) \leq |E(\overline{G})| + 2 = \frac{m(m-1)}{2} + 2 = \frac{m^2 - m + 4}{2}.$$

Theo *Bổ đề 3* ta có $k < \frac{m^2 - m + 4}{2}$;

iii) Suy ra trực tiếp từ *Bổ đề 5*.

Phần còn lại của bài báo này giả sử đồ thị tách cực đầy đủ $G = S(m,n)$ là đồ thị $UkLC$ có tập đỉnh là $I \cup K$ với $m \geq 2, n \geq 1, k \geq 3$, trong đó:

$$I = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, K = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}.$$

Giả sử với họ các danh sách màu của các đỉnh dưới đây:

$$L(u_i) = \{c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,k}\} \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, m,$$

$$L(v_i) = \{d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k}\} \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n.$$

Đồ thị G có đúng một tô màu danh sách f sao cho: $f(u_i) = c_{i,1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, $f(v_i) = d_{i,1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Chú ý rằng, $c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,k}$ là đôi một khác nhau với mọi $i = 1, 2, \dots, m$, $d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k}$ là đôi một khác nhau với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Với các ký hiệu đã nêu ta có các tính chất sau:

Định lý 8: i) $d_{i,1} \neq d_{j,1}$ với mọi i, j thỏa mãn $1 \leq i, j \leq n$ và $i \neq j$; ii) $c_{i,1} \neq d_{j,1}$ với mọi i, j thỏa mãn $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$; và iii) $c_{i,1} \notin \{c_{j,2}, c_{j,3}, \dots, c_{j,k}\}$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Chứng minh: i) Vì $G[K]$ là đồ thị đầy đủ nên $d_{i,1} = f(v_i) \neq f(v_j) = d_{j,1}$ với mọi i, j thỏa mãn $1 \leq i, j \leq n$ và $i \neq j$;

ii) Vì $G[K \cup \{u_i\}]$ là đồ thị đầy đủ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ nên $c_{i,1} = f(u_i) \neq f(v_j) = d_{j,1}$ với mọi i, j thỏa mãn $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$;

iii) Nếu $i = j$ thì hiển nhiên ta có $c_{i,1} \notin \{c_{j,2}, c_{j,3}, \dots, c_{j,k}\}$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, m$. Bây giờ ta xét trường hợp $i \neq j$. Giả sử tồn tại i_0, j_0 sao cho $i_0, j_0 = 1, 2, \dots, m, i_0 \neq j_0$ và $c_{i_0,1} \in \{c_{j_0,2}, c_{j_0,3}, \dots, c_{j_0,k}\}$. Dễ dàng thấy rằng $c_{i_0,1} \neq c_{j_0,1}$. Xét tô màu f' của G như sau: $f'(u_{j_0}) = c_{i_0,1}; f'(u_i) = c_{i,1}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}, i \neq j_0; f'(v_i) = d_{i,1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Rõ ràng f' là k -tô màu danh sách của G và $f' \neq f$, điều này là vô lý vì G là đồ thị $UkLC$.

Tiếp theo ta đặt $\overline{f(v)} = L(v) \setminus \{f(v)\}$ với mọi $v \in I \cup K$. Chúng ta có tính chất dưới đây:

Định lý 9: i) $2 \leq |f(I)| \leq m - 2$; ii) $\bigcup_{v \in I \cup K} \overline{f(v)} \subseteq \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$; iii) Tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho $\overline{f(v_i)} \subseteq f(I)$.

Chứng minh: i) Trước hết ta chứng minh $|f(I)| \geq 2$. Bằng phản chứng, giả sử $|f(I)| = 1$, khi đó ta có $c_{1,1} = c_{2,1} = \dots = c_{m,1} = a$. Đặt $H = G - I$, dễ dàng nhận thấy H chính là đồ thị đầy đủ K_n . Ta thiết lập họ các danh sách màu $L'(v)$ của các đỉnh của H như sau: Với $v \in V(H)$: nếu $a \in L(v)$ thì $L'(v) = L(v) \setminus \{a\}$; Nếu $a \notin L(v)$ thì $L'(v) = L(v) \setminus \{b\}$, trong đó $b \in L(v)$ và $b \neq f(v)$.

Rõ ràng ta có $|L'(v)| = k - 1 \geq 2$ với mọi $v \in V(H)$. Theo *Bổ đề 2*, đồ thị H có tính chất $M(2)$, do đó theo *Bổ đề 1* thì H cũng có tính chất $M(k - 1)$. Vì vậy, từ các danh sách màu $L'(v)$ tồn tại ít nhất hai cách tô màu cho các đỉnh của H . Từ hai cách tô màu này chúng ta dễ dàng mở rộng thành hai cách tô màu cho các đỉnh của G từ họ các danh sách $L(v), v \in V(G)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị $UkLC$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh $|f(I)| \leq m - 2$. Giả sử $|f(I)| \geq m - 1$. Ta xét hai trường hợp dưới đây:

- *Trường hợp 1:* $|f(I)| = m$. Trong trường hợp này ta có $c_{1,1}, c_{2,1}, \dots, c_{m,1}$ sẽ đôi một phân biệt. Xét đồ thị $G=(V, E)$, trong đó $V' = I \cup K, E' = E(G) \cup \{u_i u_j \mid i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j\}$. Dễ dàng nhận thấy G' là đồ thị đầy đủ K_{m+n} . Theo *Bổ đề 2*, đồ thị G' có tính chất $M(2)$, do đó có ít nhất hai cách tô màu cho các đỉnh của G' từ họ các danh sách $L(v), v \in V(G')$ (chú ý rằng f cũng là một cách tô màu cho đồ thị G'). Hai cách tô màu này cũng chính là hai cách tô màu cho đồ thị G , điều này mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị $UkLC$.
- *Trường hợp 2:* $|f(I)| = m - 1$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $c_{1,1} = c_{2,1}$ và $c_{2,1}, \dots, c_{m,1}$ sẽ đôi một phân biệt. Xét đồ thị $G'' = (V'', E'')$, trong đó: $V'' = I \cup K, E'' = (E(G) \cup \{u_i u_j \mid i, j = 1, 2, \dots, m; i \neq j\}) \setminus \{u_1 u_2\}$.

Dễ dàng nhận thấy G'' chính là đồ thị tách cực đầy đủ $S(2, m + n - 2)$ với tập đỉnh là $I'' \cup K''$, trong đó $I'' = \{u_1, u_2\}, K'' = \{u_3, u_4, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Vì $c_{1,1} = c_{2,1}$ nên bằng lập luận tương tự như trong chứng minh trường hợp $|f(I)| \geq 2$, ta cũng nhận được mâu thuẫn;

ii) Ta sẽ chứng minh $\bigcup_{v \in I \cup K} \overline{f(v)} \subseteq \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$ bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử $\bigcup_{v \in I \cup K} \overline{f(v)} \not\subseteq \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$. Khi đó tồn tại i_0, j_0 sao cho $c_{i_0, j_0} \notin \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$ với $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$ (hoặc $d_{i_0, j_0} \notin \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$ với $1 \leq i_0 \leq n, 2 \leq j_0 \leq k$). Ta xét từng trường hợp dưới đây:

- *Trường hợp 1:* Tồn tại i_0, j_0 sao cho $c_{i_0, j_0} \notin \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$ với $1 \leq i_0 \leq m, 2 \leq j_0 \leq k$.

Giả sử f' là tô màu của G như sau: $f'(u_{i_0}) = c_{i_0, j_0}, f'(u_i) = c_{i,1}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}, f'(v_i) = c_{i,1}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Rõ ràng f' là một tô màu danh sách mới của G từ họ các danh sách $L(v), v \in V(G)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị $UkLC$.

- *Trường hợp 2:* Tồn tại i_0, j_0 sao cho $d_{i_0, j_0} \notin \bigcup_{v \in I \cup K} \{f(v)\}$ với $1 \leq i_0 \leq n, 2 \leq j_0 \leq k$.

Giả sử f'' là tô màu của G như sau: $f''(u_i) = c_{i,1}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, m\}, f''(v_{i_0}) = d_{i_0, j_0}$ và $f''(v_i) = d_{i,1}$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$. Rõ ràng f'' là một tô màu danh sách mới của G từ họ các danh sách $L(v), v \in V(G)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị $UkLC$;

iii) Ta chứng minh khẳng định này bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ta có $\overline{f(v_i)} \not\subseteq f(I)$, suy ra $|\overline{f(v_i)} \setminus f(I)| \geq 1$. Do đó, ta có $|L(v_i) \setminus f(I)| \geq 2$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Xét đồ thị $H = G - I = G[K] = K_n$. Với mỗi $v_i (i \in \{1, 2, \dots, n\})$, ta chọn danh sách màu $L'(v_i)$ như sau: $L'(v_i) \subseteq L(v_i) \setminus f(I)$ sao cho $|L'(v_i)| = 2$. Theo *Bổ đề 2*, đồ thị H có tính chất $M(2)$, vì vậy từ các danh sách màu $L'(v)$ tồn tại ít nhất hai cách tô màu cho các đỉnh của H . Từ hai cách tô màu này chúng ta dễ dàng mở rộng thành hai cách tô màu cho các đỉnh của G từ họ các danh sách $L(v)$, $v \in V(G)$, điều này mâu thuẫn với giả thiết G là đồ thị *UKLC*.

4. KẾT LUẬN

Những bài toán tô màu đồ thị luôn là vấn đề khó và thời sự trong lý thuyết đồ thị. Cho đến nay đã có loại tô màu khác nhau (tô màu đỉnh, tô màu cạnh, tô màu tổng thể, tô màu danh sách, đồ thị duy nhất tô màu...) được nghiên cứu trên nhiều lớp đồ thị, các kết quả đạt được rất phong phú và sâu sắc. Tuy vậy, những vấn đề đặt ra vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn, vẫn là những vấn đề mở, cần được tiếp tục quan tâm nghiên cứu. Với xu hướng đó, trong bài báo này chúng tôi đề cập đến vấn đề đồ thị duy nhất tô màu danh sách, các kết quả đạt được là đã chỉ ra một số tính chất của đồ thị tách cực đầy đủ khi đồ thị này là duy nhất tô màu danh sách (tiêu biểu là các *Định lý 8* và *Định lý 9*). Từ các kết quả này, chúng tôi hy vọng trong thời gian tới sẽ có những kết quả sâu sắc hơn trong việc nghiên cứu vấn đề đồ thị duy nhất tô màu danh sách cho lớp đồ thị tách cực đầy đủ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Behazad, M., & Chartrand, G. (1971). *Introduction to the theory of graphs*. Boston, USA: Allyn and Bacon Publisher.
- Chvatal, V., & Hammer, P. L. (1977). Aggregation of inequalities in integer programming. *Annals of Discrete Mathematics*, 1, 145-162.
- Erdos, P., Rubin, A. L., & Taylor, H. (1979). *Choosability in graphs*. Paper presented at The West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, USA.
- Foldes, S., & Hammer, P. L. (1977). *Split graphs*. Paper presented at The 8th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, USA.
- Foldes, S., & Hammer, P. L. (1978). On a class of matroid-producing graphs. *Colloquium of the Janos Bolyai Mathematical Society*, 18, 331-352.
- Henderson, P. B., & Zalcstein, Y. (1977). A graph-theoretic characterization of the PV_{chunk} class of synchronizing primitive. *SIAM Journal on Computing*, 6(1), 88-108.
- Hesham, A., & Hesham, E. R. (1993). Task allocation in distributed systems: A split graph model. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 14, 15-32.
- Lê, X. H. (2014). Sắc số, đa thức tô màu, và tính duy nhất tô màu của đồ thị tách cực. *Tạp chí Khoa học và Giáo dục*, 13(4), 23-27.

- Lê, X. H. (2016). Tô màu danh sách của đồ thị tách cực. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, (106), 78-80.
- Lê, X. H. (2018). Chu trình Hamilton trong đồ thị tách cực. *Tạp chí Khoa học và Công nghệ*, (124), 94-97.
- Mahmoodian, E. S., & Mahdian, M. (1997). *On the uniquely list colorable graphs*. Paper presented at The 28 Annual Iranian Mathematical Conference, Iran.
- Ngo, D. T., & Le, X. H. (2004). Hamilton cycles in split graphs with large minimum degree. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(1), 23-40.
- Ngo, D. T., & Le, X. H. (2005). On the Burkard-Hammer condition for Hamiltonian split graphs. *Discrete Mathematics*, 296(1), 59-72.
- Peled, U. N. (1975). *Regular Boolean functions and their polytope* (PhD. thesis). University of Waterloo, Canada.