



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET  
POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE - MOHAMED KHIDER - BISKRA  
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie*  
*Département des Sciences de la Matière*

# THÈSE

*Présentée en vue de l'obtention du diplôme de*

## DOCTORAT EN SCIENCE

Spécialité : Physique Théorique

### TRAITEMENT DE CERTAINS SYSTEMES MICROSCOPIQUES VIA LA MECANIQUE QUANTIQUE DEFORMEE

Présentée par : **HEMAME ZOUBIR**

Soutenue le 11/09/2023, devant le Jury :

CHADLI Abdelhakim	MCA	Université de Biskra	Président
FALEK Mokhtar	Professeur	Université de Biskra	Rapporteur
MOUMNI Mustafa	Professeur	Université de Batna-1	Co-Rapporteur
ZAIM Slimane	Professeur	Université de Batna-1	Examineur
BOUDJEMA Kheir Eddine	MCA	Université de Khenchela	Examineur

# Remerciements

J'adresse tous mes remerciements et toute ma gratitude à *Mr. Mokhtar FALÉKIN* Professeur à l'Université MOHAMED KHIDER - BISKRA. Qui m'a encadré tout au long de cette thèse et dont les thèmes de recherches ont fortement inspiré ce travail et qui m'a fait partager ses brillantes intuitions. Qu'il soit aussi remercié car outre son appui scientifique il a toujours affiché une gentillesse, une disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués. Cette thèse est le fruit d'une collaboration de plusieurs années avec lui. C'est à ces côtés que j'ai compris ce que rigueur et précision voulaient dire. Vous m'avez honoré par votre confiance en me confiant cet excellent sujet de travail.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon Co-encadrant de thèse, *Mr. MOUMNI Mustafa* Professeur à l'Université Batna-1, pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'adresse tous mes remerciements à *Mr. CHADLI Abdellhakim*, maître de conférence à l'Université MOHAMED KHIDER - BISKRA. vous nous avez accordé un grand honneur en acceptant de présider le juré de notre thèse

J'exprime ma gratitude à *Mr. ZAIM Slimane* , Professeur à l'Université Université Batna-1. et à *Mr. BOUDJEMA Kheir Eddine* , maître de conférence à l'Université Abbes Laghrour, qui ont bien voulu accepté d'être examinateurs.

# Table des matières

<b>1 Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>2 Etude de l'oscillateur harmonique relativiste dans le cadre de la Géométrie non-commutative</b>	<b>8</b>
2.1 Introduction	8
2.2 L'oscillateur harmonique de Klein-Gordon dépendant de l'énergie à 3 dimensions	9
2.2.1 Propriétés thermiques	19
2.3 Etude thermique de l'oscillateur harmonique de Dirac sous l'effet d'un champ magnétique à deux dimension	24
2.3.1 Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac	31
2.4 Applications de graphène	35
2.4.1 Propriétés thermodynamiques du graphène	40
2.4.2 Non-commutativité de l'effet Hall quantique	45
2.4.3 Analyse des résultats expérimentaux	47
<b>3 Traitement des quelques problèmes quantique dans l'espace de Snyder-de-Sitter</b>	<b>49</b>
3.1 Introduction	49

<b>3.2 Solutions exactes de l'oscillateur de Schrödinger déformé par l'algèbre de</b>	
<b>Snyder - de Sitter</b> . . . . .	52
<b>3.2.1 Cas d'oscillateur unidimensionnel</b> . . . . .	52
<b>3.2.2 Cas d'oscillateur D-dimension</b> . . . . .	56
<b>3.3 Propriétés thermiques de l'oscillateur Klein – Gordon dans l'espace Snyder</b>	
<b>– de Sitter</b> . . . . .	60
<b>3.3.1 Solution exacte de l'oscillateur à une dimension</b> . . . . .	60
<b>3.3.2 Solution exacte de l'oscillateur à D dimension</b> . . . . .	65
<b>3.3.3 Propriétés thermiques</b> . . . . .	66
<b>3.4 Solutions exactes de l'oscillateur de Dirac via le modèle de Snyder-de Sitter</b>	72
<b>4 Traitement quantique de l'oscillateur déformée par l'algèbre de Snyder-</b>	
<b>de Sitter dans le cas de l'espace non- commutative</b>	<b>75</b>
<b>4.1 introduction</b> . . . . .	75
<b>4.2 l'oscillateur de Schrödinger déformé par l'algèbre de SdS dans le cas de</b>	
<b>l'espace non-commutatif à 2 dim</b> . . . . .	76
<b>4.3 L'oscillateur deforme de Klein Gordon dans l'espace non-commutatif à 2 dim</b>	82
<b>4.3.1 Propriétés thermodynamiques</b> . . . . .	85
<b>5 Conclusion générale</b>	<b>90</b>

# Chapitre 1

## Introduction Générale

Au tournant du XXe siècle, deux nouvelles théories ont émergé qui ont radicalement transformé le domaine de la physique : la relativité générale et la mécanique quantique. Ces deux révolutions sont à l'origine de la grande majorité des développements en physique théorique du XXe siècle.

Réconcilier la mécanique quantique avec la relativité générale est actuellement l'un des problèmes les plus difficiles de la physique. Cependant, cette première approche conduit à de sérieux problèmes de normalisabilité, qui constituent un frein majeur au développement du Réconciliation. Cela signifie que pour maintenir notre conviction, nous devons d'abord trouver un moyen de quantifier la gravité. Cependant, étant donné le succès remarquable d'Einstein dans l'explication de nombreux phénomènes, nous devrions accepter son travail comme une base solide, même si une intégration et une extension supplémentaires sont nécessaires pour répondre aux exigences de la première approche. Trouver une solution à ce problème est actuellement une question ouverte.

Selon cette hypothèse, une façon de résoudre les incompatibilités entre ces deux théories est d'introduire une longueur observable minimale non nulle qui apparaît lorsqu'il s'agit de systèmes qui ont des quantités caractéristiques d'une échelle de Planck. Cette échelle porte le nom du physicien Max Planck, qui découvrit en 1899 qu'un ensemble de grandeurs

dimensionnelles fondamentales (appelées longueur, temps et énergie de Planck) pouvait être obtenu en combinant trois constantes physiques universelles ( $c, G$  et  $\hbar$ ). En identifiant ces valeurs comme les seuils auxquels des effets de gravité quantique auparavant inobservables sont activés et devraient devenir visibles, leur signification physique a été clarifiée. Les effets de la gravité quantique, qui dans d'autres contextes ne sont pas pertinents, ont reçu une signification physique plus précise en identifiant ces quantités comme celles auxquelles ces effets sont activés et doivent être observés. Pour cette raison, nous nous attendons à ce que la longueur de Planck,  $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c}} = 1.62 \times 10^{-33} cm$ , joue un rôle important dans la détermination de la quantification de l'espace-temps. lui-même.

Au cours des dernières années, au niveau d'un échelle microscopique de haute énergie, beaucoup de théories ont été consacrées à l'étude des problèmes de théorie quantique des champs caractérisée par la non localité des processus physiques, pour absorber les infinis entachant les théories de champs standards. Notamment, la théorie de la géométrie non-commutative qui a été suggérée que n'importe quel schémas d'unification des interactions fondamentales de la physique devrait en principe contenir des effets de la non commutativité de l'espace décrivant la non localité des phénomènes quantiques. En plus, selon le mathématicien Alain Connes [1], cette non-commutativité de l'espace est considérée comme étant une généralisation de la dualité entre espace géométrique et algébrique à un cas plus général dans lequel l'algèbre n'est plus commutative. Cela nécessite la modification de deux idées fondamentales des mathématiques, à savoir l'espace et la symétrie, ainsi que l'adaptation de tous les instruments mathématiques pertinents. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont vu le jour pour tenter de concrétiser cette non-commutativité de l'espace. Leur champ d'application s'étend de la théorie des champs à la mécanique quantique. Parmi ces travaux citons, la théorie en  $\Phi^4$  non-commutative [2], l'extraction de la mécanique quantique non-commutative de la théorie quantique des champs non-commutative dans le cas non relativiste [3], la théorie électrodynamique quantique (QED) non commutative [4], et L'influence de la non-commutativité de l'espace sur la mécanique quantique [5].

Pour caractériser les espaces non-commutatifs et exprimer la comparaison entre les observateurs de position qui génèrent beaucoup d'accent sur la valeur du paramètre non-commutatif, la relation de commutation est modifiée comme suit [6] :  $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$ . Cette modification est utilisée, par exemple, dans les études de l'effet de la géométrie non-commutative sur les orbites classiques d'une particule. En revanche, la non-commutativité est devenue un domaine de recherche extrêmement actif au cours des dernières décennies, en particulier dans les théories des cordes, les théories quantiques des champs et la mécanique quantique [7] [8]. Pour les systèmes quantiques dans l'espace non commutatif, on observe que l'hypothèse de non commutativité peut être une conséquence des effets de la gravité quantique. De plus, c'est un laboratoire théorique fructueux dans lequel nous pouvons mieux comprendre les conséquences de la non-commutativité dans la théorie des champs en utilisant des techniques de calcul standard de la mécanique quantique.

En d'autre part, on sait bien qu'au sein de la relativité générale, l'espace temps non-commutatif décrivant la gravité comme une propriété géométrique de l'espace-temps. La structure de l'espace-temps à l'échelle de Planck, où les effets gravitationnels quantiques ne peut être ignorée, est encore inconnue puisqu'il s'agit d'un domaine de la physique où il est pratiquement impossible d'obtenir des données physiques.

La première apparition de notion de l'espace-temps non-commutatif en physique des particules remonte aux travaux de Snyder en 1947 [9]. Le but été de pouvoir se débarrasser des divergences ultraviolettes de théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la renormalisation produisait des résultats remarquables.

En physique des hautes énergies, de nombreuses recherches ont été menées sur la mécanique quantique déformée par la géométrie spatiale non commutative. Cette recherche a inclu l'extraction de la mécanique quantique non-commutative de la théorie quantique des champs non-commutative dans le cas non relativiste [10] et L'influence de la non-commutativité de l'espace sur la mécanique quantique [5].

Les objectifs de cette thèse sont principalement basée sur l'étude de certains phénomènes microscopiques à haute énergie dans le contexte de la déformation quantique à petite échelle afin d'absorber les infinis qui entachent les théories standards des champs. En général, on s'impose :

- De résoudre le mouvement oscillateur de particules non relativistes et relativistes (scalaires, spinorielles et vectorielles) dans un champ magnétique externe uniforme et étudier leur propriétés thermodynamiques du système et interpréter le résultat physique obtenu en présence de déformation spatial .

- De traiter l'influence de la déformation dans un cadre mathématique rigoureux afin de caractériser et insérer de manière appropriée dans le modèle physique en question, ainsi que de revoir surtout les ambiguïtés de la théorie quantique et de tenter d'élucider sa signification dans ce cadre de déformation. Par conséquent, la structure de la thèse peut être résumée comme suit :

Dans le deuxième chapitre un rappelle sur la géométrie non-commutative (NC). Puis nous avons étudié dans une première partie les solutions exactes de L'oscillateur harmonique de Klein-Gordon (KGO) qui dépend de l'énergie à 3 dimensions où nous avons déterminé le spectre d'énergie en fonction de paramètres de déformation  $\theta$  et leur propriété thermique. Tandis que dans la deuxième partie, une étude explicite sur les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur harmonique de Dirac (DO) bidimensionnel sous l'effet d'un champ magnétique externe et uniforme. Notamment un accent particulier a été mis sur le graphène et leurs applications. Dans le troisième chapitre un bref résumé sur le modèle de Snyder-de-Sitter (SdS) dans la représentation de l'espace des impulsions et de résoudre les équations de Schrödinger , Klein – Gordon et Dirac à dimensions arbitraires pour l'interaction de type oscillateur. Nous calculons la fonction d'onde et le spectre d'énergies exactes du système. De plus, nous parlons de plusieurs circonstances spécifiques et des résultats analytiques qui les accompagnent. Les fonctions thermodynamiques du système sont étudiés analytiquement pour KGO. Dans le quatrième chapitre nous exposons un explicite calcul pour

l'oscillateur de Schrödinger (SO) et KGO déformé de dimensions arbitraire pour l'algèbre de SdS sous un champ magnétique le long de l'axe  $z$  dans l'espace non-commutatif. Nous obtenons la solution exacte et le spectre d'énergie pour ces systèmes et on discute aussi les cas particuliers. Les propriétés thermodynamiques du système sont explorées et expliquées analytiquement dans le domaine des hautes températures. Enfin on a résumé les principaux résultats obtenus dans ce manuscrit dans une conclusion générale.

## Chapitre 2

# Etude de l'oscillateur harmonique relativiste dans le cadre de la Géométrie non-commutative

### 2.1 Introduction

En tant que théorie mathématique, la géométrie non-commutative est maintenant bien établie, bien qu'au début, ses progrès aient restreint à certaines branches de la physique comme la mécanique quantique. Cependant la géométrie non-commutative est devenue un sujet de grand intérêt [1] [11]. Il a trouvé des applications dans de nombreux secteurs de la physique et s'y est rapidement impliqué, a continué à promouvoir des idées fructueuses et la recherche d'une meilleure compréhension. Comme dans la gravité quantique [12], le modèle standard des interactions fondamentales [13], aussi dans la théorie des cordes [14], et son implication dans les algèbres de Hopf [15] donne les algèbres de Connes–Kreimer Hopf [16] [17] etc. Il existe de nombreux articles consacrés à l'étude de ces divers aspects, en particulier dans la théorie quantique des champs [18] [19] et mécanique quantique [20] [21].

De la théorie quantique habituelle, qui a été écrite sur des espaces commutatifs qui

répondent aux relations de commutation suivantes

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2.1)$$

il est facile de redéfinir cette théorie dans un autre espace non-commutatif, en changeant les relations de commutation sous cette forme

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1) \quad (2.2)$$

où  $\theta_{ij}$  est un tenseur antisymétrique.

Pour surmonter les problèmes d'unitarité et de causalité qui se posent dans la théorie non-commutative à ce stade ( $\theta_{0j} = 0$ ,  $\theta_{ij} \neq 0$ ), nous proposons que toutes les composantes du temps  $\theta_{0j}$  soit égales à zéro.

Il est intéressant de noter que, dans le même cadre de la théorie quantique non-commutative, les modèles fournis par les relations de commutation discutées ci-dessous [2.2](#) peuvent être réalisés en termes de produit étoile, c'est-à-dire remplacer directement l'algèbre commutative par le produit usuel de fonctions par Algèbre de Moyal avec le produit étoile [\[28\]](#).

$$(f * g)(x) = \exp \left[ \frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} \partial_{x_\mu} \partial_{y_\nu} \right] f(x)g(y) \Big|_{x=y} \quad (2) \quad (2.3)$$

avec  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions arbitraires infiniment différentiables.

## 2.2 L'oscillateur harmonique de Klein-Gordon dépendant de l'énergie à 3 dimensions

Les potentiels dépendants de l'énergie sont apparus pour la première fois dans la mécanique quantique non relativiste, par exemple, dans l'équation de Pauli-Schrödinger [\[23\]](#) et

le problème relativiste à plusieurs corps [24]. Ainsi, les équations d'onde avec des potentiels dépendant de l'énergie sont bien connues en physique, même lorsque le potentiel n'est pas précisément proportionnel à l'énergie. De nombreux auteurs [25] [26] [27] se sont récemment intéressés à l'équation d'onde à potentiel dépendant de l'énergie en mécanique quantique commutative. En raison de la dépendance énergétique du potentiel dans les équations d'onde, il est nécessaire de modifier le produit scalaire afin de maintenir la norme. Nous étudions l'effet de la non-commutativité entre les coordonnées et le potentiel dépendant de l'énergie de l'oscillateur harmonique sur les valeurs propres d'énergie et la normalisation des fonctions d'onde à l'aide de la mécanique quantique non commutative.

Il est bien établi que l'oscillateur harmonique non relativiste se comporte de manière similaire au problème de Landau dans un espace commutatif [28]. Cette section examine cette relation dans un contexte relativiste. L'équation suivante définit l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) dans un espace non-commutatif tridimensionnel.

$$c^2 \left[ \left( \vec{p} + i\mu\omega_E \vec{r} \right) \left( \vec{p} - i\mu\omega_E \vec{r} \right) \right] * \psi = (E^2 - \mu^2 c^2) \psi \quad (2.4)$$

Dans l'équation mentionnée ci-dessus,  $\mu$  et  $\omega_E$  sont la masse et la fréquence dépendant de l'énergie, respectivement avec  $\omega_E = \omega (1 + \gamma E)^q$  et  $q$ ,  $\gamma$  est un paramètre.

Cependant, dans le cas où  $[p_i, p_j] = 0$ , il est bien connu que la mécanique quantique non commutative peut être réduite à la mécanique quantique habituelle. Ainsi, l'opérateur de coordonnées non-commutant peut être représenté en termes d'opérateur de coordonnées commutant et de son opérateur du moment comme [29] [30]

$$x_i^{(NC)} \rightarrow x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j \text{ et } p_i \rightarrow p_i, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2.5)$$

pour  $i = 1, 2$  alors, les nouveaux opérateurs obéissent aux relations de commutation cano-

riques usuelles. avec le paramètre tenseur antisymétrique  $\theta_{ij}$  choisit comme

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta_k \text{ et } \theta_3 = \theta \quad (2.6)$$

où  $\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de Levi-Civita .

Sur la base de ce fait, nous sommes en mesure de réécrire la transformation [2.5](#) dans la version condensée qui est la suivante :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar} \text{ avec } \theta_{12} = -\theta_{21} = \theta_3 = \theta \quad (2.7)$$

avec  $\times$  est le produit vectoriel.

En tenant compte de la transformation [2.7](#) indiquant le passage d'un espace non commutatif à un autre espace commutatif dans l'équation [2.4](#), la solution de l'équation de l'oscillateur KG dans l'espace non-commutatif est la suivante :

$$c^2 \left[ \vec{p} + i\mu\omega_E \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{2\hbar} \right) \right] \left[ \vec{p} - i\mu\omega_E \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{P}}{2\hbar} \right) \right] \psi = (E^2 - \mu^2 c^2) \psi \quad (2.8)$$

Après un simple calcul, on arrive à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) (p_x^2 + p_y^2) + \mu^2 \omega_E^2 (x^2 + y^2) + \mu^2 \omega_E^2 z^2 - \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta}{\hbar} L_z + p_z^2 \right] \psi \\ & = \left[ \frac{E^2 - \mu^2 c^2}{c^2} + 3\mu\omega_E \hbar \right] \psi \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $L_z = xp_y - yp_x$  est l'opérateur de moment cinétique. Maintenant, il est suitable d'exprimer les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  en fonction de coordonnées cylindriques

$(r, \varphi, z)$  dans la prédite équation [2.9](#), pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left[ \hbar^2 \left( 1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right. \\ & \left. - \mu^2 \omega_E^2 r^2 + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu^2 \omega_E^2 z^2 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta \hbar}{\hbar} \frac{\partial}{i \partial \varphi} \right] \psi(r, \varphi, z) \\ & = \left[ -\frac{E^2 - \mu^2 c^2}{c^2} - 3\mu\omega_E \hbar \right] \psi(r, \varphi, z) \end{aligned} \quad (2.10)$$

On sépare les variables radiales, angulaires et axiales de la fonction d'onde  $\psi$  en posant

$$\psi(r, \varphi, z) = C e^{i|m|\varphi} \frac{R(r)}{\sqrt{r}} \Psi^{osc}(z) \quad (2.11)$$

En substituant l'équation [2.11](#) dans l'équation [2.10](#), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R(r)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} r^2 + N \right] R(r) \\ & = \frac{1}{\Psi^{osc}(z)} \left[ -\frac{\hbar^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} z^2 \right] \Psi^{osc}(z) = b \end{aligned} \quad (2.12)$$

Avec

$$M^2 = \hbar^2 \left( 1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \quad (2.13)$$

$$N = \frac{1}{M^2} \left( \frac{(E^2 - \mu^2 c^4)}{c^2} + 3\mu\omega_E \hbar + \mu^2 \omega_E^2 \theta |m| \right) \quad (2.14)$$

Tant que la constante de séparation  $b$  est identique dans les deux équations, les termes radial et axial sont égaux l'un dans l'autre, les deux équations s'écrivent

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} r^2 + \alpha \right) R(r) = 0 \quad (2.15)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{\hbar^2} z^2 - \beta \right) \Psi^{osc}(z) = 0 \quad (2.16)$$

Avec

$$\alpha = N - b, \quad \beta = -\frac{M^2}{\hbar^2} b \quad (2.17)$$

Pour l'équation 2.16 on pose,  $z^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega_E} \rho^2$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{4} \rho^2 + n_z + \frac{1}{2} \right) \Psi^{osc}(\rho) = 0 \quad (2.18)$$

avec

$$\beta = -\frac{(2n_z + 1) \mu \omega_E}{\hbar}, \quad b = \frac{\mu \omega_E \hbar}{M^2} (2n_z + 1) \quad (2.19)$$

dont  $n_z = 1, 2, 3, \dots$  est le nombre quantique principal.

Nous aurons une équation de type parabolique, possédant la même fonction que celle de Weber  $D_n(\rho)$

$$D_{n_z}(\rho) = N_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{4}\right) H_{n_z}\left(2^{-\frac{1}{2}} \rho\right) \quad (2.20)$$

On obtient par déduction

$$\Psi_{n_z}^{osc}(z) = D_{n_z}\left(\sqrt{\frac{2\mu\omega_E}{\hbar}} z\right) = N_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega_E z^2}{2\hbar}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega_E}{\hbar}} z\right) \quad (2.21)$$

avec  $N_0$ , est la constante de normalisation,  $H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} z\right)$  est le polynôme d'hermite.

Pour l'équation 2.15, la fonction d'onde  $R(r)$  se transforme à

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} - \chi^2 - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{\chi^2} + \varepsilon \right) R(\chi) = 0 \quad (2.22)$$

avec

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{M}{\mu\omega}} \\ \chi = \frac{r}{a} \\ \varepsilon = \frac{M^g}{\mu\omega_E} \alpha \end{cases} \quad (2.23)$$

Maintenant, lorsque nous introduisons une nouvelle variable  $\xi = \chi^2$  et une nouvelle fonction  $W(\xi)$  par la relation

$$R(\chi) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}\xi} \xi^\kappa W(\xi), \quad (2.24)$$

nous arrivons à

$$\left\{ \xi \frac{d^2}{d\xi^2} + \left( 2\kappa + \frac{1}{2} - \xi \right) \frac{d}{d\xi} + n \right\} W(\xi) = 0, \quad (2.25)$$

avec

$$\begin{cases} 4\kappa \left( \kappa - \frac{1}{2} \right) = \left( m^2 - \frac{1}{4} \right) \\ n = \frac{\varepsilon}{4} - \kappa - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (2.26)$$

D'où

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( |m| + \frac{1}{2} \right) \quad (2.27)$$

L'équation [2.25](#) est une équation de la fonction confluite hyper-géométrique

$$W(\xi) = \lambda_{norm} F(-n; |m| + 1, \xi). \quad (2.28)$$

Où la forme finale de la fonction d'onde  $R(r)$ , s'écrit

$$R_{n,m}(r) = \frac{\lambda_{norm}}{a^{\left(|m| + \frac{1}{2}\right)}} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{|m|} F\left(-n; |m| + 1, \frac{r^2}{a^2}\right)$$

avec

$$a^2 = \frac{\hbar}{\mu\omega_E} \left( 1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

En conclusion la forme explicite de l'équation [2.11](#), est réécrite comme

$$\psi_{n,n_z,|m|}(r, \varphi, z) = \frac{N e^{i|m|\varphi}}{a^{(|m|+\frac{1}{2})}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{\mu\omega_E z^2}{\hbar}\right)\right] r^m F\left(-n; |m| + 1, \frac{r^2}{a^2}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega_E}{\hbar}} z\right). \quad (2.30)$$

avec  $N = N_0 \lambda_{norm}$  est la constante de normalisation.

Pour obtenir les valeurs propres de l'énergie, substituez les expressions [2.27](#), [2.26](#), [2.23](#), [2.19](#), [2.14](#) et [2.13](#) dans l'équation [2.17](#)

$$E_{n,n_z,|m|}^2 = 2\mu c^2 \hbar \omega_1 (2n + |m| + 1) + 2\mu c^2 \hbar \omega_E \left(n_z + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\mu^2 c^2 \omega_E^2 \theta}{\hbar}\right) \hbar |m| + \mu^2 c^4 - 3\mu c^2 \hbar \omega_E \quad (2.31)$$

avec

$$\omega_1 = \omega_E \sqrt{1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2}} \quad (2.32)$$

Puis utilisons la relation  $E = \mu c^2 + E_{nr}$  avec la limite non-relativiste  $E_{nr} \leq \mu c^2$  dans l'équation [2.31](#), on obtiendra l'équation

$$E_{n,n_z,|m|_{(nr)}} = \hbar \omega_E \left(1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} (2n + |m| + 1) + \hbar \omega_E (n_z - 1) - \left(\frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta}{\hbar}\right) \frac{\hbar |m|}{2\mu} \quad (2.33)$$

Dans ce cas, les valeurs propres d'énergie sont comparables à celles du système sous l'action du champ magnétique dans l'espace commutatif (effet Zeeman normal). Il est maintenant intéressant d'étudier le cas particulier suivant

- $q = 1$  ( $\omega_E = \omega_0 (1 + \gamma E_{n,n_z,m})$ ).

Dans ce cas les valeurs propres de l'énergie  $E_{n,n_z,|m|}$  sont déterminés par une équation du quatrième ordre comme

$$E_{n,n_z,m}^4 + bE_{n,n_z,m}^3 + cE_{n,n_z,m}^2 + dE_{n,n_z,m} + e = 0 \quad (2.34)$$

où

$$a = 1 + 2\xi|m|\theta^2 + \xi^2\theta^2 \left[ |m|^2 - (2n + |m| + 1)^2 \right] \quad (2.35)$$

$$b = \frac{1}{a} \left[ 4\zeta\mu^2\omega_1^2 \left[ 2|m|^2\gamma - (2n + |m| + 1)^2 \right] + 4\frac{\zeta\theta|m|}{\gamma} + 4\mu c^2\hbar(1 - n_z)(\gamma\omega_1 + \zeta) \right] \quad (2.36)$$

$$c = \frac{1}{a} \left[ -\frac{6\zeta\gamma^2\omega_1^2}{c^2}(n^2 + |m| + \frac{3}{4}) + \mu\theta|m|\omega_1^2\gamma(2 - 3\hbar\omega_1\gamma(n_z - 1)) \right. \\ \left. - \hbar^2\omega_1^2\gamma^2(2n + |m| + 1)^2 + (1 - \hbar\omega_1\gamma(n_z - 1))^2 \right] \quad (2.37)$$

$$d = \frac{1}{a} \left[ \frac{2\zeta\theta^2}{\gamma} \left( 2|m| - \frac{\zeta}{\gamma^2}(2n + |m| + 1)^2 \right) - \frac{8\zeta c^2}{\gamma}(2n + |m| + 1)^2 + 4\mu c^2\omega_1\gamma\hbar(n_z - 1) \right] \quad (2.38)$$

$$e = \frac{1}{a} \left[ (2\mu c^2\hbar(n_z - 1) + \zeta|m|)^2 - 4\mu^2 c^4\omega_1^2\hbar^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{4c^2\hbar^2} \right) (2n + |m| + 1)^2 \right] \quad (2.39)$$

avec

$$\zeta = \mu^2 c^2 \omega^2 \theta^2 \quad (2.40)$$

l'équation [2.34](#) peut être résolue via l'équation suivante du deuxième ordre [31](#)

$$E_{n,n_z,m}^2 + (b + A) \frac{E_{n,n_z,m}}{2} + y_{n,n_z,m} + \frac{by_{n,n_z,m} - d}{A} = 0 \quad (2.41)$$

où

$$A = \pm \sqrt{8y_{n,n_z,m} + b^2 - 4c} \quad (2.42)$$

Ainsi, il existe quatre solutions

$$E_{n,n_z,|m|} = \frac{1}{4} \left[ -(b + A) \pm \sqrt{(b + A)^2 - 16 \left( y_{n,n_z,|m|} + \frac{by_{n,n_z,m} - d}{A} \right)} \right] \quad (2.43)$$

et  $y_{n,n_z,|m|}$  est l'une des racines réelles de l'équation cubique

$$8y_{n,n_z,|m|}^3 - 4cy_{n,n_z,m}^2 + (2bd - 8e)y_{n,n_z,m} + e(4c - b^2) - d^2 = 0 \quad (2.44)$$

où

$$y_{n,n_z,m} = \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{Q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{Q}{2}} - \frac{R}{3}$$

avec

$$D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2 \quad (2.45)$$

$$P = S - \frac{R^2}{3} \quad (2.46)$$

$$Q = 2\left(\frac{R}{3}\right)^3 - \frac{RS}{3} + \frac{e(4c - b^2) - d^2}{8} \quad (2.47)$$

$$R = -\frac{c}{2} \text{ et } S = \frac{bd}{4} - e \quad (2.48)$$

Nous prenons quelques valeurs des paramètres de  $\gamma$  et  $\theta$

**pour  $\gamma=0$ ,  $\theta$  variable**

L'équation [2.31](#) de l'énergie peut être exprimée de la manière suivante :

$$E_{n,n_z,|m|} = \pm\mu c^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega_2}{\mu c^2} (2n + |m| + 1) + \frac{2\hbar\omega_0}{\mu c^2} \left[ n_z - 1 - \frac{\mu|m|\theta}{2\hbar} \right]} \quad (2.49)$$

avec

$$\omega_2 = \omega_0 \left( 1 + \frac{\mu^2 \omega_0^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

on peut construire l'allure du spectre d'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs de paramètres de  $\theta$  (en utilisant les unités  $\hbar = c = \mu = 1$  et mettant  $\omega_0 = |m| = n_z = 1$ ).

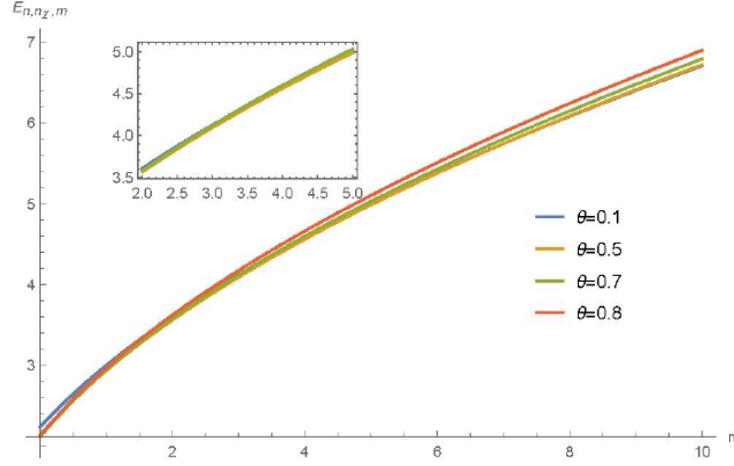


Figure 2.1 : spectre d'énergie en fonction de  $n$  pour  $\gamma=0$ ,  $\theta$  variable

La dépendance des paramètres de l'énergie est illustrée à la figure 2.1. Encore une fois, un effet de type Zeeman est trouvé. De plus, nous observons que les différentes valeurs de paramètre non-commutative  $\theta$  ont un effet négligeable sur les valeurs d'énergie.

**pour  $\theta=0$ ,  $\gamma$  variable**

L'équation [2.31](#) de l'énergie peut être exprimée de la manière suivante :

$$E_{n,n_z,|m|}^2 + BE_{n,n_z,|m|} + C = 0 \quad (2.51)$$

où

$$B = -2\mu c^2 \hbar \omega_0 (2n + |m| + n_z) \gamma \quad (2.52)$$

$$C = - [2\mu c^2 \hbar \omega_0 (2n + |m| + n_z) + \mu^2 c^4] \quad (2.53)$$

À partir de l'équation. [2.51](#), les valeurs d'énergie sont trouvées comme

$$E_{n,n_z,|m|}^{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} = N\gamma \pm \sqrt{N^2\gamma^2 + 4(N + \mu^2c^4)} \quad (2.54)$$

Où

$$N = 2\mu c^2 \hbar \omega_0 (2n + |m| + n_z) \quad (2.55)$$

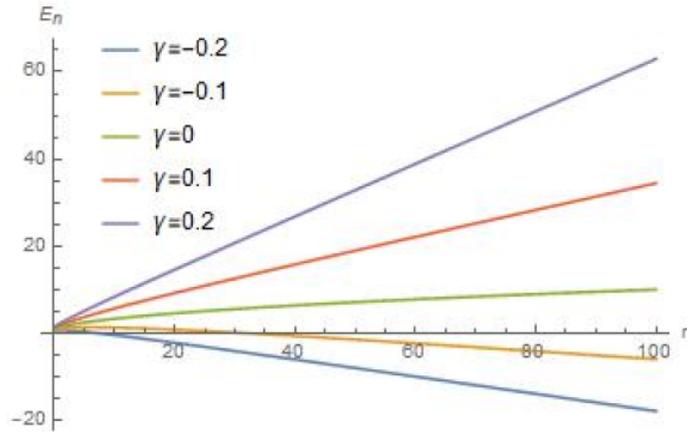


Figure 2.2 : spectre d'énergie en fonction de n pour  $\theta=0$ ,  $\gamma$

Dans la figure 2.2, la dépendance de l'énergie sur le paramètre ( $\gamma < 0$ ,  $\gamma > 0$ ) entraîne des écarts par rapport aux valeurs d'énergie normales (c'est-à-dire  $\theta = \gamma = 0$ ).

### 2.2.1 Propriétés thermiques

Dans cette partie, nous étudierons les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon présenté ci-dessus. Les valeurs propres de l'énergie [2.49](#) de KGO dans l'espace NC sont les suivantes :

$$E_{n,n_z,|m|} = \pm \mu c^2 \sqrt{\delta n + \lambda} \quad (2.56)$$

avec :

$$\delta = \frac{4\hbar\omega_2}{\mu c^2} \text{ et } \lambda = 1 + \frac{2\hbar}{\mu c^2} \left[ \omega_2 (|m| + 1) + \omega_0 \left( n_z - 1 - \frac{\mu |m| \theta}{2\hbar} \right) \right] \quad (2.57)$$

Du fait que toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être calculées à partir de la fonction de partition  $Z$ , nous commençons par calculer la fonction de partition du système qui est définie à la température  $T$  en utilisant le facteur de Boltzmann comme suit :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{K_B T} (E_{n,n_z,|m|} - E_{0,n_z,|m|})} \quad (2.58)$$

où  $K_B$  est la constante de Boltzmann et  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental correspond à  $n = 0$ .

Par la substitution de l'équation [2.56](#) dans l'équation [2.58](#) on obtient

$$Z = e^{\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\delta n + \lambda}} \quad (2.59)$$

Pour évaluer la fonction [2.59](#), on utilise la formule d'Euler–MacLaurin [32](#)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0), \quad (2.60)$$

où  $B_{2p}$  est le nombre de Bernoulli et  $f^{(2p-1)}$  désigne la dérivée d'ordre  $(2p - 1)$  et

$$f(x) = e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\delta x + \lambda}} \quad (2.61)$$

L'intégrale dans l'expression [2.60](#) est donnée comme suit :

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\delta x + \lambda}} dx = \frac{2}{\delta \left( \frac{\mu c^2}{K_B T} \right)^2} \left( 1 + \frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\lambda} \right) e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\lambda}}, \quad (2.62)$$

À des températures élevées on a alors les résultats suivants jusqu'à l'ordre  $B_4$  et les autres

termes sont négligeables

$$f^1(0) = -\frac{\mu c^2 \delta}{2K_B T} e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\lambda}}, \quad (2.63)$$

$$f^3(0) = -\frac{\mu c^2 \delta^3}{8K_B T} \left[ 3\lambda^{-\frac{5}{2}} + \frac{3\mu c^2}{K_B T} \lambda^{-2} + \left( \frac{\mu c^2}{K_B T} \right)^2 \lambda^{-\frac{3}{2}} \right] e^{-\frac{\mu c^2}{K_B T} \sqrt{\lambda}} \quad (2.64)$$

$$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30} \quad (2.65)$$

on remplace [2.62](#), [2.63](#), [2.64](#) et [2.65](#) dans l'équation [2.60](#) et en effectuant un calcul simple et direct, on obtient la fonction de partition  $Z$  :

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\delta} \chi + \frac{2}{\delta} \chi^2 + \left( \frac{\delta}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^5}} \right) \frac{1}{\chi} - \frac{\delta^3}{1920\lambda^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\delta^3}{5760\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^3} \quad (2.66)$$

où

$$\chi = \frac{K_B T}{\mu c^2} \quad (2.67)$$

Selon l'équation. [2.66](#) la fonction de partition  $Z$ , qui dépend du paramètre NC  $\theta$ , peut être utilisée pour déterminer les propriétés thermodynamiques de notre système, telles que l'énergie libre  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , la chaleur spécifique  $C$  et l'entropie  $S$ .

$$F = -K_B T \ln \left[ \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{\lambda}}{\delta} \chi + \frac{2}{\delta} \chi^2 + \left( \frac{\delta}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^5}} \right) \frac{1}{\chi} - \frac{\delta^3}{1920\lambda^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\delta^3}{5760\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^3} \right] \quad (2.68)$$

$$U = \frac{k_B T}{Z} \left[ \frac{2\sqrt{\lambda}}{\delta} \chi + \frac{4}{\delta} \chi^2 - \left( \frac{\delta}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^5}} \right) \frac{1}{\chi} + \frac{\delta^3}{960\lambda^2} \frac{1}{\chi^2} + \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^3} \right] \quad (2.69)$$

$$C = \frac{k_B}{Z^2} \left[ Z \left( \frac{4\sqrt{\lambda}}{\delta} \chi + \frac{12}{\delta} \chi^2 - \frac{\delta^3}{960\lambda^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\delta^3}{960\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^3} \right) - \chi^2 \left( \frac{2\sqrt{\lambda}}{\delta} + \frac{4}{\delta} \chi - \left( \frac{\delta}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^5}} \right) \frac{1}{\chi^2} + \frac{\delta^3}{960\lambda^2} \frac{1}{\chi^3} + \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^4} \right)^2 \right] \quad (2.70)$$

$$S = k_B \left[ \ln Z + \frac{1}{Z} \left( \frac{2\sqrt{\lambda}}{\delta} \chi + \frac{4}{\delta} \chi^2 - \left( \frac{\delta}{24\sqrt{\lambda}} - \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^5}} \right) \frac{1}{\chi} + \frac{\delta^3}{960\lambda^2} \frac{1}{\chi^2} + \frac{\delta^3}{1920\sqrt{\lambda^3}} \frac{1}{\chi^3} \right) \right] \quad (2.71)$$

avec

$$F = -K_B T \ln Z, U = K_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, C = \frac{\partial U}{\partial T} \text{ et } S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

Les grandeurs thermiques sont représentées sur les figures (2.3-2.6). Nous devons mentionner que, dans toutes les figures, nous avons utilisé les unités  $\hbar = c = \mu = 1$  et mettant  $|m| = n_z = 1$ .

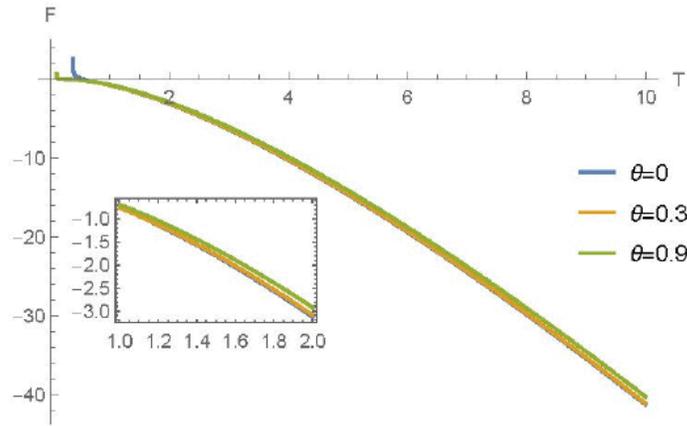


Figure 2.3 : l'énergie libre pour F pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

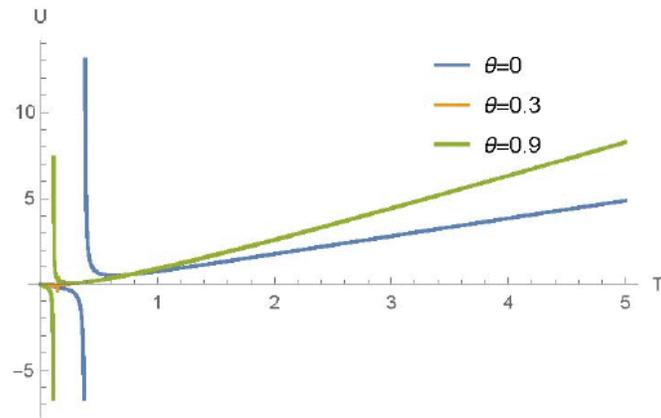


Figure 2.4 : l'énergie moyenne  $U$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

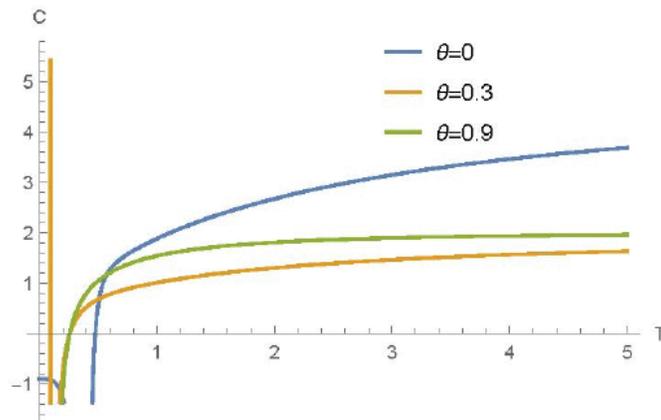


Figure 2.5 : la chaleur spécifique  $C$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

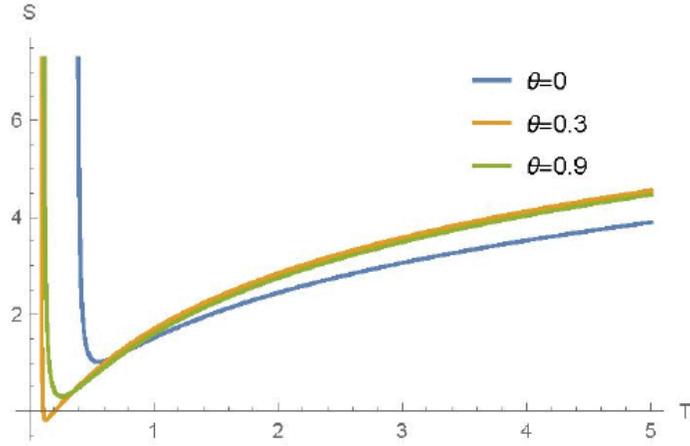


Figure 2.6 :l'entropie S pour différentes valeurs du paramètre NC  $\theta$

Les figures (2.3-2.6) illustrent l'effet de paramètre NC  $\theta$  sur les propriétés thermiques de nos problèmes. Comme le montre les figures, l'espace NC a un effet significatif sur ces propriétés, et l'influence des paramètres est très importante en termes de thermodynamique.

## 2.3 Etude thermique de l'oscillateur harmonique de Dirac sous l'effet d'un champ magnétique à deux dimension

L'étude de l'oscillateur de Dirac en tant que potentiel important a attiré beaucoup d'attention et a trouvé de nombreuses applications physiques dans diverses branches de la physique [33] [34]. L'oscillateur de Dirac était introduit pour la première fois par Ito et al [35], dans lequel le moment  $\vec{\mathbf{p}}$  dans l'équation de Dirac est substitué par  $\vec{\mathbf{p}} - im\omega\beta\mathbf{r}$ , où  $\mathbf{r}$  est le vecteur de position et  $m$ ,  $\omega$ , et  $\beta$  sont la masse de la particule, la fréquence de l'oscillateur et les matrices de Dirac usuelles respectivement. Moshinsky et Szczepaniak [36] ont exploré un système similaire et l'ont nommé l'oscillateur de Dirac (DO) car, dans la limite non relativiste, il devient un oscillateur harmonique à très fort terme de couplage spin-orbite. En optique quantique et pour l'espace à (2+1) dimensions, le système d'oscillateur de Dirac

peut être intégré dans le modèle Anti-Jaynes-Cummings (AJC) [37][38], qui représente les transitions atomiques dans un système à deux niveaux. Il a été démontré dans [39][40] que l'interaction de l'oscillateur de Dirac peut être considérée comme l'interaction entre un moment magnétique anormal et un champ électrique linéaire. Dans [41], Benítez et al. à également découvert le potentiel électromagnétique associé à l'interaction de l'oscillateur de Dirac.

L'étude de l'équation de Dirac dans l'espace de phase non commutative a également suscité un vif intérêt [42][43]. Par exemple, étude des niveaux de Landau relativistes de l'équation de Dirac dans un espace de phase non-commutatif de dimension  $(2 + 1)$  ont été présentés dans la référence [44] et on peut voir une correspondance exacte de ce modèle relativiste au modèle AJC. En outre, en [42] il est démontré que l'équation de mouvement d'un oscillateur harmonique pour le problème de Landau dans l'espace de phase non commutatif bidimensionnel est comparable à l'équation de mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant et au niveau de Landau le plus bas. Dans l'espace de phase non commutative, l'écart d'énergie d'un oscillateur de Dirac change en raison d'une action non commutative [45]. Une description non commutative du graphène, consistant en une équation de Dirac pour les fermions de Dirac sans masse plus des corrections non commutatives, a été examinée dans la réf. [46], et il a été démontré que la non-commutativité de l'impulsion a un impact sur les niveaux d'énergie des graphèmes.

Considérons l'équation de l'oscillateur de Dirac dans un espace non-commutative [28] d'une particule de masse non nul  $m$  et de fréquence  $\omega$  dans un champ magnétique constant  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$  est donné par l'équation suivante

$$\left[ c\boldsymbol{\alpha}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - im\omega\beta\mathbf{r}\right) + \beta mc^2 \right] * \psi\left(\vec{r}\right) = E\psi\left(\vec{r}\right), \quad (2.72)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les matrices de Dirac standard définies par

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

et  $\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  sont les matrices de Pauli et  $I_2$  est la matrice unitaire  $2 \times 2$  représentées par les matrices suivantes

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

qui sont conformes aux relations suivantes

$$\sigma_i^2 = \beta^2 = 1, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i = 0, \sigma_i \beta = \beta \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.75)$$

La fonction d'onde  $\psi(\vec{r})$  de l'équation de Dirac [2.72](#) peut être représenté comme un spineur à deux composants.

$$\psi_D(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\vec{r}) \\ \psi_b(\vec{r}) \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

En substituant dans [2.72](#) comme indiqué précédemment, on obtient les équations suivantes pour les spineurs à deux composants  $\psi_a$  et  $\psi_b$  :

$$c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} + im\omega\mathbf{r})\psi_b = (E - mc^2)\psi_a \quad (2.77)$$

$$c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - im\omega\mathbf{r})\psi_a = (E + mc^2)\psi_b \quad (2.78)$$

L'équation de l'oscillateur de Dirac déformé bidimensionnel peut donc être écrit en utilisant la formulation d'espace non commutatif

$$c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}^+ \psi_b = (E - mc^2) \psi_a \quad (2.79)$$

$$c\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}^- \psi_a = (E + mc^2) \psi_b \quad (2.80)$$

où

$$\mathbf{p}^\pm = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{B} \times \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar} \right) \pm im\omega \left( \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar} \right) \quad (2.81)$$

Ces deux équations [2.79](#) et [2.80](#) peuvent être utilisées pour substituer  $\psi_a$  à  $\psi_b$ , permettant d'avoir une équation factorisée pour la composante  $\psi_a$  :

$$c^2 (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}^+) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{p}^-) \psi_a = (E^2 - m^2 c^4) \psi_a \quad (2.82)$$

Selon les relations suivantes :

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.83)$$

l'équation [2.82](#) peut être écrite comme

$$c^2 ((\mathbf{p}^+ \cdot \mathbf{p}^-) + i\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{p}^+ \times \mathbf{p}^-)) \psi_a = (E^2 - m^2 c^4) \psi_a \quad (2.84)$$

Lorsque nous substituons [2.81](#) dans l'équation [2.84](#), nous obtenons

$$\left[ \left\{ 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + \left( m\omega \frac{\theta}{\hbar} + m\omega \frac{eB\theta^2}{4c\hbar^2} \right) \sigma_z \right\} p^2 + \left( \frac{e^2 B^2}{4c^2} + m^2 \omega^2 + \frac{eB}{c} m\omega \sigma_z \right) r^2 - \left( \frac{eB\hbar}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) \sigma_z - \left[ \left( 2m\omega_E + m\omega \frac{eB\theta}{c\hbar} \right) \sigma_z + \frac{eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{4c\hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right] L_z - \varepsilon \right] \psi_a = 0 \quad (2.85)$$

où

$$\varepsilon = \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} + 2m\omega\hbar + m\omega \frac{eB\theta}{c} \quad (2.86)$$

Prenons les coordonnées polaires,

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi \quad (2.87)$$

l'équation [2.85](#) prend la forme

$$\begin{aligned} & \left[ -\hbar^2 \left\{ \left( 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) + m\omega \frac{\theta}{\hbar} \left( 1 + \frac{eB\theta}{4c\hbar} \right) \sigma_z \right\} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \right. \\ & \left. \left( \frac{e^2 B^2}{4c^2} + m^2 \omega^2 + \frac{eB}{c} m\omega \sigma_z \right) r^2 + i\hbar \left( \left( \frac{eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{4c\hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) + 2m\omega \left( 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} \right) \sigma_z \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - \right. \\ & \left. \left( \frac{eB\hbar}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) \sigma_z - \varepsilon \right] \psi_a = 0 \quad (2.88) \end{aligned}$$

Pour résoudre l'équation [2.88](#), nous utilisons l'ansatz suivant

$$\psi_a(\mathbf{r}) = e^{il\varphi} R_{nl}(r) \chi_\tau \quad (2.89)$$

où  $n$  est le nombre quantique radial,  $l$  et  $\tau = \pm 1$  sont, respectivement, les valeurs propres du moment cinétique et opérateur de spin, et  $\chi_{+1} = (1, 0)$ ,  $\chi_{-1} = (0, 1)$  sont les fonctions de spin.

Lorsque nous substituons l'équation [2.89](#) dans l'équation [2.88](#), nous obtenons :

$$\left[ \left( \frac{d}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l^2}{r^2} - \frac{\Omega}{\hbar^2} r^2 + \epsilon \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (2.90)$$

avec

$$\Omega = \frac{1}{M} \left( \frac{e^2 B^2}{4c^2} + m^2 \omega_E^2 + \frac{eB}{c} m\omega\tau \right) \quad (2.91)$$

$$M = \left( 1 + \frac{eB\theta}{4c\hbar} \right)^2 + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + m\omega \frac{\theta}{\hbar} \left( 1 + \frac{eB\theta}{4c\hbar} \right) \tau \quad (2.92)$$

$$\epsilon = \frac{1}{\hbar^2 M} \left[ \epsilon + \left( \frac{eB\hbar}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) \tau + \hbar l D \right] \quad (2.93)$$

$$D = \left( \frac{eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{4c\hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) + 2m\omega_E \left( 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} \right) \tau \quad (2.94)$$

en utilisant la transformation suivante;  $R_{nl}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} g(r)$ , on a

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{1}{4} - l^2 \right) \frac{1}{r^2} - \frac{\Omega}{\hbar^2} r^2 + \epsilon \right] g(r) = 0 \quad (2.95)$$

Maintenant, pour résoudre [2.95](#), nous utilisons le changement suivant dans la variable  $r^2 = \alpha^2 z$  où  $\alpha^4 = \frac{\hbar^2}{\Omega}$  on obtient exactement

$$\left[ 4z \frac{d^2}{dz^2} + 2 \frac{d}{dz} + \frac{\frac{1}{4} - l^2}{z} - z + \alpha^2 \epsilon \right] g(z) = 0 \quad (2.96)$$

Ensuite, en utilisant la transformation :  $g(z) = z^\gamma e^{-\beta z} w(z)$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} & \left[ z \frac{d^2}{dz^2} + \left[ \left( 2\gamma + \frac{1}{2} \right) - 2\beta z \right] \frac{d}{dz} + \frac{1}{4z} \left( 4\gamma \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} - l^2 \right) \right. \\ & \left. - \beta \left( 2\gamma + \frac{1}{2} \right) + \left( \beta^2 - \frac{1}{4} \right) z + \frac{\epsilon \alpha^2}{4} \right] w(z) = 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

en prenant

$$\gamma = \frac{1}{4} + \frac{l}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2} \quad (2.98)$$

En conséquence, l'équation [2.97](#) sera la suivante :

$$\left[ z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{3}{2} + l \right) - z \right) \frac{d}{dz} + n \right] w(z) = 0 \quad (2.99)$$

avec

$$n = \frac{\epsilon \alpha^2}{4} - \frac{(l+1)}{2} \text{ et } \alpha^4 = \frac{\hbar^2}{M} \quad (2.100)$$

La solution de l'équation différentielle [2.97](#) régulière à l'origine  $z = 0$  s'exprime en termes

de fonctions hypergéométriques confluentes comme suit :

$$w(z) = C {}_1F_1 \left( -n, \frac{3}{4} + \frac{l}{2}, z \right) \quad (2.101)$$

avec  $C$  désignant la constante de normalisation. Nous pouvons maintenant exprimer la forme générale de la fonction d'onde  $\psi_a$  en fonction des variables  $r$  et  $\varphi$  comme suit :

$$\psi_a(r, \varphi) = Cr^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \left( \frac{r^2}{a^2} \right) {}_1F_1 \left( -n, \frac{3}{4} + \frac{l}{2}, \frac{r^2}{a^2} \right) \exp(il\varphi) \quad (2.102)$$

En utilisant la condition de convergence des solutions à l'infini et du comportement asymptotique de la série confluite  ${}_1F_1$  de l'équation [2.102](#), que pour  $r \rightarrow \infty$  on a  $F_1 \rightarrow 0$  qui conduit à  $\psi \rightarrow 0$  en l'infini, on obtient la condition quantique générale suivante

$$\frac{\epsilon\alpha^2}{4} - \frac{(l+1)}{2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.103)$$

Injectant les expressions [2.92](#), [2.93](#) et [2.94](#) dans l'équation [2.103](#), les valeurs propres de l'énergie seront données par

$$\begin{aligned} E_{n,l} = & \pm mc^2 \left[ 1 - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} (1+l\tau) \left( 1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar} \right) + \right. \\ & \left. \frac{2\hbar}{mc^2} \left\{ (2n+l+1) \sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau) \left( 1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar} + \frac{m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2} - \frac{m\omega\tau}{\hbar} \left( 1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar} \right) \theta \right)} \right. \right. \\ & \left. \left. - (l+\tau) \left( \tilde{\omega} + \frac{m(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar} \right) \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.104) \end{aligned}$$

avec  $\tilde{\omega} = \frac{\omega_c}{2c}$  où  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  défini comme la fréquence cyclotron.

pour  $B = 0$  et  $\theta = 0$  on trouve la forme d'énergie connue dans la littérature [43](#)

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar\omega}{mc^2} n} \quad (2.105)$$

La limite non relativiste peut être obtenue en considérant  $E = mc^2 + E_{nr}$  avec l'hypothèse que  $E_{nr} \ll mc^2$

$$E_{nr} = \hbar \left\{ (2n + l + 1) \sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau) \left( \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar}\right) \left(1 + \frac{m\theta(\tilde{\omega} + 2m\omega\tau)}{2\hbar}\right) + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)} \right. \\ \left. - (l + \tau) \left( \tilde{\omega} + \frac{m(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar} \right) - \frac{\tilde{\omega}^2 m\theta}{2\hbar^2} (\theta - \hbar) l \right\} - \omega\hbar(1 + l\tau) \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar}\right) \quad (2.106)$$

Par conséquent, pour un  $n$  donné, la valeur propre de l'énergie peut être obtenue à partir de l'équation [2.104](#) et la fonction d'onde associée peut être obtenue à partir de l'équation [2.104](#) comme suit :

$$\psi_D(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_a(\vec{r}) \\ \psi_b(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c\mathbf{p}^+}{E_{n,l} + mc^2} \end{pmatrix} \psi_a$$

### 2.3.1 Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac

Cette section examine les caractéristiques thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac décrit précédemment. Les valeurs propres d'énergie de l'oscillateur de Dirac dans l'espace NC sont :

$$E_{n,l} = \pm mc^2 \sqrt{\bar{\delta}n + \bar{\varepsilon}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.107)$$

avec

$$\bar{\delta} = \mu = \frac{4\hbar}{mc^2} \sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau) \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar} + \frac{m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2} - \frac{m\omega\tau}{\hbar} \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar}\right)\theta\right)} \quad (2.108)$$

$$\bar{\varepsilon} = 1 + \frac{2\hbar}{mc^2} \left[ (l + 1) \sqrt{(\omega^2 + \tilde{\omega}^2 + 2\omega\tilde{\omega}\tau) \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar} + \frac{m^2(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta^2}{4\hbar^2} - \frac{m\omega\tau}{\hbar} \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{2\hbar}\right)\theta\right)} \right. \\ \left. - (l + \tau) \left( \tilde{\omega} + \frac{m(\omega^2 + \tilde{\omega}^2)\theta}{2\hbar} \right) \right] - \frac{2\omega\hbar}{mc^2} (1 + l\tau) \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{\hbar}\right) \quad (2.109)$$

Avant d'étudier les propriétés thermodynamiques de DO, nous pouvons voir que la forme de l'équation [2.107](#) et [2.56](#) est la même dans les deux cas, à la différence près que  $\delta$  et  $\lambda$  a été remplacée respectivement par  $\bar{\delta}$  et  $\bar{\varkappa}$ . Ainsi, en utilisant les mêmes étapes que précédemment, nous pouvons déterminer la fonction de partition  $Z$  et les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur harmonique de Dirac suivantes.

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{\bar{\varkappa}}}{\bar{\delta}}\chi + \frac{2}{\bar{\delta}}\chi^2 + \left( \frac{\bar{\delta}}{24\sqrt{\bar{\varkappa}}} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^5}} \right) \frac{1}{\chi} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\bar{\varkappa}^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\bar{\delta}^3}{5760\sqrt{\bar{\varkappa}^3}} \frac{1}{\chi^3} \quad (2.110)$$

avec

$$\chi = \frac{k_B T}{mc^2} \quad (2.111)$$

A ce stade, nous fournissons un bref résumé de nos résultats analytiques actuels pour évaluer les fonctions thermodynamiques à l'aide de la fonction de partition  $Z$ . En utilisant ces équations, nous pouvons déterminer les propriétés thermodynamiques de notre système physique, telles que l'énergie libre  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , la chaleur spécifique  $C$  et l'entropie  $S$ , en utilisant leurs définitions :

$$F = -k_B T \ln \left[ \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{\bar{\varkappa}}}{\bar{\delta}}\chi + \frac{2}{\bar{\delta}}\chi^2 + \left( \frac{\bar{\delta}}{24\sqrt{\bar{\varkappa}}} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^5}} \right) \frac{1}{\chi} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\bar{\varkappa}^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\bar{\delta}^3}{5760\sqrt{\bar{\varkappa}^3}} \frac{1}{\chi^3} \right] \quad (2.112)$$

$$U = \frac{k_B T}{Z} \left[ \frac{2\sqrt{\bar{\varkappa}}}{\bar{\delta}}\chi + \frac{4}{\bar{\delta}}\chi^2 - \left( \frac{\bar{\delta}}{24\sqrt{\bar{\varkappa}}} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^5}} \right) \frac{1}{\chi} + \frac{\bar{\delta}^3}{960\bar{\varkappa}^2} \frac{1}{\chi^2} + \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^3}} \frac{1}{\chi^3} \right] \quad (2.113)$$

$$C = -\frac{k_B}{Z^2} \left[ \chi^2 \left( \frac{2\sqrt{\bar{\varkappa}}}{\bar{\delta}} + \frac{4}{\bar{\delta}}\chi - \left( \frac{\bar{\delta}}{24\sqrt{\bar{\varkappa}}} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^5}} \right) \frac{1}{\chi^2} + \frac{\bar{\delta}^3}{960\bar{\varkappa}^2} \frac{1}{\chi^3} + \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varkappa}^3}} \frac{1}{\chi^4} \right)^2 - Z \left( \frac{4\sqrt{\bar{\varkappa}}}{\bar{\delta}}\chi + \frac{12}{\bar{\delta}}\chi^2 - \frac{\bar{\delta}^3}{960\bar{\varkappa}^2} \frac{1}{\chi^2} - \frac{\bar{\delta}^3}{960\sqrt{\bar{\varkappa}^3}} \frac{1}{\chi^3} \right) \right] \quad (2.114)$$

$$S = k_B \left[ \ln Z + \frac{1}{Z} \left( \frac{2\sqrt{\bar{\varepsilon}}}{\bar{\delta}} \chi + \frac{2}{\bar{\delta}} \chi^2 - \left( \frac{\bar{\delta}}{24\sqrt{\bar{\varepsilon}}} - \frac{\bar{\delta}^3}{1920\sqrt{\bar{\varepsilon}^5}} \right) \frac{1}{\chi} + \frac{2\bar{\delta}^3}{1920\bar{\varepsilon}^2} \frac{1}{\chi^2} + \frac{3\bar{\delta}^3}{5760\sqrt{\bar{\varepsilon}^3}} \frac{1}{\chi^3} \right) \right] \quad (2.115)$$

avec

$$F = -k_B T \ln Z, \quad U = k_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, \quad C = \frac{\partial U}{\partial T}, \quad \text{and} \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}. \quad (2.116)$$

Pour  $B = 8T$ ,  $\tau = +1$  et pour différentes valeurs du paramètre de déformation  $\theta$ , nous donnons ici les profils de toutes les grandeurs thermodynamiques en fonction de la grandeur de température  $T$ .

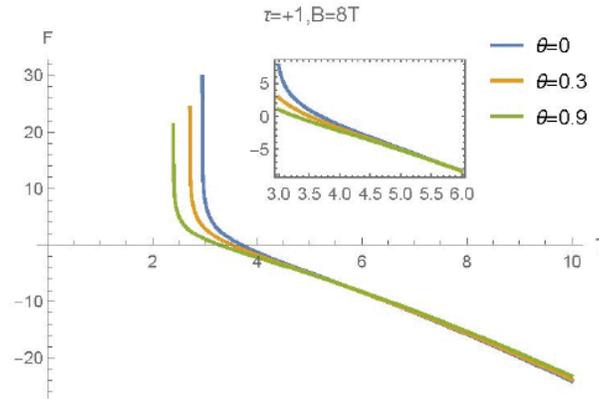


Figure 2.7 : l'énergie libre  $F$  en fonction de la température  $T$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

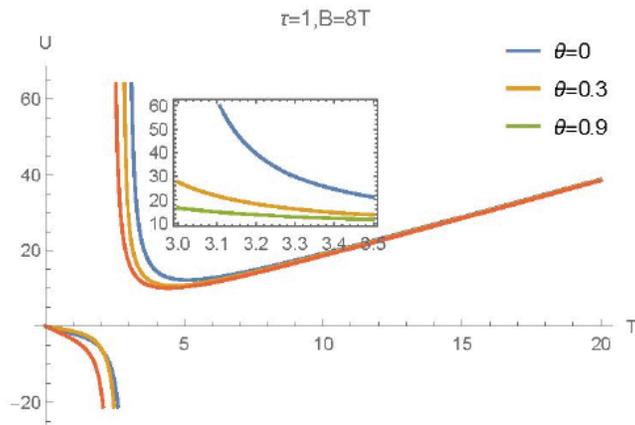


Figure 2.8 : l'énergie moyenne  $U$  en fonction de la température  $T$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

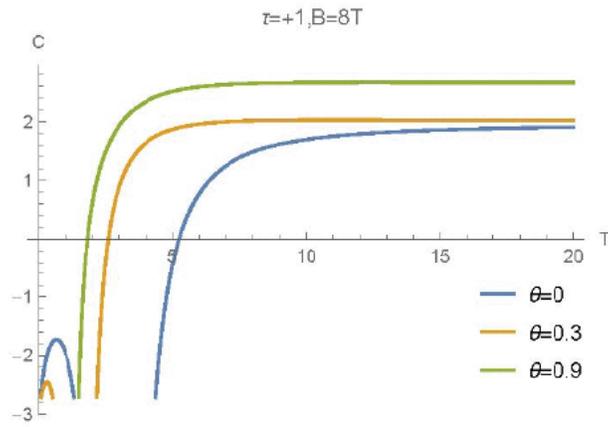


Figure 2.9 : la chaleur spécifique  $C$  en fonction de la température  $T$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

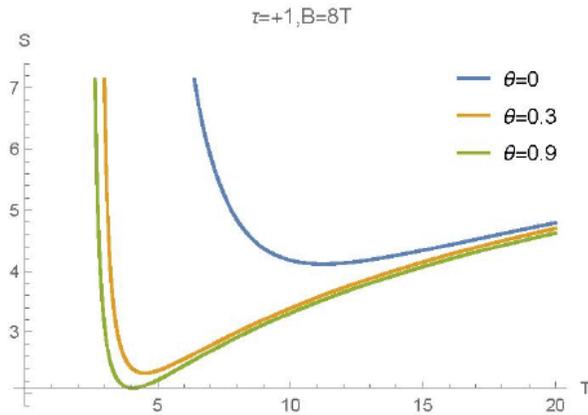


Figure 2.10 : l'entropie  $S$  en fonction de la température  $T$  pour différentes valeurs du paramètre  $\theta$

L'énergie libre d'Helmholtz  $F$  est représentée sur la Figure. 2.7 on remarque que pour une valeur fixe de  $T$ , l'énergie libre augmente lorsque  $\theta$  décroît. Dans tous les cas, le profil de courbes décroît de manière monotone avec la température  $T$ . Sur la figure 2.8 nous décrivons l'énergie moyenne  $U$  de sorte que toutes les courbes présentent la même tendance linéaire et ont des profils assez similaires. À partir de figures 2.9 on peut voir que la chaleur spécifique  $C$  augmente quand  $\theta$  croît. On observe sur la figure 2.10 que l'entropie  $S$  est décalée pour différentes valeurs de  $\theta$  et qu'il décroît rapidement, puis il croît légèrement comme dans le cas ordinaire. Finalement Nous observons que les propriétés thermodynamiques ont été influencées par le paramètre  $\theta$

## 2.4 Applications de graphène

Le graphène est une substance merveilleuse qui a une multitude de superlatifs attachés à son nom. C'est le matériau connu le plus mince de l'univers et le plus résistant jamais mesuré. À température normale, ses porteurs de charge ont une énorme mobilité intrinsèque, n'ont pas de masse effective et peuvent se déplacer sur des micromètres sans se disperser. Le graphène est capable de supporter des densités de courant de six ordres de

grandeur supérieures à celles du cuivre, possède une conductivité thermique et une rigidité sans précédent, est imperméable aux gaz et concilie des propriétés contradictoires telles que la fragilité et la ductilité. Une équation de type Dirac décrit le transport d'électrons dans le graphène, permettant l'examen d'événements quantiques relativistes dans une expérience sur table.

Il est possible de modéliser les électrons comme des fermions sans masse dans des contextes particuliers, tels que l'étude des couches de graphène et leurs nombreuses caractéristiques remarquables.

Le carbone, sous ses formes allotropiques telles que le graphite et le diamant, occupe une place importante dans divers domaines scientifiques. Le graphite, par exemple, peut être considéré comme étant formé de couches épaisses d'un atome de carbone appelées graphène. Depuis que des investigations expérimentales ont confirmé l'existence de porteurs de charge électrique qui se comporte comme des quasi-particules de Dirac sans masse [47] [48] [49], la physique du graphène a attiré l'attention de la communauté scientifique théorique. Cela est dû à la structure moléculaire unique du graphène. Les atomes de carbone sont organisés selon un arrangement de réseau hexagonal, semblable à celui d'un nid d'abeilles [50]. Les excitations électroniques de basse énergie aux coins de la zone de graphène Brillouin peuvent être caractérisées par un (2 + 1) fermions de Dirac avec une relation de dispersion linéaire (sans masse) [48] [49]. ce qui est généralement requis pour les expériences de physique de la matière condensée comme l'effet tunnel chirale et le paradoxe de Klein [51].

Bastos et coll. [14] ont récemment étudié le graphène dans le contexte du **NCQM**, en déterminant l'hamiltonien et le spectre d'énergie qui l'accompagne. Il a été démontré que les états électroniques autour des points de Dirac dans un espace de phase NC peuvent être représentés par une équation de Dirac 2D sans masse lorsqu'un champ magnétique externe constant est appliqué.

Considérons l'équation de Dirac sans masse (2+1) dimensionnelle qui décrit le mouvement des électrons avec la vitesse de Fermi  $V_F = (1.12 \pm 0.02) 10^6 \text{ m.s}^{-1}$  dans la théorie

quantique du graphène, l'hamiltonien est donnée par

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \mathbf{p}) \Psi = \frac{E}{V_F} \Psi, \quad (2.117)$$

où  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  est les matrices de Dirac usuelles et on peut supposer que le spineur à quatre composantes  $\Psi$  est de la forme

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

Compte tenu de la notion d'algèbre non commutative [2.81](#), il est possible de formuler l'équation de Dirac stationnaire déformée à deux dimensions en présence d'un champ magnétique externe constant  $\mathbf{A} = \frac{e}{2} (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$ .

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\Pi} \psi_b = \frac{E}{V_F} \psi_a \quad (2.119)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\Pi} \psi_a = \frac{E}{V_F} \psi_b \quad (2.120)$$

où

$$\boldsymbol{\Pi} = \left( \mathbf{p} - \frac{e}{2} \mathbf{B} \times \left( \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right) \quad (2.121)$$

on élimine  $\psi_a$  au profit de  $\psi_b$ , pour obtenir l'équation suivante

$$[\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\Pi}]^2 \psi_a = \frac{E^2}{V_F^2} \psi_a \quad (2.122)$$

Selon les relations suivantes :

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{A}) (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (2.123)$$

l'équation [2.122](#) peut s'écrire

$$c^2 (\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{\Pi} + i \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Pi})) \psi_a = \frac{E^2}{V_F^2} \psi_a \quad (2.124)$$

enfin on obtient

$$\left[ \left(1 + \frac{eB\theta}{4\hbar}\right)^2 p^2 + \left(\frac{e^2 B^2}{4}\right) r^2 - \left(eB + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{4\hbar^2}\right) L_z - \left(eB\hbar + \frac{e^2 B^2 \theta}{4}\right) \sigma_z - \frac{E^2}{V_F^2} \right] \psi_a = 0 \quad (2.125)$$

Pour résoudre l'équation [2.125](#), nous utilisons l'ansatz suivant  $\psi_a(\mathbf{r}) = e^{im_l \varphi} R_{nl}(r) \chi_\tau$ , où  $n$  est le nombre quantique,  $m_l$  et  $\tau = \pm 1$  sont respectivement les valeurs propres des opérateurs moments cinétiques et spin, et  $\chi_{+1}^T = (1, 0)$ ,  $\chi_{-1}^T = (0, 1)$  sont les fonctions de spin.

En utilisant les coordonnées polaires des opérateurs de position et d'impulsion donnés par l'équation [2.87](#), nous obtenons l'équation différentielle suivante pour la partie radiale de la fonction d'onde :

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m_l^2}{r^2} - \frac{\eta^\tau r^2}{\hbar^2} + \epsilon^\tau \right] R_{nl}(r) = 0 \quad (2.126)$$

avec

$$\delta = \frac{\eta}{\bar{\eta}}, \quad \eta = \left(\frac{e^2 B^2}{4}\right) \quad \text{et} \quad \bar{\eta} = \left(1 + \frac{eB\theta}{4\hbar}\right)^2 \quad (2.127)$$

$$\epsilon^\tau = \frac{1}{\bar{\eta}} \left( \frac{E^2}{\hbar^2 V_F^2} + \left( eB\hbar + \frac{e^2 B^2 \theta}{4} \right) \frac{\tau}{\hbar^2} + \frac{m_l}{\hbar} \left( eB + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \right) \quad (2.128)$$

employant la transformation suivante;  $R_{nl}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} g(r)$  puis le changement de variable suivant  $r^2 = \alpha^2 z$ , où  $\alpha^4 = \frac{\hbar^2}{\eta^\tau}$  on obtient exactement :

$$\left[ 4z \frac{d^2}{dz^2} + 2 \frac{d}{dz} + \frac{\frac{1}{4} - m_l^2}{z} - z + \alpha^2 \epsilon^\tau \right] g(z) = 0 \quad (2.129)$$

Afin d'obtenir une équation différentielle connue, on fait la transformation suivante :  $g(z) =$

$z^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+m_l)} e^{-\frac{z}{2}} w(z)$  , pour obtenir.

$$\left[ z \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \left( \left( m_l + \frac{3}{2} \right) - z \right) \frac{d}{dz} + \frac{\epsilon^\tau \alpha^2}{4} - \frac{(m_l + 1)}{2} \right] w(z) = 0 \quad (2.130)$$

Cette équation différentielle dont la solution est régulière à l'origine  $z = 0$  s'exprime en termes de fonctions hypergéométriques confluentes comme suit :

$$w(z) = C {}_1F_1 \left( \frac{\epsilon^\tau \alpha^2}{4} - \frac{(m_l + 1)}{2}, \frac{3}{4} + \frac{m_l}{2}, z \right) \quad (2.131)$$

avec  $C$  est une constante de normalisation .

Nous pouvons maintenant décrire la forme générale de la fonction d'onde  $\psi_a$  en fonction des variables  $r$  et  $\varphi$  :

$$\psi_a(r, \varphi) = C r^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \left( \frac{r}{a} \right)^{m_l + \frac{1}{2}} {}_1F_1 \left( \frac{\epsilon^\tau \alpha^2}{4} - \frac{(m_l + 1)}{2}, \frac{3}{4} + \frac{l}{2}, \frac{r^2}{a^2} \right) \exp(il\varphi) \quad (2.132)$$

En utilisant la condition de convergence des solutions à l'infini et le comportement asymptotique de la série confluyente  ${}_1F_1$  de l'équation [2.132](#) pour  $r \rightarrow \infty$  on a  ${}_1F_1 \rightarrow 0$ , on obtient la condition quantique générale suivante :

$$\frac{\epsilon^\tau \alpha^2}{4} - \frac{(m_l + 1)}{2} = n \quad (2.133)$$

Les niveaux d'énergie discrets sont dérivés de la condition [2.133](#) comme suit.

$$E_{n, m_l, \tau}^\theta = \pm \frac{\hbar V_F}{l_B^2} \left[ \left( l_B^2 + \frac{\theta}{4} \right) (2n + m_l + 1 - \tau) - m_l \left( l_B^2 + \frac{\theta^2}{4\hbar} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.134)$$

où  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$  est appelée longueur magnétique. Dans la limite  $\theta \rightarrow 0$  on obtient le cas ordinaire

$$E_n = \pm \frac{\hbar V_F}{l_B} \sqrt{2n} \quad (2.135)$$

Ceci est identique au résultat de la réf[5].

## 2.4.1 Propriétés thermodynamiques du graphène

Commençons par définir l'objet fondamental en mécanique statistique, la fonction de partition canonique  $Z$ . étant donné le spectre d'énergie du graphène, nous pouvons définir la fonction de partition comme la somme sur tous les états  $s$  du système.

On considère la fonction de partition du système à température initiale  $T$  selon le facteur de Boltzmann comme suit :

$$a_1 = \left( l_B^2 + \frac{\theta}{4} \right), a_2 = \frac{m_l + 1}{2} - \frac{1}{2a_1} \left[ \tau \left( l_B^2 + \frac{\theta^2}{4} \right) + m_l \left( l_B^2 + \frac{\theta^2}{4\hbar} \right) \right] \quad (2.136)$$

En posant que

$$x = \frac{\gamma}{k_B T} \sqrt{n + a_2} \quad (2.137)$$

donc

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x} \quad (25) \quad (2.138)$$

En utilisant la transformé de Mellin inverse(intégrale de Cahen-Mellin) pour la fonction exponentielle

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_C x^{-s} \Gamma(s) ds \quad (2.139)$$

avec  $\Gamma(s)$  la fonction gamma d'Euler[52] et  $x = \frac{\gamma'}{k_B T} \sqrt{n + a_2}$  la relation [2.138] devient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma'}{s} \sqrt{n+a_2}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left( \frac{\gamma'}{k_B T} \right)^{-s} \sum_{n=0}^{\infty} (n + a_2)^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s) \quad (2.140)$$

avec

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds \left( \frac{\gamma'}{k_B T} \right)^{-s} \zeta_H \left( \frac{s}{2}, a_2 \right) \Gamma(s) \quad (2.141)$$

avec  $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, a_2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + a_2)^{-\frac{s}{2}}$  et la fonction Hurwitz. En appliquant le théorème des résidus, pour les deux pôles  $s = 0$  et  $s = 2$ , on obtient

$$Z = \zeta_H(0, a_2) + \left(\frac{\gamma'}{k_B T}\right)^{-2} \quad (2.142)$$

avec

$$\zeta_H(0, a_2) = \frac{1}{2} - a_2 \quad (2.143)$$

$$\zeta_H(1, a_2) = \frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{2} \quad (2.144)$$

La fonction de partition est

$$Z = \frac{1}{2} - a_2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \quad (26) \quad \text{où } T_0 = \frac{\sqrt{2}\hbar V_F}{l_B k_B} \quad (2.145)$$

où

$$T_0 = \frac{\sqrt{2}\hbar V_F}{l_B k_B} \quad (2.146)$$

La fonction de partition  $Z$  peuvent être utilisées pour calculer la thermodynamique complète du graphène NC. L'énergie libre de Helmholtz  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , l'entropie  $S$  et la chaleur spécifique  $C$  sont les quatre fonctions thermodynamiques les plus importantes pour notre étude, telles que définies par les équations suivantes :

$$F = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln \left[ \frac{1}{2} - a_2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \right] \quad (2.147)$$

$$U = k_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{2k_B T^3}{a_1 T_0^2 \left(\frac{1}{2} - a_2 + \frac{1}{a_1} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)} \quad (2.148)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \left( \ln \left[ \frac{1}{2} - a_2 + \frac{1}{a_1} \left( \frac{T}{T_0} \right)^2 \right] + \frac{\frac{2}{a_1} \left( \frac{T}{T_0} \right)^2}{\frac{1}{2} - a_2 + \frac{1}{a_1} \left( \frac{T}{T_0} \right)^2} \right) \quad (2.149)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (2.150)$$

$$F = -k_B T \ln Z, \quad U = k_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T}, \quad C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

**Résultats et discussions** nous présentons nos calculs pour les propriétés thermodynamiques commutatives et non-commutatives du graphène pour un champ magnétique constant. Les résultats sont présentés dans les figures (2.11-2.14.)

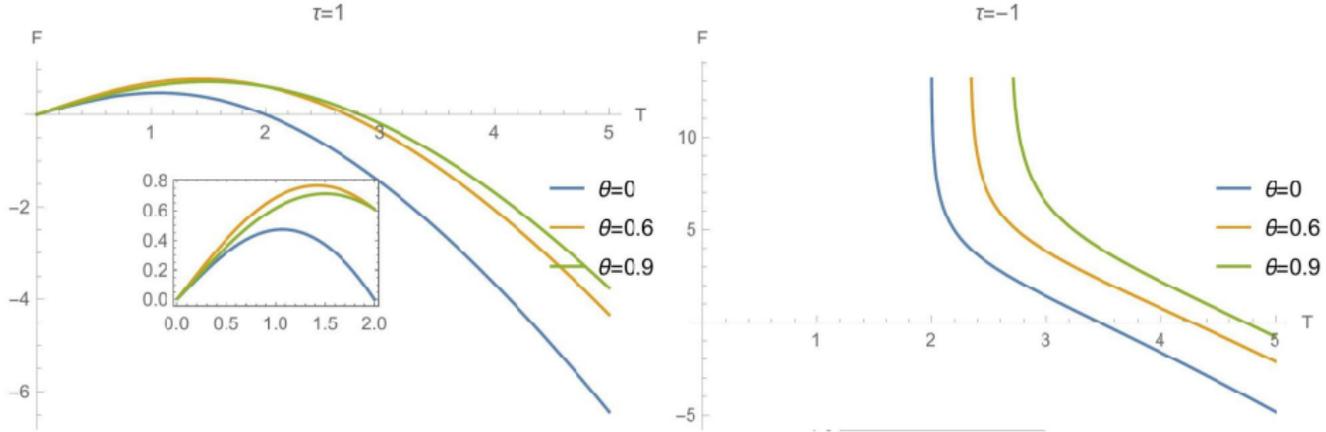


figure 2.11 : l'énergie libre  $F$  pour différentes valeurs du paramètre NC  $\theta$

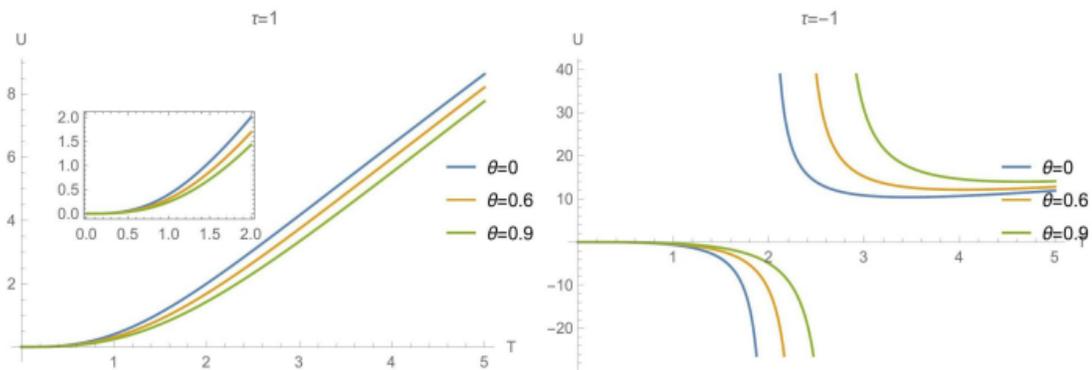


figure 2.12 : l'énergie moyenne  $U$  pour différentes valeurs du paramètre NC  $\theta$

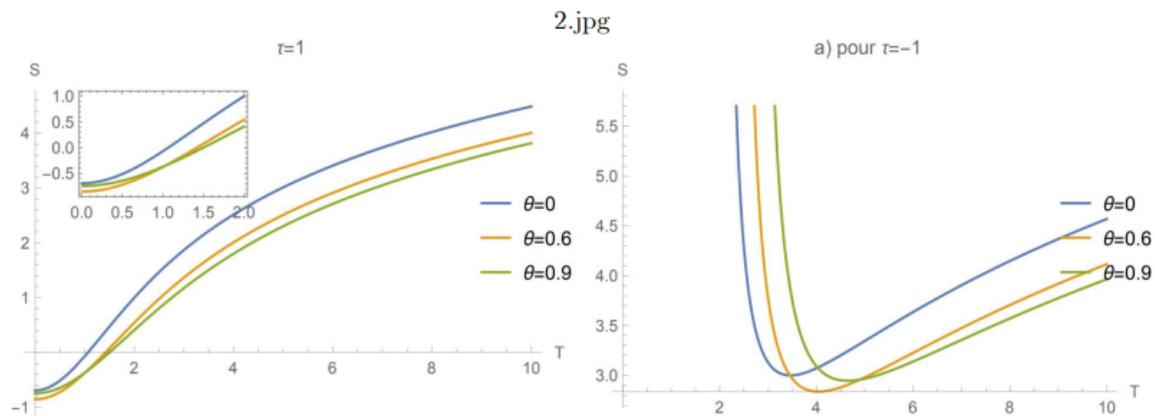


figure 2.13 : l'entropie  $S$  pour différentes valeurs valeurs du paramètre NC  $\theta$

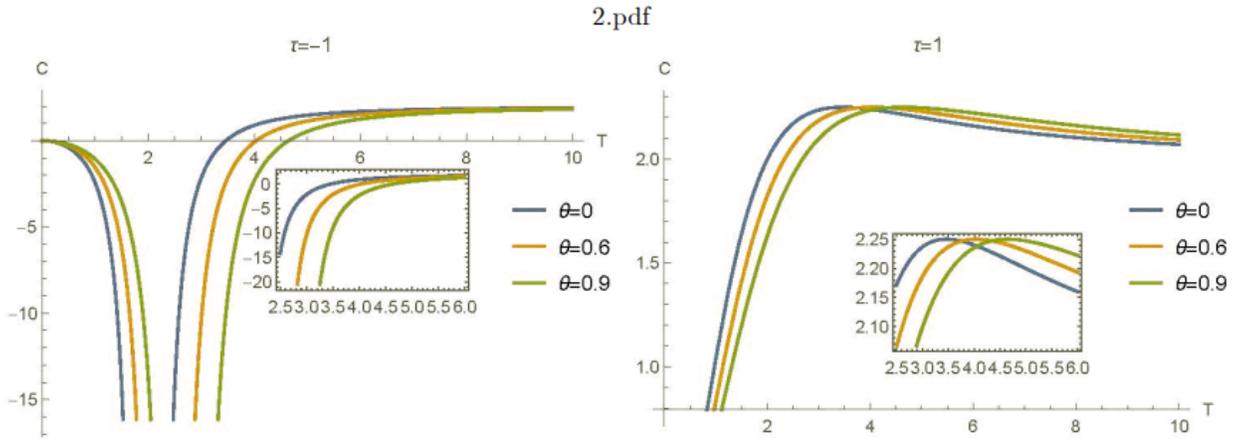


figure 2.14 : la chaleur spécifique  $C$  pour différentes valeurs du paramètre NC  $\theta$

La figure 2.11. représente l'énergie libre de Helmholtz  $F$  pour les systèmes commutatifs et non-commutatifs. Comme prévu, il diminue avec l'augmentation de la température  $T$ . On constate que les énergies libres s'accordent aux basses températures, mais avec l'augmentation de la température et de la valeur du paramètre non-commutatif  $\theta$ , une séparation mineure se développe.

La figure 2.12. montre la relation entre l'énergie moyenne  $U$  et la température  $T$  a la limite asymptotique, toutes les courbes se comportent comme des fonctions linéaires de la température lors du tracé de l'énergie moyenne pour différentes valeurs. Sur la base de notre conversation précédente, il s'agit d'un résultat attendu.

La figure 2.13 représente les courbes d'entropie  $S$  du graphène pour différentes valeurs du paramètre NC  $\theta$ . Comme pour l'énergie libre  $F$ , le comportement de l'entropie à basse température est comparable pour les instances commutatives et non commutatives. Observez que l'espacement entre les courbes augmente à mesure que le paramètre  $\theta$  augmente. Dans ce cas, l'effet de la non-commutativité est de diminuer l'entropie, par opposition à l'énergie libre. En fait, observez que les courbes avec  $\theta \neq 0$  sont positionnées en dessous de la courbe de situation commutative. Cet effet est anticipé car on sait que

la non-commutativité réduit la dégénérescence dans les systèmes physiques, reflétant une baisse d'entropie dans un espace de phase NC [53] [54].

Enfin, nous pouvons examiner le comportement de la chaleur spécifique  $C$  comme illustré à la figure 2.14. Les profils NC se modifient dans la plage de température intermédiaire (environ  $T = 4,00$  pour  $\tau = +1$  et  $T = 2,00$  pour  $\tau = -1$ ) à la suite de nos calculs. Alors que les lignes NC semblent être en dessous de la ligne commutativité pour les valeurs faibles de  $T$ , alors que pour les valeurs élevées de  $T$ , mais c'est l'inverse qui est vrai pour  $\tau = +1$ .

En général, nous avons trouvé que les effets de non-commutativité sont négligeables, et à la limite  $\theta \rightarrow 0$  toutes les courbes sont en accord avec le cas commutatif.

## 2.4.2 Non-commutativité de l'effet Hall quantique

À la suite de là, nous concluons qu'un champ magnétique externe perpendiculaire à une feuille de graphène discrétise le spectre d'énergie. Il est bien établi que lorsqu'une particule chargée est exposée à un champ électromagnétique, elle présente un spectre d'énergie discret, appelée quantification de Landau. Cependant, le graphène est une exception, car il s'agit d'un problème de Dirac plutôt que d'un problème de Schrödinger [49]. Il existe une variation significative entre chaque niveau de Landau. Cette différence de niveau d'énergie a des ramifications pour l'effet Hall quantique (EHQ).

Le QHE peut être observé dans les métaux bidimensionnels, tels que les surfaces confinées à basse température avec des électrons limités à deux dimensions [55]. Cela se produit lorsque la température est diminuée à un point où la résistivité de Hall devient indépendante du champ magnétique, ce qui entraîne la formation d'un plateau de Hall quantifié. La conductivité de Hall est calculée expérimentalement comme suit :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar} \nu \tag{2.151}$$

où  $\nu$  est un entier positif et l'un présente l'effet Hall quantique entier (IQHE) et la quantité

$\frac{e^2}{h}$  est la constante de von Klitzing liée aux propriétés de conductivité électrique

Selon [56] [57] la conductivité prend la forme

$$\sigma_{xy} = \pm 4 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{h} \quad (2.152)$$

Où le facteur  $4 \left( \nu + \frac{1}{2} \right)$  est déterminé en considérant la présence d'un mode nul partagé par deux points de Dirac et la présence de  $4 \left( \nu + \frac{1}{2} \right)$  états occupés qui se transmettent d'un bord à l'autre. Notamment, cet effet se produit à température ambiante, contrairement au QHE classique dans les semi-conducteurs, qui se produit à basse température [55] [49].

Selon [58], chaque fois que le niveau de Fermi se situe dans un espace, la conductivité de Hall est donnée

$$\sigma_H = e \frac{\partial n(\epsilon_F)}{\partial B} \quad (2.153)$$

où  $n(\epsilon_F)$  est la densité d'état, Ainsi, dans le cas commutatif habituel, les niveaux d'énergie sont donnés par Eq. (2.135) et la densité d'états est définie par

$$\epsilon_F = \pm \hbar V_F \sqrt{2 \frac{eB}{\hbar} n} \Rightarrow n(\epsilon_F) = \frac{eB}{\hbar} \quad (2.154)$$

La même technique peut être utilisée pour déterminer la conductivité de Hall non commutative. Dans cette situation, les niveaux d'énergie sont définis par l'Eq. (2.134), qui inclut une correction non commutative explicite. En termes de densité d'état, il apparaît assez évident qu'elle est affectée par la non-commutativité, et l'approche la plus simple pour intégrer cette dépendance passe par l'expression :

$$n(\epsilon_F) = \frac{eB}{\hbar} \left( 1 + \frac{\theta eB}{4 \hbar} \right) \quad (2.155)$$

Ainsi,

$$\sigma_H = \frac{e^2}{\hbar} \left( 1 + \frac{\theta e}{2\hbar} B \right) \quad (2.156)$$

L'une des énigmes concernant le graphène est qu'il existe une conductivité minimale qui ne disparaît pas cad (pour  $B = 0$ ,  $\sigma_H \neq 0$ )

$$\sigma_H = \frac{e^2}{h} \quad (2.157)$$

### 2.4.3 Analyse des résultats expérimentaux

Dans cette section, une borne sur le paramètre non-commutatif  $\theta$ , peut être obtenue en utilisant les résultats expérimentaux disponibles. Dans Réf [59], la spectroscopie infrarouge (IR) en présence d'un champ magnétique a été utilisé pour

résoudre les niveaux du spectre de Landau pour une seule couche de graphène. Deux résonances ont été résolues pour des champs magnétiques jusqu'à  $B = 18T$  et leur emplacement énergétique a été trouvé à l'échelle de  $\sqrt{B}$  avec une pente correspondant à  $V_F = (1.120 \pm 02) \times 10^6$  pour une énergie spécifique [59]. Cette valeur de vitesse de Fermi est associée au passage de  $n = -1$  à  $n = 0$  (dans le cas des trous) et de  $n = 0$  à  $n = 1$  (dans le cas des électrons). Ces transitions correspondent au facteur de remplissage  $\nu = -2$  dans l'IQHE, les transitions de niveau Landau les plus basses possibles dans le graphène.

L'énergie pour les niveaux de Landau  $n = 1$  ou  $n = -1$  :

$$E_{1,0,1}^{\theta=0} = \pm \sqrt{2} \frac{\hbar V_F}{l_B} \quad (2.158)$$

où  $+$  représente les électrons et  $n = 1$ , et  $-$  représente les trous et  $n = -1$ . Pour ces niveaux,  $E_{\theta=0} = (172 \pm 3)meV$  est calculé [59].

Par conséquent, si le spectre d'énergie non-commutatif pour le graphène est fourni par l'équation (2.134) et que l'incertitude énergétique n'est pas supérieure à  $6meV$ , on a

$$\Delta E = E_{1,0,1}^{\theta} - E_{1,0,1}^{\theta=0} = E_{1,0,1}^{\theta=0} \left[ \left( 1 + \frac{\theta}{4l_B^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \prec 6meV \quad (2.159)$$

Ainsi, le paramètre non commutatif  $\theta$  satisfait

$$\theta < 1.01 \times 10^{-16} m^2 \tag{2.160}$$

## Chapitre 3

# Traitement des quelques problèmes quantique dans l'espace de Snyder-de-Sitter

### 3.1 Introduction

L'oscillateur harmonique relativiste (RHO) est l'un des modèles de physiques fondamentales les plus populaires utilisés dans les études expérimentales pour expliquer le confinement. En physique nucléaire, RHO est le potentiel central du modèle de coque nucléaire, et il a également été utilisé comme potentiel de confinement à deux corps pour les quarks en physique des particules. Depuis la publication de l'article de Moshinsky et Szczepaniak [60], l'oscillateur de Dirac (DO) a été intensivement étudié par de nombreux chercheurs. [61] [62] De plus, ce modèle a été étendu à des cas de bosons tels que l'oscillateur de Klein-Gordon (KGO) pour les bosons de spin 0 [63] [64] et l'oscillateur Dufin-Kemmer-Petiau (DKPO) pour les spins 0 et 1 particules. [65] [66] De plus, nous identifions le KGO dans des dimensions arbitraires, comme établi dans une série d'articles.

En d'autre part, il y a eu de nombreuses tentatives pour étudier les systèmes mécaniques

quantiques déformés car ils ont un impact significatif sur l'absorption des infinités qui se trouvent dans les théories de champ standard. Cela a été proposé pour la première fois dans le modèle de Snyder, qui proposait que la mesure en mécanique quantique non commutative puisse être régie par un principe d'incertitude généralisée (GUP). [9] Par conséquent, on pense que l'échelle de longueur fondamentale est de l'ordre de la longueur de Planck [67], ce qui donne une mesure de position avec une incertitude minimale. Plusieurs théories physiques, y compris les géométries non commutatives, la relativité restreinte double (DSR), les théories des cordes et la physique des trous noirs, motivent cette stratégie.

L'algèbre d'Heisenberg déformée en trois dimensions dans le modèle Snyder-de Sitter (SdS) non relativiste est définie par la relation de commutation suivante. [68] [69] :

$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \alpha_1 X_i X_j + \alpha_2 P_i P_j + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (X_i P_j + P_i X_j)) \quad (3.1)$$

$$[X_i, X_j] = i\hbar\alpha_2 \xi_{ijk} L_k, \quad [P_i, P_j] = i\hbar\alpha_1 \xi_{ijk} L_k \quad (3.2)$$

où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les petits paramètres positifs des déformations et  $L_k$  désigne les composantes de l'opérateur moment cinétique, qui peut s'exprimer comme suit :

$$L_k = \xi_{ijk} X_i P_j \quad (3.3)$$

On a aussi une autre formule :

$$j_{ij} = \xi_{ijk} L_k = \frac{1}{2} (X_i P_j + P_j X_i - X_j P_i - P_i X_j) \quad (3.4)$$

satisfaisant l'algèbre habituelle :

$$[L_i, X_j] = i\hbar \xi_{ijk} X_k, \quad [L_i, P_j] = i\hbar \xi_{ijk} P_k, \quad [L_i, L_j] = i\hbar \xi_{ijk} L_k \quad (3.5)$$

De la même manière que dans le cas de la mécanique quantique ordinaire, la relation de

commutation [3.1](#) donne lieu à l'incertitude des relations d'Heisenberg :

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{\hbar}{2} \left( \delta_{ij} + \gamma_{ij} + \alpha_1 (\Delta X_i)^2 + \alpha_2 (\Delta P_i)^2 - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Delta X_i \Delta P_j \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

où

$$\gamma_{ij} = (\sqrt{\alpha_1} (X_i) + \sqrt{\alpha_2} (P_j))^2 \geq 0 \quad (3.7)$$

La relation [3.6](#) montre que les incertitudes de position et d'impulsion ont une longueur minimale non nulle :

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha_2 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}}, \quad (\Delta P)_{\min} = \hbar \sqrt{\frac{\alpha_1 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}} \quad (3.8)$$

Les opérateurs SdS algébriquement non commutatifs  $X_i$  et  $P_i$  donnent lieu à une relation d'incertitude remise à l'échelle [3.1](#) dans l'espace de position et de quantité de mouvement [3.6](#). En tant que fonctions des opérateurs  $x_i$  et  $p_i$ , qui satisfont les relations de commutation canoniques usuelles de la mécanique quantique ordinaire, nous représentons ces opérateurs dans le but d'étudier des problèmes de mécanique quantique. Cependant, il n'y a pas de représentation de l'espace ou de la quantité de mouvement en raison des relations non commutatives [3.2](#). En supposant que  $X_i$  et  $P_i$  aient les valeurs de  $p_i$  et  $\partial_{p_i}$ , les transformations suivantes sont effectuées sur les valeurs de ces variables :

$$X_i = i\hbar \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + \lambda \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \quad (3.9)$$

$$P_i = -i\hbar \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \partial_{p_i} + (1 - \lambda) \frac{p_i}{\sqrt{1 - \alpha_2 p^2}} \quad (3.10)$$

où  $p$  varié dans le domaine  $]-1/\sqrt{\alpha_2}, 1/\sqrt{\alpha_2}[$  et  $\lambda$  est une constante réelle arbitraire.

## 3.2 Solutions exactes de l'oscillateur de Schrödinger déformé par l'algèbre de Snyder - de Sitter

### 3.2.1 Cas d'oscillateur unidimensionnel

La forme suivante définit l'équation générale de l'oscillateur harmonique de Schrödinger (OS) dans le cas unidimensionnel :

$$H\psi = E\psi, \quad H = \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2m}P^2 \quad (3.11)$$

où  $m$  est la masse de la particule,  $\omega$  est la fréquence de l'oscillateur classique. En utilisant la définition de [3.9](#) et [3.10](#) de l'algèbre SdS, nous récrivons l'équation [3.11](#) dans l'espace des impulsions déformées.

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 - \frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta\alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.12)$$

avec

$$\gamma = \left( 1 + im\omega \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right), \quad \Omega = \alpha_1 (\gamma \gamma^* \lambda - 1), \quad \eta = \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} + \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{i\hbar}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \right) \Omega \quad \text{et} \quad \varepsilon = 2mE - \frac{i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \quad (3.13)$$

Maintenant, pour résoudre [3.12](#), nous utilisons le changement suivant dans la variable  $p$  :

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{k} \arcsin(\sqrt{\alpha_2} p) \quad \text{et} \quad k = \hbar \sqrt{\alpha_1 \gamma \gamma^*} \quad (3.14)$$

Par conséquent, l'équation devient

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + 2\delta \tan(k\rho) \frac{\partial}{\partial \rho} - \eta \tan^2(k\rho) + \varepsilon \right\} \psi(\rho) = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$\delta = -\frac{i\hbar\Omega}{k\alpha_1\alpha_2} \quad (3.16)$$

Nous utilisons la transformation suivante :

$$\psi(\rho) = (1-u^2)^{\frac{1}{2}\left(u+\frac{\delta}{k}\right)} f(u) \quad (3.17)$$

où  $\nu$  est une constante qui sera déterminée ultérieurement et  $u = \sin(k\rho)$ . Au moyen de cette substitution [3.17](#), l'équation différentielle pour  $f(u)$  se réduit à la forme suivante :

$$\left[ (1-u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (2u+1)u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\varepsilon}{k^2} - \left(u + \frac{\delta}{k}\right) \right] f(u) = 0 \quad (3.18)$$

où nous avons choisi

$$v(v-1) = \frac{\delta}{k} \left( \frac{\delta}{k} + 1 \right) + \frac{\eta}{k^2} \quad (3.19)$$

Pour éviter les valeurs propres complexes de  $\varepsilon$ , il faut imposer la condition  $\Omega = 0$  pour éliminer la partie imaginaire dans [3.13](#); ceci établit la valeur du paramètre arbitraire  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{\gamma\gamma^*} = \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} \quad (3.20)$$

Cela amène également l'équation différentielle [3.18](#) à la forme de Gegenbauer,

$$\left[ (1-u^2) \frac{\partial^2}{\partial u^2} - (2v+1)u \frac{\partial}{\partial u} + n(n+2v) \right] f(u) = 0 \quad (3.21)$$

où  $n$  et  $\nu$  satisfont les relations

$$\frac{\varepsilon}{k^2} - v = n(n+2v) \text{ et } v(v-1) = \frac{\eta}{k^2} = \frac{1}{k^2} \left( \frac{m^2\omega^2}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} - m\hbar\omega \right) \quad (3.22)$$

La résolution de la deuxième relation pour  $\nu$  donne

$$v = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} \right)} \right) \quad (3.23)$$

D'après l'expression [3.17](#), nous voyons que  $f(u)$  doit être non singulier à  $u = \pm 1$ , et donc la bonne valeur de  $\nu$  est

$$v = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} \right)} \right) \quad (3.24)$$

Maintenant, la solution de [3.21](#) peut être exprimée en termes de polynômes de Gegenbauer,

$$f(u) = \Lambda C_n^v(u) \quad (3.25)$$

Par conséquent, l'expression de la fonction d'onde  $\psi(p)$  est

$$\psi(p) = \Lambda (1 - u^2)^{\frac{v}{2}} C_n^v(u) = \Lambda (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{v}{2}} C_n^v(\sqrt{\alpha_2} p) \quad (3.26)$$

En utilisant la condition de normalisation déformée, nous pouvons obtenir la constante de normalisation  $\Lambda$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}}} \psi^*(p) \psi(p) = 1 \quad (3.27)$$

Ensuite, en utilisant l'identité ci-dessous [\[70\]](#) :

$$\int_{-1}^{+1} dp (1 - q^2)^{v-\frac{1}{2}} [C_n^v(q)]^2 = \frac{\pi 2^{1-2v} \Gamma(2v+n)}{n! (n+v) [\Gamma(v)]^2} \quad (3.28)$$

on a

$$\Lambda = \frac{2^v \alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n! (n+v) [\Gamma(v)]^2}{\Gamma(2v+n)}} \quad (3.29)$$

Examinons maintenant la limite  $\alpha_1 \rightarrow 0$  ( $\nu = \frac{1}{m\omega\hbar\alpha_2}$ ) et  $\alpha_2 \rightarrow 0$  où nous avons  $\nu \rightarrow \infty$ . En utilisant les relations suivantes [70] :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu^{-\frac{n}{2}} C_n^{\frac{\nu}{2}} \left( x \sqrt{\frac{2}{\nu}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(x) , \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(v+a)}{\Gamma(v)} \nu^{-a} = 1 \quad (3.30)$$

avec la formule de doublement :

$$\Gamma(2v) = \frac{2^{2v-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v) \Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \quad (3.31)$$

De plus, en se limitant au premier ordre de  $\alpha_2$  (to  $O(\alpha_2^2)$ ) :

$$(1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\nu}{2}} = \exp\left(-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}\right) \quad (3.32)$$

On obtient directement (sans déformation) la fonction propre de l'espace impulsionnel du SO usuel :

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi m\omega\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m\omega\hbar}\right) H_n\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) \quad (3.33)$$

Pour trouver les énergies, nous utilisons l'équation [3.23] dans la première relation de l'équation [3.22] et l'expression de  $\varepsilon$ . Il est facile de démontrer que le spectre d'énergie déformer  $E_n$  est

$$E_n = \hbar\omega \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2 \theta_1^2}{4}} + \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right) \frac{\hbar m \omega \theta_1}{2} \right]$$

avec

$$\theta_1 = \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} \quad (3.34)$$

La forme de notre spectre d'énergie peut être testée comme suit : En utilisant la  $\lim \alpha_1 \rightarrow 0$ , nous obtenons les mêmes résultats que dans le cas de l'oscillateur de Schrödinger a une dimension (SO) avec la présence d'une longueur minimale [71] (avec  $\beta = \alpha_2$ ). Par la suite, lorsque les paramètres déformés sont absents, c'est-à-dire  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , le résultat est

strictement cohérent avec l'oscillateur de Schrödinger ordinaire en 1-dim càd

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.35)$$

### 3.2.2 Cas d'oscillateur D-dimension

Nous spécifions la forme suivante pour l'équation générique décrivant un oscillateur harmonique de dimensions D :

$$\left\{ \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 + \frac{1}{2m} P^2 \right\} \psi = E \psi \quad (3.36)$$

En raison de la symétrie de rotation de cette équation, les composantes angulaire et radiale de la fonction d'onde de moment peuvent être séparées comme suit.

$$\psi(\mathbf{P}) = Y_{l_{(D-1)} \dots l_2 l_1}^m(\mathbf{P}) \varphi(p) \quad (3.37)$$

où  $Y_{l_{(D-1)} \dots l_2 l_1}^m$  sont des harmoniques ultra-sphériques D-dim ceci nous permet de faire les remplacements suivants dans l'espace des impulsions ( $l$  est le nombre quantique orbital). À la lumière de cette séparation les modifications de Laplacien  $\Delta_p$  et le moment cinétique  $L^2$  et le produit scalaire  $\vec{r} \cdot \vec{p}$  dans l'espace des impulsions sont donnés par [71]

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{D-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2}, \quad \sum_{i=1}^D p_i \frac{\partial}{\partial p_i} = p \frac{\partial}{\partial p}, \quad L^2 = l(l+D-2) \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

Maintenant, afin d'étudier l'effet de la géométrie spatiale dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste déformée ,nous écrivons l'équation 3.36 dans l'algèbre SdS en

utilisant la définition des opérateurs de position  $X$  et d'impulsion  $P$  dans [3.8](#) et [3.9](#).

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left[ \left( 1 - \alpha_2 p^2 \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{D-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right) \right] - \frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta\alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon' \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.39)$$

où, les expressions de  $\gamma$ ,  $\Omega$  et  $\eta$  sont donnés dans [3.13](#) et  $\varepsilon'$  est défini par :

$$\varepsilon' = 2mE - \frac{Di\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \quad (3.40)$$

Maintenant, pour résoudre [3.39](#), nous utilisons la même transformation [3.14](#) précédent a une dimension 1-dim pour obtenir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left( k(D-1) \cot(k\rho) - \frac{2i\hbar\Omega}{k\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan(k\rho) \right) \frac{\partial}{\partial p} - k^2 l(l+D-2) \cot^2(k\rho) - \\ \eta \tan^2(k\rho) + \varepsilon' \end{array} \right\} \varphi(\rho) = 0 \quad (3.41)$$

Pour éviter des valeurs propres complexes des énergies en ce point, il faut imposer la même condition mentionnée dans le cas précédent [3.20](#) pour éliminer le terme imaginaire ; cela nous conduits à transformer l'équation maîtresse [3.41](#) à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + k(D-1) \cot(k\rho) \frac{\partial}{\partial p} - k^2 l(l+D-2) \cot^2(k\rho) - \\ \frac{1-\lambda}{\alpha_2} \tan^2(k\rho) + \varepsilon' \end{array} \right\} \varphi(\rho) = 0 \quad (3.42)$$

Cette équation est simplifiée à l'aide de l'ansatz suivant.

$$\varphi(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{l}{2}} q^l f(q) \quad (3.43)$$

Où  $\mu$  est une constante à déterminer et  $q = \sin(k\rho)$ . Ainsi, l'équation différentielle pour  $f(q)$  [3.42](#) s'exprime comme suit :

$$\left\{ (1 - q^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left[ - (2\mu + 2l + D) q + \frac{2l + D - 1}{q} \right] \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\varepsilon'}{k^2} - (2l - D) \mu - l \right\} f(q) = 0 \quad (3.44)$$

Où  $\mu$  est choisi pour simplifier cette équation comme

$$\mu(\mu - 1) - \frac{1}{k^2} \left( \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} \right) = 0 \quad (3.45)$$

Nous pouvons voir à partir de l'expression [3.43](#) que  $f(q)$  ne doit pas être singulier quand  $q = \pm 1$ , ce qui signifie

$$\mu = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} \right)} \right) \quad (3.46)$$

Nous notons que l'équation [3.44](#) possède trois points singuliers  $q = 0, 1, -1$ . Afin de réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, nous utilisons un autre changement dans la variable, nous écrivons  $z = 2q^2 - 1$  et imposons la condition suivante :

$$n' \left( n' + a + b + 1 \right) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\varepsilon'}{k^2} - (2l - D) \mu - l \right] \quad (3.47)$$

Où  $n'$  est un entier non négatif (nombre quantique radial) et nous avons également défini :

$$a = \mu - \frac{1}{2} \text{ et } b = l - 1 + \frac{D}{2} \quad (3.48)$$

Maintenant, l'équation différentiel [3.44](#) se transforme en la forme Jacobi suivante :

$$(1 - z^2) \frac{d^2 g}{dz^2} + [(b - a) - (a + b + 2) z] \frac{dg}{dz} + n' \left( n' + a + b + 1 \right) g(z) = 0 \quad (3.49)$$

Les solutions sont données par les polynômes de Jacobi  $g(z) = P_n^{(a,b)}(z)$  et donc la fonction d'onde radiale  $\varphi_{(n,l)}(p)$  est :

$$\varphi_{n,l}(p) = N (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\mu}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}} p_n^{(a,b)} \left( 2\alpha_2 p^2 - 1 \right) \quad (3.50)$$

Pour déterminer la constante de normalisation  $N$ , nous utilisons la condition de normalisation déformée dans l'espace D-dim des fonctions d'onde radiale :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}} \frac{D p^{D-1} dp}{(1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}}} \psi^*(p) \psi(p) = 1 \quad (3.51)$$

et la relation d'orthogonalité polynomiale de Jacobi [70] :

$$\int_{-1}^{+1} dy (1-y)^a (1+y)^b \left[ p_n^{(a,b)}(y) \right]^2 = \frac{\pi 2^{2\alpha+\beta+1} \Gamma(a+n'+1) \Gamma(\beta+n'+1)}{n! (\alpha+\beta+1+2n') \Gamma(\alpha+\beta+n'+1)} \quad (3.52)$$

donc nous obtenons l'expression :

$$N = \frac{2\alpha_2^{\frac{D}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{n'! \left( 2n' + \mu + l + \frac{D-1}{2} \right) \Gamma \left( 2n' + \mu + l + \frac{D-1}{2} \right)}{D \Gamma \left( n' + \mu + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( n' + l + \frac{D}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

Maintenant, pour trouver les énergies, nous substituons les relations [3.40] et [3.46] dans la condition [3.47] et nous définissons le nombre quantique principal  $n$  par  $n = 2n' + l$ , de sorte que nous obtenons le spectre d'énergie comme suit :

$$E_{n,l} = \hbar\omega \left[ \left( n + \frac{D}{2} \right) \sqrt{ \left( 1 + \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2}{4} \left( \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} \right)^2 \right) } + \left( n^2 + nD + \frac{D}{2} - L^2 \right) \frac{\hbar m \omega}{2} \left( \alpha_2 + \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} \right) \right] \quad (3.54)$$

L'expression montre que nous avons le même terme que dans le cas 1-dim avec un petit offset et une nouvelle correction contenant le nombre quantique orbital  $l$ . Cette forme du

spectre d'énergie peut être testée en prenant la limite  $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$  on obtient le résultat exact du D-dim. Du ShO sans déformation càd  $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{D}{2}\right)$

### 3.3 Propriétés thermiques de l'oscillateur Klein – Gordon dans l'espace Snyder – de Sitter

#### 3.3.1 Solution exacte de l'oscillateur à une dimension

L'équation stationnaire du KGO dans l'espace à 1 dim est donnée par Moshinsky [\[60\]](#).

$$\left[ c^2 (P + im\omega X) (P - im\omega X) + m^2 c^4 - E^2 \right] \psi(p) = 0 \quad (3.55)$$

où  $m$  est la masse de la particule,  $\omega$  est la fréquence classique de l'oscillateur et  $c$  est la vitesse de la lumière. Après application de la réalisation spatiale des impulsions des opérateurs  $X$  et  $P$  et de la relation de commutation [\[3.1\]](#), on obtient :

$$\left[ m^2 \omega^2 \left( 1 - \frac{\hbar \alpha_1}{m\omega} \right) X^2 + (1 - m\omega \hbar \alpha_2) P^2 - m\omega \hbar \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (PX + XP) - \varepsilon_1 \right] \psi(p) = 0 \quad (3.56)$$

où  $\varepsilon_1 = m\omega \hbar + (E^2 - m^2 c^4) / c^2$ . Nous redécrivons cette équation dans l'espace des impulsions déformées en utilisant la définition de l'algèbre SdS . :

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 - \frac{2i\hbar\Omega}{\alpha_1 \alpha_2} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \epsilon \right\} \psi(p) = 0 \quad (3.57)$$

où, les expressions de  $\gamma$  et  $\Omega$  sont donnée dans [\[3.13\]](#)

$$\eta_1 = \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} - m\omega \hbar + \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{i\hbar}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \right) \Omega, \quad \epsilon = \varepsilon_1 - \frac{i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \quad (3.58)$$

Il est important de noter que cette équation [\[3.57\]](#) a la même forme que [\[3.12\]](#), à l'exception que  $\eta_1$  a été remplacé par  $\eta$ . et  $\epsilon$  par  $\varepsilon$  Par conséquent, nous procédons de la même manière

que SO-1dim. En utilisant une méthode de calcul simple, nous arrivons à la formule suivante pour la fonction d'onde et l'énergie :

$$\psi_{KG}(p) = \Lambda_{KG} (1 - u^2)^{\frac{\tilde{\nu}}{2}} c_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}}(u) = \Lambda (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\tilde{\nu}}{2}} C_{\tilde{\nu}}^{\tilde{\nu}}(\sqrt{\alpha_2} p) \quad (3.59)$$

où

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} - m \omega \hbar \right)} \right) \quad (3.60)$$

$\Lambda_{KG}$  est la constante normalisation nous pouvons obtenir à partir de la condition de normalisation déformée [3.27](#)

$$\Lambda_{KG} = \frac{2^\mu \alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n! (n + \mu) [\Gamma(\mu)]^2}{\Gamma(2\mu + n)}} \quad (3.61)$$

$$E_n = \pm m c^2 \sqrt{1 + \frac{2\omega \hbar}{m c^2} n + \frac{\hbar^2 (m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1)}{m^2 c^2} n^2}, \quad n = 0, 1, 2.. \quad (3.62)$$

En raison de la modification de l'algèbre d'Heisenberg, ces expressions du spectre d'énergie contient un terme de correction supplémentaire provenant de la déformation et ses valeurs augmente avec les deux paramètres  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Ici, il convient de noter que, selon la dépendance  $n^2$  de niveaux d'énergie qui explique le confinement dans la zone de haute énergie, notre résultat est comparable aux énergies d'une particule quantique relativiste sans spin se déplaçant dans un puits de potentiel carré avec  $\pm \frac{\pi}{2\sqrt{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1}}$  comme conditions aux limites.

La forme du spectre d'énergie peut être testée de la manière suivante : En utilisant la limite  $\alpha_1 \rightarrow 0$ , on obtient les mêmes résultats que dans le cas d'un oscillateur KG unidimensionnel avec la présence d'une longueur minimale (où  $\beta = \alpha_2$ ,  $\beta^\lambda = 0$ ) [\[72\]](#). Par conséquent, lorsque les paramètres déformés sont manquants, c'est-à-dire  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , le résultat est strictement cohérent avec le KGO en 1-dim Ref [\[73\]](#).

Lors du calcul de l'espacement entre les niveaux d'énergie, nos résultats révèlent une

deuxième propriété intéressante : cette différence devient constante pour les grandes valeurs de  $n$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\Delta E_n| = \hbar c \sqrt{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} = m \omega \hbar c^2 \sqrt{\theta_1} \text{ with } \theta_1 = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \quad (3.63)$$

Pour illustrer ce phénomène, nous avons représenté graphiquement la distance entre les niveaux d'énergie en fonction du nombre quantique ( $n$ ) sur une plage de paramètres de déformation dans *FIG.3.1*.

Pour différentes valeurs des paramètres de déformation (ici, nous utilisons les unités ( $\hbar = c = m = 1$  et  $\omega = 1$ )), nous traçons l'espacement entre les niveaux d'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  pour démontrer l'impact de l'espace déformé obéissant l'algèbre de Snyder-de Sitter sur l'oscillateur KG.

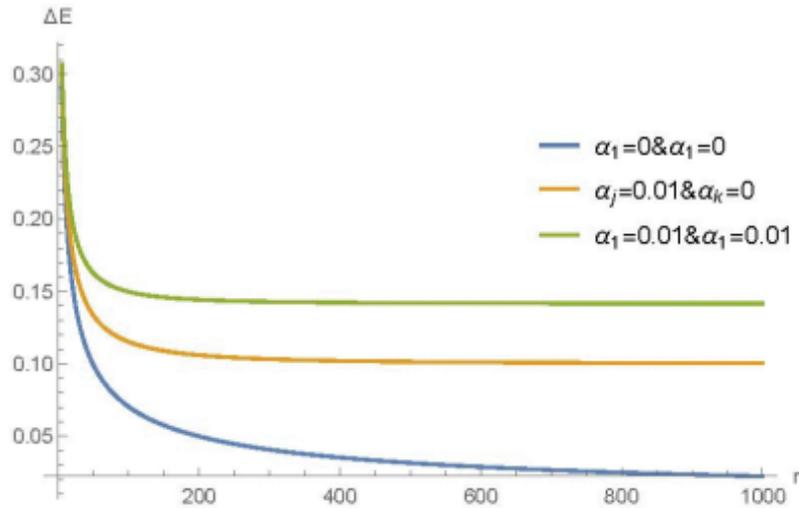


FIG.3.1 : Espacement spectral  $\Delta E_n$  avec et sans déformations

D'après les résultats de la figure 3.1. , nous pouvons voir ,Lorsque  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tendent vers 0 , il est évident que l'écart d'énergie entre les niveaux  $\Delta E_n$  est nul. En d'autres termes, l'énergie devient presque continue dans le scénario typique (sans déformation). Par conséquent, ce spectre continu disparaît entièrement et s'effondre en un spectre lié dans le cas déformé, avec l'apparition d'un espacement d'énergie qui augmente à mesure que le paramètre de déformation  $\theta_1$  augmente. Cet espacement tend à être cohérent pour des valeurs extrêmement élevées de  $n$ . Ici, nous observons également que la contribution de l'algèbre de Snyder (via  $\alpha_2$ ) est supérieure à l'effet de gravité (via  $\alpha_1$ ).

L'étape suivante consiste à trouver une valeur maximale pour les paramètres de déformation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . ;Nous employons l'équation. [3.62](#) et on développe jusqu'au premier ordre en  $\theta_1$ ,

$$E_n = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\omega\hbar n}{mc^2}} + \frac{\theta_1 m \omega^2 \hbar^2 c^2 n^2}{2\sqrt{1 + \frac{2\omega\hbar n}{mc^2}}} \quad (3.64)$$

L'écart du n-ième niveau d'énergie par rapport au cas habituel causé par les relations de commutation modifiées [3.1](#) est donné par

$$\frac{\Delta E_n}{\hbar\omega} = \frac{\theta_1 m \omega \hbar c^2 n^2}{2\sqrt{1 + \frac{2\omega\hbar n}{mc^2}}} \quad (3.65)$$

D'autre part, en utilisant les résultats expérimentaux du mouvement cyclotronique d'un électron dans un piège de Penning [\[74\]](#). En l'absence de déformation, la fréquence cyclotron d'un électron de masse  $m_e$  piégé dans un champ magnétique d'intensité  $B$  est

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e} \quad (3.66)$$

Par conséquent, un champ magnétique d'intensité  $B = 6T$

$$m_e \hbar \omega_c = e \hbar B = 10^{-52} K g^2 m^2 s^{-2} \quad (3.67)$$

A ce stade, si l'on suppose qu'au niveau  $n = 10^{10}$ , seul un écart d'échelle de  $\hbar \omega_c$  peut être identifié et  $\Delta E_n \langle \hbar \omega_c$  (pas de perturbation du n-ième niveau d'énergie est observé) [71], on peut écrire la contrainte suivante :

$$\theta_1 \prec \frac{10^{33}}{c^2} K g^{-2} m^{-2} s^2 \quad (3.68)$$

Cela se traduit par les scénarios de borne supérieure suivants en fonction des paramètres de déformation  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

- Pour  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\alpha_1 = 0$

$$\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{\alpha_2} \langle 3.33 \times 10^{-18} m \quad (3.69)$$

- Pour  $\alpha_2 = 0$  and  $\alpha_1 \neq 0$

$$\Delta P_{\min} = \hbar \sqrt{\alpha_1} \langle 3.17 \times 10^{-36} K g m s^{-1} \quad (3.70)$$

Pour la limite non relativiste, en posant  $E = \mu c^2 + E_{nr}$  avec l'hypothèse que  $\mu c^2 \gg E_{nr}$ , on écrit le spectre du KGO non relativiste

$$E_{nr} = n \hbar \omega \left( 1 + \frac{\hbar n}{2m\omega} (m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1) \right) \quad (3.71)$$

### 3.3.2 Solution exacte de l'oscillateur à D dimension

Dans cette section, on considère l'équation relativiste stationnaire caractérisant le KGO de dimension D (D-dim) dans la représentation de l'impulsion.

$$[c^2 (\mathbf{P} + im\omega\mathbf{X})(\mathbf{P} - im\omega\mathbf{X}) + m^2c^4 - E^2] \psi(\mathbf{P}) = 0 \quad (3.72)$$

qui peut s'écrire à l'aide de la relation de commutation [3.1](#) comme

$$[(m^2\omega^2 - m\omega\hbar\alpha_1)\mathbf{X}^2 + (1 - m\omega\hbar\alpha_2)\mathbf{P}^2 - m\omega\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2}(\mathbf{P}\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{P}) - \varepsilon_1^\lambda] \psi(\mathbf{P}) = 0 \quad (3.73)$$

où

$$\varepsilon_1^\lambda = \frac{E^2 - m^2c^4}{c^2} + Dm\omega\hbar \quad (3.74)$$

A ce stade, nous utilisons [3.37](#) et les relation [3.9](#) et [3.10](#) nous obtenons l'équation suivante dans l'espace des impulsions déformées :

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \gamma \gamma^* \left[ \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{D-1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2} \right) \right] - \frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta_1 \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon^\lambda \right\} \varphi(p) = 0 \quad (3.75)$$

où, les expressions de  $\gamma$ ,  $\Omega$  et  $\eta_1$  ont été données dans [3.13](#) et [3.58](#) resp et  $\varepsilon^\lambda$  est donné par

$$\varepsilon^\lambda = \varepsilon_1^\lambda - \frac{Di\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}. \quad (3.76)$$

Notez que la forme de l'équation [3.75](#) est similaire à celle de l'équation [3.39](#), à l'exception de la substitution de  $\eta_1$  avec  $\eta$  et  $\varepsilon^\lambda$  avec  $\varepsilon^\lambda$ . Par conséquent, nous adhérons à la même technique que SO-D dim. A l'aide d'une longue méthode de calcul mathématique, on arrive à la formule pour la fonction d'onde et le spectre d'énergie :

$$\varphi_{n_r, l}(p) = N_{KG} (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\tilde{\mu}}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{l}{2}} p_{n_r}^{(a,b)} (2\alpha p^2 - 1) \quad (3.77)$$

où

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \omega^2}{m^2 \omega^2 \alpha_2 + \alpha_1} - m \omega \hbar \right)} \right) \quad (3.78)$$

$N_{KG}$  est la constante normalisation nous pouvons obtenir à partir de la condition de normalisation déformée [3.51](#)

$$N_{KG} = \frac{2\alpha_2^{\frac{d}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{n_r! \left( 2n + \tilde{\mu} + l + \frac{D-1}{2} \right) \Gamma \left( 2n_r + \tilde{\mu} + l + \frac{D-1}{2} \right)}{D \Gamma \left( n_r + \tilde{\mu} + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( n_r + l + \frac{D}{2} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

on définit le nombre quantique principal  $n$  par  $n = 2n_r + l$ , et on obtient ainsi le spectre du D-dim SdS KGO comme suit :

$$E_{n,l} = \pm mc^2 \left\{ 1 + \frac{2\omega \hbar n}{mc^2} + \frac{\hbar^2 (\alpha_1 + m^2 \omega^2 \alpha_2)}{m^2 c^2} [n^2 + (D-1)n - l(l+D-2)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.79)$$

L'expression démontre que nous avons le même terme que dans le cas 1-dim, avec un décalage mineur et une nouvelle correction incorporant le nombre quantique orbital  $l$ . Il atténue la dégénérescence des énergies, qui reste néanmoins à  $(2l+1)$ . La relation [3.79](#) montre également que les contributions des déformations augmentent avec la dimension de l'espace  $D$ , mais diminuent avec le nombre quantique  $l$ . Cette forme du spectre d'énergie peut être examinée en prenant la limite  $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , à laquelle le résultat exact de la D-dim KGO est obtenu sans déformation. [\[72\]](#) [\[75\]](#)

Il fournit également le spectre identique obtenu dans la Réf [\[76\]](#) pour la situation bidimensionnelle (où  $B = 0$  dans ce cas après).

### 3.3.3 Propriétés thermiques

Les caractéristiques thermodynamiques de l'oscillateur KG déformé de dimensions  $D$  avec des relations de commutation de Snyder-de Sitter ont été déterminées. Nous considérons la fonction de partition d'un tel système selon le facteur de Boltzmann à température

finie  $T$  comme suit.

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_{n,l}}{K_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{mc^2}{K_B T} \sqrt{a_1 + a_2 n + a_3 n^2}\right) \quad (3.80)$$

où  $K_B$  est la constante de Boltzmann et les autres paramètres de l'expression sont

$$a_1 = 1 - a_3 l(l + D - 2), a_2 = \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + a_3(D - 1) \text{ et } a_3 = \frac{\hbar^2(\alpha_1 + m^2\omega^2\alpha_2)}{m^2c^2} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{\hbar^2(\alpha_1 + m^2\omega^2\alpha_2)}{m^2c^2} l(l + D - 2), \\ a_2 &= \frac{2\omega\hbar}{mc^2} + \frac{\hbar^2(\alpha_1 + m^2\omega^2\alpha_2)}{m^2c^2} (D - 1) \text{ et } a_3 = \frac{\hbar^2(\alpha_1 + m^2\omega^2\alpha_2)}{m^2c^2} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Maintenant, pour évaluer cette fonction, nous utilisons la formule d'Euler-MacLaurin qui est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) \quad (3.83)$$

où  $B_{2p}$  sont les nombres de Bernoulli,  $f^{(2p-1)}$  est la dérivée d'ordre  $(2p - 1)$ , et le terme intégral  $I$  est donné comme suit

$$I = \frac{2a_1}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{4a_1a_3}{a_2^2 - 4a_1a_3}\right)^n \left[ \frac{\Gamma(2n+2)}{\chi^{2n+2}} - \frac{e^{-\chi}}{2n+2} \Phi(1, 2n+2, \chi) \right] \quad (3.84)$$

où nous avons utilisé  $\chi = \frac{mc^2}{K_B T} \sqrt{a_1}$ , le changement de variable  $y = \sqrt{1 + \frac{a_2}{a_1}n + \frac{a_3}{a_1}n^2}$  et la série de puissance de la racine carrée de l'intégrale suivante

$$I = \frac{2a_1}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1a_3}} \int_1^{\infty} dy y \left(1 + \frac{4a_1a_3}{a_2^2 - 4a_1a_3} y^2\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-xy}$$

Les contributions des premier et troisième termes dans l'expression [3.83](#) et du second terme dans [3.84](#) deviennent négligeables par rapport au terme  $\chi^{-(2n+2)}$  à haute température. En conséquence, nous pouvons exprimer la fonction de partition sous la forme.

$$Z \simeq \frac{2 \left( \frac{K_B T}{m c^2} \right)^2}{\sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sigma^n \quad (3.85)$$

avec

$$\sigma = \left( \frac{K_B T}{m c^2} \right)^2 \left( \frac{4a_3}{a_2^2 - 4a_1 a_3} \right) \quad (3.86)$$

En retenant les contributions majeures d'ordre 0 et 1 dans  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , on peut en déduire la version réduite.

$$Z \simeq \frac{(K_B T)^2}{m \omega \hbar c^2} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \left[ \frac{3 (K_B T)^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{m c^2}{K_B T} \right)^2 \right) + \frac{(D-1) \hbar}{2 m \omega} \right] \right] \quad (3.87)$$

Nous obtenons finalement l'expansion à haute température de la fonction de partition en utilisant l'approximation  $\left( 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{m c^2}{K_B T} \right)^2 \right) \simeq 1$

$$Z \simeq \frac{(K_B T)^2}{m \omega \hbar c^2} \left[ 1 - \theta \left( 3 (K_B T)^2 + \frac{(D-1) \hbar c^2}{2 m \omega} \right) \right] \quad (3.88)$$

où l'expression de  $\theta_2$  est donnée dans l'Eq [3.63](#).

Les paramètres thermodynamiques de notre système physique, tels que l'énergie libre  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , la chaleur spécifique  $C$  et l'entropie  $S$ , peuvent être calculés à l'aide des définitions suivantes [\[77\]](#) :

$$F = -K_B T \ln Z = -K_B T \ln \left[ \frac{(K_B T)^2}{m \omega \hbar c^2} (1 - \theta_2 \delta) \right] \quad (3.89)$$

$$U = K_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = 4K_B T \left[ 1 - \frac{2m\omega - \hbar c^2 \theta_2 (D-1)}{4m\omega - 2\theta_2 (3m\omega (K_B T)^2 + m\omega\delta)} \right] \quad (3.90)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 4K_B \left[ 1 - \frac{(2m\omega - \hbar c^2 \theta_2 (D-1)) (4m\omega + 2\theta_2 (9m\omega (K_B T)^2 - m\omega\delta))}{(4m\omega - 2\theta_2 (3m\omega (K_B T)^2 + m\omega\delta))^2} \right] \quad (3.91)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = K_B \left[ \frac{2(1 - \theta_2 (3(K_B T)^2 + \delta))}{(1 - \theta_2\delta)} + \ln \left[ \frac{(K_B T)^2}{m\omega\hbar c^2} (1 - \theta_2\delta) \right] \right] \quad (3.92)$$

où  $\delta = 3(K_B T)^2 + \frac{(D-1)\hbar c^2}{2m\omega}$

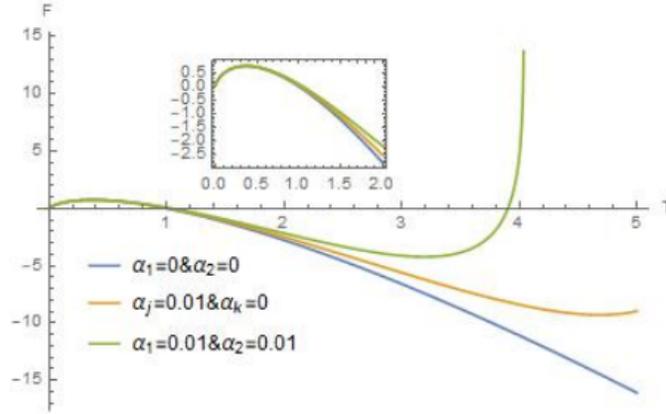


Figure 3.2 : Effets des déformations sur l'énergie libre  $F$

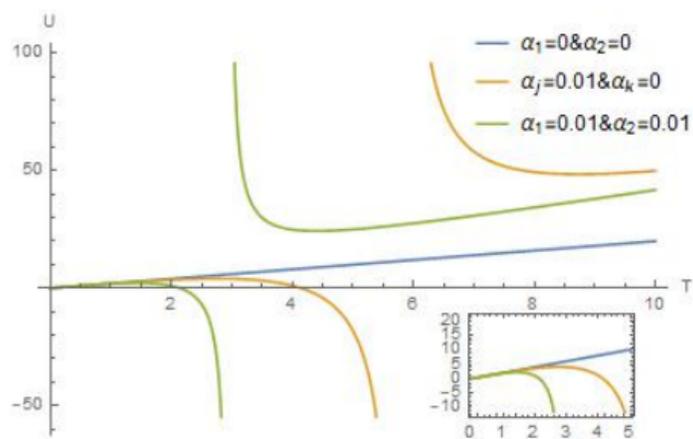


Figure 3.3 : Effets des déformations sur l'énergie  $U$

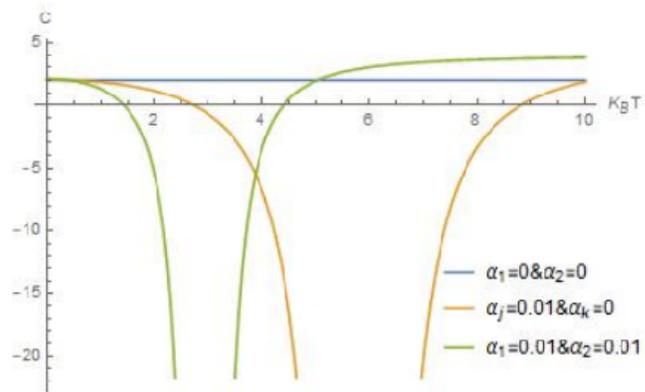


Figure 3.4 : Effets des déformations sur la capacité calorifique  $C$ .

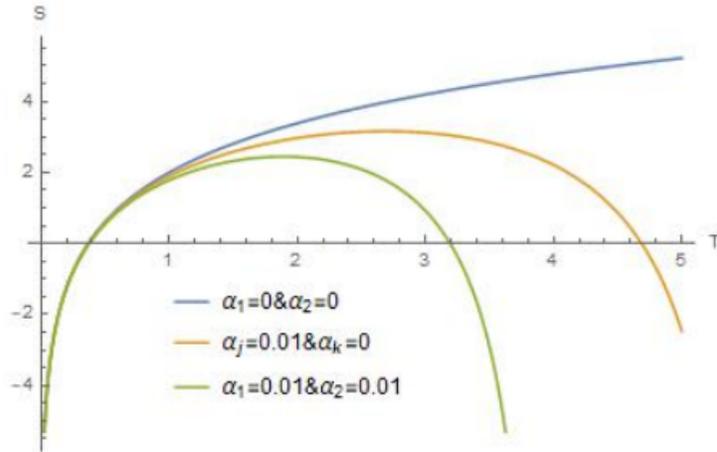


Figure 3.5 : Effets des déformations sur l'entropie  $S$

Dans les Fig. 3.2-3.5, nous illustrons la dépendance en température de ces propriétés thermodynamiques dans le scénario 3D pour quelques valeurs illustratives des paramètres de déformations. Ces graphiques révèlent que les corrections augmentent l'énergie libre  $F$  mais diminuent les autres caractéristiques thermodynamiques. Il convient de noter que la dimension supplémentaire de l'espace ne modifie pas la forme de ces courbes, elle les déplace uniquement vers des températures plus basses

Les expressions [3.89](#), [3.90](#), [3.91](#) et [3.92](#) donnent les propriétés thermodynamiques du D-dim KGO habituel lors de l'utilisation de la limite  $\theta_2 \rightarrow 0$  (ou, de manière équivalente, pour  $\alpha_1 \rightarrow 0$  et  $\alpha_2 \rightarrow 0$ ).

### 3.4 Solutions exactes de l'oscillateur de Dirac via le modèle de Snyder-de Sitter

Considérons maintenant l'équation de Dirac de dimensions (2+1) d'une particule  $m_0$  en présence d'un champ magnétique homogène  $B = (0, 0, B)$ , est donné comme suit :

$$\left\{ c\alpha_x \left[ \left( \hat{p}_x + \frac{eB\hat{y}}{2c} \right) - im_0\omega\beta\hat{x} \right] + c\alpha_y \left[ \left( \hat{p}_y + \frac{eB\hat{x}}{2c} \right) - im_0\omega\beta\hat{y} \right] + \beta m_0 c^2 \right\} \Psi_D = E\Psi_D \quad (3.93)$$

En utilisant la représentation 2.74 et avec  $\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  l'équation 3.93 devient

$$\begin{pmatrix} m_0 c^2 & c\Pi_- \\ c\Pi_+ & m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

Ensuite, en découplant les composants, nous trouvons

$$(c^2\Pi_-\Pi_+ - (E^2 - m_0^2c^4))\psi_1 = 0 \quad (3.95)$$

$$(c^2\Pi_+\Pi_- - (E^2 - m_0^2c^4))\psi_2 = 0 \quad (3.96)$$

avec

$$\Pi_- = \hat{p}_x - i\hat{p}_y + im_0\hat{\omega}(\hat{x} - i\hat{y}) \quad (3.97)$$

$$\Pi_+ = \hat{p}_x + i\hat{p}_y - im_0\hat{\omega}(\hat{x} + i\hat{y}) \quad (3.98)$$

où

$$\hat{\omega} = \omega - \frac{\omega_c}{2} \text{ et } \omega_c = \frac{eB}{m_0c} \quad (3.99)$$

En appliquant la relation de commutation [3.1](#) à la réalisation dans l'espace des impulsions des opérations  $X$  et  $P$  et en faisant une évaluation du terme  $\Pi_- \Pi_+$ , nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} \Pi_- \Pi_+ = & m_0^2 \hat{\omega}^2 \left(1 - \frac{\hbar \alpha_1}{m_0 \hat{\omega}}\right) \hat{X}^2 + (1 - m_0 \hat{\omega} \hbar \alpha_2^2) \hat{P}^2 - m_0 \hat{\omega} \hbar \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (\hat{P} \hat{X} + \hat{X} \hat{P}) - 2m_0 \hat{\omega} \hbar + \\ & i m_0^2 \hat{\omega}^2 (\hat{x} \hat{y} - \hat{y} \hat{x}) + i (\hat{p}_x \hat{p}_y - \hat{p}_y \hat{p}_x) + m_0 \hat{\omega} (\hat{p}_x \hat{y} - \hat{p}_y \hat{x} + \hat{y} \hat{p}_x - \hat{x} \hat{p}_y) \end{aligned} \quad (3.100)$$

nous remplaçons [3.100](#) dans [3.95](#) par l'utilisation [3.9](#) et [3.10](#) on trouve :

$$\begin{aligned} & \left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \hat{\gamma} \hat{\gamma}^* \left[ \left(1 - \alpha_2 p^2 \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left(\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2}\right) \right] - \frac{2i \hbar \hat{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hat{\eta} \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} - \right. \\ & \left. \left( \hbar m_0^2 \hat{\omega}^2 \alpha_2 + \hbar \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} + 2m_0 \hat{\omega} \left( \lambda \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right) + 1 \right) \right) L_z + \varepsilon \right\} \psi_1(p) = 0 \end{aligned} \quad (3.101)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} = & \left(1 + i m_0 \hat{\omega} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right), \hat{\Omega} = \alpha_1 (\hat{\gamma} \hat{\gamma}^* \lambda - 1), \hat{\eta} = \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} + \left(\frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{i \hbar}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}\right) \hat{\Omega} \text{ et} \\ \varepsilon = & \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} + 2m_0 \hat{\omega} \hbar - \frac{2i \hbar \hat{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \end{aligned} \quad (3.102)$$

la fonction d'onde  $\psi_1(p)$  peut être exprimée comme

$$\psi_1(p, \phi) = R(p) \Phi(\phi) = R(p) e^{im\phi}$$

où  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  est le nombre quantique de moment cinétique

Alors l'équation [3.101](#) prend la forme

$$\begin{aligned} & \left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \hat{\gamma} \hat{\gamma}^* \left[ \left(1 - \alpha_2 p^2 \frac{\partial}{\partial p}\right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left(\frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{L^2}{p^2}\right) \right] - \right. \\ & \left. \frac{2i \hbar \hat{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\hat{\eta} \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon \right\} \psi_1(p) = 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

où

$$\epsilon = \epsilon - \left( \hbar^2 m_0^2 \hat{\omega}^2 \alpha_2 + \hbar^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} + 2m_0 \hat{\omega} \hbar \left( \lambda \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 \right) + 1 \right) \right) m \quad (3.104)$$

On observe que cette équation [3.103](#) a la même forme que [3.39](#), à l'exception que  $\gamma\gamma^*, \Omega$ ,  $\eta$  a été remplacé respectivement par  $\hat{\gamma}\hat{\gamma}^*, \hat{\Omega}$ ,  $\hat{\eta}$  et  $D = 2$ , nous suivons donc les mêmes étapes que OS et KGO pour obtenir l'expression suivante de l'énergie :

$$E_{n,l,m} = \pm m_0 c^2 \left[ 1 + \frac{2\hat{\omega}\hbar}{m_0 c^2} (n+m) + \frac{\hbar^2 (\alpha_1 + m_0^2 \hat{\omega}^2 \alpha_2)}{m_0^2 c^2} (n^2 + n - l^2) + \frac{1}{m_0^2 c^2} \left( \hbar^2 m_0^2 \hat{\omega}^2 \alpha_2 + \hbar^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} + \frac{2m_0 \hat{\omega} \hbar (\alpha_2 - \alpha_1)}{\alpha_1 + m_0^2 \hat{\omega}^2 \alpha_2} \right) m \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.105)$$

Nous pouvons tester la forme du spectre d'énergie [3.105](#) en procédant comme suit : si on prend ( $m = 0$ ,  $B = 0$  et  $D = 2$ ) on obtient le résultat exact de l'oscillateur KG [\[78\]](#). Si nous ignorons l'influence de l'algèbre SdS cela correspond au même spectre de l'oscillateur de Dirac (2+1) sous un champ magnétique uniforme sans déformation [\[79\]](#). Ce dernier peut être cartographié sur celui-ci avec une fréquence réduite ( $\hat{\omega}$ ) en l'absence de champ magnétique, et ainsi, le seul rôle d'un champ magnétique consiste à réduire la fréquence et toute la dynamique reste inchangée. Nous soulignons en outre qu'en l'absence à la fois du paramètre déformé et du champ magnétique, le résultat est strictement cohérent avec l'oscillateur de Dirac ordinaire.

## Chapitre 4

# Traitement quantique de l'oscillateur déformée par l'algèbre de Snyder-de Sitter dans le cas de l'espace non- commutative

### 4.1 introduction

L'espace-temps non-commutatif conduit à des longueurs minimales et maximales de gravitation pour une mesure simultanée. L'existence de cette longueur maximale qui est la différence fondamentale avec celle du scénario de longueur minimale, apporte beaucoup de nouveautés dans la représentation de cet espace et pourrait être l'approche candidate à la mesure de la gravité quantique avec des énergies actuellement accessibles en laboratoire.

Cependant, des modèles plus généraux d'espaces non-commutatifs existent et décrivent la structure de l'espace-temps, une longueur minimale et préservent l'invariance de Lorentz. Le modèle le plus connu est le modèle de Snyder [\[9\]](#), qui est la première tentative

d'introduction d'une échelle de longueur fondamentale et est invariant sous le groupe de Lorentz. Ce modèle est généralisé à un fond d'espace-temps de courbure constante à savoir le modèle SdS. C'est un exemple d'espace-temps non-commutatif admettant trois paramètres fondamentaux et est également appelé Triple Relativité Spéciale (TSR) et est invariant sous l'action du groupe de de Sitter. Certaines applications de ce travail ont été faites dans [80] et le modèle d'une particule libre et d'un oscillateur ont été résolus dans ce cadre.

Dans ce contexte, nous étudions la formulation d'un oscillateur harmonique bidimensionnel en présence d'un champ magnétique, en résolvant les fondamentales équations dans le cadre de la mécanique quantique non-relativiste et relativiste via l'algèbre SdS dans l'espace NC. Tout d'abord, nous avons utilisé la transformation correcte pour mettre le problème d'origine sur un espace commutatif en utilisant une transformation appropriée.

## 4.2 l'oscillateur de Schrödinger déformé par l'algèbre de SdS dans le cas de l'espace non-commutatif à 2 dim

Nous résolvons explicitement l'équation de Schrödinger oscillant dans l'espace NC, en utilisant l'algèbre SdS pour un champ magnétique  $B$  externe et uniforme.

$$\left\{ \left( P_x^{(NC)} + \frac{qB}{2} y^{(NC)} \right)^2 + \left( P_y^{(NC)} - \frac{qB}{2} x^{(NC)} \right)^2 + m^2 \omega^2 \left( x^{(NC)2} + y^{(NC)2} \right) \right\} * \psi(P) = 2mE\psi(P) \quad (4.1)$$

Maintenant, si en tenant compte de la transformation [2.5] représentant le passage dans l'espace NC vers un autre espace commutatif dans l'équation [4.1], la solution stationnaire de l'équation de l'oscillateur du Schrödinger dans l'espace NC s'écrira comme suit

$$\left\{ \mathbf{P}^2 + m^2 \tilde{\omega}^2 \mathbf{r}^2 + \frac{1}{\mu\hbar} \left( \theta m^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{4\omega^2} \right) + qB\hbar \right) L_z \right\} \psi = \varepsilon\psi \quad (4.2)$$

Où

$$\bar{\mu} = \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2} + \left(1 + \frac{qB\theta}{4\hbar}\right)^2, \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2 + \frac{\omega_c^2}{4}}{\bar{\mu}}, \quad \omega_c = \frac{qB}{m} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{2mE}{\bar{\mu}} \quad (4.3)$$

Nous utilisons la définition de l'algèbre SdS [3.9](#) et [3.10](#), et nous réécrivons l'équation [4.2](#) dans l'espace des impulsions déformées

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^* \left[ \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right] - \frac{2\Omega}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} - \frac{\eta \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} - \frac{1}{\bar{\mu} \hbar} \left( \theta m^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{4\omega^2} \right) + qB\hbar \right) L_z + \varepsilon' \right\} = \psi(p) = 0 \quad (4.4)$$

avec

$$\tilde{\gamma} = \left( 1 + im\tilde{\omega} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right), \quad \tilde{\Omega} = \alpha_1 (\tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^* \lambda - 1) \quad (4.5)$$

$$\eta' = \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} + \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{i\hbar}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \right) \tilde{\Omega}, \quad \varepsilon' = \varepsilon - \frac{2i\hbar\tilde{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} \quad (4.6)$$

Nous introduisons les coordonnées polaires dans l'espace des impulsions  $(p, \varphi)$ , liées au Coordonnées cartésien par les relations

$$p_x = p \cos \varphi \quad \text{et} \quad p_y = p \sin \varphi \quad (4.7)$$

Ainsi, l'équation [4.4](#) devient :

$$\left\{ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^* \left[ \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right] - \frac{2i\hbar\tilde{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta' \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \varepsilon' \right\} R(p) = 0 \quad (4.8)$$

Où nous avons utilisé la forme séparée suivante qui contient le nombre quantique azimutal  $l$  :

$$\psi(p, \varphi) = C e^{-il\varphi} R(p), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

De cette manière l'équation [4.8](#) devient

$$\left[ \hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^* \left[ \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right] - \frac{2i\hbar\tilde{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} p \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\eta' \alpha_2 p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \frac{l}{\tilde{\mu}} \left( \theta m^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{4\omega^2} \right) + qB\hbar \right) \right] R(p) = \varepsilon' R(p) \quad (4.10)$$

Maintenant, pour résoudre l'équation [4.10](#), on utilise la transformation

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{k'} \arcsin(\sqrt{\alpha_2} p), \quad k' = \hbar \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 \frac{m^2 \omega^2 + \frac{q^2 B^2}{4}}{\frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + \left(1 + \frac{qB\theta}{4\hbar}\right)^2}} \quad (4.11)$$

En faisant ces changements, l'équation [4.10](#) devient :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \left( k' \cot(k' \rho) - \frac{2i\hbar\tilde{\Omega}}{k\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan(k' \rho) \right) \frac{\partial}{\partial \rho} - k'^2 l^2 \cot^2(k' \rho) - \eta' \tan^2(k' \rho) + \varepsilon \right\} R(\rho) = 0 \quad (4.12)$$

Où

$$\varepsilon = \varepsilon' - \frac{l}{\tilde{\mu}} \left( \theta m^2 \omega^2 \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{4\omega^2} \right) + qB\hbar \right) \quad (4.13)$$

A ce stade, pour éviter des valeurs propres complexes des énergies, il faut aussi imposer la même condition  $\tilde{\Omega} = 0$  pour éliminer le terme imaginaire, cela fixe la valeur de paramètre arbitraire  $\lambda$

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\gamma} \tilde{\gamma}^*} = \frac{\alpha_1}{m^2 \tilde{\omega}^2 \alpha_2 + \alpha_1} = \frac{\left( \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + \left( 1 + \frac{qB\theta}{4\hbar} \right)^2 \right) \alpha_1}{\left( m^2 \omega^2 + \frac{q^2 B^2}{4} \right) \alpha_2 + \left( \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + \left( 1 + \frac{qB\theta}{4\hbar} \right)^2 \right) \alpha_1} \quad (4.14)$$

L'expression [4.12](#) sera réécrite sous la forme suivante :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + k' \cot(k' \rho) \frac{\partial}{\partial \rho} - k'^2 l^2 \cot^2(k' \rho) - \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} \tan^2(k' \rho) + \varepsilon \right\} R(\rho) = 0 \quad (4.15)$$

pour simplifier l'équation [4.15](#), nous utilisons l'ansatz suivant :

$$R(\rho) = (1 - q^2)^{\frac{\nu}{2}} q^s g(q) \quad (4.16)$$

où  $\nu$  et  $s$  sont des constantes à déterminer et  $q = \sin(k'\rho)$  :

En utilisant la substitution dans l'équation [4.15](#), nous pouvons simplifier l'équation différentielle  $g(q)$  sous la forme suivante :

$$\left\{ (1 - q^2) \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \left[ -2(\nu + s + 1)q + \frac{2s + 1}{q} \right] \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\epsilon}{k^2} - 2\nu(s - 1)\nu - s \right\} g(q) = 0 \quad (4.17)$$

Où  $\nu$  et  $s$  est choisi pour simplifier cette équation comme

$$s^2 - l^2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\nu(\nu - 1) - \frac{1}{k^2} \left( \frac{1 - \lambda}{\alpha_2} \right) = 0 \quad (4.19)$$

Comme le montre [4.16](#), pour  $q = \pm 1$ ,  $f(q)$  doit être non singulier :

$$s = l \quad (4.20)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{m^2 \tilde{\omega}^2}{m^2 \tilde{\omega}^2 \alpha_2 + \alpha_1} \right)} \right) \quad (4.21)$$

Nous notons que l'équation [4.17](#) possède trois points singuliers  $q = 0, 1, -1$ .

Afin de réduire cette équation à une classe d'équations différentielles connues avec une solution polynomiale, nous utilisons un autre changement dans la variable ; nous écrivons  $z = 2q^2 - 1$  et imposons la condition suivante :

$$n' (n' + a + b + 1) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\epsilon}{k^2} - (2l + 2)\nu - l \right] \quad (4.22)$$

Où  $n'$  est un entier non négatif (nombre quantique radial) et nous avons également défini :

$$a = \nu - \frac{1}{2}, \quad b = l \quad (4.23)$$

La nouvelle forme de l'équation [4.17](#) est donnée

$$(1 - z^2) \frac{d^2 g}{dz^2} + [(b - a) - (a + b + 2)z] \frac{dg}{dz} + n(n + a + b + 1)g = 0 \quad (4.24)$$

Dont les solutions sont données par le polynôme de Jacobi :

$$g(z) = P_n^{(a,b)}(z) \quad (4.25)$$

Concernant la variable  $p$ , la fonction d'onde  $\psi(p, \varphi)$  est la suivante :

$$\psi(p, \varphi) = C (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\nu}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{1}{2}} p_n^{(\nu - \frac{1}{2}, l)} (2\alpha_2 p^2 - 1) \quad (4.26)$$

Où  $C$  est la constante de normalisation. Pour déterminer la constante de normalisation  $C$ , nous utilisons la condition de normalisation [3.51](#) déformé dans l'espace 2-Dim des fonctions d'onde radiale et la relation [3.52](#) donc nous obtenons l'expression :

$$C = \frac{2\alpha_2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{n'! (2n' + \nu + l + 1) \Gamma(2n' + \nu + l + 1)}{2\Gamma(n' + \nu + \frac{1}{2}) \Gamma(n' + l + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.27)$$

La substitution des relations [4.20](#), [4.21](#) et [4.23](#) dans la condition [4.22](#) permet de calculer les énergies. Définissons le nombre quantique principal  $n$ , comme  $n = 2n' + l$ , on obtient le spectre d'énergie suivant :

$$E_{n,l}^{\theta,B} = \hbar\tilde{\omega}\tilde{\mu} \left[ (n+1) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 m^2 \tilde{\omega}^2}{4} \xi^2} + (n^2 + 2n + 1 - l^2) \frac{\hbar m \tilde{\omega}}{2} \xi \right] + \frac{1}{2m} \left[ \left( m^2 \omega^2 + \frac{m^2 \tilde{\omega}^2}{4} \right) \theta + qB\hbar \right] \quad (4.28)$$

avec :

$$\xi = \left( \frac{\alpha_1}{m^2\tilde{\omega}^2} + \alpha_2 \right) \quad (4.29)$$

Nous prenons les cas particulières de  $\theta$  et  $\gamma$  :

- Dans un espace commutatif  $\theta = 0$ , sans champ magnétique extérieur,  $B = 0$ .

$$E_{n,l}^{0,0} = \hbar\omega \left[ (n+1) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2}{4} \left( \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right)^2} + (n^2 + 2n + 1 - l^2) \frac{\hbar m \omega}{2} \left( \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2} + \alpha_2 \right) \right] \quad (4.30)$$

- Avec un champ magnétique externe présent dans un espace commutatif  $\theta = 0, \bar{\mu} = \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} + \left(1 + \frac{qB\theta}{4\hbar}\right)^2 \tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2 + \frac{\omega_c^2}{4}}{\bar{\mu}}$

$$E_{n,l}^{\theta=0,B} = \hbar\tilde{\omega}_1 \left[ (n+1) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 m^2 \tilde{\omega}_1^2}{4} \bar{\xi}^2} + (n^2 + 2n + 1 - l^2) \frac{\hbar m \tilde{\omega}_1}{2} \bar{\xi} \right] + \frac{qB\hbar}{2m}$$

Où

$$\xi_1 = \left( \frac{\alpha_1}{m^2 \omega^2 + \frac{q^2 B^2}{4}} + \alpha_2 \right) \quad (4.31)$$

- Dans un espace NC, sans champ magnétique externe,  $B = 0$

$$E_{n,l}^{\theta,B} = \hbar\omega\bar{\mu} \left[ (n+1) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 m^2 \omega^2}{4} \xi^2} + (n^2 + 2n + 1 - l^2) \frac{\hbar m \omega}{2} \xi \right] + \frac{1}{2m} \left[ \left( m^2 \omega^2 + \frac{m^2 \omega^2}{4} \right) \theta \right] \quad (4.32)$$

- Dans un espace NC, avec un champ magnétique externe, sans déformation  $\xi$

$$E_{n,0}^{\theta,B} = \hbar\tilde{\omega}\mu_1 (n+1) + \frac{1}{2m} \left[ \left( m^2 \omega^2 + \frac{m^2 \tilde{\omega}^2}{4} \right) \theta + qB\hbar \right] \quad (4.33)$$

### 4.3 L'oscillateur deforme de Klein Gordon dans l'espace non-commutatif à 2 dim

considérons l'équation relativiste stationnaire décrivant l'oscillateur harmonique KG avec un champ magnétique constant externe  $B$  dans un espace NC à deux dimensions

$$c^2 \left[ \left( \mathbf{p}^{(NC)} - \frac{e}{c} \mathbf{A} + im\omega \mathbf{r}^{(NC)} \right) \cdot \left( \mathbf{p}^{(NC)} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - im\omega \mathbf{r}^{(NC)} \right) \right] * \psi_{KG} = (E^2 - m^2 c^4) \psi_{KG} \quad (4.34)$$

Nous utilisons la jauge de Coulomb dans la direction de l'axe  $z$  du champ magnétique.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} = \frac{B}{2} (-y, x, 0) \quad (4.35)$$

L'équation [4.34](#) peut être réécrite dans l'espace commutatif en utilisant le concept de produit de Moyal. Cela correspond à l'équation ci-dessous dans un espace commutatif

$$c^2 \left[ \mathbf{p} - \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \left( \mathbf{r} + \frac{\theta \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) + im\omega \left( \mathbf{r} + \frac{\theta \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right] \cdot \left[ \mathbf{p} - \frac{e}{2c} \mathbf{B} \times \left( \mathbf{r} + \frac{\theta \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) - im\omega \left( \mathbf{r} + \frac{\theta \times \mathbf{p}}{2\hbar} \right) \right] \psi_{KG} = (E^2 - m^2 c^4) \psi_{KG} \quad (4.36)$$

Après avoir effectué un calcul simple, on obtient l'équation exacte suivante :

$$\left[ \left( 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) p^2 + \left( m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4c^2} \right) r^2 - 2m\hbar\omega \right. \\ \left. \left( \frac{2eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) L_z \right] \psi_{KG} = \left( \frac{E^2 - m^2 c^4 + cm\omega e B \theta}{c^2} \right) \psi_{KG} \quad (4.37)$$

Nous réécrivons cette équation dans l'espace des impulsions déformées en utilisant la définition de l'algèbre de Snyder-de Sitter [3.9](#) [3.10](#), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left[ -\hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \bar{k}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{k}_2 \right) \left( \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{\partial}{p \partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right) \right. \\
& \frac{2i\hbar\bar{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \frac{p\partial}{\partial p} + \left( \bar{k}_1 - \lambda \left( \bar{k}_1 - \frac{\bar{\Omega}}{\alpha_1} \right) + \frac{i\hbar\alpha_2\bar{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \right) \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} - \\
& \left. \left( \frac{2eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2 \hbar} + \frac{m^2 \omega^2 \theta}{\hbar} \right) L_z \right] \psi_{KG} = \bar{\varepsilon} \cdot \psi_{KG}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Où

$$\bar{k}_1 = 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \hbar^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\hbar^2} \tag{4.39}$$

$$\bar{k}_2 = m^2 \omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4c^2} \tag{4.40}$$

$$\bar{\Omega} = (\alpha_1 \bar{k}_1 + \alpha_2 \bar{k}_2) \lambda - \alpha_1 \bar{k}_1 \tag{4.41}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{E^2 - m^2 c^4 + cm\omega eB\theta}{c^2} + 2m\hbar\omega - \frac{2i\hbar\bar{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tag{4.42}$$

On introduit les coordonnées polaires dans l'espace des impulsions  $(p, \varphi)$ , par les relations [4.7](#), pour obtenir la solution exacte de l'équation [4.38](#)

$$\begin{aligned}
& \left[ -\hbar^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left( \bar{k}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{k}_2 \right) \left( \left( \sqrt{1 - \alpha_2 p^2} \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 + (1 - \alpha_2 p^2) \left( \frac{\partial}{p \partial p} - \frac{l^2}{p^2} \right) \right) \right. \\
& \frac{2i\hbar\bar{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \frac{p\partial}{\partial p} + \left( \bar{k}_1 - \lambda \left( \bar{k}_1 - \frac{\bar{\Omega}}{\alpha_1} \right) + \frac{i\hbar\alpha_2\bar{\Omega}}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \right) \frac{p^2}{1 - \alpha_2 p^2} + \\
& \left. \left( \frac{2\hbar eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) l \right] R = \bar{\varepsilon} \cdot R
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Où nous avons utilisé [4.9](#) qui contient le nombre quantique  $l$

Maintenant, pour résoudre l'équation [4.43](#), nous employons la transformation :

$$p \rightarrow \rho = \frac{1}{k} \arcsin(\sqrt{\alpha_2 p}), \quad \bar{k} = \hbar \sqrt{\alpha_1 \left( \bar{k}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{k}_2 \right)} \tag{4.44}$$

À la suite de ce changement, l'équation devient

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \left( \bar{k} \cot(\bar{k}\rho) - \frac{2i\hbar\bar{\Omega}}{k\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \tan(\bar{k}\rho) \right) \frac{\partial}{\partial p} - \bar{k}^2 l^2 \cot^2(\bar{k}\rho) - \bar{\eta} \tan^2(\bar{k}\rho) + \bar{\epsilon} \right] R(\rho) \quad (4.45)$$

avec

$$\bar{\eta} = \frac{1-\lambda}{\alpha_2} - m\omega\hbar + \left( \frac{\lambda}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{i\hbar}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} \right) \bar{\Omega}, \bar{\epsilon} = \bar{\epsilon} - \left( \frac{2\hbar eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) l$$

Il est crucial d'observer que l'équation [4.45](#) a la même forme que [4.12](#), à la différence près que  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{k}$ ,  $\bar{\Omega}$ , et  $\bar{\epsilon}$  a été remplacé respectivement par  $\eta'$ ,  $k'$ ,  $\tilde{\Omega}$ , et  $\epsilon$ . On arrive aux formules suivantes :

- la solution d'onde  $\psi(p, \varphi)$  peut être exprimé comme

$$\psi(p, \varphi) = C (1 - \alpha_2 p^2)^{\frac{\bar{\mu}}{2}} (\alpha_2 p^2)^{\frac{l}{2}} p_n^{(\bar{\mu}-\frac{1}{2}, l)} (2\alpha_2 p^2 - 1) \quad (4.46)$$

Où

$$C = \frac{2\alpha_2^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{n! (2n + \bar{\mu} + l + 1) \Gamma(2n + \bar{\mu} + l + 1)}{2\Gamma(n + \bar{\mu} + \frac{1}{2}) \Gamma(n + l + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.47)$$

avec

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{k^2} \left( \frac{\bar{k}_2}{\alpha_1 \bar{k}_1 + \alpha_2 \bar{k}_2} - m\omega\hbar \right)} \right) \quad (4.48)$$

• En effectuant un calcul simple, on arrive à l'expression exacte suivante du spectre d'énergie :

$$E = \pm mc^2 \left[ 1 - \frac{2\omega\hbar}{m^2 c^2} + \frac{2\bar{k}^2 \bar{\mu}}{mc^2} n + \frac{\bar{k}^2}{m^2 c^2} (n^2 + n - l^2 + 2\bar{\mu}) + \frac{l}{m^2 c^2} \left( \frac{2\hbar eB}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) - \frac{\omega e B \theta}{mc^3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

Si nous fixons  $B = \theta = 0$  le spectre d'énergie [4.49](#) sera réduit à la valeur [3.54](#) pour  $D = 2$ .

Dans un espace NC, avec un champ magnétique externe, sans déformation on obtient le

spectre d'énergie

$$E = \pm mc^2 \left[ 1 + \frac{2\hbar\sqrt{\omega^2 + \tilde{\omega}^2}}{mc^2} n + \frac{l}{m^2 c^2} \left( \frac{2\hbar e B}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) - \frac{\omega e B \theta}{mc^3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.50)$$

avec  $\tilde{\omega} = \frac{\omega_c}{2c}$  où  $\omega_c = \frac{eB}{m}$

On en déduit que le comportement de l'oscillateur de Klein-Gordon dans un champ magnétique externe dans l'espace NC sans déformation présente un comportement analogue au problème de Landau dans l'espace des phases commutatif.

il est important de noter que, selon la dépendance  $n^2$  des niveaux d'énergie, qui explique le confinement dans le domaine des hautes énergies, notre résultat est le même que l'énergie d'une particule quantique relativiste sans spin se déplaçant dans un puits de potentiel carré. Dans notre cas, les bords du puits sont situés en  $\pm \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha_1(\bar{k}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\bar{k}_2)}}$ .

### 4.3.1 Propriétés thermodynamiques

Pour déterminer toutes les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur harmonique relativiste, nous calculons d'abord la fonction de partition  $Z$ . Cette dernière est définie par :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_{n,l}}{K_B T}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{mc^2}{K_B T} \sqrt{g_1 + g_2 n + g_3 n^2}\right) \quad (4.51)$$

Où

$$g_1 = 1 + \frac{l}{m^2 c^2} \left( \frac{2\hbar e B}{c} + \frac{e^2 B^2 \theta}{4c^2} + m^2 \omega^2 \theta \right) - \left( \frac{2\hbar \omega}{mc^2} + \frac{\omega e B \theta}{mc^3} \right) - g_3 (l^2 - 2\bar{\mu}) \quad (4.52)$$

$$g_2 = \frac{2\bar{k}^2 \bar{\mu}}{mc^2} + g_3 \quad (4.53)$$

$$g_3 = \frac{\bar{k}^2}{m^2 c^2} \quad (4.54)$$

On voit que la forme de la fonction de partition  $Z$  (voir les équations 3.80 et 4.51), dans les deux cas, est la même. Par conséquent, nous pouvons exprimer la fonction de partition  $Z$  comme suit :

$$Z \simeq \frac{2 \left( \frac{K_B T}{m c^2} \right)^2}{\sqrt{g_2^2 - 4g_1 g_3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sigma^n \quad (4.55)$$

avec

$$\sigma = \left( \frac{K_B T}{m c^2} \right)^2 \left( \frac{4g_3}{g_2^2 - 4g_1 g_3} \right) \quad (4.56)$$

En supprimant les contributions du second ordre dans  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , et nous considérant que  $K_B T \gg m c^2$  la fonction de partition  $Z$  se réduit à la forme suivante :

$$Z \simeq \frac{(K_B T)^2}{\hbar c^2 \sqrt{\bar{k}_2}} \left[ 1 - \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \left[ \frac{3(K_B T)^2}{c^2} + \frac{\hbar}{2m\omega} \right] \right] \quad (4.57)$$

Selon les définitions mentionnées ci-dessous nous pouvons déterminer les propriétés thermodynamiques de notre système physique (énergie libre  $F$ , énergie moyenne  $U$ , chaleur spécifique  $C$  et entropie  $S$ )

$$F = -K_B T \ln Z = -K_B T \ln \frac{(K_B T)^2}{\hbar c^2 \sqrt{\bar{k}_2}} \left[ 1 - \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \varsigma \right] \quad (4.58)$$

$$U = K_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = 4K_B T \left[ 1 - \frac{2m\omega - \hbar \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right)}{4m\omega - 2 \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \left( 3m\omega (K_B T)^2 + m\omega\varsigma \right)} \right] \quad (4.59)$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = 4K_B \left[ 1 - \frac{\left( 2m\omega - \hbar \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \right) \left( 4m\omega + 2 \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \left( 9m\omega (K_B T)^2 - m\omega\varsigma \right) \right)}{\left( 4m\omega - 2 \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{\bar{k}_2} + \alpha_2 \right) \left( 3m\omega (K_B T)^2 + m\omega\varsigma \right) \right)^2} \right] \quad (4.60)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = K_B \left[ \frac{2 \left( 1 - \hbar \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{k_2} + \alpha_2 \right) \left( 3 (K_B T)^2 + \varsigma \right) \right)}{\left( 1 - \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{k_2} + \alpha_2 \right) \varsigma \right)} + \ln Z \right] \quad (4.61)$$

$$\varsigma = \left( \frac{3(K_B T)^2}{c^2} + \frac{\hbar}{2m\omega} \right)$$

Ces expressions peuvent être facilement testées. En utilisant la limite  $\bar{k}_1 \rightarrow 1$  (c'est-à-dire  $\theta \rightarrow 0$ ) et  $\bar{k}_2 \rightarrow m\omega$  (c'est-à-dire  $B \rightarrow 0$ ), nous obtenons les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur KG bidimensionnel avec l'algèbre de Snyder-de Sitter. En outre, tous ces résultats des propriétés thermodynamiques de l'oscillateur déformé KG dans un espace NC sous un champ magnétique externe uniforme  $B = 8T$  sont représentés sur les Fig. (4.1 – 4.4), en fonction de la variable de température  $T$  pour différentes valeurs des paramètres de déformation  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et paramètre de NC  $\theta$ . Tout d'abord, Selon l'expression de la fonction de partition, il existe un point critique  $T_C = \frac{1}{\sqrt{6 \left( \alpha_1 \frac{\bar{k}_1}{2} + \alpha_2 \right)}}$  qui ne dépend que du paramètre de déformation de l'algèbre de Snyder-de Sitter et de paramètre NC.

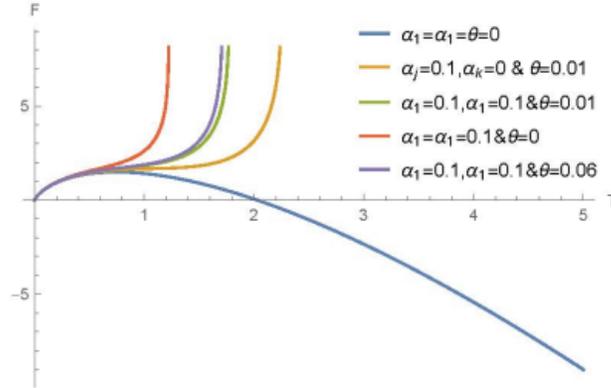


Figure 4.1 : l'énergie libre  $F$  en fonction de  $T$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\theta$

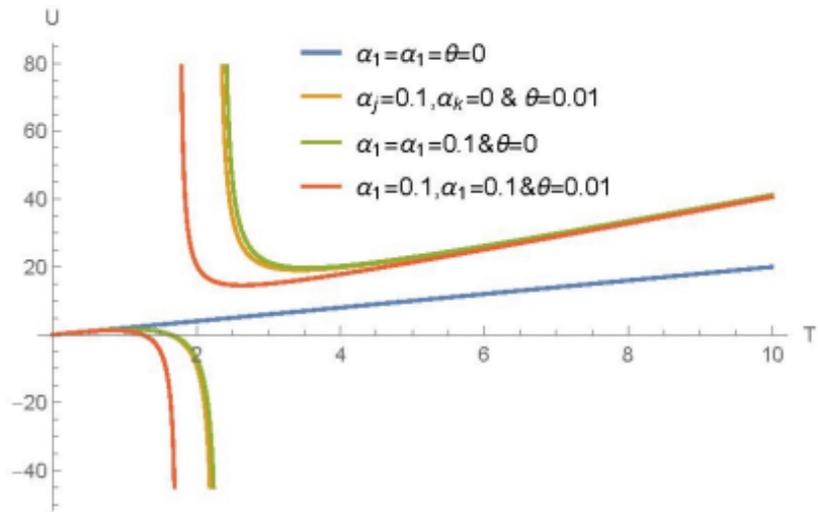


Figure 4.2 : l'énergie moyenne  $U$  en fonction de  $T$  pour

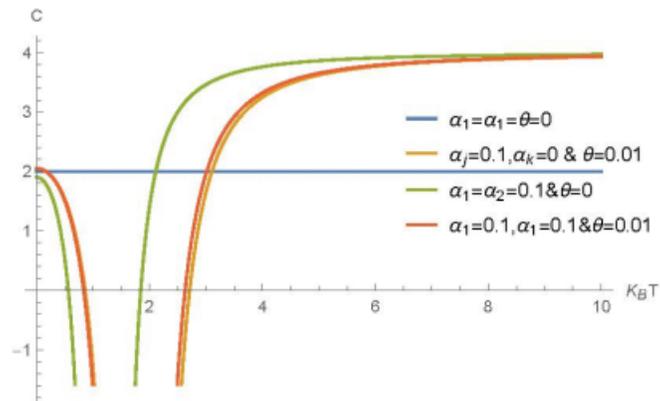


Figure 4.3 : La chaleurs pécifique  $C$  en fonction de  $T$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\theta$

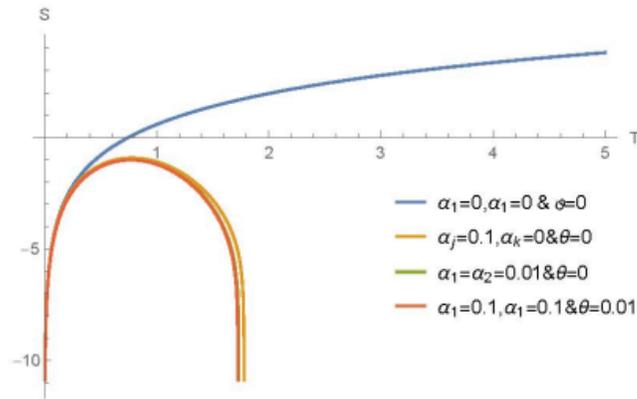


Figure 4.4 : L'entropie  $S$  en fonction de  $T$  pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\theta$

Contrairement au cas ordinaire ( $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  et  $\theta = 0$ ), la fonction d'énergie libre  $F$  diminue lentement jusqu'à une température minimale ( $T_{min}$ ) pour chaque valeur de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\theta$  puis remonte rapidement vers  $T_C$  comme illustré à la figure 4.1. Néanmoins, étant donné une certaine valeur de  $T$ , la fonction d'énergie libre croît lorsque les paramètres de déformation  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\theta$  augmentent. Sur la figure 4.2, nous pouvons voir que la fonction de l'énergie moyenne  $U$  change pour différentes valeurs de ( $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\theta$ ), et qu'elle décroît rapidement près de  $T_C$  avant de croître légèrement comme dans le cas ordinaire. Comme le montre la figure 4.3, la fonction de chaleur spécifique  $C$  a une valeur décroissante à mesure que la valeur de  $T$  augmente, mais elle maintient une valeur constante (en particulier,  $C = 2K_B$ ) pour ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta$ ). Contrairement au cas où il n'y a pas de déformations (i.e  $\alpha_1 = \alpha_2 = \theta$ ), on voit sur la figure 4.4 que la valeur de l'entropie  $S$  atteint sa valeur maximale à  $T_{max}$  pour différentes valeurs de  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\theta$ .

## Chapitre 5

# Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié principalement les phénomènes microscopiques à haute énergie dans le contexte de la mécanique quantique déformée avec deux types de déformations.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné en premier lieu une solution exacte KGO dont la fréquence dépend de l'énergie dans l'espace NC à trois dimensions. le spectre d'énergie est exactement obtenu en fonction des paramètres de déformation  $\theta$ . Les valeurs propres d'énergie sont étudiées pour le cas ( $q = 1$ ) ainsi que certaines limites ( $\gamma = 0$  i.e le potentiel indépendant de l'énergie et  $\theta = 0$  i.e l'espace commutatif). Les effets des paramètres sur les valeurs propres de l'énergie ont été examinés plus en détail par une analyse graphique. Nous avons observé que les écarts par rapport à la valeur normale  $\gamma = 0$  produisent un effet Zeeman. Nous avons ensuite calculé les grandeurs thermiques telles que l'énergie libre d'Helmholtz  $F$ , l'énergie moyenne  $U$ , la chaleur spécifique  $C$  et l'entropie  $S$  nous avons trouvé que l'effet de parametre  $\theta$  sur les propriétés thermiques de nos problèmes à un effet significatif sur ses propriétés, et l'influence des paramètres est très importante en termes de thermodynamique.

en deuxième lieu nous avons résolu d'une manière analytique exacte DO pour des électrons massifs en dimension (2+1) soumise en un champ magnétique dans un espace NC.

Les fonctions d'onde et d'énergie correspondante sont obtenues. Toutes Les grandeurs thermodynamiques ont été calculées par une méthode basée sur la formule d'Euler-MacLaurin et l'effet des paramètres NC sur les propriétés thermiques a été discuté. Nous avons observé que l'effet des paramètres NC  $\theta$  sur les propriétés thermiques est faible. Apres nous avons montré que le formalisme de fermions sans masse dans le graphène et ces applications de graphène nous a permis de trouver des solutions exactes de spectre d'énergie basé sur DO. Toutes les propriétés thermodynamiques du graphène ont été déterminées à l'aide d'une approche basée sur la méthode de la fonction zêta, nous avons trouvé que les effets NC  $\theta$  sont négligeables, sur les propriétés thermodynamiques.

Dans le troisième chapitre nous avons étudié SO, KGO et DO dans une dimension arbitraire avec un calcul explicite dans la représentation de l'espace des impulsions dans le cadre de la mécanique quantique déformée avec des relations de commutation SdS , ces déformations se traduisent par une incertitude minimale non nulle dans la mesure à la fois de la position et de la quantité de mouvement de la particule de spin 0 et spin1.

Dans un espace unidimensionnel, les niveaux d'énergie peuvent être écrits exactement et la fonction d'onde peut être écrite à l'aide des polynômes de Gegenbauer. En plus de la correction habituelle, une deuxième correction est effectuée pour trouver le spectre d'énergie associé. Cette deuxième correction dépend des paramètres de déformation de l'algèbre SdS. Cette correction croît rapidement au fur et à mesure que  $n$  augmente, ce qui peut être lié à une correction supplémentaire à l'oscillateur harmonique en plus de celle habituelle. A l'intérieur de grandes valeurs de  $n$ , les corrections font tendre le spectre vers un spectre discret avec un espacement proportionnel aux deux paramètres des déformations. Ceci explique que le spectre du cas normal (sans déformations) soit presque continu dans cette limite.

Pour le cas de dimension arbitraire, nous obtenons la fonction d'onde spatiale de moment normalisée en termes de polynômes de Jacobi.

Nous avons trouvé qu'il existe un nouveau terme dans les niveaux d'énergie associés qui

dépend du nombre quantique ( $l$  orbital pour OS et OKG et  $m$  de moment cinétique pour OD) qui n'était pas présent dans le cas non déformé. Par conséquent, les contributions de l'algèbre SdSde Snyder font disparaître la dégénérescence du spectre de l'oscillateur harmonique ordinaire. Pour  $n$  grand, l'écart d'énergie s'avère analogue au scénario unidimensionnel.

En ce qui concerne les propriétés thermodynamiques de KGO, la formule d'Euler-MacLaurin a été utilisée pour calculer toutes les grandeurs thermodynamiques significatives. Nous avons démontré qu'ils étaient affectés par des facteurs de déformation dans le régime à haute température. En comparant leurs valeurs à celles de la situation standard, nous avons déterminé que toutes les caractéristiques thermodynamiques, à l'exception de l'énergie libre  $F$ , diminuent.

Dans le quatrième chapitre on a généralisé notre travail où nous traitons OS et OKG en présence d'un champ magnétique via l'algèbre SdS dans l'espace NC. Nous obtenons les fonctions d'ondes en termes de polynôme de Jacobi et le spectre d'énergie exacte en fonction des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\theta$  les cas limites sont étudiés et les résultats obtenus sont en accord parfait avec ceux de la littérature.

En conclusion tous les résultats sont exactement les mêmes que ceux trouvés dans la littérature lorsque les paramètres de déformation sont nuls.

Ce travail a permis d'ouvrir quelques perspectives en particulier l'étude de DO et l'oscillateur Duffin–Kemmer–Petiau (DKP) sous un champ magnétique externe pour l'algèbre de Snyder-de Sitter dans l'espace non-commutatif.

# Bibliographie

- [1] A. Connes ; Non commutative geometry and reality, Journal of Math. Physics 36 n<sup>0</sup>11 (1995).
- [2] A.Mieu, M.M Sheikh-Jabbari, JHEP 0101, (2001) 025.
- [3] P.M. Ho and H.C. Kao, Phys. Rev. Lett. 88, (2002) 151602.
- [4] X. Calmet Eur.Phys.J.C 50, (2007) 113.
- [5] V.Santos,R.V.Maluf,C.A.S.Almeida,Ann.Phys.349,402(2014)
- [6] A.Mieu, M.M Sheikh-Jabbari, JHEP 0101, (2001) 025.
- [7] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” Journal of High Energy Physics,vol.1999,no.09, article 032, 1999.
- [8] R. Gopakumar, S. Minwalla, and A. Strominger, “Noncommu-tative solitons,” JournalofHighEnergyPhysics,vol.2000,020, no. 05, 2000.
- [9] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [10] P.M. Ho and H.C. Kao, Phys. Rev. Lett. 88, (2002) 151602.
- [11] Das, Ashok, et al. Noncommutative supersymmetric quantum mechanics. Phys. Lett. B 670.4-5 (2009) : 407-415
- [12] Gracia-Bondia. J. M. Notes on quantum gravity and noncommutative geometry : New Paths Towards Quantum Gravity.

- [13] Martinetti, P. Beyond the Standard Model with noncommutative geometry, strolling towards quantum gravity. In *Journal of Physics : Conference Series*. IOP Publishing 2015, 634(1), 012001
- [14] Seiberg, N ; Witten, E. String theory and noncommutative geometry. *J. High Energy Phys.* 1999, 9.
- [15] Christian, K. Quantum groups. No. 155 in *Graduate texts in mathematics*, 155. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [16] Connes, Alain ; Kreimer, D. Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem I : The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. *Comm Math Phys* 2000, 210(1), 249–273.
- [17] Tanasa Adrian, Vignes-Tourneret Fabien : Hopf algebra of non-commutative field theory. *J. Noncommut. Geom.* 2 (2008),125-139
- [18] Carroll, S. M., Harvey, J. A., Kostelecký, V. A., Lane, C. D., & Okamoto, T. Noncommutative field theory and Lorentz violation. *Phys. Rev. Lett.* 2001, 87(14), 141601.
- [19] Haouam, I. On the Fisk–Tait equation for spin-3/2 fermions interacting with an external magnetic field in noncommutative space-time. *J. Phys. Stud.* 2020, 24, 1801
- [20] Kag, L ; Jianhua, W ; Chiyi, C. Representation of noncommutative phase space. *Mod. Phys. lett A.* 2005, 20, 2165.
- [21] Haouam, I. On the noncommutative geometry in quantum mechanics. *J. Phys. Stud.* 2020, 24(2), 2002.
- [22] Springer, Berlin, Heidelberg, 2010. 3-58.
- [23] W. Pauli : *Z. Physik* 43 (1927) 601.
- [24] H. Sazdjan, *Ann. Phys. (N. Y.)* 191, 52 (1989).
- [25] J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, *Czech. J. Phys.* 54, 289 (2004).
- [26] A. Benchikha and L. Chetouani, *Cent.Eur.J.Phys.* 12, 392 (2014).

- [27] A Benchikha, M Merad, T Birkandan - Modern Physics Letters A, 2017
- [28] B. Mirza and M. Mohadesi, Commun. Theor. Phys. 42, 664 (2004).
- [29] S. Jing, F. Zuo, and T. Heng, J. High Energy Phys.(JHEP) 0410 (2004) 049.
- [30] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, and J.C. Rojas, Int.J. Mod. Phys. A 17 (2002) 2555; Mod. Phys. Lett. A 16(2001) 2075
- [31] C. Grosche, J. Phys. A : Math. Gen. 29, L183 (1996)
- [32] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, Special Functions (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
- [33] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, and A. Luis, Physical Review A, vol.77,no.6,ArticleID063815,2008.
- [34] R. de Lima Rodrigues. Physics Letters A, vol.372,no.15,pp.2587–2591,2008.
- [35] D.Itô, K. Mori, and E. Carriere, Il Nuovo Cimento A, vol.51,no. 4, pp. 1119–1121, 1967
- [36] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A 22 (1989) L817.
- [37] E. T. Jaynes and F.W. Cummings, Proceedings of the IEEE, vol.51,no.1,pp.89–109,1963.
- [38] L. Allen and J. H. Eberly, Dover Publications, Mineola, New York, USA, 1987.
- [39] M. Moreno and A. Zentella, Journal of Physics A :Mathematical and General, vol.22,no.17,L821pages, 1989.
- [40] R. P. Martinez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, “Conformal invariance in a Dirac oscillator,” Journal of Mathematical Physics, vol.33,no.5,1831pages,1992.
- [41] J. Benitez, R. P. Martnez y Romero, H. N. N´ uez-Y´ epez, and A. L. Salas-Brito, Physical Review Letters, vol.64,1643,no.14,1990.
- [42] S. Cai, T. Jing, G. Guo, and R. Zhang, International Journal of heoretical Physics, vol.49,no.8,pp.1699–1705,2010

- [43] A. Boumali and H. Hassanabadi, *Zeitschrift für Naturforschung A-A Journal of Physical Sciences*, vol.70,no.8,619pages,2015
- [44] B.P.Mandal and S.K.Rai, *Physics Letters A*, vol.376,no.36, pp. 2467–2470, 2012.
- [45] C.Bastos, O.Bertolami, N.C.Dias, and J.N.Prata, *International Journal of Modern Physics A*, vol. 28, no. 16, Article ID 1350064, 13 pages, 2013.
- [46] Z.-Y.Luo, Q.Wang, X.Li, and J.Jing, *International Journal of Theoretical Physics*, vol.51,no. 7, pp.2143–2151, 2012.
- [47] K. S. Novoselov et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* 102, 10451 (2005).
- [48] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A.K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* 81, 109 (2009).
- [49] N. Peres, *Rev. Mod. Phys.* 82, 2673 (2010).
- [50] Charles L. Fefferman and Michael I. Weinstein, *J. Amer. Math. Soc.* 25, 1169 (2012).
- [51] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Nat. Phys.* 2, 620 (2006)
- [52] Abramowitz, M., Stegun, I.A. (eds.) : *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York (2007)
- [53] B. Muthukumar, and P. Mitra, *Phys. Rev. D* 66, 027701 (2002).
- [54] M. Najafizadeh, M. Saadat, *J. Phys.* [Chinese Journal of Physics 51, 94 \(2013\)](#).
- [55] A.K. Geim and K.S. Novoselov, *Nature Materials* 6 (3) (2007) 183.
- [56] V.P. Gusynin, and S. G. Sharapov, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 146801
- [57] K. Novoselov, E. McCann, S. Morozov, V. Falko, M. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, and A. Geim, *Nature Physics* 2 (3) (2006) 177.
- [58] P. Streda, *J. Phys. C* 15 (1982) L717.
- [59] Z. Jiang, E.A. Henriksen, L.C. Tung, Y.-J. Wang, M.E. Schwartz, M.Y. Han, P. Kim and H.L. Stormer, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 197403.

- [60] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, [J. Phys. A : Math. Gen. 22, L817 \(1989\)](#)
- [61] V. V. Dixit, T. S. Santhanam, and W. D. Thacker, [J. Math. Phys. 33, 1114 \(1992\)](#).
- [62] N. Ferkous and A. Bounamez, [Phys. Lett. A 325, 21 \(2004\)](#).
- [63] S. Bruce and P. Minning, [Nuovo Cimento A 106, 711 \(1993\)](#).
- [64] V. V. Dvoeglazov, [Nuovo Cimento A 107, 1785 \(1994\)](#).
- [65] Y. Nadjadi and R. C. Barrett, [J. Phys. A : Math. Gen. 27, 4301 \(1994\)](#).
- [66] Y. Nadjadi and R. C. Barrett, [J. Phys. A : Math. Gen. 31, 6717 \(1998\)](#).
- [67] A. Kempf, *J. Math. Phys.* 35 (1994) 4483 ; A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, *Phys. Rev. D* 52 (1995) 1108.
- [68] S. Mignemi *Class. Quantum Grav.* 29 (2012) 215019.
- [69] M.M. Stetsko, *J. Math. Phys.* 56 (2015) 012101.
- [70] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).
- [71] L.N Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D* 65 (2002) 125027.
- [72] Y. Chargui, L. Chetouani, and A. Trabelsi, *Commun. Theor. Phys.* 53, 231 (2010).
- [73] Y. Xiao, Z. Long, and S. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* 50, 3105 (2011).
- [74] L.S. Brown and G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.* 58, 233 (1986) ; R.K. Mittleman, I.I. Ioannou, H.G. Dehmelt, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2116 (1999)
- [75] M. G. Garcia, A. S. de Castro, L. B. Castro, P. Alberto *Annals of Physics* 378 (2017) 88.
- [76] M. Falek, M. Merad, and M. Moumni, *J. Math. Phys.* 60, 013505 (2019).
- [77] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, and R. R. Landim, *Europhys. Lett.* 108, 10005 (2014).
- [78] Hemame, Z., Falek, M., & Moumni, M. (2020). *Journal of Mathematical Physics*, 61(10), 102301.

[79] A. Boumali and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus.* 128, 124 (2013).

[80] S. Mignemi, *Phys. Rev.* 84 (2011) 025021.

## Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié certains phénomènes microscopiques à haute énergie dans le contexte de la mécanique quantique déformée à petite échelle avec deux types de déformations différentes. Dans la première étape nous avons résolu d'une manière analytique exacte l'oscillateur harmonique de Klein-Gordon dont la fréquence dépend de l'énergie à trois dimensions, l'oscillateur harmonique bidimensionnel de Dirac et les applications de graphène (Dirac sans masse) avec la présence d'un champ magnétique uniforme et externe dans le cadre de la géométrie non commutative. Dans tous les cas, les spectres énergétiques et les fonctions d'onde associées sont obtenus ainsi que leurs propriétés thermodynamiques qui ont également été déterminées et interprétées. Dans la deuxième étape Nous avons étudié l'oscillateur harmonique de Schrödinger, Klein-Gordon et Dirac dans une dimension arbitraire avec des relations de commutation de Snyder-de Sitter, ces déformations se traduisent par une incertitude minimale non nulle dans la mesure à la fois de la position et de la quantité de mouvement de la particule de spin 0 et spin1, les niveaux d'énergie peuvent être écrits exactement et la fonction d'onde peut être écrite à l'aide des polynômes de Gegenbauer pour le cas unidimensionnelle et Jacobi pour une dimension arbitraire. la formule d'Euler-MacLaurin a été utilisée pour calculer toutes les grandeurs thermodynamiques. À la dernière étape, on a généralisé notre travail où nous traitent l'oscillateur de Schrödinger et l'oscillateur de Klein-Gordon à deux dimensions en présence d'un champ magnétique uniforme et externe via l'algèbre de Snyder-de Sitter dans l'espace non commutatif. Nous obtenons les fonctions d'ondes en termes de polynôme de Jacobi et le spectre d'énergie exacte en fonction des paramètres de déformation, les cas limites sont étudiés et les résultats obtenus sont en parfait accord avec ceux de la littérature. Nous examinons les propriétés thermiques qui ont été influencées par les deux déformations.

## Abstract

In this thesis, we have studied some high-energy microscopic phenomena in small-scale deformed quantum mechanics with two different types of deformations. In the first step, we solved the Klein-Gordon harmonic oscillator, whose frequency depends on three-dimensional energy, the two-dimensional Dirac harmonic oscillator, and graphene applications (massless Dirac) in the presence of a uniform and external magnetic field in the framework of non-commutative geometry in an exact analytical manner. In all cases, the energy spectra and associated wave functions are obtained, as well as their thermodynamic properties, which have also been determined and interpreted. In the second step, we studied the Schrödinger, Klein-Gordon, and Dirac harmonic oscillator in an arbitrary dimension with Snyder-de Sitter commutation relations. These deformations result in a non-zero minimum uncertainty in the measurement of both the position and momentum of the spin 0 and spin1 particle, the energy levels can be written precisely, and the wave function can be written using Gegenbauer polynomials for the one-dimensional case and Jacobi polynomials for an arbitrary dimension. The Euler-MacLaurin formula was used to calculate all thermodynamic quantities. In the final step, we generalized our work by using the Snyder-de Sitter algebra in non-commutative space to treat the Schrödinger oscillator and the two-dimensional Klein-Gordon oscillator in the presence of a uniform and external magnetic field. We obtain the wave functions in terms of Jacobi polynomials and the exact energy spectrum as a function of the deformation parameters. The limiting cases are studied, and the results obtained are in perfect agreement with those of the literature. We examine the thermal properties that were influenced by the two deformations.

## ملخص

في هذه الأطروحة ، درسنا بعض الظواهر المجهرية عالية الطاقة في سياق ميكانيكا الكم المشوهة على نطاق صغير مع نوعين مختلفين من التشوهات. في الخطوة الأولى ، حللنا بطريقة تحليلية دقيقة مذبذب كلين جوردين التوافقي ثلاثي الأبعاد الذي يعتمد تردده على الطاقة ، مذبذب ديراك التوافقي ثنائي الأبعاد وتطبيقات الجرافين (ديراك عديم الكتلة) مع وجود مجال مغناطيسي منتظم وخارجي في إطار الهندسة غير التبادلية. في جميع الحالات ، تم الحصول على أطياف الطاقة والوظائف الموجية المرتبطة بها بالإضافة إلى خصائصها الديناميكية الحرارية التي تم تحديدها وتفسيرها أيضًا. في الخطوة الثانية درسنا المذبذب التوافقي لشروندجر وكلاين-جوردون وديراك في بعد عشوائي مع علاقات تبديل سنايدر دي سبتر ، تؤدي هذه التشوهات إلى حد أدنى من عدم اليقين غير الصفري في قياس كل من الموضع والزخم لجسيم السبين 0 واللف 1 ، يمكن كتابة مستويات الطاقة بدقة ويمكن كتابة الدالة الموجية باستخدام كثيرات حدود Gegenbauer للحالة أحادية البعد وجاكوبي للبعد الكيفي. تم استخدام صيغة أولر-ماكلاورين لحساب جميع الكميات الديناميكية الحرارية. في الخطوة الأخيرة ، قمنا بتعميم عملنا حيث نتعامل مع مذبذب شروندجر ومذبذب كلاين-جوردون ثنائي الأبعاد في وجود مجال مغناطيسي منتظم وخارجي عبر جبر سنيدر دي سبتر في الفضاء غير التبادلي. نحصل على وظائف الموجة من حيث جاكوبي متعدد الحدود وطيف الطاقة الدقيق كدالة لمعاملات التشوه ، تتم دراسة الحالات المحددة والنتائج التي تم الحصول عليها متوافقة تمامًا مع تلك الموجودة في الأدبيات. نقوم بفحص الخصائص الحرارية التي تأثرت بالتشوهين.