Szegedi Tudományegyetem
Informatikai Intézet

Egy és kétszemélyes pozíciós játékok

MTA doktora értekezés tézisei

Pluhár András

Szeged
2022

Bevezető

A diszkrét matematikai (gráfelmélet, kombinatorika, adatbányászat stb) kutatásaim közös része a színezések, legyenek azok véletlenek, algebraiak, párosításból vagy éppen kétszemélyes játékok által keletkezőek. Összeköti még a témákat az explicit vagy néha rejtettebb algoritmikus jelleg.

A tézisfüzet felosztása megfelel a disszertáció fejezeteinek. Az 1. alfejezetben párosításokkal foglalkozunk, melyek pozíciós játékokban hasznosak és speciálisan hipergráfok jó kettő-színezéseit is adják. A felhasznált dolgozatok [50, 18, 20, 31, 32].

A 2. alfejezet az elfogult játékok és elfogult érmével generált színezések néhány kapcsolatát elemzi. A felhasznált dolgozatok [3, 41].

A 3. alfejezetben kiterjesztjük a játékokat. Ez lehet egy nulladik lépés, ahol az egyik játékos magát a játék tábláját készíti el, illetve az eredeti játék utáni fázis, ahol mozgatják a figuráikat. A felhasznált dolgozatok [4, 49].

A színezésekről szóló 4. alfejezet a legszínesebb. Ebben a véletlen mohó algoritmussal és egy lineáris algebrai módszer adunk színezéseket. Másrészről bizonyos színezések létének algebrai következményei vannak, így kombinatorikai eszközökkel beágyazási tételek kaphatók. Továbbá gráfok speciális klaszterezéseit vizsgáljuk, melyek színezésekkel fogalmazhatóak meg. Végül gráfok feszítő részgráfjainak diszkrepanciáit elemezzük; ebben a játékban az egyik játékos próbál egyenletes színezést adni, míg a másik olyan részgráfot, melyben nagy az eltérés. A felhasznált dolgozatok [51, 53, 29, 27, 42, 5, 6].

Általános eredmények és jelölések

A pozíciós játékok fajtáit részletesen, példákkal lásd [50], itt nagyon röviden a továbbiakhoz szükséges alapokról írunk. Hat klasszikus játékot érdemes felidézni, melyek motiválták a definíciók különböző eseteit (és számos mély matematikai eredményt).

A *tic-tac-toe* 3×3 táblán folyik, az győz, aki elsőként elfoglal egy oszlopot, sort vagy nagyátlót. Közeli rokona a *tic-toc-tac-toe*, amely $4 \times 4 \times 4$-es kockán zajlik, hasonló céllal.[1] Az *amőba* (*5-in-a-row*), illetve k-*amőba* (k-*in-a-row*) valamely adott véges vagy a végtelen négyzetrácson (másképp a $\mathbb{Z}^2$ duálisán) zajlik és öt (vagy k) egymás után következő mező elfoglalása a nyerés feltétele. Fiatalabb a Piet Hein és John Nash által bevezetett *hex*, ahol egy hatszögekből álló rombusz két-két ellentétes oldalát kívánja egyik illetve a másik játékos összekötni. A *Shannon-féle kapcsolójáték* egy G gráf éleinek választásából áll, az egyik játékos (építő) összefüggő feszítő részgráfot akar elérni, a másik ezt megakadályozni. Végül a *Harary játékokban* egy P poliomínó[2] adott, ennek egy izometrikus képét akarja az egyik játékos elérni a végtelen rácson.

A fenti játékok (és sok másik) egységes kezeléshez az alábbi definíciók hasznosak.

1. Definíció. *(hipergráf) Az* (V, E) *hipergráf egy* V *alaphalmaz és az* $E \subset 2^V$ *részhalmazokból áll.*

2. Definíció. *(pozíciós játék) Egy, a* (V, E) *hipergráfon játszott pozíciós játékban a* V *elemeit színezi/választja egy vagy több játékos, a játék kimenetele pedig attól függ, melyikük szerez meg hamarabb egy* E*-beli halmaz összes elemét.*

[1] Általában a d-dimenziós, n részre osztott kockán *Hales-Jewett játékokról* beszélünk. A kockák helyett tóruszok is használhatóak.

[2] A poliomínó véges sok, élben összefüggő mező halmaza, vagy a duális $\mathbb{Z}^2$-ben nézve olyan pontok, melyek összefüggőek $((i, j), (i + 1, j)$ ill. $((i, j), (i, j + 1))$ élekkel.

3. Definíció. *(egyszemélyes játék vagy színezés) Legyen (V, E) egy hipergráf és $k \in \mathbb{N}$. A játékos akkor nyer, ha ad egy jó színezést V, azaz egy olyan $f : V \to \{1, \ldots, k\}$ függvényt, melyre minden $A \in E$ esetén $|f(A)| \geq 2$.*

4. Definíció. *(kétszemélyes, klasszikus) Legyen (V, E) egy hipergráf és a játékosok felváltva veszik V elemeit.*

Az építő-építő (Maker-Maker) játékban az nyer, aki előbb foglal el egy teljes élt E-ből.

Az építő-romboló (Maker-Breaker) játékban építő nyer, ha elfoglal egy teljes élt E-ből, különben a romboló nyer.

5. Definíció. *(kétszemélyes, tortaosztásos) Legyen (V, E) egy hipergráf. A menetekben az egyik játékos, kérdező (Picker) a még választható elemek két halmazát adja a választónak (Chooser), aki az egyet megtartja, a másikat a kérdező kapja.*

A kérdező-választó (Picker-Chooser) játékban a kérdező nyer, ha elfoglal egy teljes élt E-ből, különben a választó nyer.

A választó-kérdező (Chooser-Picker) játékban a választó nyer, ha elfoglal egy teljes élt E-ből, különben a kérdező nyer.

Néhány klasszikus eredmény.

Tétel (Nash, stratégialopás) Egy építő-építő játékban a kezdő nyer vagy döntetetlen.

Tétel (Hales-Jewett párosítás) Egy építő-romboló játékban romboló nyer, ha $|\cup_{A\in\mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$ minden $\mathcal{G} \subset E$ esetén.[3]

Tétel (Lehman, matroidok) A Shannon-féle kapcsolójátékban az építő (másodikként) pontosan akkor nyer, ha G-ben van két diszjunkt feszítőfa.

Tétel (Patashnik, számítógép) A kezdő nyeri a tic-toc-tac-toe játékot.

Tétel (k-in-a-row, párosítások és részjátékok) A k-amőba döntetlen, ha $k \geq 9$ (Shannon-Pollak) ill. $k \geq 8$ (A. Brouwer).

Tétel (Harary játékok) A "kígyó" (snaky) kivételével minden poliomínóra ismert a játék eredménye (A. Blass).[4]

1. Párok és párosítások

1.1. Általánosított párosítási stratégiák

Meglepő módon, bár párosításokat használták, de nem definiálták pontosan a pozíciós játékokra az írásunk, [18], előtt. Néhány példa és előzmény, lásd a disszertáció, után a definíciónk:

6. Definíció (Általánosított párosítás). *Tekintsük egy építő-romboló (V, E) hipergráf játékot és legyen $X \cap Y = \emptyset$ a V részhalmazai. A $\rho : X \to Y$ bijekció* **párosítási stratégia**[5] *(rombolónak), ha minden $A \in E$ esetén van olyan $x \in X$ úgy, hogy $\{x, \rho(x)\} \subset A$.*

[3] Ekkor létezik $X, Y \subset V$ diszjunkt reprezentáns rendszerek, melyekre $X \cap Y = \emptyset$.

[4] A kígyó egy példánya a duális leírásban, a $\mathbb{Z}^2$-ben $\{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (3,1), (4,1)\}$.

[5] A Hales-Jewett típusú párosítások definiciója majdnem diszjukt hipergráfokra egybeesik ezzel a definícióval, illetve Harborth és Seeman implicit módon az általánosítással dolgozott a "kígyó" (snaky) játékot vizsgálva.

Könnyű észrevétel, hogy a fenti stratégiát használva, azaz x-re $\rho(x)$-szel, $\rho(x)$-re x-szel válaszolva, romboló eléri a célját. Sajnos maga a párosítás léte nehéz. Legyen $\mathcal{B}$ azon hipergráfok nyelve, melyekre van nyerő párosítási stratégia.

1. Tétel. *NP-teljes probléma annak eldöntése, hogy egy tetszőleges hipergráf $\mathcal{B}$-beli.*

Megjegyezzük, hogy speciális esetekre, pl. majdnem diszjunkt hipergráfok ez lényegében páros gráf maximális párosítási problémára vezethető vissza, illetve Hegyháti és Tuza egy eredménye szerint könnyű, ha a hipergráf minden élei legfeljebb 3 méretűek.

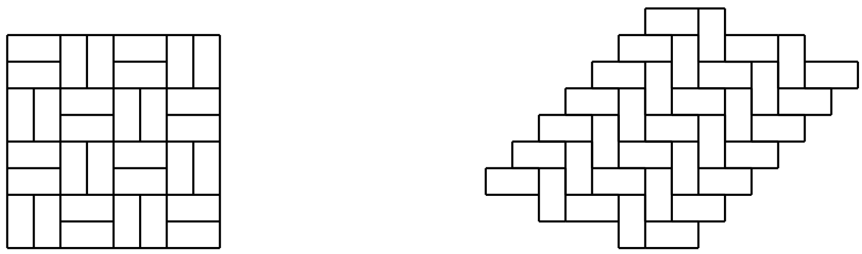
Egy (V, E) hipergráfra legyen $d_2 := \max_{x \neq y} d_2(x, y)$, ahol $d_2(x, y) = |\{A : \{x, y\} \subset A \in E\}|$, azaz d_2 a *maximális 2-fok.*

Nagyon hasznosnak bizonyult az alábbi szükséges feltétel:

1. Propozíció. *Rombolónak csak akkor lehet párosítási stratégiája, ha $d_2|X|/2 \geq |\mathcal{G}|$ fennáll minden $X \subset V$, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.*

A 1. propozíciót használva kapjuk, hogy nincs párosítási stratégia a k-amőbában, ha $k \leq 8$, illetve egy jóval mélyebb eredményt bizonyítunk a P_5 alapú Harary játékra: [6]

1. Lemma. *A P_5 Harary játéknak két párosítása van, a T_1 és T_2.*



1. ábra. A T_1 és a T_2 párosítások. A mintázatok periodikusan kiterjednek az egész síkra.

Beláttunk egy állítást, mely szerint a "kígyó" játék bármely párosítási stratégiája egyben a P_5 játéké is, így a 1. lemma adja egy teljesen elméleti (számítógép mentes) bizonyítását a következő tételnek:

2. Tétel. *[37] Nincs párosítási stratégia a "kígyó" játékban.*

A 9-amőbára Hales és Jewett [15] adott párosítási stratégiát, és felvetettük, van-e ettől különböző, illetve lehetséges-e megérteni az összeset (létezik-e a 1.lemma megfelelője)? Mindkét kérdésre igen a válasz. Ennek a felvázolásához szükséges néhány fogalom. Egy ρ párosítás a rácson *dominó* párosítás ha x és $\rho(x)$ élben vagy pontban szomszédosak. Egy diszkrét tórusz egyenesei a vízszintes, függőleges és átlós (± 1 meredekségű) egyenesekre felfűzött cellái a tórusznak.

Az alábbiak láthatók be (lásd a tétel pontos formáját a disszertációban):

3. Tétel (Tóruszok). *A 9-amőba párosítási stratégiái:*

1. *A 8×8 tórusz bármely dominó párosítása kiterjed a síkra a 9-amőba párosításává.*

[6] A P_5 öt egymás után következő élben szomszédos mező a rácson.

2. *A 8×8 tórusznak 194 543 dominó párosítása van.*[7]

3. *A 9-amőba többi párosítása 16×16 tóruszok dominó párosításaiból származtatható. Ezek a megoldások megkaphatók a fenti 8×8-as tóruszmegoldások megfelelő összeillesztésével.*

Megjegyzések. A 1.lemma T_1 és T_2 párosításai szintén származtathatók a 4×4 tórusz dominó párosításaiból (kihagyva az átlós egyeneseket). Tárgyaltunk még néhány magasabb dimenziós változatot illetve hatszögrácsot, amit itt nem részletezünk.

1.2. A Beck sejtés néhány esete

A pozíciós játékok Picker-Chooser (kérdező-választó)[8] és a Chooser-Picker változatait Beck József [12] vezette be. A legegyszerűbb formában a kérdező (Picker) kijelöl két elemet, majd a választó (Chooser) egyiket megtarthatja, a másik a kérdezőé lesz. A kérdező-választó változatban a kérdező az építő, míg a másikban kérdező romboló lesz.

Ezek hasznos heurisztikát jelentenek az építő-romboló játékok megoldásához, mert a megfigyelés szerint többnyire a kérdező jobb helyzetben van (mindkét változatban), mint az építő-romboló játékban.

1. Sejtés (Beck sejtés). *A kérdező nyer a kérdező-választó (választó-kérdező) játékban a $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon, ha építő (romboló) második játékosként nyer az építő-romboló játékban ugyanezen a hipergráfon.*

Később kiderült, hogy a sejtés általában sajnos nem igaz, lásd Knox [39] írását, ugyanakkor játékok széles körére igazolható és heurisztikaként továbbra is útmutatást ad.

A disszertációban az alábbi eredményeket közöljük a témakörről.

Pontosítottuk és tesztelhető formára hoztuk a Beck sejtést. Ezen belül, a transzverzális hipergráf használatával megmutattunk, hogy a sejtés két formája ekvivalens. Először egy klasszikus játékot (Shannon-féle kapcsolójáték) vizsgáltunk,

4. Tétel. *Legyen $\mathcal{F}$ egy V matroid bázisainak a halmaza. A kérdező pontosan akkor nyer a kérdező-választó $(V, \mathcal{F})$ játékban, ha létezik $A, B \in \mathcal{F}$ úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$.*

Továbbá megjavítottuk Beck korábbi eredményét Erdős-Selfridge típusú tételre. Legyen $||\mathcal{F}|| = \max_{A \in \mathcal{F}} |A|$ a $(V, \mathcal{F})$ hipergráf rangja.

5. Tétel. *Ha $\sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < \frac{1}{3\sqrt{||\mathcal{F}|| + \frac{1}{2}}}$, akkor a kérdezőnek explicit nyerő stratégiája van a választó-kérdező játékban a $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon.*[9]

Kiterjesztettük végtelen hipergráfra a választó-kérdező játékokat. Az ötlet, hogy a játék elején a választó kijelölheti a hipergráf egy *véges X* részét, és a játék ezen folyik. A megalapozó lemma kimondásához egy $(V, \mathcal{F})$ hipergráfra jelölje $(V \setminus X, \mathcal{F}(X))$ azt a $V \setminus X$ halmazon vett hipergráfot, melynek élei $\mathcal{F}(X) = \{A \in \mathcal{F}, A \cap X = \emptyset\}$.

2. Lemma. *Ha a kérdező nyer a választó-kérdező játékban a $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon, akkor nyer a $(V \setminus X, \mathcal{F}(X))$ hipergráfon játszva is.*

[7] Ezeket számítógépes kereséssel listáztuk.

[8] A magyar elnevezés a [50] alapján.

[9] Beck feltételének jobboldala $1/(8(||\mathcal{F}|| + 1)$. 2013-ban Bednarska-Bzdęga [14] belátta, hogy a $\sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < 1/2$ feltétel elég a kérdező nyeréséhez.

A konstrukcióval értelmezhető a k-amőba választó-kérdező változata, itt a $k \geq 8$ esetre adtunk nyerő stratégiát a kérdezőnek. Később Csernenszky András [19] a $k = 7$ esetet is megoldotta. A választó-kérdező játékok vizsgálatának egyik legfontosabb eszköze az alábbi lemmánk:

3. Lemma (Dominancia). *Ha egy választó-kérdező játékban egy nyerő halmazban nincs még a kérdezőnek eleme és pontosan két, x és y még jelöletlen elem van benne, akkor a kérdezőnek van olyan optimális stratégiája, amely az $\{x, y\}$ pár felkínálásával kezd.*

Tettünk néhány megállapítást ezen játékok elméleti és gyakorlati nehézségéről.

6. Tétel. *NP-nehéz eldönteni ki nyer a kérdező-választó és a választó-kérdező játékokban is.*

Úgy tűnik, mintha a különböző változatok megoldásaihoz szükséges munka mennyisége is mintázatot mutatna. Például a 4×4 tóruszon játszva minden változatban az aktuális "romboló" nyer. Azaz a normál (építő-építő), az építő-romboló, kérdező-választó és választó-kérdező játékban rendre döntetlen, romboló, választó illetve kérdező nyerése adódik. A bizonyítások hossza növekvő sorrendben: választó-kérdező, építő-romboló, építő-építő és kérdező-választó.

2. Elfogult és felgyorsított gráfjátékok

Egy játék *elfogult,* ha valamelyik fél egynél több elemet választhat lépésenként. Speciálisan a játék *felgyorsított,* ha a felek egyforma számú elemet választhatnak.

Az elfogult játékok vizsgálatának több oka van. Az egyik ok a véletlen gráfokkal fenálló kapcsolat. Ha egy monoton $\mathcal{P}$ tulajdonság elérése a cél a K_n teljes gráfon játssza, a véletlen heurisztika szerint akkor érheti el az építő, ha az éleinek az aránya nagyjából p, ami a tulajdonság megjelenésének küszöbértéke a $G(n,p)$-n.

A másik ok az elfogult játékok tanulmányozására a *segédjátékok* használata. Gyakran felosztjuk az elérendő célunkat részekre, amik egyszerre teljesülve garantálnak sikert. Ekkor a lépéseinknek csak egy részét számolhatjuk el egy-egy részjátékban.

Végül egy ismert játékot újra érdekessé tehet a felgyorsítás. Elvileg itt az eredetihez hasonló eredményt kellene kapjunk, ennek ellenére néha váratlan eredmény, vagy éppen a véletlen heurisztikához visszatérő eredmény adódik.

2.1. Átmérő játékok

A [3] cikkben bevezettük az *d-átmérő játékokat*, melyekben építő és romboló a K_n éleit választhatja és építő nyer, ha az élei n pontú, d-nél nem nagyobb átmérőjű gráfot feszítenek. A valószínűségi heurisztika $d = 2$-re nem érvényesül, hisz $n \geq 4$ esetén már nyer az romboló, míg a $G(n, 1/2)$ majdnem biztosan 2-átmérőjű. Ha az építő kettőt léphet, nagyot változik a helyzet. Jelölje a $\mathcal{D}_2(a : b)$ a 2-átmérő játékot K_n élein, ahol az építő a, a romboló b élt vehet lépésenként.

7. Tétel. *Építő nyeri $\mathcal{D}_2(2 : b)$ ha $b \leq \frac{1}{9}n^{1/8}/(\log n)^{3/8}$ játékot, míg a romboló nyeri a $\mathcal{D}_2(2 : b)$ játékot bármely $\epsilon > 0$ ha $b \geq (2 + \epsilon)\sqrt{n/\ln n}$ esetén, feltéve, hogy n elég nagy.*

Hasonló, bár nem ennyire drámai a különbség a 3-átmérő, vagy általában a d-átmérő játékokban. A bizonyítás egyik önmagában is érdekes segédjátékában az építő el akar érni bizonyos fokszámot minden pontnál, így szükség van a Székely [56] és Beck [11] által vizsgált *fokszám játék* elfogult változatára.

4. Lemma. *Legyen $a \leq n/(4 \ln n)$, d az elérendő fokszám és n elegendően nagy. Ekkor az építő nyer az $(a:b)$-fokszám játékban a K_n-en, ha $d < \frac{a}{a+b}n - \frac{6ab}{(a+b)^{3/2}}\sqrt{n \ln n}$.*

Hasonlóan többször felhasználható segédeszköz az *expanzió játék*, lásd egy más formáját Beck [13] cikkében.

Építő nyer, ha minden diszjunkt R és S ponthalmazra, ahol $|R| = r$ és $|S| = s$ szerez egy élt R és S között. Legyen $s \geq r$.

5. Lemma. *Építő nyeri a $(a:b)$-expanzió játékot a K_n-en, ha az alábbiak állnak:*

a. $2b \ln n < r \ln(a+1)$,

b. $b \ln n < r \ln(a+1) \leq 2b \ln n$ és $s > \frac{rb \ln n}{r \ln(a+1) - b \ln n}$,

c. $n - s < \frac{nr \ln(a+1)}{b \ln n + r \ln(a+1)}$.

2.2. Shannon-féle kapcsolójáték gyökérhajtással

Epsig és társai [25] vetették fel a Walker-Breaker és a PathWalker-Breaker játékokat. Ezekben az építő élei utat alkotnak és valamelyik végén folytatva kíván minél hosszabb utat létrehozni. Ezt az ötletet átvive a Shannon-féle kapcsolójátékra olyan lépéseket engedünk csak meg az építőnek, amelyben az élei folyamatosan összefüggő halmazt alkotnak. Mivel Prim jól ismert algoritmusához hasonló a feltétel, az építőt Primépítőnek hívjuk.

Sikerült karakterizálni azokat a gráfokat, amelyeken játszva az Primépítő nyer. Legyen H_n a gráf, melyet a $K_{n-2,2}$ gráfból a kételemű színosztályába húzott éllel látunk el.

8. Tétel. *Az n pontú G gráfon játszva Primépítő pontosan akkor nyer, ha G tartalmazza a H_n részgráfot.*

A $G(n, 1/2)$ elemei majdnem biztosan *nem* tartalmazzák a H_n, azaz Primépítő veszít, ugyanakkor majdnem biztosan összefüggő egy ilyen elem. Azaz a valószínűségi heurisztika teljesen felborul.

Primépítő játékának egy kis felgyorsítása visszaállítja a heurisztikát:

9. Tétel. *A $(2:b)$ Primépítő-romboló játékban a K_n élein Primépítő nyer, ha $b < n/(8 \log n)$, míg a romboló nyer, ha $b > n/\ln n$.*

3. Játékok kiterjesztései

A pozíciós játékok (időben) előre és hátra kiterjesztésének lehetséges forgatókönyveiről pillantunk be ebben a részben. Valójában a végtelen hipergráfon értelmezett választó-kérdező játék is ide tartozhatna, hisz a tényleges játék előtt a nulladik lépésben a választó kijelölhet egy tetszőleges részhipergráfot, melyen a folyik azután a játék.

A másik irányban mikor egy klasszikus játék véget érne az addig letett figurák mozgatásával adunk meg új játékot (hasonlóan a *malom* játékhoz).

3.1. Pozitív minimális fokszám játék

A 2. fejezetben láttuk, ha egy, a K_n-en definiált gráfjátékban a $\mathcal{P}$ tulajdonság elérése túl könnyű, akkor a játék elfogult formái lehetnek érdekesek. Hefetz és társai [36] egy másik utat is találtak, azt kutatták, mi a minimális élszáma egy $G \subset K_n$ részgráfnak, amelyen az építő még nyerni tud? A Shannon-féle kapcsolójátékra ez könnyű, $2n-2$. Sokkal nehezebb az ún. *minimális pozitív fokszám játék*, melyben egy G gráfon játszva az építő olyan részgráfot akar szerezni, amelynek minimális fokszáma pozitív. Belátták, hogy $11n/8$ feltétlenül kell és $10n/7+4$ él elég ehhez. Ezt a problémát sikerült teljes pontossággal megválaszolnunk a [4] írásban. Legyen a minimális élszám, melyre a k minimális fokszám elérhető $\hat{m}(\mathcal{D}_k)$.

10. Tétel. *Ha* $n \geq 4$

$$\left\lceil \frac{10}{7} n \right\rceil = \hat{m}(\mathcal{D}_1), \ \textit{for } n \not\equiv 2 \pmod 7,$$

míg

$$\left\lceil \frac{10}{7} n \right\rceil + 1 = \hat{m}(\mathcal{D}_1), \ \textit{for } n \equiv 2 \pmod 7.$$

A bizonyítás fontosabb lépései egy definíció, a minimális G tulajdonságait megragadó lemma és a *kisütési módszer* (discharging method) megfelelő kombinálása:

Egy $xz_1 \dots z_m y$ út (k,ℓ)-(x,y)-*út*, ha $d(x)=k$, $d(z_1)=\ldots=d(z_m)=3$ és $d(y)=\ell$. Itt m lehet 0, ekkor az út maga az xy él.

6. Lemma. *Egy, az építő nyerésére minimális G gráfnak az alábbi tulajdonságai vannak.*
(i) Minden $x \in V(G)$ teljesül a $d(x) \geq 2$.
(ii) Nincs $(2,2)$-(x,y)-út G-ben.
(iii) Bármely $k \geq 3$ esetén, nem lehetnek olyan $x, y_1, \ldots, y_{k-1}$ pontok melyekre van $(k,2)$-(x,y_i)-út minden i esetén.
(iv) Van olyan $x \in V(G)$ pont, melyre $d(x)=2$.
(v) Ha a G egy komponensében van egy $x \in V(G)$, melyre $d(x)=2$, akkor vagy van ugyanebben a komponensben egy $y \in V(G)$ pont, melyre $d(y) \geq 4$, vagy a komponens legalább 7 pontból áll.

Nagyobb fokszámra általánosítható, sajnos nem éles eredmény az alábbi:

2. Propozíció. *Minden $k \in \mathbb{N}$, $\hat{m}(\mathcal{D}_2) \leq \frac{20n}{7}$ ha $n = 14k$, és $\hat{m}(\mathcal{D}_k) \leq \frac{10}{7}kn$ ha $n = 7^k$.*

3.2. Újrafelhasznált játékok

Ahogy jeleztük, az újrafelhasznált pozíciós játékokat olyan táblás játékok ihlették, melyekben a figurák mozgatása jelenti a lépéseket. Az első fázisban egy pozíciós játékot n lépésig játszunk (figurák, jelek elhelyzésével). A második fázisban a játékosok lépése a néhány saját figurájuk elmozdítása és újra lerakása lehet (üres mezőkre). Az újrafelhasznált (recycled) játékokat az eredeti jelzés előtt "R" betűvel különböztetjük meg. Vegyük észre, ha egy pozíciós játékban a rombolónak van párosítási stratégiája, akkor ez működik a második fázisban, tehát csak azon a játékok kimenetele kérdéses, amelyekben nincs párosítási stratégia.

3.2.1. Vonaljátékok

A vonaljáték a síkrácson (vagy végtelen négyzetes táblán) folyik, amelynek bizonyos egyeneseit kitüntetjük. Egy adott k-ra az építő célja egy kitüntetett egyenesen k jel elérése. A kitüntetett egyenesek a rács ± 1, 0 és ∞ meredekségű egyenesei; az n lépésen át tartó $(a:b)$ elfogult játék jele $L_k(a,b;n)$.

A Kaplansky játékok az egész $\mathbb{R}^2$ síkon folynak és minden egyenes kitüntetett.

Megjegyzések. A Kaplansky eredetileg az építő-építő játék, melyről $k \geq 4$-re csak a stratégia lopás ismert, Kleitman és Rothschild [38] az elfogult változatot vizsgálja a *rácson,* (és a síkon) Beck [9] súlyfüggvényeket használva javítja az eredményeiket a rácson.[10]

Mi elsősorban az építő-romboló változatokat vizsgáltuk, illetve az újrafelhasználásnál adódó kérdéseket. A következő eredményeket emeljük ki.

11. Tétel (Vonaljáték). *Az építő-romboló $L_k(p,1;n)$ játékban a romboló nyer, ha $k \geq p\log_2 n + p\log_2 p + 3p$, míg az építő nyer ha $p > 1$ and $k \leq c\log_2 n$ valamely $c > 0$ esetén.*

Ha romboló többet léphet, a 11. tétel első fele érvényben marad, a második részhez bizonyításához általában az kell, hogy építőnek legyen több lépése. Azaz az $L_k(a,b;n)$ formában az $a > b$ feltétel elég.

Az újrafelhasznált formában is sikerült belátni, hogy k-ban exponenciális sok figura kell az építő nyeréséhez; ez nagyjából Beck [9] eredményének megfelelője az újrafelhasznált változatra.

12. Tétel (Újrafelhasznált vonaljáték). *A romboló nyer az építő-romboló $RL_k(1,1;n)$ játékban, ha $k \geq 32\log_2 n + 224$.*

A 11. és 12. tételek bizonyítása a súlyfüggvény módszer és elfogult segédjátékok kombinálásán alapul. Az alábbi tétel egy újabb eszközt is igényel, a Szemerédi- Trotter tételt [57].

13. Tétel (Újrafelhasznált Kaplansky játék). *A romboló nyer az építő-romboló $RK_k(1,1;n)$ játékban ha $k > 2n^{1/3}$.*

4. Színezések

Egy véges pozíciós játékban mindkét játékks játszhatja romboló szerepét, így a jeleik a táblául szolgáló hipergráf egy jó kettő-színezését adhatják. Az Erdős-Selfridge tétel megfelelő feltétele, $\sum_{A\in\mathcal{F}} 2^{-|A|+1} < 1$, pontosan azt fejezi ki, hogy az "érmedobással"' színezett hipergráfban az egyszínű halmazok várható száma kisebb, mint egy. Így a súlyfüggvény módszer felfogható egyes véletlen algoritmusok *derandomizációjának.*

A különböző diszkrepancia problémák kétszemélyes játékok, ahol az egyik fél a ± 1 színezést, a másik az objektumot választja, kis illetve nagy diszkrepanciát célozva. Mindenfajta egyéb színezés tekinthető egyszemélyes, bár ekkor inkább az algoritmikus jelleg domborítható ki.

[10] Lényegében ha $a > b$, akkor a kezdő elég hosszú játékban nyer bármely k esetén. A szükséges lépésszám felső becslése a [38]-ben csillagászati, Ramsey számokkal valósul meg, míg [9]-ban exponenciális alsó és felső korlátot szerepel.

4.1. Hipergráfok mohó színezése

Erdős [22, 23] vezette be a véletlen színezéseket, és kérdezte meg, hogy egy n-uniform hipergráfnál milyen $f(n)$ függvény esetén garantál kettő (vagy k) színezhetőséget a $\sum_{A\in\mathcal{F}} 2^{-|A|} < f(n)$ feltétel. Más szóval, mi az a minimális $m_k(n)$ szám, amelyre már létezik egy $m_k(n)$ élű legalább $k+1$ kromatikus számú hipergráf, illetve $m(n) := m_2(n)$.

A korábbi vizsgálatokban [7, 8, 54] a pontok véletlen színezéseire, illetve ezek újraszínezésére koncentráltak. Mi egy másik valószínűségi mezőt választunk, az alaphalmaz egyforma valószínűségű permutációit. Majd a véletlen permutációk által adott sorrendben hajtunk végre mohó színezést. A gondolat nagyon gyümölcsözőnek bizonyult, számos kutató felhasználta később. Itt a [51]-ben közölt definíciókat és eredményeket ismertetjük.

7. Definíció (Mohó színezés két színnel). *A $H = (V, E)$ hipergráf véletlen színezése. Legyen σ egy uniform véletlen rendezése V alaphalmaznak, és legyen a kezdetben minden pont színe kék. Az i-edik lépésben átszínezzük $\sigma(i)$ pontot pirosra, ha $\sigma(i)$ az első eleme egy $A \in E$ élnek a σ rendezésben.*

A színezésben nem lesz kék él, legyen a piros élek száma X.

7. Lemma. $\mathbb{E}X < 2\sqrt{\pi}e^{1/(6n)}n^{-\frac{1}{2}}2^{-2n}|E|(|E|-1)$.

Egyszerű számolás adja az alábbi következményt:

1. Következmény. $m(n) > \frac{\sqrt{2}}{2}\pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{12n}}\sqrt[4]{n}2^n$. *Azaz* $m(n) > 0.5268\sqrt[4]{n}2^n$, *ha* $n \geq 3$.

A mohó 2-színezéshez hasonlóan definiálhatjuk a mohó k-színezést: először minden pont 1-es színt kapja, majd a i-edik lépésben, ha a $\sigma(i)$ az első pontja egy élnek, átszínezzük legkisebb számra ami nem eredményez egyszínű élt. Ha nincs ilyen, akkor a $\sigma(i)$ pontot a k színnel színezzük.

8. Definíció. *A V egy σ sorrendjére az $\{A_i\}_{i=1}^k$* rendezett k-lánc *ha $|A_i \cap A_{i+1}| = 1$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $|i-j| > 1$ esetén és $\sigma^{-1}(x) \leq \sigma^{-1}(y)$ minden $x \in A_i$ és $y \in A_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Egy rögzített σ sorrendre legyenek $f(A)$ és $\ell(A)$ rendre az első és az utolsó elemei az A élnek.*

Egy (V, E) hipergráf k-színezhetőségét jellemezhetjük a láncokkal.[11]

8. Lemma. *Egy (V, E) pontosan akkor k-színezhető, ha van egy olyan σ sorrendje a V-nek melyben nincs k-lánc. Továbbá a mohó színezés a σ sorrenden megad egy jó k-színezést.*

Ritka hipergráfokra is alkalmazható a módszer.

9. Definíció. *Egy hipergráf D-*ritka*, ha van olyan $D \in \mathbb{N}$, hogy bármely él legfeljebb D másik éllel metsződik.*

Radhakrisnan és Srinivasan [54] belátta, hogy egy n-uniform D-ritka hipergráf 2-színezhető, ha $D \leq 0.17\sqrt{n/\ln n}2^n$ és n elég nagy. Tetszőleges n esetén is igaz viszont az alábbi tétel:

14. Tétel. *Legyen H egy n-uniform D-ritka hipergráf. Ha $2e(2D^2 - D)((n-1)!)^2/(2n-1)! \leq 1$, akkor a H hipergráf 2-színezhető.*

A 14. tétel kiadja Alon és Bregman [1] egy korábbi eredményét.

2. Következmény (Alon-Bregman). *Minden n-uniform, n-reguláris hipergráf 2-színezhető, ha $n \geq 8$.*

[11] Ez Gallai és Roy gráfokra vonatkozó tételének általánosítása, lásd Lovász [43] 9. fejezet 9. feladat.

4.2. Algebrai kettő-színezések

Lineáris algebrai tételeknek gyakran van kombinatorikai következménye. Füredi [26] a Kőnig híres párosgráf karakterizációs tételét vezette le Kronecker-Capelli tételből, mi ennek további következményeit kutattuk.

Tétel [Kronecker-Capelli] Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test, A egy $m \times n$ mátrix, míg b egy m-dimenziós vektor $\mathbb{F}$ felett. Az $Ax = b$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha nincs olyan $y \in \mathbb{F}^m$, amelyre $y^t A = \mathbf{0}$, de $y^t b = 1$.

4.2.1. Kőnig és Harary tételei

Érdemes a kettő-színezéseket újradefiniálni, ugyanis az algebrai struktúra tágítja a lehetőségeket.

10. Definíció (Színezés). *Az (X, E) hipergráf egy kettő-színezése alatt egy $f : X \to \mathbb{F}_2$ függvényt értünk, ahol $\mathbb{F}_2$ a kételemű test. Az f jó színezés, ha $|f(e) \cap \mathbb{F}_2| = 2$, azaz mindkét szín előfordul minden $e \in E$ esetén. Továbbá f páratlan színezés, ha $\sum_{x \in e} f(x) = 1$ minden $e \in E$ esetén.* [12]

Harary [35] egy szociológiai alkalmazásában egy egyszerű G gráf pontjai entitások, a köztük lévő kapcsolatot, mint élt címkézte $+, -$ jelekkel, amelyek barátságos vagy ellenséges viszonyra utaltak. Stabilitás akkor várható, ha két csoportra osztható a ponthalmaz úgy, hogy a csoportokon belül csak $+$, köztük pedig csak $-$ élek vannak.

Tétel [Harary] [35] Egy címkézett G gráfnak akkor és csak akkor van stabil felosztása, ha minden körében páros sok negatív él van.

Harary stabilitási fogalma és tétele általánosítható hipergráfokra, lásd még [53].

11. Definíció (Stabil hipergráf színezés). *Legyen (X, E, ϕ) egy élszínezett hipergráf, ahol $\phi : E \to \mathbb{F}_2$. Az (X, E) hipergráf stabil színezése olyan $f : X \to \mathbb{F}_2$ függvény, amelyre $\sum_{x \in e} f(x) = \phi(e)$ minden $e \in E$ esetén.*

15. Tétel (Általánosított Füredi). *Egy (X, E, ϕ) hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil színezése, ha nincs olyan $H := \{e_1, \ldots, e_k\} \subset E$, hogy bármely $x \in X$ páros sok H-beli halmaz eleme és a H halmaz páratlan sok elemét színezi a ϕ egyessel.*

A 15. tétel is a Kronecker-Capelli tétel következménye, és maga a színezés előáll az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásával. Így a speciális esetei, a Kőnig tétel és a Harary tétel színosztályai is megkaphatók ezen az úton.

4.2.2. A duális tételek

Az algebrai megközelítés miatt értelmezhetjük a 15. és így a Kőnig és Harary tételek duálisait. Formálisan felcseréljuk a X és E szerepét és A helyett az A^t mátrixot vesszük, ami éppen az (X, E) hipergráf illeszkedési mátrixa.

12. Definíció. *Legyen (X, E, α) színezett hipergráfban a $\alpha : X \to \mathbb{F}_2$ a pontok rögzített színezése. Ekkor egy h stabil élszínezés olyan $h : E \to \mathbb{F}_2$, amelyre $\sum_{x \in e} h(e) = \alpha(x)$ minden $x \in X$ esetén.*

[12] Azaz minden e élben páratlan sok pont kapja az egyes színt.

16. Tétel (Duális Füredi). *Egy (X, E, α) hipergráfnak akkor és csak akkor van stabil élszínezése, ha nincs olyan $Y := \{x_1, \ldots, x_k\} \subset X$, hogy bármely $e \in E$ páros sok Y-beli elemet tartalmaz és az Y halmaz páratlan sok elemét színezi az α egyessel.*

Speciálisan: címkézzük egy G gráf pontjait $+$ és $-$ címkével. Stabil élfelbontás alatt olyan $E(G) = E_1 \cup E_2$ felbontást értünk, amelyre minden "$+$"-szal címkézett pontra páros sok, míg minden "$-$"-szal címkézett pontra páratlan sok E_1-beli él illeszkedik.

3. Következmény (Duális Harary). *Egy pontcímkézett G gráfnak akkor és csak akkor van stabil élfelbontása, ha nincs olyan komponense, amelyik páratlan sok negatív címkéjű pontot tartalmaz.*

4. Következmény (Duális Kőnig). *Egy G gráfnak $E(G)$ élhalmaza felbontható E_1, E_2 részre úgy, hogy minden pontra páratlan sok E_1-beli él illeszkedjen akkor és csak akkor ha G-nek nincs páratlan komponense.*

4.2.3. Nyakláncok, páratlan fedések, kipuk

Az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldásával megkaphatjuk ún. *nyaklánc probléma* egy speciális esetét. Az Alon és West [2] által vizsgált eredeti változatban két tolvaj akar osztozkodni egy nyaklánc kövein. A láncon n fajta kő van, és minden fajtából páros sok. Belátták, hogy elég n helyen elvágni a láncot, hogy egyenlő számú követ kapjanak minden fajtából.

Azt a speciális esetet mikor minden fajta kőből pontosan kettő van, Festőműhely (Paint Shop) problémának nevezzük, lásd [21]. A láncelem elvágását vagy épen hagyását az $\mathbb{F}$ elemeivel kódolva a Festőműhely probléma megoldásai egy megfelelő $Ax = 1$ egyenletrendszer megoldásainak felelnek meg. Speciálisan visszakapjuk

17. Tétel. *[21] Ha a Festőműhely problémában n vágás elegendő.*

Megjegyezzük, hogy a *minimális számú* vágás meghatározása NP-nehéz, és így NP-nehéz a minimális tartójú $Ax = 1$ megoldásé is.

Intervallumrendszerek mindig lefogható egy ponthalmazzal, sőt a minimálisan szükséges ponthalmaz is könnyen megtalálható [17]. Más a helyzet, ha az a feltétel, hogy minden intervallum *páratlan* sok pontot tartalmazzon. Bizonyos esetekben ez nem is lehetséges. A fentihez hasonló módon rendelhetünk egy A mátrixot az $\mathbf{I}$ intervallumrendszerhez, ami egy karakterizációhoz vezet:

18. Tétel (Fedhetőség). *Az $\mathbf{I}$ rendszernek pontosan akkor van páratlan fedése, ha az $Ax = \mathbf{1}$ rendszer megoldható az $\mathbb{F}_2$ testben.*

5. Következmény (Fedhetetlenség). *Ha az $\mathbf{I}$ rendszernek nincs páratlan fedése akkor, van olyan $\mathbf{I}^* \subset \mathbf{I}$ részrendszere, hogy $|\mathbf{I}^*|$ páratlan és minden $x \in \cup\mathbf{I}^*$ pont páros sok $\mathbf{I}^*$-beli intervallumban van.*

Visszatértve a nyaklánc problémára, felvethetjük, hogy nem csak láncra lehet köveket helyezni, de fára (kipura) is. Ezt már Bhatt és Leiserson [16] felvetette és az alábbi tételt mutatták meg:

Tétel (Bisector) [16] Minden bináris fákból álló, két színnel színezett n pontú F erdő pontosan kettévágható legfeljebb $2\log_2 n$ él elvágásával.

Ha minden fajta kőből két darab van, a 17. tétellel analóg eredmény látható be:

19. Tétel (2-kő). *Ha F egy n színnel színezett fa, ahol minden szín pontosan kétszer fordul elő, akkor legfeljebb n él elvágásával kettévágható F.*

4.3. Szivárvány színezések és automata szorzatok

Az automatákat és általános szorzatait ismertnek feltételezzük illetve a disszertációban tárgyaljuk. Ha adott egy G irányított gráf akkor szemléletesen néhány automata szorzata ezek D csúcsaira helyezése (Descartes szorzata). Az átmenetfüggvények egy-egy csúcspontban pedig csak azoknak az automatáknak az állapotaitól függenek, melyekből az adott csúcspontba vezet él. Az általános szorzatok irányított teljes gráfokból (oda-vissza éleket is tartalmaznak) kaphatók.

13. Definíció. *Ha Γ automaták, $\mathcal{D}$ pedig irányított gráfok egy halmaza, akkor a Γ izomorfikusan teljes rendszer a $\mathcal{D}$-szorzatra nézve, ha minden automata izomorfikusan beágyazható Γ-beli automaták $\mathcal{D}$-szorzatába.*

Felmerül a kérdés, hogy az általános szorzat, azaz a teljes gráfokat használó, helyettesíthető-e ritkább gráfokkal. Erre egy válasz a következő lemma:

9. Lemma. *Legyen $D = (\{1, \ldots, n\}, E)$ egy irányított gráf és $\mathbf{A} = \prod_{j=1}^{m} \mathbf{A}_j(X, \varphi)$ automaták általános szorzata $1 \le m < n$. Továbbá legyen $\chi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ a D gráf pontjainak olyan színezése, hogy minden $r \in \{1, \ldots, n\}$ esetén $\chi(S_r) = \{1, \ldots, m\}$, ahol S_r azon pontok halmaza, melyből vezet r-be él D-ben. Ekkor $\mathbf{A}$ izomorfikusan beágyazható az $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \ldots, m$ automaták D-szorzatába, és így $\mathcal{D}$-szorzat.*

A 9. lemma segítségével elegendő feltétel adható teljes beágyazásokra:

20. Tétel. *Legyen $\mathcal{D}$ véges, irányított gráfok egy nem-üres halmaza. Van véges, izomorfiára nézve teljes rendszer a $\mathcal{D}$-szorzatra, ha minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén $\mathcal{D}$ tartalmaz olyan D gráfot, melynek $D' = (V', E')$ egy összefüggő részgráfjának van olyan $\chi : V' \to \{1, \ldots, m\}$ színezése úgy, hogy minden $r \in V'$, $\chi(S_r) = \{1, \ldots, m\}$, ahol S_r ugyanaz, mint a 9. lemmában..*

Legyen a $\mathbf{B}_2 = (\{w, x, y, z\}, \{0, 1\})$ az az automata, melyre $0w^{\mathbf{B}_2} = 1z^{\mathbf{B}_2} = 0$ és $1y^{\mathbf{B}_2} = 0x^{\mathbf{B}_2} = 1$. Glushkov tétele szerint [30] automaták egy Γ rendszere akkor és csak akkor teljes az általános szorzatra nézve, ha van olyan $A \in \Gamma$, melynek hatványába beágyazható a $\mathbf{B}_2$ automata.
Ebből jön:

6. Következmény. *Ha a $\mathcal{D}$-szorzat kielégíti az 20. tétel feltételeit, akkor ekvivalens a az általános szorzattal a izomorfikus teljességre nézve.*

14. Definíció. *Legyen egy $\chi : E(D) \to \{1, ..., m\}$ olyan, melyre $|\chi(E)| = m$ minden $E \in \mathcal{H}$, ahol $m \in \mathbb{N}$ given. Ha van ilyen χ színezés, nevezzük a $\mathcal{F}$ hipergráfot m-színesnek.* [13]

Az első momentum módszer alapján kaphatjuk

10. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ hipergráf olyan, hogy $|E| \ge k$ minden $E \in \mathcal{H}$, $|\mathcal{H}| = n$ és $k > 2m \log n$. Ekkor $\mathcal{F}$ hipergráf m-színes.*

Megjegyzés: A 10.lemma megjavítja a [28] egyik eredményét, mely szerint $D_{n_\ell} \in \mathcal{D}$ gráfsorozat izomorfiára nézve teljes rendszer, ha van olyan univerzális konstans c és $D_{n_\ell} \in \mathcal{D}$, melyre $|V(D_{n_\ell})| = n_\ell$ és minden pont be-foka a D_{n_ℓ} gráfban legalább $n_\ell - c$. $n_\ell - c$ helyett $f(n) \log n$ elég bármely végtelenbe tartó f függvénnyel.

A Lovász lokális lemma és a 6. következmény az ún. kockaszorzat teljességét is kiadja:

11. Lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ hipergráf és k egy pozitív egész úgy, hogy minden $E \in \mathcal{F}$ esetén $|E| \ge k$. Ha $k > m(1 + \log d + \log m)$, akkor a $\mathcal{F}$ hipergráf m-színes.*

[13] A szivarvány színezés (rainbow color) későbbi elnevezés, régebben a "colorful coloring" is használt, mi az m-színes (m-colorful) alatt ugyanezt értjük.

4.4. Gráf klaszterezés színezésekkel

Egy gráf ponthalmazának jó klaszterezésén azt szokták érteni, hogy a klasztereken belül menjen minél több él, míg a klaszterek között kevés. [14] Ennek megfelelően a klaszterezés jóságát az ún. Newman modularitásban mérik [44]. Ez a megközelítés teljes mértékben indokolt a közösségi gráfokra. Ezekben a pontok összekötése tipikusan valamely belső hasonlóság, térbeli vagy szervezeti hasonlóság következménye.

Bizonyos helyzetekben a kapcsolatokat leíró gráfokban nincsenek a hasonló entitások között élek, viszont a klaszterek közti éleknek szerkezete van. Egy tipikus példa a *beporzási hálózat* (pollinator network). Ez egy páros gráf, melynek egyik színosztályában a beporzást végző állatok, a másikban az általuk beporzott növények vannak. Egy (x, y) él akkor van jelen, ha az x állat beporzója az y növénynek. Megfigyelhető, hogy mindkét színosztályban a szomszédság halmazok *beágyazottak*, azaz bármely kettőt tekintve az egyik részhalmaza a másiknak.[15] Hasonló jelenséget tapasztaltak ruhaboltok és beszállítóik gráfján.

Ezekre alapozva vezettünk be egy zéró modellt tetszőleges gráfokra. Olyan színosztályokra bontásokat tekintünk, melyekben bármely két színosztály uniója feszített $2K_2$-mentes. Matematikai szempontból érdemes még általánosabban fogalmazni:

15. Definíció. *Legyen H egy tetszőleges páros gráf. Egy G gráf jó színezése* feszített H-mentes színezés*, ha bármely két színosztály uniója feszített H-mentes gráf. Legyen $\chi_H(G)$ a minimuma a színek számának a G gráf feszített H-mentes színezéseiben.*

A heurisztikus algoritmusokat és esettanulmányokat megalapozandó megvizsgáltuk a $\chi_H(G)$ tulajdonságait. A $\chi_H(G)$ vizsgálatában nagyon hasznos az alábbi két lemma:

12. Lemma. *Bármely H páros gráfra, $\chi(G) \leq \chi_H(G)$. Ha G gráf H-mentes, akkor $\chi(G) = \chi_H(G)$.*

13. Lemma. *Ha a G gráfban minden H-mentes feszített részgráfban legfeljebb ℓ él van, $\chi_H(G)$-re fennáll*

$$\ell\binom{\chi_H(G)}{2} \geq e(G).$$

Megjegyzés. A 13. lemma segítségével korlátok adhatók néhány gráf (utak, teljes párosítások, csillag felosztásai, d-dimenziós kocka, véges projektív sík illeszkedési gráfja) feszített $2K_2$-mentes kromatikus számára. Ezeket itt külön nem ismertetjük.

Az egyik alapvető eredmény a $\chi_H(G)$ kiszámítási bonyolultságának karakterizációja:

21. Tétel. *A $\chi_H(G)$ függvény polinom időben kiszámolható ha H gráf az alábbiak egyike: $K_1 \oplus K_1$, K_2, vagy $K_2 \oplus K_1$. Minden más H esetén a probléma NP-nehéz.*

A 21. tétel bizonyításában jelentősen támaszkodtunk Král, Kratochvíl, Tuza és Woeginger [40] egy korábbi eredményére melyben a H-mentes gráfok színezési nehézségét (H-Mentes Színezés nyelv eldöntését) írták le:

Tétel (K-K-T-W [40]) A H-Mentes Színezés probléma polinóm megoldható ha H feszített részgráfja a P_4 vagy $P_3 \oplus K_1$ gráfoknak, és NP-teljes minden más H gráf esetén.

A $\chi_H(G)$ meghatározása néhány ponton nehezebb, mint a H-mentes gráfok színezése; ezt két lemmában mutattuk meg.

[14] Hasonlóan a közösségkereső algoritmusok többnyire a gráfok "sűrű" részhalmazait próbálják megtalálni.

[15] Vegyük észre, ez pontosan akkor teljesül, ha a két színosztály nem feszít $2K_2$ részgráfot.

14. Lemma. *NP-teljes a $\chi_{P_3}(G) \le 5$ probléma, ugyanakkor polinóm eldönthető a $\chi_{P_3}(G) \le 3$. Szintén NP-teljes $\chi_{P_3 \oplus K_1}(G) \le 5$ probléma.*

15. Lemma. *NP-teljes a $\chi_{P_4}(G) \le 3$ eldöntése.*

Megjegyzés. Később kiderült, 14. lemma részben következik Hale [34] eredményéből az ún. $L(k,h)$-színezésekre. Itt $\mathbb{N}$ elemeivel színeznek oly módon, hogy a szomszédos elemek különbsége legalább k, míg a kettő távra lévők különbsége legalább h. Hale belátta, hogy NP-teljes kiszámítani a minimum színek számát $k \ge 1$, $h \ge 0$ esetén, másrészt a feszített P_3-mentes színezések éppen az $L(1,2)$-színezések. Ugyanakkor a 14. lemma bizonyítása jóval egyszerűbb, mint Hale általános megközelítése.

Az alkalmazások szempontjából legfontosabb esetre, azaz a $H = 2K_2$-re beláttuk még:

22. Tétel. *Polinom időben eldönthető, hogy a $\chi_{2K_2}(G) \le 3$ egyenlőtlenség teljesül-e.*

4.4.1. Véletlen gráfok

A $G(n,p)$-ből vett véletlen gráfok különféle paraméterei (függetlenségi szám, kromatikus szám stb.) nagyon erősen koncentrálódnak a várható értékük körül. Ez a jelenséget a feszített H-mentes kromatikus számra is sikerült igazolni, sajnos már az eredmény kimondása meglehetősen technikai. Először egy lemmára van szükségünk, amely definiálja a szükséges paramétereket:

16. Lemma. *Legyen H egy páros gráf és $k_1 \in \mathbb{N}^+$ a legnagyobb úgy, hogy a H bármely kettő színezésénél a nagyobbik színosztály mérete legalább k_1. Legyen $k_2 \in \mathbb{N}^+$ a legkisebb úgy, hogy H bármely kettő színezésénél mindkét színosztály legalább k_2 méretű. Legyen továbbá G egy n-pontú, χ kromatikus számú és α függetlenségi számú gráf. Ha $k_2 \ge 3$, akkor*

$$\chi_H(G) \le \min\left\{\frac{n}{k_1-1} + \frac{k_1-2}{k_1-1}\chi, \frac{n}{k_2-1}\left(1-\frac{1}{\chi}\right) + \frac{k_2-2}{k_2-1}(\chi-1)+1\right\}.$$

Ha $k_2 = 2$, akkor

$$\chi_H(G) \le \min\left\{\frac{n}{k_1-1} + \frac{k_1-2}{k_1-1}\chi, n-\alpha+1\right\}.$$

Ezzel kimondhatjuk a véletlen gráfokra vonatkozó tételünket:

23. Tétel. *Legyen H egy páros gráf, melyre a k_1 és k_2 a 16. lemma szerint definiált. Rögzítsünk egy $p \in (0,1)$, és legyen $d = 1/(1-p)$, és vegyünk egy $G \sim G(n,p)$. Ha $k_1 \ge 3$ és $k_2 \ge 2$, akkor van olyan $C = C(H,p)$ úgy, hogy nagy valószínűséggel*

$$\frac{n}{k_1-1} - C\log n \le \chi_H(G) \le \frac{n}{k_1-1} + O\left(\frac{n}{\log_d n}\right).$$

Ha $k_1 = k_2 = 2$, akkor van olyan $C = C(H,p)$ úgy, hogy nagy valószínűséggel

$$n - C\log n \le \chi_H(G) \le n - 2\log_d n + O\left(\log_d \log n\right).$$

Speciálisan, ha $H = 2K_2$, akkor nagy valószínűséggel

$$n - 8\log_{1/Q} n + \Omega\left(\log_{1/Q}\log n\right) \le \chi_H(G) \le n - 2\log_d n + O\left(\log_d \log n\right),$$

ahol $Q = 1 - 2p^2(1-p)^2$.

Megjegyzés. Ahogy utaltunk rá, a gráfok feszített $2K_2$, vagy általában H-mentes színezése csupán nulladik modell. A vizsgált heurisztikus algoritmusok viszont ígéretes eredményeket mutatnak akár szociális gráfok klaszterezésében, ha a gráfok *komplementerére* vagy az *erős élek* törlése után maradó részgráfra alkalmazzuk őket. A modell nem-diszjunkt közösségekre való kiterjesztésén egyelőre publikálatlan részeredményeket értünk el.

4.5. Globális diszkrepancia

A számtani sorozatok diszkrepanciájának a kutatását Weyl kezdte, majd a fogalom gyorsan elterjedt a matematika egyéb területein, mint a számelmélet, kombinatorika, diszkrét geometria stb. lásd [10].

Hipergráfokra az alábbi módon definiálhatjuk a diszkrepanciát.

16. Definíció. *Legyen (X, E) egy hipergráf, az $f : X \to \{-1, 1\}$ leképzés, és minden $A \in E$ legyen $f(A) := \sum_{x \in A} f(x)$. Az f diszkrepanciája $\mathcal{D}(X, E, f) = \max_{A \in E} |f(A)|$, míg a (X, E) diszkrepanciája $\mathcal{D}(X, E) := \min_f \mathcal{D}(X, E, f)$.*

Egy szűkített értelmezésben, gráfokat vizsgálva egy G gráfra legyen $X = E(G)$ és $E = \mathcal{S}_G \subset 2^{E(G)}$, vagy röviden $\mathcal{D}(G, \mathcal{S}_G)$. Ha például az $\mathcal{S}_G$ elemei a G gráf háromszögei, akkor a diszkrepancia feltárása lényegében annyit jelent, van-e háromszög G éleinek bármely kettőszínezésében. Esetünkben az $\mathcal{S}_G$ tulajdonságok többnyire feszítő részgráfokból állnak, ilyen az feszítőfák halmaza, teljes párosítások, Hamilton-körök vagy klikkfedések.

Megjegyzés. A motiváció egy optimalizálási probléma alsó korlátja volt, amely feszítőfák egyenletes színezését célozta. Később kiderült, hogy Erdős, Füredi, Loebl, és Sós [24] felvetett hasonló globális problémát. Az n-pontú teljes gráfban, az $\mathcal{S}_G$ pedig egy Δ maximális fokú, rögzített T feszítőfa példányai. A diszkrepaciára a $\mathcal{D}(K_n, \mathcal{S}_{K_n}) > c(n - 1 - \Delta)$, valamely $c > 0$ korlátot adták.

Az első eredmények megadják a síkba rajzolható gráfok feszítőfáinak aszimptotikus diszkrepanciáját, lásd még [5].

24. Tétel. *Van olyan $c > 0$, hogy bármely n-pontú síkba rajzolható G gráfra $\mathcal{D}(G, \mathcal{T}_n) \le c\sqrt{n}$.*

A fenti korlát konstanstól eltekintve a legjobb. Legyen $P_k^2 := P_k \times P_k$ a $k \times k$ négyzetrács.

25. Tétel. *$\mathcal{D}(P_k^2, \mathcal{T}_n) \ge ck$ valamely $c > 0$ esetén, ahol $n = k^2$.*

Ha nem feltétlenül feszítő részgráfokat tekintünk, akkor a diszkrepancia lineáris is lehet.

3. Propozíció. *Legyen $k, \ell > \mathbb{N}^+$. Ekkor $\mathcal{D}(P_k \times P_\ell, \mathcal{P}) > k\ell/8 - \max\{k, \ell\}/8 - \min\{k, \ell\}$, ahol a $\mathcal{P}$ az utak halmaza.*

7. Következmény. *$\mathcal{D}(P_k \times P_\ell, \mathcal{T}) > k\ell/8 - \max\{k, \ell\}/8 - \min\{k, \ell\}$, a $\mathcal{T}$ a részfák halmaza.*

Teljesen megváltozik a helyzet a véletlen gráfokban még korlátos fokszám esetén is.

26. Tétel. *Legyen $G \in \mathcal{G}_{n,3}$. Ekkor van olyan $c > 0$, hogy majdnem biztosan $\mathcal{D}(G, \mathcal{T}_n) \ge cn$.*

Dirac Hamilton-körre vonatkozó tétele illetve annak Hajnal és Szemerédi által bizonyított általánosítása motiválja ezen struktúrák diszkrepanciájának a kérdését.

Tétel (Hajnal és Szemerédi) [33]. Legyen n osztható r-rel. Minden n-pontú G gráf, ha a minimális fok $\delta(G) \geq (1-1/r)n$, tartalmaz egy teljes K_r-parkettázást. Továbbá van olyan n-pontú G gráf, melyre $\delta(G) = (1-1/r)n - 1$ és nincs teljes K_r-parkettázása.

Az ún. *graph resilience* problémáknál az a heurisztika alakult ki, hogy a $\delta(G) \geq (1-1/r)n$ korlát számos jelenség megjelenési küszöbe lásd [55]. Meglepő hát, hogy a diszkrepancia a legegyszerűbb esetekben, például teljes párosítások, Hamilton körök, sem követi ezt a mintázatot.

Példa: Vegyük a $G = K_n - K_{n/4}$ gráfot, azaz, $|V(G)| = n$ osztható néggyel, $|V_1| = n/4, |V_2| = 3n/4$, $\delta(G) = 3n/4$. Minden V_1-re illeszkedő él kapja a -1 címkét, míg a többi a $+1$-et. Minden G-beli Hamilton kör pontosan $n/4$-szer érinti V_1-et, így a diszkrepanciája nulla. Ugyanakkor ez a extremális gráf is egyben az alábbi tétel szerint.

27. Tétel. *Legyen $c > 0$ tetszőlegesen kicsi és n elegendően nagy. Legyen G egy n-pontú gráf, melyre $\delta(G) \geq (3/4 + c)n$. Ekkor $\mathcal{D}(G, \mathcal{H}) \geq cn/32$, azaz G-ben bármely ± 1 élszínezés mellett van legalább $cn/32$ diszkrepanciájú Hamilton kör.*

A fenti példában a színezés eloszlása nagyon egyenetlen. Egy megfelelő "egyenletesség" feltétel mellett a lineáris diszkrepancia megjelenik például a Hamilton körökre $\delta(G) \geq (1/2 + c)n$ feltétellel, ahol c tetszőlegesen kis pozitív szám.

17. Definíció. *A G gráf éleinek egy ± 1 cimkézése mellett egy ν valósra egy $v \in V(G)$ pont ν-kiegyensúlyozott, ha a v-re illeszkedő éleken legalább νn-szer jelenik meg mindkét cimke.*

28. Tétel. *Legyen c, d, ν olyan pozitív számok, melyekre $c \geq 8\nu$ és $d \geq 4\nu$. Legyen G egy n pontú gráf, melyre $\delta(G) \geq (1/2 + c)n$. Tegyük fel, hogy G éleinek egy -1, $+1$ cimkézése mellett a ν-kiegyensúlyozott pontok száma legalább $(3/4 + d)n$. Ekkor van G-ben olyan Hamilton kör, melynek a diszkrepanciája legalább $\nu^2 n/2000$.*

A Hajnal-Szemerédi tétel diszkrepancia változata, részletesen a [6] dolgozatban:

29. Tétel. *Tegyük fel $r > 3$ egész és $\theta > 0$. Ekkor van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ és $\gamma > 0$ úgy, hogy az alábbi teljesül. Legyen G egy n pontú gráf, amelyre n osztható r-rel, $n \geq n_0$ és $\delta(G) \geq (1 - \frac{1}{r+1} + \theta)n$. Ekkor bármely $f : E(G) \to \{-1, 1\}$ függvényre van olyan $\mathcal{T}$ K_r-parkettázása G-ben úgy, hogy*

$$|\sum_{e \in E(\mathcal{T})} f(e)| \geq \gamma n.$$

Hivatkozások

[1] N. Alon and Z. Bregman, Every 8-uniform 8-regular hypergraph is 2-colorable. *Graphs and Combinatorics* **4** (1988), 303–305.

[2] N. Alon and D.B. West *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces.* Proceedings of the American Mathematical Society 98.4: pp. 623–628, (1986).

[3] J. Balogh, R. R. Martin and A. Pluhár, The diameter game. *Random Structures and Algorithms*, Volume **35**, (2009), 369–389.

[4] J. Balogh and A. Pluhár, The positive minimum degree game on sparse graphs. the electronic journal of combinatorics. 2012 Jan 21; 19(1):P22

[5] J. Balogh, B. Csaba, Y. Jing and A. Pluhár, On the discrepancies of graphs. *Electron. J. Combin.* **27** (2020) P2.12

[6] J. Balogh, B. Csaba, A. Pluhár and A. Treglown, A discrepancy version of the Hajnal-Szemerédi theorem. *Combinatorics, Probability and Computing*, **30(3)** (2021), 444–459.

[7] J. Beck, On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász. *Discrete Math.* **17** (1977), no. 2, 127–131.

[8] J. Beck, On 3-chromatic hypergraphs. *Discrete Math.* **24** (1978), no. 2, 127–137.

[9] J. Beck, On a generalization of Kaplansky's game. *Discrete Math* **42** (1982) 27-35.

[10] J. Beck and W. W. L. Chen, Irregularities of Distribution. Vol. **89** of *Cambridge Tracts in Math.*, Cambridge University Press, 1987.

[11] J. Beck, Deterministic graph games and a probabilistic intuition. *Combinatorics, Probability and Computing* **3** (1994), 13–26.

[12] J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2) (2002) 169–216.

[13] J. Beck, Random graphs and positional games on the complete graph. Random graphs '83 (Poznań, 1983), 7–13, *North-Holland Math. Stud.,* **118**, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[14] M. Bednarska-Bzdęga, On weight function methods in Chooser–Picker games. *Theoretical Computer Science*, **475**, (2013) 21–33.

[15] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays.* Academic Press, New York 1982.

[16] S. N. Bhatt and C. E. Leiserson, How to assemble tree machines. *Proceedings of the fourteenth annual ACM Symposium on Theory of Computing. ACM,* (1982).

[17] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein, *Új algoritmusok.* Scolar Kiadó, Budapest (2003).

[18] A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games. *Discrete Mathematics* Volume **309** (2009), 5141–5146.

[19] A. Csernenszky, The Chooser-Picker 7-in-a-row-game. *Publicationes Mathematicae* **76** (2010), 431– 440

[20] A. Csernenszky, R. R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games. *Integers*, **12(3)**, (2012) 427–444.

[21] Th Epping, W. Hochstättlerand P. Oertel, Complexity results on a paint shop problem. *Discrete Applied Mathematics* **136.2-3:** (2004), 217–226.

[22] P. Erdős, On a combinatorial problem. *Nordisk Mat. Tidskr.* **11** (1963) 5–10.

[23] P. Erdős, On a combinatorial problem, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **15** (1964), 445–447.

[24] P. Erdős, Z. Füredi, M. Loebl and V. T. Sós, Discrepancy of Trees. *Stud Sci Math*, **30** (1995), 47–57.

[25] L. Espig, A. Frieze, M. Krivelevich, and W. Pegden, (2015). Walker-Breaker games. SIAM Journal on Discrete Mathematics, **29(3)** (2015) 1476–1485.

[26] Z. Füredi personnal communication

[27] Gera Imre, London András és Pluhár András, Mohó megközelítések gráfok egymásba ágyazottságának felderítésére. XXXIV. MAGYAR OPERÁCIÓKUTATÁSI KONFERENCIA 2021 augusztus 31-szeptember 2.

[28] F. Gécseg and B. Imreh, Finite isomorphically complete systems, *Discrete Applied Mathematics* **36** (1992), 307–311.

[29] F. Gécseg, B. Imreh and A. Pluhár, On the existence of Finite Isomorphically Complete Systems of Automata. *J. of Automata, Languages and Combinatorics* **3** (1998) 2, 77–84.

[30] V. M. Glushkov, Abstract theory of automata. *Uspekhi Mat. Nauk*, **16:5 101** (1961), 3–62 (in Russian).

[31] L. Győrffy, G. Makay and A. Pluhár, The pairing strategies of the 9-in-a-row game. *Ars Mathematica Contemporánea,* **16(1)** (2018), 97–109.

[32] L. Győrffy and A. Pluhár, Generalized pairing strategies-a bridge from pairing strategies to colorings. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica,* **8(2)** (2016), 233–248.

[33] A. Hajnal and E. Szemerédi, Proof of a conjecture of Erdős. *In Combinatorial Theory and its Applications, II. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North-Holland, Amsterdam/London* (1970) .

[34] W. K. Hale, Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE,* **68(12)** (1980), 1497–1514.

[35] Harary, F. *On the notion of balance of a signed graph.* The Michigan Mathematical Journal 2.2: pp. 143–146, (1953). DOI: 10.1307/mmj/1028989917

[36] D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković and T. Szabó, Global Maker–Breaker games on sparse graphs. *European Journal of Combinatorics,* **32(2)** (2011), 162–177.

[37] H. Harborth and M. Seemann, Snaky is a paving winner. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **19** (1997), 71–78.

[38] D.J. Kleitman and B.L. Rothschild, A generalization of Kaplansky's game. *Discrete Math* **2** (1972) 173-178.

[39] F. Knox, Two constructions relating to conjectures of Beck on positional games. (2012) *arXiv preprint* arXiv:1212.3345.

[40] D. Král, J. Kratochvíl, Z. Tuza and G.J. Woeginger, Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs. In *Graph-theoretic concepts in computer science (Boltenhagen, 2001)*, Springer Verlag, pp. 254–262

[41] A. London and A. Pluhár, Spanning Tree Game as Prim Would Have Played. *Acta Cybernetica* **23(3)**, 2018, 921–927.

[42] A. London, R. R. Martin and A. Pluhár, Graph clustering via generalized colorings. *Theoretical Computer Science*, **918** (2022), 94–104.

[43] L. Lovász, Combinatorial problems and exercises. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York,* 1979.

[44] M.E. Newman and M. Girvan, Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, **69 (2)** (2004), 026113.

[45] A. Pluhár, Generalizations of the game k-in-a-row. Rutcor Research Reports 15-94 (1994).

[46] A. Pluhár, Generalized Harary Games. *Acta Cybernetica* **13** no. 1, (1997) 77–83.

[47] A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard.* Ph.D. dissertation, Rutgers University 1994.

[48] A. Pluhár, The accelerated k-in-a-row game. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), 865–875.

[49] A. Pluhár, The Recycled Kaplansky's Game. *Acta Cybernetica* **16** (2004) 451–458.

[50] Pluhár András, Pozíciós játékok. *Szigma*, vol 3-4, Pécs, 2007, 111–130

[51] A. Pluhár, Greedy colorings of uniform hypergraphs. *Random Structures and Algorithms* Volume **35** (2009) 216–221.

[52] Pluhár András, Játékelmélet. *egyetemi jegyzet (2010)* illetve Typotex, (2011) ISBN 978-963-279-519-5

[53] Pluhár András, Lineáris egyenletrendszerek konzisztenciájának kombinatorikai jelentései. *Alkalmazott Matematikai Lapok* **37** (2020) 225–232.

[54] J. Radhakrishnan and A. Srinivasan, Improved bounds and algorithms for hypergraph 2-coloring. *Random Structures Algorithms* **16** (2000), no. 1, 4–32.

[55] B. Sudakov, Robustness of graph properties. *Surveys in combinatorics,* **440.2017** (2017), 372.

[56] L. A. Székely, On two concepts of discrepancy in a class of combinatorial games. Finite and Infinite Sets, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 37, North-Holland, 1984, 679–683.

[57] E. Szemerédi and W. T. Trotter Jr., Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica* **3** (1983), no. 3-4, 381-392.