

# Matemaatikapädevuse dimensioonid ja nende hindamine põhikoolis

Marje Johanson<sup>a1</sup>, Margus Pedaste<sup>a</sup>, Aleksandar Baucal<sup>ab</sup>

<sup>a</sup> *Tartu Ülikooli haridusteaduste instituut*

<sup>b</sup> *Belgradi Ülikooli filosoofiainstituut*

## Annotatsioon

Siinse uuringu eesmärgid on matemaatikapädevust hindavate testide arendamine, matemaatikapädevuse empiirilisel eristatavate dimensioonide kirjeldamine ja matemaatikapädevuse hindamise tulemuste tutvustamine DigiEfekti projekti valimi näitel Eesti 3., 6. ja 9. klassides, tuginedes Rootsis välja töötatud matemaatikapädevuse uurimise raamistikule (MCRF, Lithner *et al.*, 2010), mida täpsustati uurijate poolt Eesti kontekstis (Johanson *et al.*, 2021). Uuringust selgus, et loodud testid on kõrge reliaablusega ning võimaldavad nii kolmandates, kuues- kui ka üheksandates klassides eristada viit matemaatikapädevuse dimensiooni. Dimensioonide eristamiseks loodud faktormudeleid iseloomustavad head sobitusastme näitajad, kuid faktorite vahelised korrelatsioonid on suhteliselt tugevad. Vastavalt empiirilist kinnitust leidnud mudelitele osutusid kõigis vaadeldud koolistmetes kõige keerulisemateks ülesanneteks kommunikatsioonipädevust ja arutluspädevust hindavad ülesanded ning kõige paremini lahendati protseduurilist pädevust ja esituspädevust kirjeldavaid ülesandeid.

*Võtmesõnad:* matemaatikapädevus, üldpädevus, hindamine, üksikvastuste teooria, faktoranalüüs

## Sissejuhatus

Viimastel aastakümnetel on nii üksikud teadlased, teadlaste rühmad, organisatsioonid kui ka riigid juhtinud tähelepanu vajadusele edendada haridusreformides ja arengusuundades matemaatikapädevust, mis võimaldab seada matemaatikaõppe eesmärgi kirjeldamata konkreetseid teema- ja sisuelemente (Boesen *et al.*, 2018). Eesti põhikooli riiklikus õppekavas on

---

<sup>1</sup> Haridusteaduste instituut, Tartu Ülikool, Jakobi 5, 51005 Tartu; marje.johanson@ut.ee.

matemaatikapädevus defineeritud aastast 2002 (Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava, 2002) ning alates sellest on matemaatikaõppe eesmärgiks seatud matemaatikapädevuse kujundamine. Siiski, süsteemsele matemaatika-pädevuse hindamisele Eestis on keskendutud alles viimastel aastatel (nt Toomela *et al.*, 2020) ning puuduvad empiirilise faktoranalüüsi abil kinnitust leidnud matemaatikapädevuse dimensioonide kirjeldused ja mõõtmise tulemused. Matemaatikapädevuse dimensioonide kirjeldamine on oluline, et mõista täpselt õpilaste arenguvajadusi tervikliku matemaatikapädevuse kujundamisel ning toetada õpetajaid sobivate õppemeetodite valikul.

Rootsi teadlased Lithner jt (2010) on välja töötanud tervikliku matemaatika-pädevuse uurimisraamistiku (Mathematical Competency Research Framework, lühend MCRF), milles on eristatud kuus matemaatikapädevuse alampädevust: probleemide lahendamise pädevus, arutluspädevus, protseduuriline pädevus, esitluspädevus, seoste loomise pädevus ja kommunikatsioonipädevus. Need on inspireeritud matemaatikapädevuse määratlustest OECD PISA (Organisation for Economic Co-operation and Development, Programme for International Student Assessment, OECD, 2018) ja TIMSSi (Trends in International Mathematics and Science Study, Grønmo *et al.*, 2015) hindamisraamistiketes ning Nissi jt töodes toodust (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2019; Niss & Jensen, 2002), mida koos Ameerika Ühendriikide Riikliku Matemaatika-õpetajate Nõukogu (NCTM) standarditega (NCTM, 2000) võib pidada neljaks alustalaks matemaatikapädevuse defineerimisel. Tuginedes MCRF-ile, mida täpsustati uurijate poolt Eesti kontekstis (Johanson *et al.*, 2021), ja Eesti Vabariigi põhikooli riikliku õppekava matemaatika ainekavale (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2014) on projekti DIGIVARA5 „DigiEfekt: Digitaalse õppevara kasutamise mõju õppimisele ja õpetamisele Eesti põhihariduse näitel (1.05.2020–30.04.2023)“ raames loodud kolm matemaatikapädevust hindavat testi: 1) matemaatikapädevuse test 3. klassidele, 2) matemaatikapädevuse test 6. klassidele, 3) matemaatikapädevuse test 9. klassidele, pakkudes välja metoodika ja instrumendid matemaatikapädevuse hindamiseks Eestis.

## Teoreetiline taust

Üheks varasemaks matemaatikapädevust avavaks tööks võib nimetada Ameerika Ühendriikides Riikliku Matemaatikaõpetajate Nõukogu poolt avaldatud koolimatemaatika standardeid, kus toodi välja nii matemaatika ainevaldkonnad (arvud ja tehted, algebra, geomeetria, mõõdud, andmete analüüs ja tõenäosus) kui ka matemaatika õppimises olulised protsessid: probleemide lahendamine, arutlemine ja tõestamine, kommunikatsioon, seoste loomine ja ideede esitamine (NCTM, 2000). Samal aastal tutvustas OECD rahvusvahelise

õpilaste uuringu PISA hindamis põhimõtetes kaheksat matemaatilist protsessi (matemaatiline mõtlemine, matemaatiline argumenteerimine, modelleerimine, probleemide püstitamine ja lahendamine, esitamine, sümbolid ja formalism, kommunikatsioon, abivahendid ja tööriistad) (OECD, 2000), mis PISA 2003 hindamisdokumentides (OECD, 2003) nimetati ümber matemaatikapädevuse komponentideks. 2002. aastal publitseeriti Taani Haridusministeeriumi poolt algatatud projekti “Matemaatikapädevused ja matemaatika õppimine: Taani KOM projekt” kokkuvõte (Niss, 2003; Niss & Jensen, 2002), kus tutvustati kaheksat matemaatikapädevuse komponenti: matemaatiline mõtlemine, matemaatiliste probleemide koostamine ja lahendamine, matemaatiline modelleerimine, matemaatiline arutlemine, matemaatiliste objektide ja situatsioonide esitamine, matemaatiliste sümbolite ja formalismi käsitlemine, matemaatika sisene ja -väline kommunikatsioon, abivahendite ja tööriistade, sealhulgas IT kasutamine (Niss, 2003). OECD PISA kõrval rahvusvaheliselt väga laialt kasutatava hindamisraamistiku TIMSS matemaatika valdkond eristab sisuvaldkondi (nt numbrid, algebra, andmed ja nende esitamine) ja kognitiivseid valdkondi (teadmine, rakendamine, põhjendamine) (Grønmo *et al.*, 2015). Kõik need neli väga laialt kasutatava mõjuga käsitust on inspiratsiooni aluseks Rootsisis välja töötatud matemaatikapädevuse uurimisraamistikule, mis eristab kuut matemaatikapädevuse dimensiooni (vt tabelit 1) ning on mõeldud just empiiriliste andmete analüüsiks (Lithner *et al.*, 2010).

**Tabel 1.** Matemaatikapädevuse dimensioonid (Johanson *et al.*, 2021)

Dimensioon	Lühend	Kirjeldus
Probleemi lahendamise pädevus	PRB	Võime matemaatikaväliseid situatsioone ja probleeme (ülesandeid, mille lahendusmeetod pole tuttav) lahendada matemaatiliste vahenditega.
Arutluspädevus	REA	Võime matemaatiliselt arutleda ehk oma valikuid ja järeldusi selgesõnaliselt matemaatiliste argumentidega põhjendada.
Protseduuriline pädevus	PRC	Oskus teostada matemaatilisi toiminguid ja protseduure.
Esituspädevus	REP	Oskus luua erinevaid esitusi abstraktsetest matemaatilistest üksustest (numbrid, funktsioonid, meetodid, kujundid jne).
Seoste loomise pädevus	CON	Võime luua seoseid erinevate matemaatiliste üksuste (nt mõisted, tähistused, valemid) või nende esituste vahel.
Kommunikatsiooni-pädevus	COM	Võime rääkida matemaatikast, väljendada end matemaatiliste sümbolite, märkide või tegevuste kaudu ja teisalt mõista matemaatikaterminitega teksti ja kõnet.

Kirjandusest leiab mitmeid uuringuid kõigi kuue matemaatikapädevuse dimensiooniga seotud matemaatilise protsessi kohta, kuigi mitte rangelt MCRFi toodud definitsioonide kontekstis. Probleemi lahendamise olulisust matemaatiliste teadmiste arengus on käsitletud näiteks Halmos (1980), Schoenfeld, (1985), Sumirattana jt (2017) ning põhjalikult on uuritud tegureid, mis mõjutavad matemaatiliste probleemide lahendamise oskust (nt Juandi, 2021; Phonapichat *et al.*, 2014). Arutlusoskuse ja matemaatikas saadud tulemuste vahelisi seoseid on kirjeldanud näiteks Fuchs jt (2006) ning Primi jt (2010), uuringud on välja toonud digitaalse tehnoloogia positiivset mõju arutluspädevuse arengule (nt Edwards *et al.*, 2014; Højsted, 2021; Jones, 2000; Leung, 2015). Ilma matemaatiliste protseduurideta ei saa matemaatikast rääkida ning siin on küsimuseks pigem protseduuriliste ja kontseptuaalsete teadmiste vahetegur (nt Haapasalo & Kadujevich, 2000; Voutsina, 2012). Esituspädevuse kohta on välja selgitatud, et erinevate matemaatiliste esituste kombineerimine aitab õpilastel luua parema ja laialdasema arusaama matemaatilistest üksustest (nt Ainsworth *et al.*, 1997; Elia *et al.*, 2007) ning oskus luua matemaatilisi esitusi on võtmetegur matemaatiliste probleemide lahendamisel (Stylianou, 2011). Ka digitaalse tehnoloogia arenguga on üha rohkem päevakorda tõusnud erinevate matemaatiliste esituste ning nendevaheliste seoste mõistmine (Pedersen *et al.*, 2021). Seoste loomise pädevuse arendamine võimaldab õpilastel kergemini matemaatilisi üksusi meeles pidada, neist aru saada ning ühtlasi hõlbustab see matemaatika kasutamist igapäevaelus (nt Hendriana *et al.*, 2014; Siregar & Surya, 2017). Kommunikatsioonioskuse kontekstis on oluline mõista nii matemaatilist teksti kui osata ka ise kasutada matemaatilist terminoloogiat ja sümboolikat (nt Cai *et al.*, 1996; Lomibao *et al.*, 2016).

Matemaatikapädevuse uurimisraamistikku on kasutatud erinevateks matemaatika õppimise ja -oskustega seotud aspektide uurimiseks, nt on välja selgitatud, et matemaatika õpetamine keeruliste matemaatiliste probleemide lahendamise kaudu võimaldab arendada esitus-, seose loomise ja arutluspädevust (Larsson & Ryve, 2012); Rootsi matemaatikatundide analüüs näitas, et ligikaudu 79 protsenti koolitunni ajast tegeldakse protseduuriliste pädevuste arendamisega (Boesen *et al.*, 2014). Kasutades MCRFi, on hinnatud matemaatika õppekavaga seotud dokumentide kooskõla matemaatikapädevuse arendamise eesmärgiga (Bergqvist & Bergqvist, 2017) ning Rootsi riiklike tasemetööde analüüs näitas, et tasemetöodes on ülekaalus protseduurilisele pädevusele kesken-duvad ülesanded (Boesen *et al.*, 2018). Samas pole käesoleva uuringu autoritel õnnestunud leida kirjandusest uuringuid või analüüse, mis kinnitaksid empiiriliselt matemaatikapädevuse uurimisraamistikus toodud kuue matemaatika-pädevuse dimensiooniga andmemudelit.

## Eesmärk ja uurimisküsimused

Selle uuringu eesmärgid on matemaatikapädevust hindavate testide arendamine, matemaatikapädevuse empiiriliselt eristatavate dimensioonide kirjeldamine ja Eesti põhikoolis matemaatikapädevuse hindamise tulemuste tutvustamine. Täpsemalt sõnastasime kolm uurimisküsimust.

- 1) Milline on loodud matemaatikapädevuse testide ja ülesannete kvaliteet ning sobivus matemaatikapädevuse arendamise tulemuslikkuse hindamiseks?
- 2) Millised on matemaatikapädevuse empiiriliselt eristatavad dimensioonid põhikooli eri astmetes?
- 3) Milline on 3., 6. ja 9. klasside õpilaste tase matemaatikapädevuse eri dimensioonides ning kuidas need kooliastmeti muutuvad?

## Metoodika

### Instrumendid

Tõstatatud uurimisküsimuste käsitlemisel tuginame projekti DIGIVARA5 „DigiEfekt: Digitaalse õppevara kasutamise mõju õppimisele ja õpetamisele Eesti põhihariduse näitel (1.05.2020–30.04.2023)“ raames loodud kolmele matemaatikapädevust hindavale testile: 1) matemaatikapädevuse test 3. klassidele, 2) matemaatikapädevuse test 6. klassidele, 3) matemaatikapädevuse test 9. klassidele. Need testid lähtuvad Eesti Vabariigi põhikooli riikliku õppekava matemaatika ainekavast (Ainevaldkond „Matemaatika“, 2014) ja Rootsist välja töötatud matemaatikapädevuse uurimise raamistikust, mida on kohandatud Eesti konteksti (Johanson *et al.*, 2021). Ülesannete koostamisel lähtusime tabelis 1 toodud matemaatikapädevuse dimensioonide definitsioonidest ja tutvusime nende dimensioonide hindamiseks toodud näidisülesannetega kirjanduses (nt Kikas *et al.*, 2009; Neumann *et al.*, 2013; Nunes & Csapó, 2011). Autorite kokku pandud matemaatikapädevuse testi ülesandeid kategoriseerisid täiendavalt ja eraldi veel kaks eksperti, seejärel võrreldi saadud tulemusi, arutati läbi erinevused ning saavutati iga ülesande korral ühene matemaatikapädevuse dimensiooni määratlus. Kõik kolm testi on koostatud hindamaks matemaatikapädevust kuue matemaatikapädevuse dimensiooni kaudu. Iga dimensiooni mõõtmiseks on igas testis ette nähtud vähemalt 3 ülesannet (v.a 6. ja 9. klassi kommunikatsioonipädevust hindavad ülesanded; vt tabelit 2). Esindatud on nii ainult ühte dimensiooni hindavad ülesanded kui ka kompleksülesanded, mille eesmärk on hinnata mitut dimensiooni korraga. Erinevaid teste ühendavalt kasutati ankurülesandeid: 3. ja 6. klassi testidel on kaks ühist ülesannet ning 6. ja 9. klassi teste ühendavad kolm ülesannet.

**Tabel 2.** Matemaatikapädevuse dimensioone hindavate ülesannete arvud

	Kokku	PRB	REA	PRC	REP	CON	COM
3. klass	19	3/0*	0/5	3/2	4/2	1/3	2/1
6. klass	20	3/1	2/1	3/1	5/0	4/0	1/1
9. klass	18	2/3	0/3	4/2	3/1	2/2	2/0

\* Matemaatikapädevuse dimensiooni eraldiseisvalt hindavate ülesannete arv / ülesannete arv, kus konkreetset dimensiooni hinnatakse koos mõne teise dimensiooniga.

Testide ülesanded on valitud erinevatest matemaatika valdkondadest (arvud ja tehted, algebra, geomeetria, andmete analüüs ja statistika), pidades silmas, et kõik teemad oleksid esindatud. Hindamise seisukohalt on esindatud nii automat- kui inimhinnatavad ülesanded (vt tabelit 3). Detailed hindamisjuhendid töötati välja projekti DigiEfekt pilootuuringu käigus, kus hinnati ka ülesannete arusaadavust ja jõukohasust.

**Tabel 3.** Arvutihinnatavate ja inimhinnatavate ülesannete arvud matemaatikapädevuse dimensioonide kaupa

	Kokku	PRB	REA	PRC	REP	CON	COM
3. klass	19	3/0*	0/5	4/0	6/0	3/1	0/3
6. klass	20	4/0	0/3	4/0	5/0	2/2	0/2
9. klass	18	1/4	0/3	6/0	3/1	3/1	0/2

\* Arvutihinnatavate ülesannete arv / inimhinnatavate ülesannete arv.

Testi lõpus paluti õpilastel vastata ka paarile matemaatikatesti puudutavale küsimusele, sealhulgas paluti õpilasel anda hinnang testi raskusastmele, nime-tada kõige raskem ülesanne ja vastata küsimusele, kas õpilane andis ülesandeid lahendades endast parima peegeldamaks enda testi täitmise motivatsiooni (küsimus *Kas andsid ülesandeid lahendades endast parima?*, skaala 1 (ei ole üldse nõus) kuni 5 (täiesti nõus)).

## Valim

Andmeid koguti 13 erinevast Eesti koolist, sealhulgas oli 3. klasse 21, 6. klasse 22 ja 9. klasse 18. Pidades silmas projekti DigiEfekt uuringueesmärke, võeti uuringusse kutsutavate koolide nimekirja koostamise aluseks järgmised tunnused: 1) kooli tulemused akadeemilistes testides (riiklikud matemaatika, loodusainete ja eesti keele tasemetööd ja eksamid); 2) kooli digivalmidus õpilaste digipädevuse (aluseks 9. klassi katselise tasemetöö tulemused 2019. aastal),

kooli digivalmiduse enesehinnangu (Digipeegli enesehinnanguvahendi kasutamise tulemused) ja koolirahuolu uuringus digivalmidusele ja digitegevustele antud hinnangute alusel; 3) kooli tulemus koolirahulolu uuringus. Haridus- ja teadusministeeriumist saadud andmete põhjal jagati koolid iga koondtunnuse osas kolme kategooriasse: tulemuste järgi ülemisse, keskmisse ja alumisse kolmandikku kuuluvad, ning valimisse võeti vaid koole, mis kuulusid kõigi kolme kriteeriumi arvestuses ülemisse või alumisse kolmandikku. Nii loodi kaheksa koolitüüpi kolmest kriteeriumist kahel tasemel (nt kõik kolm kõrged, kõik kolm madalad, digivalmidus kõrge ja muud madalad). Igast tüübist kaasati uuringusse vähemalt üks kool, uuringu eesmärkidest lähtuvalt täiendavalt veel üks kool, kus olid näitajad kõigi kriteeriumite osas kõrged, ja teine, kus madalad, ning seejärel juhuslikult erinevat tüüpi koole kuni sihiks seatud valimi täitumiseni. Kõigi koondtunnuste puhul olid kõrge ja madala tulemusega koolid t-testi alusel statistiliselt oluliselt erinevad ( $p < 0,01$ ). Kuna uuringus osalemine oli vabatahtlik, siis oli klassipõhine uuring osalemise hõivatus klassiti erinev. Matemaatikapädevuse testi 3. klassis täitis I andmekogumisel 282 õpilast ja II andmekogumisel 301 õpilast (kokku 345 erinevat õpilast); 6. klassi testi täitsid I andmekogumisel 214 õpilast ja II andmekogumisel 253 õpilast (kokku 312 erinevat õpilast); 9. klassi testi täitsid I andmekogumisel 204 õpilast ja II andmekogumisel 203 õpilast (kokku 254 erinevat õpilast).

### Andmete kogumine

Matemaatikapädevuse testide täitmine toimus arvutis (laua-, süle- või tahvelarvutis vastavalt sellele, millega olid õpilased harjunud regulaarselt õppima), Eksamite infosüsteemi (EIS) keskkonnas (v.a üks kool 13st, kes kasutas võimalust täita testi paberil) eelnevalt koolitatud vaatlejate juuresolekul. Tulenevalt projekti DigiEfekt uurimiseesmärkidest viidi mõõtmisi läbi kahel korral, kasutades sama testi. Kahe mõõtmise vaheliseks ajaks kujunes ligikaudu 4 kuud. Matemaatikatesti ülesannete lahendamiseks oli ette nähtud 3. klassis 35 minutit, 6. ja 9. klassis 40 + 25 minutit (test oli jaotatud kaheks osaks).

### Andmete analüüs

Koostatud testide ja ülesannete kvaliteedi analüüsimiseks kasutasime üksikvastuste analüüsi (IRT) Raschi mudeli meetodil WINSTEPSi programmi versiooniga 5.3.2.0 (Linacre, 2020). IRT analüüsi ülesannete ja õpilaste reliaablus võimaldab hinnata ülesannete keerukuse mõõtmise korratavust (juhul, kui kasutatakse teist samast populatsioonist pärit osalejate valimit) ja õpilaste oskuste mõõtmistulemuste korratavust (juhul, kui kasutatakse mõnda muud

ülesannete komplekti samast ülesannete kogust sama õpilaste valimi korral) (Pedaste *et al.*, 2021). Reliaabluse kontekstis lugesime aktsepteeritavateks ja headeks tulemusteks näitajaid, mis ületavad 0,8 piiri (Bond & Fox, 2001). Kirjeldamaks matemaatikapädevuse testide ülesannete sobivust ja potentsiaali panustada heasse matemaatikapädevuse mõõtmisvahendisse, vaatlesime *infit*- ja *outfit*-indekseid. Keskmise *infit* ja keskmise *outfit* väljendavad Infit MNSQ ja Outfit MNSQ indekseid, mis näitavad, kui hästi on konkreetse ülesande eest prognoositud punktid kooskõlas õpilaste tegelikult saadud punktidega. Siin lugesime aktsepteeritavateks väärtusteks vahemikku 0,7 kuni 1,3 jäävad indeksid (vastavalt WINSTEPSi kasutusjuhendile <https://www.rasch.org/rmt/rmt83b.htm>). Analüüsisime ka hindamisskaalat, pidades silmas, et kõrgema punktiskooriga vastusevariantidel oleksid kõrgemad keerukuse näitajad. Üsikovastuste analüüsiks muutsime hindamisskaalad täisarvulisteks (kõigi ülesannete uueks maksimumiks sai 12 punkti). Valimist eemaldasime erinditena õpilased, kes olid jätnud vahele üle poole konkreetse testi ülesannetest: kolmandates klassides 7 õpilast, kuuendates klassides 16 õpilast ja üheksandates klassides üks õpilane.

Kogutud andmete ja teoreetilise mudeli vastavuse kontrollimiseks kasutasime kinnitavat faktoranalüüsi Mplus-i versiooniga 7.4 (Muthen & Muthen, 2016). Kinnitavas faktoranalüüsis vaatlesime kõiki tunnuseid pidevatena ja analüüsiks kasutasime suurima tõepära meetodit. Teoreetilise mudeli ja andmete vastavuse hindamiseks kasutasime järgmisi näitajaid:  $\chi^2/df$ , RMSEA, CFI, TLI, SRMR. Andmemudel loeti väga hästi andmeid kirjeldavaks, kui  $\chi^2/df < 2$  (aktsepteeritav 3); RMSEA  $< 0,06$  (aktsepteeritav 0,08); CFI  $> 0,95$  (aktsepteeritav 0,90); TLI  $> 0,95$  (aktsepteeritav 0,90) ja SRMR  $< 0,08$  (Bowen, & Guo, 2011; Hu, & Bentler, 2009). Faktoranalüüsi tegime mõlema andmekogumise andmete põhjal eraldi eesmärgiga kinnitada tulemuste paikapidavust.

Kolmandate, kuuendate ja üheksandate klasside matemaatikapädevuse dimensioonide mõõtmistulemuste analüüsimisel kasutasime kirjeldavat statistikat, 95% usaldusintervalle ja sõltuvate valimite t-testi usaldusnivool 0,05.

### Uuringu eetilised aspektid

Siin tutvustatav uuring on osa DigiEfekti uuringust, mille läbiviimiseks taotleti nõusolek Tartu Ülikooli inimuuringu eetika komiteelt (kooskõlastus vastavalt protokollile 327/T-8 19.10.2020 ja jätkutaotluse kooskõlastus vastavalt protokollile 347/M-23 16.06.2021). Vastavalt kooskõlastuse saanud uuringuplaanile võeti konkreetsete koolide uuringus osalemiseks esmalt ühendust koolide juhtkondadega ning seejärel, põhimõttelise nõusoleku olemasolu korral, paluti õpetajatelt vabatahtlikku informeeritud nõusolekut uuringus osalemiseks. Alles seejärel pöördui uuringus osalemise nõusoleku saamiseks õpilaste ja nende



seaduslike esindajate poole. Uuritavatele esitati kogu vajalik info uuringu eesmärgi, kogutavate andmete käitlemise ja analüüsi ning planeeritavate tulemuste kasutamise kohta. Lisaks informeeriti osalejaid ja õpilaste seaduslikke esindajaid sellest, kellega on võimalik kontakteeruda, kui tekib uuringu või selle tulemustega seotud küsimusi. Uurimuses osalemine oli õpetajatele ja õpilastele vabatahtlik ning neile ei pakutud osalemise eest tasu, kingitusi või muid hüvesid, mida saaks tõlgendada sunnina. Samuti teavitati neid, et uuringus osalemise võib igal ajal katkestada, ilma et sellega kaasneks tagajärgi. Osalenutel on õigus nõuda oma andmete kustutamist uuringu andmebaasist. Andmed koguti ja seostati isikukoodi alusel, kuid seejärel pseudonüümistati andmehalduri poolt ning analüüsides kasutati ainult pseudonüümistatud andmeid. Kõiki andmeid kasutatakse ainult teaduslikul eesmärgil ja andmeanalüüsi tulemused publitseeritakse viisil, mis ei võimalda identifitseerida uuringus osalejate isikuid. Seega puudub võimalus õpilasi või õpetajaid uuringuandmete kaudu sildistada või marginaliseerida. Uuringus osalevate õpetajate andmete kogumisega seotud töö kompenseeriti kinkekaartidena vastavalt panusele, mis sõltus uuringusse kaasatud klasside ja õpilaste arvust. Uuritavatele õpilastele kompensatsiooni ei makstud. Uuritavad koolid, nende juhid ja õpetajad kaasati protsessi nii, et nad said uuringu käigus läbiviidavatest analüüsidesid kasu oma kooli ja õpetajate professionaalseks arendamiseks ning õppetöö tõhusamaks personaliseeritud kavandamiseks. Koolidele esitati tulemuste analüüsid üldistatud kujul kooli kõigi uuringus osalenud klasside kohta.

## Tulemused

### Matemaatikapädevuse testide kvaliteedi analüüs

Koostatud matemaatikapädevuse testide ja ülesannete kvaliteedi analüüsimiseks kasutasime IRT analüüsi, mille põhitabelid ja joonised on leitavad lisast A. Võttes arvesse keskmisi *infit*- ja *outfit*- näitajaid, jäid 35 kolmanda klassi ülesandest väljapoole soovitud piiri mõlemas indeksis üks ülesanne (CON2) ja ainult *outfit*-indeksi alusel täiendavalt veel 5 ülesannet (REA9, COM7, REA12, REP13, COM20\_1) (vt lisa A, tabel A.1). Kuuenda ja üheksanda klassi 36 ülesandest olid vastavad ülesannete arvud kuuendatel klassidel kaks (CON17, COM12) ja kolm (PRC1\_1, COM19, REA12) (vt lisa A, tabel A.2) ning üheksandatel klassidel ka kaks (COM3, REA9\_1) ja kolm (COM19, REA9\_2, REA8) (vt lisa A, tabel A.3). Seejuures on enamus neist ülesannetest vabavastuselised inimhinnatavad ülesanded (välja arvatud CON2 ja PRC1\_1), kus tekivad kergemini kõrvalekalded tüüpvastustest. Kõigi nende ülesannete puhul jäi vastuste arv, kus oodatav punktiskoor erines ülesande eest saadud punktidest,

alla 2% õpilaste koguarvust. Läbiviidud analüüsi tulemusena jätsime edasistest analüüsides välja ülesande CON2 ja parendasime vabavastuseliste ülesannete hindamisjuhendit.

Matemaatikapädevuse testide ülesannete hindamiskaala analüüs näitas vajadust vähendada hindamiskaalas punktitasemeid kolmandates klassides neljal ülesandel, kuuendates klassides kahel ülesandel ja üheksandates klassides kuuel ülesandel (vt lisa A, tabelid A.4–A.6). Ühtlasi järeldus analüüsist, et enamasti on ülesande vastamata jätmise korral (vastuse kood: täitmata, punktide arv NA) põhjendatud anda null punkti ehk ülesanne on vastamata, kuna seda ei osatud (variandi keerukus oli ligilähedane 0-punktistele vastustele). Eranditeks olid kolmandate klasside 4 viimast ülesannet (PRB17, CON18, PRC19, REA19, CON20\_1), kuuendate klasside 8 ülesannet (REP3, PRB7, CON8, REP10, PRC11, PRC13, REA13, REP14, CON17) ja üheksandate klasside 12 ülesannet (CON5, PRB5, PRB6, REA6, REA9\_1, PRC10, REP12, PRC13, REP15, CON16, CON18, COM19).

Õpilaste-ülesannete keerukusjooniselt (vt lisa A, joonised A.7–A.9) nähtub, et kõigis vaadeldud kooliastmetes on õpilaste matemaatikapädevuse tasemed ülesannetega hästi kaetud. Kolmandates klassides jääb õpilaste matemaatikapädevuse tase kahe standardhälbe ulatusest välja kahe ülesande puhul: CON18 ja PRC12. Võrreldes madalamal pädevuse tasemel olevate õpilastega (st skaala lõik  $-2$  kuni  $-4$ ) on ülesannetega paremini kaetud kõrgemal pädevuse tasemel olevad õpilased (st skaala lõik  $1$  kuni  $2$ ). Ülesanne PRC2 on nii madala keerukusega, et ka kõige madalamal matemaatikapädevuse tasemel paiknevad õpilased saavad selle lahendatud ehk ülesanne ei erista eri matemaatikapädevuse tasemega õpilasi ning edasistest analüüsides jätame selle välja. Kuuenda klassi õpilaste matemaatikapädevuse taseme kahe standardhälbe ulatusest jäävad välja ülesanded REP10\_1, REP10\_2, PRC4\_1, PRC4\_2 ja PRC13. Kuuendate klasside testi edasiarenduse mõttes võiks vähendada madala keerukusega ülesannete arvu (skaala  $-2$  ümbruses oleks piisanud ühest ülesandest) ja tuua sisse rohkem ülesandeid matemaatikapädevuse kõrgemal tasandil (lõik skaala  $1,5$  ja  $2$  ümbruses). Samuti võiks katta ülesannetega paremini ka skaala  $-1$  ning  $2$  ümbrused, kus õpilaste arv on suurem. Üheksandate klasside mõõtmisinstrumenti parendamise eesmärgil võiks katta ülesannetega paremini skaala  $-0,5$  ümbruse ja vähendada liiga madala keerukusega ülesannete hulka (ülesanded PRC1\_1, PRC2\_2, PRC2\_3). Õpilaste matemaatikapädevuse taseme kahe standardhälbe ulatusest jäävad välja ülesanded CON5, PRC1\_1, PRC2\_2 ja PRC2\_3. Kõigi kolme matemaatikapädevuse testi õpilaste ja ülesannete reliaablused on väga head: 3. klasside ja 6. klasside testidel vastavalt  $0,83$  ja  $0,99$  ning 9. klasside testil  $0,82$  ja  $0,99$ .

## Matemaatikapädevuse testide dimensioonid

Uurimaks matemaatikapädevuse empiirilisel eristatavaid dimensioone kasutatakse kinnitavat faktoranalüüsi. Tulemused näitasid, et 6-faktoriline andmemudel 3. klasside andmeid hästi ei kirjelda, kuna esineb tugev korrelatsioon seose loomise pädevuse ja esituspädevuse vahel. Arvestades, et kolmanda klassi materjal on veel vähe matemaatilisi üksusi, mille vahel seoseid luua, on seose loomise dimensiooni mitteeristumine kolmandates klassides ootuspärane. Ühendades seose loomise ja esituspädevuste dimensioonid ja lubades ülesannetevahelisi korrelatsioone, juhul kui ühe ja sama ülesande põhjal hinnatakse erinevaid matemaatikapädevuse dimensioone, saame aktsepteeritavate sobitusastme näitajatega andmemudeli (I andmekogumisel:  $\chi^2 = 550,806$ ,  $df = 446$ ,  $\chi^2/df = 1,235$ , RMSEA = 0,029, CFI = 0,935, TLI = 0,933, SRMR = 0,054; II andmekogumisel:  $\chi^2 = 592,665$ ,  $df = 446$ ,  $\chi^2/df = 1,329$ , RMSEA = 0,033, CFI = 0,942, TLI = 0,935, SRMR = 0,052). Samas on probleemiks suhteliselt kõrged korrelatsioonid latentsete tunnuste vahel (vahemikus 0,692 kuni 0,987). Seoses sellega sai kontrollitud ka kõrgemat järku latentse tunnusega matemaatikapädevuse andmemudelit (vt tabel 4), mille korral mudeli sobitusastme näitajad ei muutunud, kuid pisut vähenevad latentsete tunnuste vahelised korrelatsioonid, jäädes vahemikku 0,687 kuni 0,961. Kõige kõrgemaks jääb korrelatsioon arutluspädevuse ja kommunikatsioonipädevuse dimensioonide vahel (vt joonis 1), mis on osaliselt tingitud ka sellest, et reeglina hinnati arutluspädevuse ja kommunikatsioonipädevuse dimensioone samade ülesannete põhjal. Ühedimensionaalse andmemudeli sobitusastme näitajad on vaadeldud andmemudelitest kõige tagasihoidlikumad.

Kuuendates klassides on ülesanded komplekssemad, kus erinevad matemaatikapädevuse dimensioonid on rohkem segunenud, mistõttu ka ühedimensionaalne andmemudel näitab häid sobitusastme näitajaid (vt tabel 4). Kuuendate klasside andmetele 6-faktorine teoreetiline andmemudel ei sobitu, sest andmed näitavad lineaarset seost probleemi lahendamise pädevuse ja seose loomise pädevuse dimensioonide vahel. Väga head sobitusastme näitajad on 5-faktorilisel andmemudelil (vt tabel 4), seejuures latentsete tunnuste vahelised korrelatsioonid jäävad vahemikku 0,577 kuni 0,935. Lisades mudelisse kõrgemat järku latentse tunnusena matemaatikapädevuse, jäävad madalamat järku latentsete tunnuste vahelised korrelatsioonid vahemikku 0,561 kuni 0,926.

**Tabel 4.** Faktorstruktuuri sobitusastme näitajad (3. klassides I andmekogumisel N = 277 ja II andmekogumisel N = 298; 6. klassides I andmekogumisel N = 203 ja II andmekogumisel N = 245; 9. klassides I andmekogumisel N = 203 ja teisel andmekogumisel N = 202)

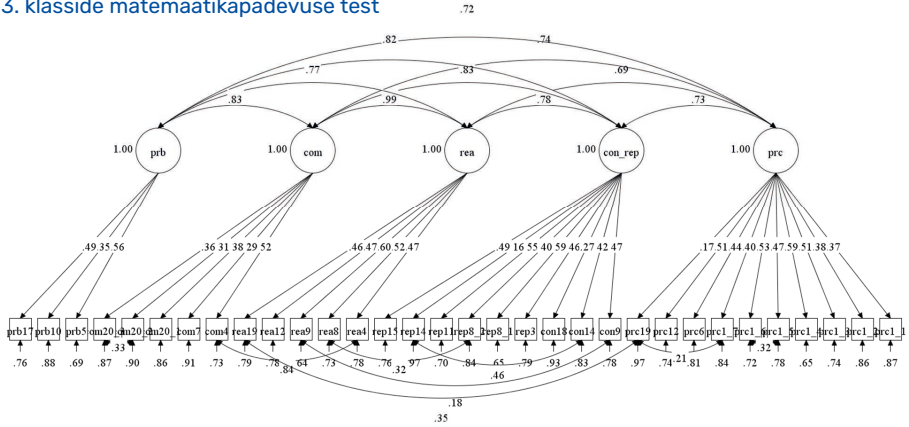
Mudel	Andmed	$\chi^2$	df	$\chi^2/df$	RMSEA	CFI	TLI	SRMR	
Väga hea oodatav väärtus (aktsepteeritav väärtus)		-	-	<2,0 (3,0)	<0,06	>0,95 (0,90)	>0,95 (0,90)	<0,08	
3. kl	5-faktoriline mudel (liidetud REP ja CON), lubades jääkide korrelatsioone*	I	550,81	446	1,23	0,029	0,935	0,933	0,054
		II	592,65	446	1,33	0,033	0,942	0,935	0,052
	5-faktoriline mudel kõrgemat järku faktoriga MATH, lubades jääkide korrelatsioone*	I	556,63	451	1,23	0,029	0,939	0,933	0,054
		II	605,08	451	1,34	0,034	0,939	0,933	0,053
	Ühedimensionaalne andmemudel, lubades jääkide korrelatsioone*	I	653,32	487	1,35	0,035	0,904	0,896	0,057
		II	729,01	487	1,50	0,041	0,903	0,895	0,056
6.kl	5-faktoriline mudel (liidetud PRB ja CON), lubades jääkide korrelatsioone**	I	516,00	442	1,17	0,029	0,954	0,949	0,059
		II	552,12	442	1,25	0,032	0,939	0,932	0,058
	5-faktoriline mudel kõrgemat järku faktoriga MATH, lubades jääkide korrelatsioone**	I	520,96	447	1,17	0,029	0,954	0,949	0,059
		II	576,56	447	1,29	0,034	0,928	0,920	0,059
	Ühedimensionaalne andmemudel, lubades jääkide korrelatsioone**	I	665,71	580	1,15	0,027	0,948	0,944	0,060
		II	777,74	580	1,34	0,037	0,899	0,891	0,060
9. kl	5-faktoriline mudel (puudub COM), lubades jääkide korrelatsioone*** ja jättes välja REP13 ning PRC9	I	528,29	444	1,19	0,031	0,937	0,929	0,062
		II	670,21	444	1,51	0,050	0,855	0,838	0,069
	Ühedimensionaalne andmemudel, lubades jääkide korrelatsioone*** ja jättes välja REP13 ning PRC9	I	743,72	516	1,44	0,047	0,835	0,821	0,071
		II	939,91	516	1,82	0,064	0,746	0,724	0,075

\* Ülesanded COM4 ja REA4, CON9 ja REA9, REP8\_2 ja REA8, CON14 ja REP14 ning PRC19 ja REA19 on ühe ja sama ülesande põhjal eri pädevuste hindamine ning seega on siin loomulik teatav korreleeritus. Samuti PRC19 ja PRC1\_7, CON20\_2 ja CON20\_3 ning PRC1\_5 ja PRC1\_6, mida ühendab sama teema.

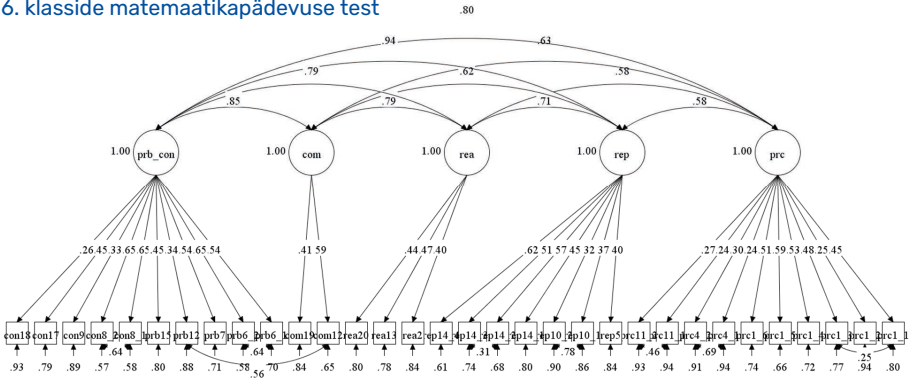
\*\* Tunnused COM12 ja PRB12 ning REA13 ja PRC13 on ühe ja sama ülesande põhjal eri pädevuste hindamine. Tunnuseid PRC19 ja PRC1\_7 ühendab sama teema ning CON20\_2 ja CON20\_3 on sama ülesande kaks alamülesannet.

\*\*\* Ülesanded CON5 ja PRB5 ning REA8 ja PRB8 on ühe ja sama ülesande põhjal eri pädevuste hindamine. Sama teemat käsitlevad ülesanded on PRC7, REA9, PRC2 ja PRC1 alamülesanded.

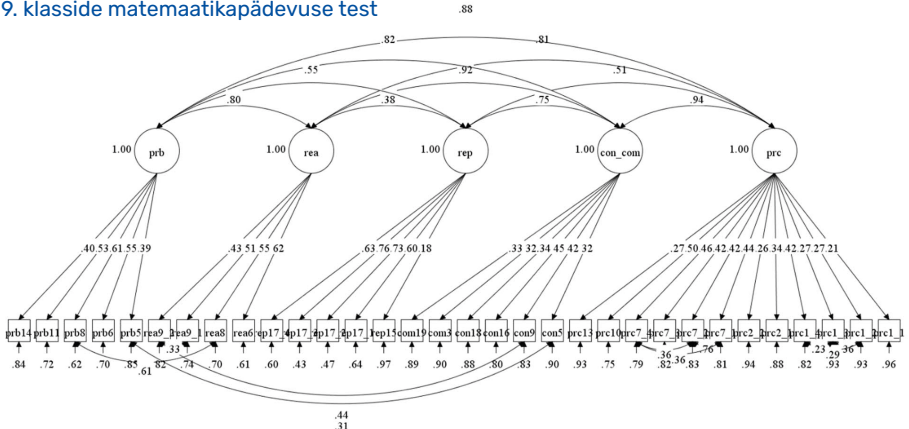
3. klasside matemaatikapädevuse test



6. klasside matemaatikapädevuse test



9. klasside matemaatikapädevuse test



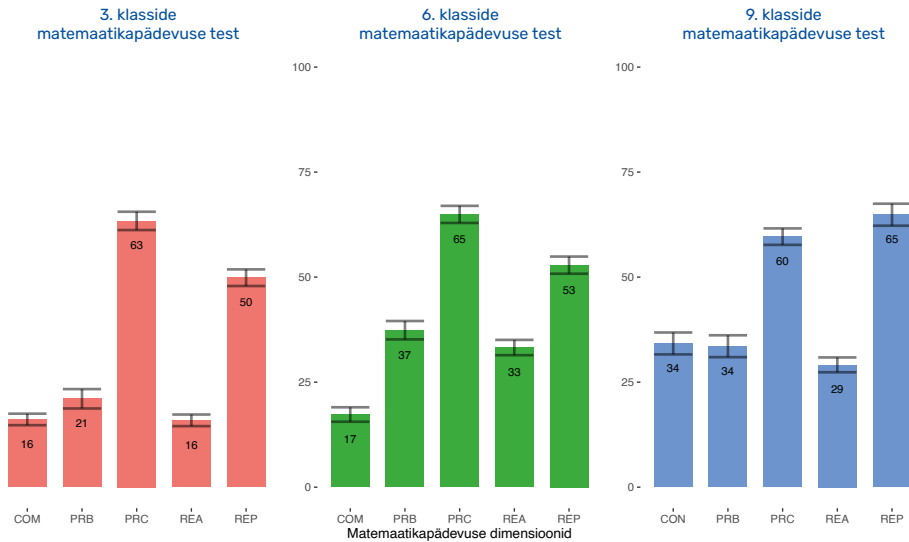
**Joonis 1.** Matemaatikapädevuse faktormudelid 3., 6. ja 9. klassides I andmekogumise põhjal (vastavalt N = 277, N = 203, N = 203). Faktorid: PRC = protseduuriline pädevus, CON = seose loomise pädevus, REP = esituspädevus, REA = arutluspädevus, PRB = probleemi lahendamise pädevus ja COM = kommunikatsiooni-pädevus. Joonisel on esitatud standarditud statistiliselt olulised (olulisuse nivoo 0,05) tulemused, kus latentsete tunnuste dispersioonid on fikseeritud.

Üheksandate klasside andmetel ei osutu võimalikuks määrata kommunikatsioonipädevuse dimensiooni kahe ülesande (COM3 ja COM19) põhjal, kuid mõlemad ülesanded sobituvad statistiliselt oluliselt (olulisuse nivool 0,05) kokku seose loomise pädevuse dimensiooniga. Latentsete tunnuste vahelised korrelatsioonid jäävad vahemikku 0,375 kuni 0,945, kuid CFI ja TLI on aktsepteeritava väärtuse piiril (vt tabel 4). Kõige kõrgem korrelatsioon on seose loomise pädevuse ja protseduurilise pädevuse vahel, mis oli põhjuseks, et välja sai jäetud ülesanne PRC9, sest sama ülesande pealt hinnati ka ülesannet CON9. Välja jäetud ülesande REP13 õigesti vastamise määr oli väga madal, mistõttu andis see ülesanne infot väheste õpilaste kohta.

Uute, empiirilistel andmetel tekkinud liitdimensioonide nimetamisel lähtume vastavas dimensioonis domineerivatest ülesannetest: kolmandate klasside esituse ja seose loomise ühispädevust nimetame edaspidi esituspädevuseks, kuuendate klasside probleemilahendamise ja seose loomise pädevuse ühisdimensiooni probleemi lahendamise dimensiooniks ja üheksandate klasside seose loomise pädevuse ja kommunikatsioonipädevuse liitdimensiooni asemel räägime seose loomise pädevuse dimensioonist.

### Matemaatikapädevuse hindamise tulemused

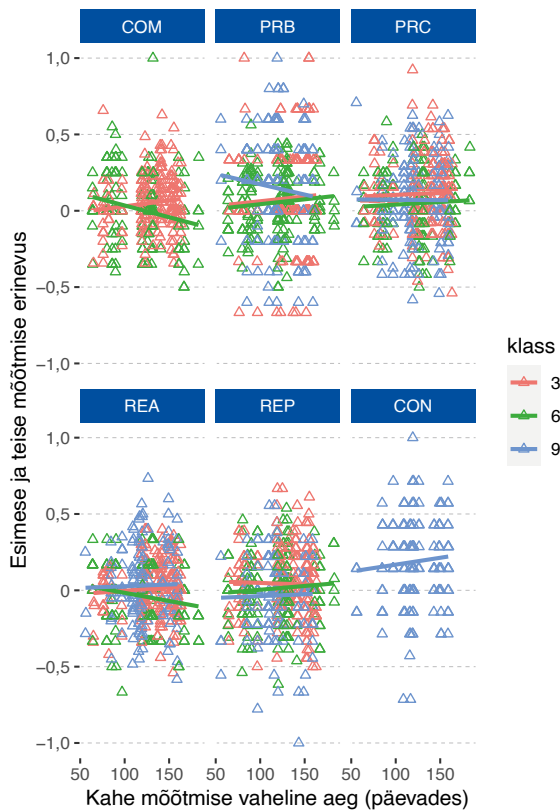
Keskmiseks matemaatikapädevuse tulemuseks üle kahe mõõtmise oli 3. klassides 39%, 6. klassides 46% ja 9. klassides 44% vastavate testide maksimumpunktidest. Kõigis kolmes klassiastmes lahendati kõige paremini protseduurilist pädevust ning esituspädevust hindavaid ülesandeid (vt joonis 2). Kolmandates klassides olid kõige madalamad tulemused kommunikatsioonipädevuses ja arutluspädevuses. Kuuendas klassis on võrreldes teiste dimensioonidega paranenud oskus oma valikuid ja järeldusi matemaatiliste argumentidega põhjendada (arutluspädevus) ja kõige madalamaks jäid tulemused kommunikatsioonipädevuses. Üheksandates klassides on taas kõige madalamad tulemused arutluspädevuses. Kolmandates ja kuuendates klassides on klassisisene dimensioonide omavaheline suhestumine sarnane ja säilib dimensioonide paremusjärjestus. Tinglikult säilib see isegi üheksandates klassides, kui vaadata probleemi lahendamise pädevuse, protseduurilise pädevuse, arutluspädevuse ja esituspädevuse dimensioone.



**Joonis 2.** Matemaatikatestis maksimumpunktidest saadud punktide osakaalud alam-pädevuste kaupa keskmisena üle kahe mõõtmise (kolmandates klassides  $N = 338$ , kuuendates klassides  $N = 294$ , üheksandates klassides  $N = 254$ ). Joonisele on lisatud 95% usaldusintervall. Tähisteks on PRC = protseduuriline pädevus, CON = seose loomise pädevus, REP = esituspädevus, REA = arutluspädevus, PRB = probleemi lahendamise pädevus ja COM = kommunikatsioonipädevus.

Matemaatikapädevuse hindamisel teostati kaks mõõtmist eesmärgiga uurida matemaatikapädevuse muutumise kiirust eraldiseisvalt ja teiste taustategurite kontekstis. Jooniselt 3 nähtub, et võrreldes teiste kooliastmetega on üheksandates klassides mõnevõrra rohkem koole, kus on suhteliselt lühike (alla 2 kuu) mõõtmistevaheline periood. Seda märkimisväärsem on statistiliselt oluline matemaatikapädevuse dimensioonide hindamistulemuste muutumine (vt joonis 4). Kuuendates klassides ulatub kahe mõõtmise vaheline periood võrreldes teiste kooliastmetega keskmiselt pikemaks, mis võiks anda eelise uute teadmiste omandamise kaudu rohkemate alampädevuste paranemiseks. Analüüs näitas, et nii see siiski ei olnud. Üldiselt on eri kooliastmetes kahe mõõtmise vahele jäävad ajad väga sarnase jaotusega (vt joonis 3) ja erinesid keskmiste põhjal vähe (keskmine kahe mõõtmise vaheline aeg 3. klassides oli 4,3 kuud, 6. klasside 4,1 kuud ja 9. klassides 4,0 kuud).

Kuigi matemaatikapädevuse enamuse dimensioonide puhul võib täheldada kasvavat lineaarset seost mõõtmistevahelise aja ja pädevuse taseme muutumise osas, on ühe kooliastme piires tegu pigem nõrga seosega, sest kahe mõõtmise vaheline periood on suhteliselt lühike. Siiski vajavad rohkem tähelepanu need kooliastmed ja matemaatikapädevuse alamdimensioonid, kus see seos on negatiivne: kuuendate klasside kommunikatsioonipädevus, üheksandate klasside probleemi lahendamise pädevus ning kuuendate klasside arutluspädevus.



**Joonis 3.** Esimese ja teise mõõtmise tulemuste erinevuse seos kahe mõõtmise vahele jääva ajaga kõigis matemaatikapädevuse dimensioonides ja eri kooliastmetes (kolmandates klassides  $N = 240$ , kuuendates klassides  $N = 219$ , üheksandates klassides  $N = 170$ ). Tähisteks on PRC = protseduuriline pädevus, CON = seose loomise pädevus, REP = esituspädevus, REA = arutluspädevus, PRB = probleemi lahendamise pädevus ja COM = kommunikatsioonipädevus.

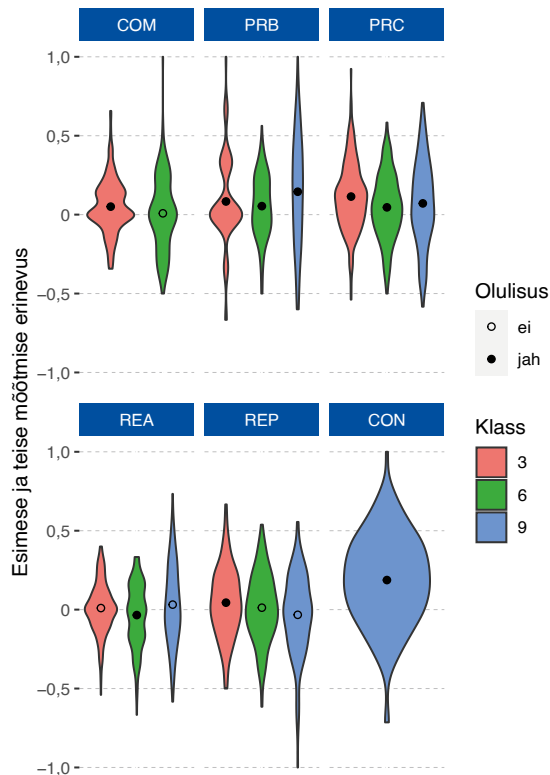
Esimese ja teise mõõtmine võrdluses toimus statistiliselt oluline muutus kolmandate klasside kommunikatsioonipädevuses, probleemi lahendamise pädevuses, protseduurilises pädevuses ja esituspädevuses (vt joonis 4). Kõige enam paranes protseduuriline pädevus. Efekti mõju on vastavalt keskmiselt 0,05, 0,08, 0,11 ja 0,04 protsendipunkti 132 päeva ehk, 3 kuu jooksul. Aastaga võiks oodata nimetatud pädevuste paranemist vastavalt 0,14, 0,22, 0,31 ja 0,11 protsendipunkti. Juhul kui need arengukiirused kehtiks pikemaks perioodiks, võiks 6. klassi kommunikatsioonipädevuste väärtusteks olla 16,42, mis vastab ligikaudu tegelikule käesolevas uuringus mõõdetud 6. klasside keskmisele kommunikatsioonipädevuse tulemusele.

Realistlik näib ka protseduurilise pädevuse paranemise kiirus 3. klassist 6. klassi üleminekul: 3. klassi tulemuste põhjal oleks oodatav protseduurilise



pädevuse tase 6. klassis 63,33%, mis jääb 6. klasside protseduurilise pädevuse tulemuse 95% usalduspiiridesse. Probleemi lahendamise pädevuse muutumise kiirus paistab aastatega progresseeruvat, sest kolmandast kuuendasse on hüpe oluliselt suurem kolmandas klassi leitud arengu kiirusest, mis võib viidata õpetajatepoolsele pidevale selle pädevuse fookuses hoidmisele. Viimane on kooskõlas asjaoluga, et protseduurilise pädevuse kõrval on probleemi lahendamise pädevus ainus, kus toimub süstemaatiline tulemuste paranemine igas kooliastmes.

Kuuendates klassides oli statistiliselt oluline matemaatikapädevuse dimensioonide paranemine probleemi lahendamise pädevuses ja protseduurilises pädevuses ning väike, kuid statistiliselt oluline vähenemine arutluspädevuses. Efekti mõju on vastavalt keskmiselt 0,05, 0,05 ja  $-0,03$  protsendipunkti 123 päeva ehk 4,1 kuu jooksul.



**Joonis 4.** Esimese ja teise mõõtmise tulemuste erinevuse võrdlus dimensioonide kaupa eri klassides. Erinevuse statistilise olulisuse määramiseks on kasutatud sõltuvate valimite t-testi usaldusnivool 0,05, kasutades Bonferroni korrigeerimist. Tähisteks on PRC = protseduuriline pädevus, CON = seose loomise pädevus, REP = esituspädevus, REA = arutluspädevus, PRB = probleemi lahendamise pädevus ja COM = kommunikatsioonipädevus.

Üheksandates klassides oli statistiliselt oluline matemaatikapädevuse dimensioonide paranemine probleemi lahendamise pädevuses, protseduurilises pädevuses ja seose loomise pädevuses efektidega vastavalt keskmiselt 0,15, 0,07, 0,07 ja 0,19 protsendipunkti 121 päeva ehk 4 kuu jooksul.

## Järeldused

Siinse uuringu eesmärgid olid matemaatikapädevust hindavate testide arendamine, matemaatikapädevuse empiirilisel eristatavate dimensioonide kirjeldamine ja matemaatikapädevuse hindamise tulemuste tutvustamine. Uuringu autorid on disaininud matemaatikapädevuse hindamise testid, mis võimaldavad hinnata protseduurilist pädevust, seose loomise pädevust (alates 9. klassist), esituspädevust, arutluspädevust, probleemi lahendamise pädevust ja kommunikatsioonipädevust (v.a 9. klassis) põhikooli 3., 6. ja 9. klassides, tuginedes Rootsist välja töötatud matemaatikapädevuse uurimise raamistikule (Lithner *et al.*, 2010), mida on täpsustatud uurijate poolt Eesti kontekstis (Johanson *et al.*, 2021). Matemaatikapädevuse uurimisraamistik on kooskõlas Eesti põhikooli riiklikus õppekavas (Põhikooli riiklik õppekava, 2021) sõnastatud matemaatika-, loodusteaduste- ja tehnoloogiaalase pädevuse definitsiooniga ning annab selgeid juhised, mille alusel seda raamistikku uute hindamisvahendite koostamiseks kasutada (Johanson *et al.*, 2021). Kuigi matemaatikapädevuse määratlemisega on tegeletud alates 2000. aastatest (NCTM, 2000; OECD, 2000; Niss, 2003; Niss & Jensen, 2002), ei ole kirjanduses leida uuringuid ja analüüse, mis tooksid välja empiirilist kinnitust leidnud matemaatikapädevuse dimensioonid. Pigem jäädakse kontseptuaalsete raamistike juurde (Lithner *et al.*, 2010, Neumann *et al.*, 2013). Siinne uurimus näitab, et MCRF kontseptuaalsele matemaatikapädevuse raamistikule tugines on võimalik luua empiirilisel eristuvate dimensioonidega instrumente.

Üksikvastuste teooria rakendamisel selgus, et testid tervikuna, testi elemendid ja hindamise skaalad on hea kvaliteediga, kuigi skaalad oleks veel võimalik edasi parendada, esmajoones vabavastuselistes ülesannetes, ja mõnevõrra kohendada erinevate raskusastmetega ülesannete arvu, pidades silmas õpilaste matemaatikapädevuse taset. Kinnitava faktoranalüüsi põhjal olid lähedaselt sobivad nii ühedimensionaalne matemaatikapädevuse käsitlus kui ka 5-faktoriline ja kõrgemat järku 5-faktoriline matemaatikapädevuse andmemudel. Siiski on eelistatum 5-faktoriline matemaatikapädevuse mudel, kuna see võimaldab välja tuua tegevusi valdkonnapädevuse tasandil selleks, et matemaatikapädevus tervikuna paraneks. Üheks ohuteguriks üheksandate klasside kommunikatsioonipädevuse mitteeristumisel kinnitavas faktoranalüüsis on madal kommunikatsioonipädevust mõõtvate ülesannete

arv. Kuigi soovitatavate küsimuste arv ühe latentse tunnuse mõõtmiseks sõltub valimi suurusest, peetakse siiski heaks vähemalt kolme küsimust/ülesannet latentse tunnuse kohta (Hu & Bentler, 2009). Latentsete tunnuste vahelised tugevad korrelatsioonid on ootuspärane tulemus, sest ka kirjanduses tuuakse välja, et matemaatikapädevuse alampädevused ei ole rangelt eraldatud dimensioonid (Niss & Højgaard, 2019). Viimane annab alust edaspidi uurida põhjalikumalt hierarhilisi matemaatikapädevuse dimensioonide andmemudeleid. Samas, mida vähem on kompleksseid, korruga mitut matemaatikapädevuse dimensiooni hindavaid ülesandeid, seda madalamad on ka latentsete tunnuste vahelised korrelatsioonid.

Võrreldes teoreetilise andmemudeliga käitub kõige ebastabiilsemalt kolmandate ja kuuendate klasside andmetes seose loomise pädevus, mis vähemalt osaliselt näib olevat tingitud asjaolust, et koolitunnid ja õppematerjalid on üles ehitatud teemapõhiselt (vt Ainevaldkond „Matemaatika”. Põhikooli riiklik õppekava. Lisa 3, 2014) ning matemaatiliste teemade, mõistete ja objektide vaheliste seoste loomine jääb õpilaste endi avastada. Üheksandates klassides, kus seose loomise dimensiooni on võimalik eristada, tuuakse see temaatika sisse põhikooli matemaatika lõpueksami eesmärkide lahtikirjutuses (vt Põhikooli matemaatika lõpueksami eristuskiiri, 2015). Edasise teadustöö seisukohalt oleks huvipakkuv analüüsida tunnis kasutatud õppemeetodeid õpilaste seose loomise pädevuse mõõtmistulemuste kontekstis. Kirjanduses tuuakse esile, et arendamiseks seoste loomise pädevust on oluline kasutada innovatiivseid õppemeetodeid (Hendriana *et al.*, 2014). Õpilaste madal seose loomise pädevuse tase on probleemiks aga ka muudes riikides (Slamet & Sumarmo, 2014, Menanti *et al.*, 2018).

Matemaatikapädevuse tulemuseks kahe mõõtmise keskmisena oli 3. klassides 39%, 6. klassides 46% ja 9. klassides 44% vastavate testide maksimumpunktidest. Kõrvutades uuringu üheksandate klasside tulemust 2022. aasta põhikooli matemaatika lõpueksamite keskmise tulemusega (60%, Eksamite infosüsteem. Eksamite statistika, 2022), esineb näitajates ligi kolmandiku suurune erinevus. Kuigi põhikooli matemaatika lõpueksami eesmärgiks on hinnata muuhulgas üldpädevuste ja valdkonnapädevuste tulemusi (vt Põhikooli matemaatika lõpueksami eristuskiiri, 2015), selgub detailsemal matemaatika lõpueksamite eristuskiirja analüüsil, et selles keskendutakse siiski peamiselt õppekava õpitulemuste ehk matemaatikapädevuse protseduurilisele dimensioonile ning kvantitatiivsetele ja ruumilistele seostele, mis viitab seose loomise pädevusele. 9. klasside matemaatika lõpueksami tulemus on võrreldavas suurusjärgus uuringus hinnatud protseduurilise dimensiooni hinnanguga (60%). Kõikides kooliastmetes sarnaselt on kõige paremad tulemused protseduurilises pädevuses (kolmandates klassides 63%, kuuendates klassides

65% ja üheksandates klassides 60% vastava dimensiooni maksimumpunktidest) ja esituspädevuses (vastavalt 50%, 53% ja 65%). Tuginedes uuringus saadud matemaatikapädevuse dimensioonide hinnangule on võrreldes praeguste fookustega õppetegevuses vaja rohkem tähelepanu pöörata arutluspädevuse ehk põhjendamisoskuste arendamisele (tulemused 3. klassides 15%, 6. klassides 33% ja 9. klassides 29% maksimumpunktidest). Vastavalt Larssoni ja Ryve uuringule (2012) võimaldab keeruliste matemaatiliste probleemide lahendamine grupis arendada esitus-, seose loomise ja arutluspädevust. Madalad tulemused on ka matemaatilises kommunikatsioonioskuses (kolmandate ja kuuendate klasside tulemus vastavalt 16% ja 17% maksimumpunktidest), kuid täpsemate järelduste tegemiseks oleks vaja kommunikatsioonipädevuse mõõtmises eristada matemaatilise tekstist aru saamist ja matemaatiliste teksti ise kirjutamist. Autorite hüpoteesiks on, et tegelikult on kommunikatsioonipädevuse tase siiski uuringus mõõdetust kõrgem: madalamates kooliastmetes on arvutiga, eriti tahvelarvutit kasutades, matemaatilise teksti kirjapanek erinev paberi ja pliitsiga vastuste kirjutamisest.

Kuigi uuringus teostatud kahe mõõtmise ajaline vahe ei olnud suur, õnnestus näidata usaldusnivool 0,05 statistiliselt olulisi erinevusi matemaatikapädevuse dimensioonide muutustes. Esimese ja teise mõõtmise võrdluses näitasid andmed, et kuuendates klassides aeglustub õpilaste matemaatikapädevuse areng: tulemused paranesid statistiliselt oluliselt kolmandates klassides neljas alampädevuses, kuuendates klassides kahes alampädevuses ja üheksandates klassides kolmes alampädevuses. Selgitamaks välja selle aeglustumise põhjuseid oleks vaja kriitilise pilguga üle vaadata õppematerjalid ja ka muutused matemaatikatundide arvus. Arutluspädevuse oskuse vähenemise põhjuseks kuuendas klassis on väga hea pädevuse tasemega õpilaste puudumine. See võib viidata asjaolule, et arutluspädevuses teatava taseme saavutanud õpilastele ei pakuta täiendavaid väljakutseid ja/või ei tutvustata neile matemaatilist argumenteerimist, mis jääb tüüpraamist välja. (Analoogiline „lagi“ esineb ka kolmandate klasside arutluspädevuste tulemuses, kuid puudub üheksandates klassides.) Lisaks jäi kuuendates klassides üksikvastuste tasandil silma ka see, et esines õpilasi, kes pikemate (arutluspädevuse ülesannete) vastuste korral teisel mõõtmisel märkisid vastuse lahtrisse, et „nad ei viitsi uuesti seda vastust kirja panna“, mis kahtlemata on ohukohaks, kui kahe mõõtmise vahele jääb lühem ajavahe.

Täiendavat uurimist vajab asjaolu, miks esinevad kolmandates klassides probleemi lahendamise pädevuse, vähemal määral ka kommunikatsioonipädevuse ja arutluspädevuse arengus erisuunalised grupid/klastrid (vt joonis 8), mille mõju jätkub kommunikatsioonipädevuses ja arutluspädevuses ka kuuendas klassis, kuid elimineerub täielikult üheksandaks klassiks. Kas on võimalik, et tegu on kolmandates klassides sisse toodavate temporühmade efektiga või on mõjuteguriks erinevad matemaatikatundide arvud koolides?

## Tänusõnad

Artikkel on valminud projekti DIGIVARA5 „DigiEfekt: Digitaalse õppevara kasutamise mõju õppimisele ja õpetamisele Eesti põhihariduse näitel (1.05.2020–30.04.2023)“ toetusel.

Täname matemaatikapädevuse testide kaasautoreid Maarja Sõrmust ja Hannes Jukki, kellela artiklis vaadeldavaid matemaatikapädevuse teste sellisel kujul olemas ei oleks.

## Kasutatud kirjandus

- Ainevaldkond „Matemaatika“. Põhikooli riiklik õppekava. Lisa 3 (2014). *Riigi Teataja* 2011, 1. Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/aktuilisa/1290/8201/4018/141m%20lisa3.pdf#>
- Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (1997, August). Evaluating principles for multi-representational learning environments. *Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, Athens, Greece*, 500–501.
- Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2018). Assessing mathematical competencies: an analysis of Swedish national mathematics tests. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 62(1), 109–124. <https://doi.org/10.1080/00313831.2016.1212256>
- Bond, T. G., & Fox, C. M. (2001). *Applying the Rasch model fundamental measurement in the human sciences*. ERL Lawrence Baum Associates Publishers, London.
- Bowen, N. K., & Guo, S. (2011). *Structural equation modelling*. New York: Oxford University Press.
- Cai, J., Jakabcsin, M. S., & Lane, S. (1996). Assessing students' mathematical communication. *School Science and Mathematics*, 96(5), 238–246. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1996.tb10235.x>
- Edwards, M., Harper, S., Cox, D., Quinlan, J., & Phelps, S. (2014). Cultivating deductive thinking with angle chasing. *The Mathematics Teacher*, 107(6), 426–431. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.107.6.0426>
- Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658–672. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.011>
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., et al. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 98(1), 29–43. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.98.1.29>
- Grønmo, L. S., Lindquist, M., Arora, A., & Mullis, I. V. S. (2015) TIMSS 2015 Mathematics Framework. Külastatud aadressil [https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15\\_FW\\_Chap1.pdf](https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/downloads/T15_FW_Chap1.pdf)

- Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21, 139–157. <https://doi.org/10.1007/BF03338914>
- Halmos, P.R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519–524. <https://doi.org/10.1080/00029890.1980.11995081>
- Hasanah, S. I., Tafrilyanto, C. R., & Aini, Y. (2019). Mathematical reasoning: The characteristics of students' mathematical abilities in problem solving. *Journal of Physics: Conference Series*, 1188. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1188/1/012057>
- Hendriana, H., Slamet, U. R., & Sumarmo, U. (2014). Mathematical connection ability and self-confidence (An experiment on junior high school students through contextual teaching and learning with mathematical manipulative). *International Journal of Education*, 8(1), 1–11. <https://ejournal.upi.edu/index.php/ije/article/view/1726/1176>
- Højsted, I. H. (2021). Teachers reporting on dynamic geometry utilization related to reasoning competency in Danish lower secondary school. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 91–105. <https://doi.org/10.1007/s40751-020-00059-3>
- Hu, L. T., & Bentler, P. M. (2009). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives. *Structural equation modeling: a multidisciplinary journal*, 6(1), 1–55. <https://doi.org/10.1080/10705519909540118>
- Johanson, M., Pedaste, M., Pastak, M., Täht, K., Sõrmus, M., & Jukk, H. (2021). Matemaatikapädevuse hindamine Eesti e-tasemetöödega. *Estonian Journal of Education/Eesti Haridusteaduste Ajakiri*, 9(2), 100–126. <https://doi.org/10.12697/eha.2021.9.2.05>
- Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 55–85. <https://doi.org/10.1023/A:1012789201736>
- Juandi, D. (2021). Heterogeneity of problem-based learning outcomes for improving mathematical competence: A systematic literature review. *Journal of Physics: Conference Series*, 1722. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012108>
- Kikas, E., Peets, K., Palu, A., & Afanasjev, J. (2009). The role of individual and contextual factors in the development of maths skills. *Educational psychology*, 29(5), 541–560. <https://doi.org/10.1080/01443410903118499>
- Larsson, M., & Ryve, A. (2012). Balancing on the edge of competency-oriented versus procedural-oriented practices: Orchestrating whole-class discussions of complex mathematical problems. *Mathematics Education Research Journal*, 24(4), 447–465. <https://doi.org/10.1007/s13394-012-0049-0>
- Leung, A. (2015). Discernment and reasoning in dynamic geometry environments. In S. Cho (Ed.), *Selected regular lectures from the 12th international congress on mathematical education*, 451–469. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_26)
- Linacre, J. M. (2020). Winsteps1 (Version 4.5.4) [Arvuti tarkvara]. Beaverton: Winsteps.com <http://www.winsteps.com>.

- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T., & Palmberg, B. (2010). Mathematical competencies: A research framework. In *The seventh mathematics education research seminar, Stockholm, January 26–27, 2010* (pp. 157–167). Svensk förening för matematikdidaktisk forskning, SMDF.
- Lomibao, L. S., Luna, C. A., & Namoco, R. A. (2016). The influence of mathematical communication on students' mathematics performance and anxiety. *American Journal of Educational Research*, 4(5), 378–382. <http://pubs.sciepub.com/education/4/5/3/>.
- Lühikokkuvõte 2022/2023. õppeaasta 4. klassi matemaatika tasemetöö tulemustest (2022). Haridus- ja Noorteameti kodulehekül. Külastatud aadressil <https://projektid.edu.ee/pages/viewpage.action?pageId=144345118>.
- Lühikokkuvõte 2022/2023. õppeaasta 7. klassi matemaatika tasemetöö tulemustest (2022). Haridus- ja Noorteameti kodulehekül. Külastatud aadressil <https://projektid.edu.ee/pages/viewpage.action?pageId=144345118>
- Muthén, L. K., & Muthén, B. O. (2016). Mplus. Version 7.4 [Computer software]. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- NCTM (2000). *Executive summary. Principles and standards for school mathematics*. Külastatud aadressil [https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards\\_and\\_Positions/PSSM\\_ExecutiveSummary.pdf](https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/PSSM_ExecutiveSummary.pdf)
- Neumann, I., Duchhardt, C., Grüßing, M., Heinze, A., Knopp, E., & Ehmke, T. (2013). Modeling and assessing mathematical competence over the lifespan. *Journal for educational research online*, 5(2), 80–109. <https://doi.org/10.25656/01:8426>
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish KOM project.
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9>
- Niss, M., & Jensen, T.H. (eds.). (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, 18, 1–334, Undervisningsministeriet (Ministry of Education).
- Nunes, T., & Csapó, B. (2011). Developing and assessing mathematical reasoning.
- OECD (2000). *Measuring Student Knowledge and Skill. The PISA 2000 assessment of reading, mathematical and scientific literacy*. Külastatud aadressil <http://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33692793.pdf>
- OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science and problem solving, knowledge and skills*. Külastatud aadressil <http://www.oecd.org/education/school/programmeforinternationalstudentassessmentpisa/33694881.pdf>
- OECD (2018). *Assessment and analytical framework*. Külastatud aadressil <http://www.oecd.org/education/pisa-2018-assessment-and-analytical-framework-b25efab8-en.htm>

- Pedaste, M., Baucal A., & Reisenbuk, E. (2021). Towards a science inquiry test in primary education: development of items and scales. *International Journal of STEM Education*, 8(19). <https://doi.org/10.1186/s40594-021-00278-z>
- Pedersen, M. K., Bach, C. C., Gregersen, R. M., Højsted, I. H., & Jankvist, U. T. (2021). Mathematical representation competency in relation to use of digital technology and task design. A literature review. *Mathematics*, 9(4), 444. <https://doi.org/10.3390/math9040444>
- Phonapichat, P., Wongwanich, S., & Sujiva, S. (2014). An analysis of elementary school students' difficulties in mathematical problem solving, *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 116, 3169–3174. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.01.728>
- Primi, R., Ferrão, M. E., Almeida, L. S. (2010). Fluid intelligence as a predictor of learning: a longitudinal multilevel approach applied to math. *Learning and Individual Differences*, 20(5), 46–51. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2010.05.001>
- Põhikooli ja gümnaasiumi riiklik õppekava (2002). *Riigi Teataja I 2002*, 20, 116. Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/12888846>
- Põhikooli matemaatika lõpueksami eristuskiri (2015). *Haridus- ja Noorteameti kodulehekülg*. Külastatud aadressil <https://harno.ee/eksamid-testid-ja-uuringud/eksamid-testid-ja-lopudokumentid/pohikooli-lopueksamid#materjalid>
- Põhikooli riiklik õppekava (2021). *Riigi Teataja I 2021*, 10. Külastatud aadressil <https://www.riigiteataja.ee/akt/123042021010>
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Singley, A. T. M., & Bunge, S. A. (2014). Neurodevelopment of relational reasoning: Implications for mathematical pedagogy. *Trends in Neuroscience and Education*, 3, 33–37. <https://doi.org/10.1016/j.tine.2014.03.001>
- Siregar, N. D., & Surya, E. (2017). Analysis of students' junior high school mathematical connectionability. *International Journal of Sciences: Basic and Applied Research (IJSBAR)*, 33(2), 309–320.
- Sumirattana, S., Makanong, A., & Thipkong, S. (2017). Using realistic mathematics education and the DAPIC problem-solving process to enhance secondary school students' mathematical literacy. *Kasetsart Journal of Social Sciences*, 38(3), 307–315. <https://doi.org/10.1016/j.kjss.2016.06.001>
- Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 265–280. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2>
- Toomela, A., Mädamürk, K., Soodla, P., & Härma, E. (Toim) (2020). *Arvutipõhised hindamisvahendid lugemis- ja matemaatikapädevuse hindamiseks põhikooli I ja II kooliastmes. Juhendid testide läbiviimiseks ja tulemuste interpreteerimiseks*. Külastatud aadressil [https://www.innove.ee/wp-content/uploads/2020/05/Juhend\\_o%CC%83petajatele\\_kujundatud.pdf](https://www.innove.ee/wp-content/uploads/2020/05/Juhend_o%CC%83petajatele_kujundatud.pdf)
- Voutsina, C. (2012). Procedural and conceptual changes in young children's problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 79, 193–214. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9334-1>



## LISA A

**IRT analüüsi põhitabelid ja joonised**

Tabelid A.1.–A.3 käsitlevad matemaatikapädevuse testide ülesannete kvaliteedinäitajad (sobitusnäitajaid). Keskmine *infit* ja keskmine *outfit* väljendavad Infit MNSQ ja Outfit MNSQ indekseid, mis näitavad, kui hästi on konkreetse ülesande eest prognoositud punktid kooskõlas õpilaste tegelikult saadud punktidega (ülesanded indeksiga vahemikus 0,7–1,3 loetakse headeks ülesanneteks).

**Tabel A.1.** 3. klasside matemaatikapädevuse testi ülesannete kvaliteedinäitajad (sobitusnäitajad) (N = 278<sub>I</sub>mootmine + 299<sub>II</sub>mootmine)

	Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit		Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit
<b>CON2</b>	-1,33	<b>2,20</b>	<b>3,23</b>	<b>CON18</b>	-2,13	0,94	0,85
<b>REA9</b>	0,67	1,27	<b>2,03</b>	<b>PRC19</b>	-1,04	0,94	0,90
<b>COM7</b>	1,44	1,05	<b>1,72</b>	<b>PRC6</b>	-0,66	0,93	0,93
<b>REA12</b>	1,23	1,15	<b>1,54</b>	<b>REP15</b>	-1,60	0,93	0,86
<b>REP13</b>	1,80	1,11	<b>1,48</b>	<b>PRC1_6</b>	-0,37	0,92	0,90
<b>COM20_1</b>	0,35	1,23	<b>1,48</b>	<b>REP8_2</b>	0,99	0,92	0,87
<b>COM4</b>	0,92	1,09	1,16	<b>PRB10</b>	1,74	0,92	0,81
<b>CON14</b>	0,23	1,13	1,14	<b>PRB17</b>	1,41	0,91	0,83
<b>PRC1_7</b>	0,20	1,10	1,07	<b>PRC1_5</b>	-0,88	0,90	0,87
<b>COM20_2</b>	1,04	1,10	1,10	<b>PRC1_4</b>	-1,19	0,88	0,81
<b>COM20_3</b>	1,20	1,01	1,07	<b>CON9</b>	0,02	0,88	0,85
<b>PRC1_1</b>	-1,70	1,02	1,05	<b>PRB5</b>	0,78	0,87	0,83
<b>REA8</b>	1,37	0,99	1,00	<b>PRC12</b>	-1,11	0,87	0,78
<b>REP14</b>	-1,22	0,99	0,96	<b>REP11</b>	0,17	0,86	0,84
<b>PRC1_2</b>	0,19	0,96	0,96	<b>REP8_1</b>	-0,98	0,85	0,78
<b>PRC1_3</b>	-1,31	0,94	0,87	<b>REA19</b>	1,61	0,84	0,79
<b>PRC2</b>	-3,29	0,94	0,87	<b>REA4</b>	1,48	0,81	0,73
<b>REP3</b>	-0,02	0,94	0,93				

**Tabel A.2.** 6. klasside matemaatikapädevuse testi ülesannete kvaliteedinäitajad (sobitusnäitajad) (N = 205<sub>mõõtmine</sub> + 246<sub>II mõõtmine</sub>)

	Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit		Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit
CON17	1,05	<b>1,37</b>	<b>1,76</b>	PRC13	-2,28	0,97	0,86
COM12	1,14	<b>1,35</b>	<b>1,65</b>	REP14_1	0,79	0,97	0,97
PRC1_1	-0,34	1,29	<b>1,48</b>	REP5	-0,17	0,96	0,95
COM19	1,48	1,24	<b>9,90</b>	PRB15	-0,27	0,95	0,93
REA2	0,68	1,21	<b>1,37</b>	CON18	1,81	0,95	0,91
PRC1_6	-0,19	1,13	1,10	PRB7	0,05	0,94	0,91
REP3	-0,74	1,13	1,17	REP14_3	0,93	0,94	0,90
REP16	0,31	1,11	1,16	REP14_2	0,72	0,93	0,97
REA13	-0,01	1,08	1,04	REP10_2	-1,57	0,92	0,78
PRC1_2	0,59	1,03	1,03	PRC1_3	-0,07	0,91	0,89
PRC1_4	0,13	1,03	0,98	PRB12	-0,38	0,91	0,88
REA20	1,40	1,03	1,62	PRC1_5	0,40	0,90	0,88
PRC11_1	-0,48	1,02	1,02	REP10_1	-1,57	0,90	0,80
PRC11_3	-1,22	1,02	1,02	REP14_4	0,14	0,89	0,89
CON9	0,37	1,01	0,99	PRB6_1	0,22	0,87	0,84
PRC11_2	-0,62	0,98	0,99	CON8_2	1,16	0,86	0,78
PRC4_1	-2,13	0,97	0,92	PRB6_2	0,32	0,79	0,76
PRC4_2	-2,11	0,97	0,83	CON8_1	0,48	0,78	0,78

**Tabel A.3.** 9. klasside matemaatikapädevuse testi ülesannete kvaliteedinäitajad (sobitusnäitajad) ( $N = 204_{I\text{ mõõtmise}} + 203_{II\text{ mõõtmise}}$ )

	Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit		Keeru- kus	Keskm. infit	Keskm. outfit
<b>COM3</b>	0,12	<b>1,67</b>	<b>1,93</b>	<b>PRC2_1</b>	-1,24	0,95	0,89
<b>REA9_1</b>	0,31	<b>1,40</b>	<b>1,57</b>	<b>PRC7_2</b>	-0,02	0,94	0,93
<b>COM19</b>	0,53	1,30	<b>1,39</b>	<b>PRC7_1</b>	-0,10	0,94	0,92
<b>REA9_2</b>	0,76	1,29	<b>2,03</b>	<b>PRC9</b>	0,56	0,94	0,91
<b>REP13</b>	0,95	1,26	1,17	<b>PRC7_3</b>	-0,75	0,93	0,90
<b>REA8</b>	0,54	1,15	<b>1,44</b>	<b>PRB11</b>	1,20	0,93	0,87
<b>CON18</b>	0,00	1,07	1,14	<b>CON5</b>	1,83	0,93	0,81
<b>REP17_2</b>	-0,23	1,04	1,06	<b>REP17_1</b>	-0,05	0,92	0,91
<b>PRC2_3</b>	-1,73	1,03	0,96	<b>REP17_4</b>	-0,70	0,92	0,90
<b>PRC1_2</b>	0,55	1,02	1,22	<b>PRC2_2</b>	-1,96	0,92	0,78
<b>REP12</b>	-0,98	1,02	1,01	<b>CON9</b>	0,83	0,91	0,89
<b>PRB14</b>	0,39	1,02	0,97	<b>PRC7_4</b>	0,18	0,90	0,89
<b>REP15</b>	-1,06	1,01	1,03	<b>PRB5</b>	0,03	0,90	0,88
<b>PRC1_4</b>	0,29	0,99	0,97	<b>PRB6</b>	0,84	0,90	0,88
<b>PRC1_1</b>	-1,65	0,98	0,99	<b>REP17_3</b>	-0,62	0,88	0,85
<b>PRC13</b>	-0,82	0,98	0,96	<b>PRC10</b>	-0,20	0,85	0,83
<b>CON16</b>	0,48	0,98	0,91	<b>REA6</b>	0,97	0,84	0,87
<b>PRC1_3</b>	0,84	0,96	0,97	<b>PRB8</b>	0,37	0,82	0,79

Tabelid A.4.–A.6 käsitlevad matemaatikapädevuse testide ülesandeid, kus IRT analüüs näitas vajadust hindamisskaalasid parendada. Iga vastusevariandi kohta on tabelis ära toodud vastuse kodeering ja punktid (NA tähistab tühjaks jäetud väärtust), vastuse andnud õpilaste arv ja osakaal ning keerukuse näitaja. Hea skaala näitaja on see, et mida rohkem punkte vastuse variant annab, seda kõrgem on vastusevariandi keerukus.

**Tabel A.4.** Matemaatikapädevuse testi 3. klasside (N = 278<sub>I</sub> mõõtmise + 299<sub>II</sub> mõõtmise) ülesanded, kus IRT analüüs näitas vajadust hindamisskaalasid parendada

	Kodeering	Punktid	Õpilaste arv	Osakaal (%)	Keerukus
<b>REA8</b>	0	0	408	78	-0,18
	2	0,1	27	5	0,69
	4	0,2	56	11	<b>0,60*</b>
	6	0,3	11	2	0,72
	8	0,5	5	1	<b>1,15*</b>
	10	0,8	8	2	0,96
	12	1	6	1	1,31
	Täitmata	NA	55	10	-0,68
<b>REA9</b>	0	0	329	68	-0,27
	2	0,2	5	1	0,40
	4	0,3	1	0	<b>0,35*</b>
	6	0,5	58	12	<b>0,27*</b>
	8	0,7	8	2	0,74
	12	1	86	18	0,87
	Täitmata	NA	89	15	-0,47
<b>REA12</b>	0	0	396	73	-0,24
	3	0,2	9	2	0,59
	6	0,3	34	6	0,66
	9	0,5	90	17	<b>0,60*</b>
	12	1	16	3	0,78
	Täitmata	NA	31	5	-0,99
<b>COM20_1</b>	0	0	160	40	-0,53
	7	0,3	121	30	0,35
	10	0,4	14	3	<b>-0,04*</b>
	12	0,5	110	27	0,52
	Täitmata	NA	171	30	-0,27
<b>COM20_2</b>	0	0	321	79	-0,13
	5	0,2	34	8	0,45
	7	0,3	6	1	<b>0,35*</b>
	10	0,4	4	1	0,46
	12	0,5	40	10	0,93
	Täitmata	NA	171	30	-0,27

**Tabel A.5.** Matemaatikapädevuse testi 6. klasside (N = 205<sub>I</sub> mõõtmise + 246<sub>II</sub> mõõtmise) ülesanded, kus IRT analüüs näitas vajadust hindamisskaalasid parendada

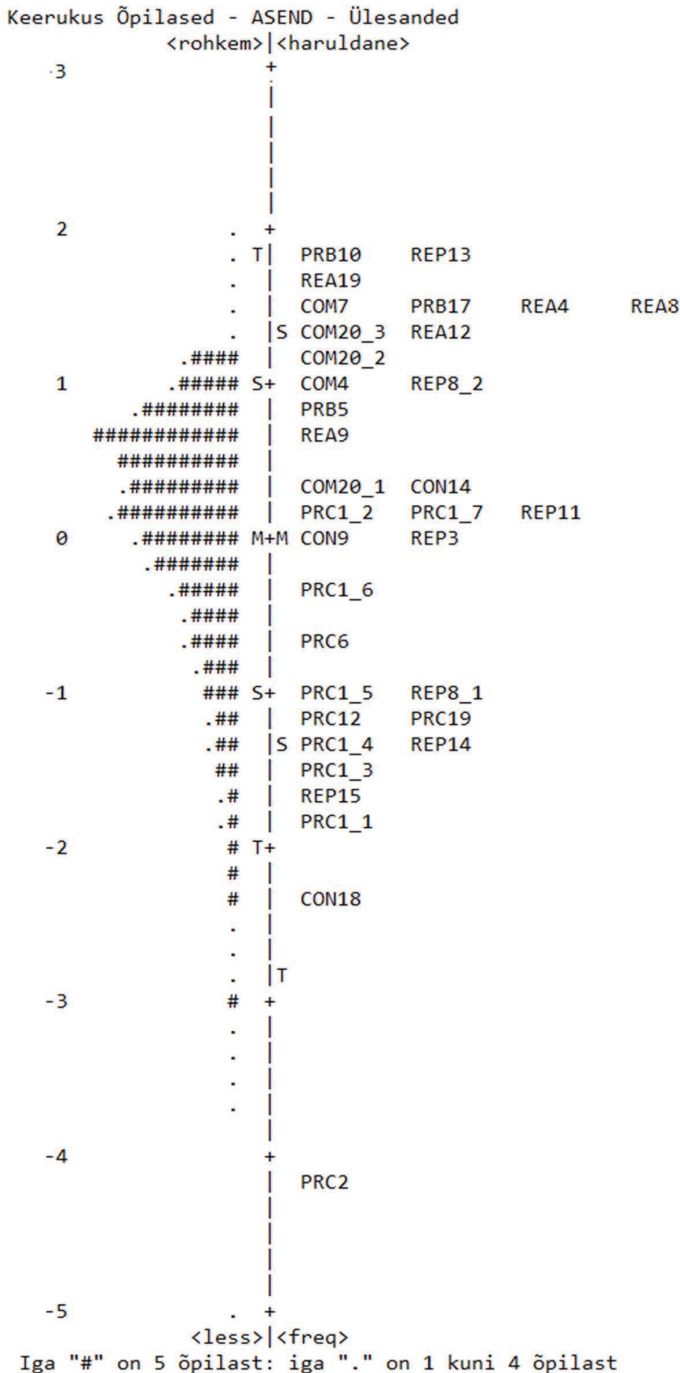
	Kodeering	Punktid	Õpilaste arv	Osakaal (%)	Keerukus
<b>PRC1_6</b>	0	0	163	37	-0,3
	10	0,4	4	1	0,62
	12	0,5	278	62	<b>0,48*</b>
	Täitmata	NA	3	1	-0,56
<b>COM19</b>	0	0	269	90	0,09
	1	0,1	1	0	0,54
	2	0,2	1	0	<b>-0,42*</b>
	3	0,3	2	1	<b>0,51*</b>
	5	0,4	6	2	1,06
	6	0,5	5	2	1,25
	7	0,6	3	1	<b>0,89*</b>
	11	0,9	2	1	1,98
	12	1	10	3	<b>1,38*</b>
	Täitmata	NA	149	33	0,18

**Tabel A.6.** Matemaatikapädevuse testi 9. klasside (N = 204<sub>I</sub> mõõtmise + 203<sub>II</sub> mõõtmise) ülesanded, kus IRT analüüs näitas vajadust hindamisskaalasid parendada

	Kodeering	Punktid	Õpilaste arv	Osakaal (%)	Keerukus
<b>COM3</b>	0	0	53	13	-0,65
	1	0,1	5	1	<b>-0,71*</b>
	2	0,2	20	5	-0,19
	3	0,3	3	1	0,06
	5	0,4	14	4	<b>-0,12*</b>
	6	0,5	83	21	<b>0,02*</b>
	7	0,6	8	2	0,49
	8	0,7	185	47	<b>0,23*</b>
	10	0,8	1	0	0,68
	11	0,9	3	1	<b>0,54*</b>
	12	1	20	5	0,75
	Täitmata	NA	10	2	-0,70
	<b>REAB</b>	0	0	144	40
1		0,1	19	5	-0,12
2		0,2	52	14	0,04
3		0,3	17	5	0,15
5		0,4	14	4	0,17
6		0,5	5	1	0,61
7		0,6	49	14	<b>0,50*</b>
8		0,7	8	2	<b>0,50*</b>
10		0,8	20	6	<b>0,56*</b>
11		0,9	9	3	<b>0,59*</b>
12		1	22	6	0,76
Täitmata		NA	46	11	-0,29
<b>REA9_1</b>		0	0	181	45
	1	0,1	4	1	-0,03
	2	0,2	48	12	0,15
	3	0,3	19	5	<b>0,12*</b>
	5	0,4	6	2	0,41
	6	0,5	31	8	<b>0,25*</b>
	8	0,7	3	1	<b>0,29*</b>
	10	0,8	12	3	0,51
	12	1	95	24	0,54
	Täitmata	NA	6	1	-0,23

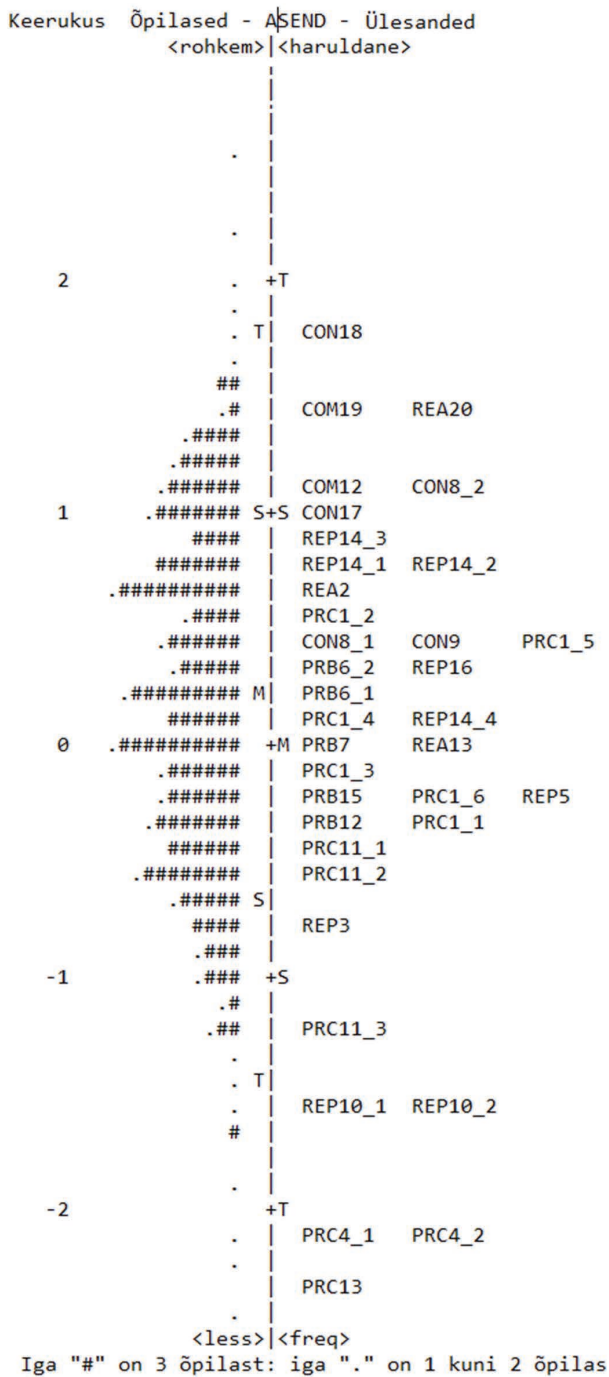
	Kodeering	Punktid	Õpilaste arv	Osakaal (%)	Keerukus
<b>REA9_2</b>	0	0	309	77	-0,09
	1	0,1	7	2	-0,01
	2	0,2	7	2	0,40
	6	0,5	31	8	0,45
	8	0,7	3	1	<b>0,41*</b>
	12	1	43	11	0,56
	Täitmata	NA	5	1	-0,19
<b>REP13</b>	0	0	302	82	-0,05
	2	0,2	10	3	0,24
	6	0,5	31	8	0,41
	7	0,6	1	0	<b>-0,17*</b>
	10	0,8	4	1	0,68
	11	0,9	3	1	0,70
	12	1	19	5	0,77
	Täitmata	NA	35	9	-0,12
<b>REP17_2</b>	0	0	147	36	-0,33
	6	0,2	18	4	0,35
	12	0,5	240	59	<b>0,24*</b>

Joonised A.7.–A.9. on ülesannete keerukust ja testis vastava taseme saavutanud õpilaste arve kujutav joonised (vastaja-ülesande keerukusjoonis). Tegu on välja-printidega programmist WINSTEPS. Joonistelele on korruga paigutatud nii I kui II mõõtmise tulemused. Ülevalt alla kulgevast vertikaaljoonest paremal on ülesanded paigutatud joonisele keerukuse näitaja põhjal (mida lihtsam ülesanne, seda väiksem keerukuse indeks) ning vasakul pool on õpilaste arv, kes vastava keerukustaseme saavutasid. Joonisel kasutatud tähis M märgib vastavalt vertikaaljoonest paremal keskmist ülesannete keerukustaset ja vertikaaljoonest vasakul õpilaste keskmist saavutatud võimekuse taset, S tähistab ühte standardhälvet ja T kahte standardhälvet.



**Joonis A.7.** Matemaatikapädevuse testi 3. klasside õpilase-ülesande keerukusjoonis (N = 278<sub>I</sub> mõõtmise + 299<sub>II</sub> mõõtmise).





**Joonis A.8.** Matemaatikapädevuse testi 6. klasside õpilase-ülesande keerukus-  
 joonis (N = 205<sub>I</sub>mõõtmise + 246<sub>II</sub>mõõtmise).



# Dimensions of mathematical competence and its assessment in basic school

Marje Johanson<sup>a1</sup>, Margus Pedaste<sup>a</sup>, Aleksandar Baucal<sup>ab</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Education, University of Tartu*

<sup>b</sup> *Institute of Philosophy, University of Belgrad*

## Summary

Defining mathematical competence has been relevant since the 2000s (NCTM, 2000; OECD, 2000; Niss, 2003; Niss & Jensen, 2002). However, all the studies remain on the conceptual level and no analyses have established the empirically confirmed dimensions of mathematical competence. Describing the dimensions of mathematical competence is important in order to understand the development needs of students in the formation of comprehensive mathematical competence and to support teachers in choosing appropriate teaching methods.

One of the aims of this study is to describe the empirically distinguishable dimensions of mathematical competence based on the Mathematical Competency Research Framework (MCRF) developed in Sweden, which has been adapted to Estonian conditions (Johanson *et al.*, 2021) and to find suitable items for the assessment of the dimensions. The second aim of this study is to describe the level of mathematical competence of Estonian basic school students in the 3rd, 6th and 9th grades in different dimensions of mathematics competence and analyse how the levels change over time, indicating the focus on different dimensions of mathematical competence in the study process.

To approach these research questions, we rely on three tests for assessing mathematics competence created within the framework of the project DIGIVARA5 “DigiEfekt: The effect of the use of digital learning materials on learning and teaching on the example of Estonian basic education (1.05.2020–30.04.2023)”: 1) the mathematical competence test for 3rd grades, 2) the mathematical competence test for 6th grades, 3) the mathematical competence test for 9th grades. All three tests are designed to assess mathematical competence through six dimensions (problem solving, reasoning, applying procedures, communication, building connections and representation) of mathematical competence. At least three tasks are provided in each test to measure each dimension (except for the tasks assessing the communication

---

<sup>1</sup> Institute of Education, University of Tartu, Jakobi 5, Tartu 51005 Estonia, marje.johanson@ut.ee.

competence of the 6th and 9th grades). Data were collected from 13 different Estonian schools, including 21 3rd grades, 22 6th grades and 18 9th grades in two waves, including 345 different students from the 3rd grade, 312 different students from the 6th grade, and 254 different students from the 9th grade.

The designed tests for the assessment of mathematics competence enable the assessment of procedural competence, connections competence (starting from the 9th grade), representation competence, reasoning competence, problem solving competence and communication competence (except in the 9th grade). The IRT shows that the tests as a whole, the test elements and the evaluation scales are of good quality with item reliability of 0.99 and with student reliability of 0.83 except in the case of the 9th grade test with the reliability of 0.82. Factor models created to distinguish dimensions are characterised by good fit indicators, but correlations between factors are relatively strong which was expected because the literature also points out that the sub-competencies of mathematics competence are not strictly separated dimensions (Niss & Højgaard, 2019). Compared to the theoretical data model, the connection competence behaves the most unstable in the data of the 3rd and 6th grades, which may be due to the fact that school lessons and educational materials are structured on a topic-based basis (Ainevaldkond „Matemaatika”. Põhikooli riiklik õppekava. Lisa 3, 2014) and making connections between mathematical concepts and objects is left to the students themselves to discover. By stressing connection competence more in the learning process, it would be conceivable to distinguish this dimension in real data. In the 9th grade, where it is possible to distinguish the connections competence dimension, the topic of making connections is introduced in the description of the objectives of the final exam in basic school mathematics (Põhikooli matemaatika lõpueksami eristuskiiri, 2015).

The average result of mathematics competence over two measurements was 39% in the 3rd grade, 46% in the 6th grade and 44% in the 9th grade of the maximum points of the respective tests. Similarly, in all grade levels, the best results are in procedural competence (in the 3rd grade, 63%, in the 6th grade, 65% and the 9th grade, 60% of the maximum points of the respective dimension tasks) and in presentation competence (respectively 50%, 53% and 65% in the maximum points of the respective dimension tasks). The result was to be expected since procedural competence has received a lot of attention through national tests and exams, and the results are of the same magnitude as the results of the assessment obtained in the study. Based on the assessment of the dimensions of mathematics competence obtained in the study, it is necessary to pay more attention to the development of reasoning competence (results in the 3rd grade 15%, the 6th grade 33% and the 9th grade 29% of the maximum points) and the ability to express oneself correctly in mathematics, i.e.

mathematical communication competence (the result of the third and sixth grades are respectively 16% and 17% of the maximum points). Although the time difference between the two measurements carried out in the study was not large, it was possible to show statistically significant differences in the changes in the dimensions of mathematics competence. In the comparison of the first and second measurements, the data showed that there is a slowdown in the development of students' mathematical competence in the 6th grade. A statistically significant improvement in results occurred in four sub-competencies in the 3rd grade, in two sub-competencies in the sixth grade and in three sub-competencies in the 9th grade.

The next steps in the study are to improve the scales of the tests, to fit hierarchical data models of the dimensions of mathematical competence, and analyse what kind of background data affect the statistically significant changes in the mathematical competence dimension in this relatively short time period of 4 months.

*Keywords:* mathematical competence, general competence, assessment, item response theory, factor analysis