



UA

UNIVERSITAT D'ALACANT
UNIVERSIDAD DE ALICANTE

Facultat d'Educació
Facultad de Educación

FACULTAD DE EDUCACIÓN
TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
CURSO ACADÉMICO [2022-2023]
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS (15)

TÍTULO:

**ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TEMA DE SISTEMAS DE
ECUACIONES E INECUACIONES EN DOS LIBROS DE TEXTO**

AUTOR:

JOSÉ ANTONIO ESTEBAN RODRÍGUEZ

TUTOR:

FRANCISCO JAVIER MONJE PARRILLA

DECLARACIÓN DE RESPONSABILIDAD Y AUTORÍA DE LA MEMORIA DEL TFM:

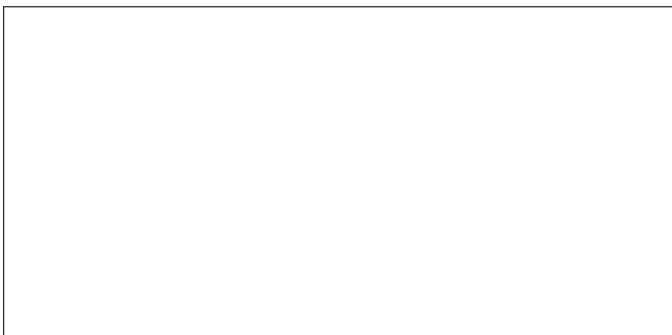
D: JOSÉ ANTONIO ESTEBAN RODRÍGUEZ, con DNI 48673801M, estudiante del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Alicante (especialidad 15), realizado en el período 2022-2023:

DECLARO QUE: Que la Memoria del Trabajo de Fin de Máster denominado:

“ANÁLISIS COMPARATIVO DEL TEMA DE SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES EN DOS LIBROS DE TEXTO”

ha sido desarrollado respetando la propiedad intelectual (citando las fuentes bibliográficas utilizadas en la redacción de dicho trabajo), así como cualquier otro derecho, por ejemplo, el de imagen que pudiese estar sujeto a protección del copyright. En virtud de esta declaración afirmo que este trabajo es inédito y de mi autoría, por lo que me responsabilizo del contenido, veracidad y alcance de la Memoria del Trabajo Fin de Máster, y asumo las consecuencias administrativas y jurídicas que se deriven en caso de incumplimiento de esta declaración.

FIRMA

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the signature of the student.

Alicante, a 27 de junio de 2023

Resumen

En el presente estudio, se aborda la relevancia de los libros de texto en la educación secundaria, en particular en el área de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. Dado que estos materiales desempeñan un papel crítico en la estructuración del aprendizaje y en la formación de conceptos matemáticos fundamentales, resulta esencial realizar un análisis detallado de los mismos. Al profundizar en su contenido, se obtiene una comprensión más precisa de la calidad y pertinencia de la instrucción proporcionada a los estudiantes. Por tanto, tras revisar diversas fuentes, se ha seleccionado un instrumento de análisis para comparar este área en dos libros de texto de secundaria relativamente recientes, con el objetivo de identificar y resaltar tanto sus similitudes como sus diferencias. Este enfoque comparativo podría pronosticar el impacto potencial que tendrían los diferentes libros de texto sobre los estudiantes.

Abstract

In this study, the relevance of textbooks in secondary education is addressed, particularly in the area of systems of equations and inequalities. Given that these materials play a critical role in structuring learning and forming fundamental mathematical concepts, it is essential to perform a detailed analysis of them. By delving into their content, a more precise understanding of the quality and relevance of the instruction provided to students is obtained. Therefore, after reviewing various sources, an analytical tool has been selected to compare this area in two relatively recent secondary textbooks, with the aim of identifying and highlighting both their similarities and differences. This comparative approach could estimate the potential impact that different textbooks might have on students.

Palabras clave: Instrumento de análisis, sistemas de ecuaciones e inecuaciones, libros de texto, clasificación de actividades.

Índice

1. Introducción	1
2. Objetivos	2
3. Antecedentes y fundamentación teórica	3
3.1. ¿Qué es un libro de texto?	3
3.2. Beneficios y desventajas de los libros de texto	5
3.3. Instrumentos de análisis previos en la literatura	7
3.4. Dificultades que afrontan nuestros jóvenes con los sistemas de ecuaciones e inecuaciones	8
3.4.1. Algunos ejemplos donde se aprecian estas dificultades	9
4. Método	12
4.1. Libros de texto escogidos	12
4.2. Justificación del tema escogido	12
4.3. Instrumentos de análisis escogidos	13
4.4. Variables para el análisis de actividades	15
4.4.1. Según tipo de actividad	15
4.4.2. Según el tipo de conexión	16
4.4.3. Según la ilustración proporcionada en los enunciados	17
4.4.4. Según si aglutina subtareas	17
4.4.5. Según su formulación semántica	18
5. Resultados del análisis	19
5.1. Organización del contenido	19
5.1.1. Situación respecto al resto de temas	19
5.1.2. Situación de los contenidos ordinarios del propio tema	20
5.1.3. Contenidos implícitos dentro del tema	21
5.1.4. ¿Se exponen los objetivos que se pretenden alcanzar?	25
5.2. Análisis fenomenológico	25
5.3. Análisis conceptual	26
5.3.1. Definiciones	26

5.3.2. Representaciones en la transmisión de los conceptos	29
5.3.3. Actividades	33
6. Conclusiones	40
Referencias	46
Anexos	49
Índice de Tablas	49
Índice de Imágenes	49
A. Imágenes	53

1. Introducción

Un libro de texto podría ser considerado como una herramienta esencial en la enseñanza y el aprendizaje, cuyo papel ha evolucionado significativamente en el último siglo. A principios del siglo XX, los libros de texto se veían principalmente como manuales autoritativos que proporcionaban una fuente definitiva de conocimiento considerada en muchas ocasiones incluso dogma. Los maestros dependían en gran medida de ellos para estructurar sus lecciones y los estudiantes los utilizaban como la principal fuente de información para desarrollar su aprendizaje (Rodríguez-Muñiz et al., 2020; Fernández y García, 2017).

No obstante, a medida que avanzó el siglo XX, se produjo un cambio gradual en la percepción y el uso de los libros de texto. Las reformas educativas y los avances en la pedagogía empezaron a cuestionar el papel de los libros de texto como únicos portadores de conocimiento. Los educadores comenzaron a ver los libros de texto como un recurso entre muchos otros en lugar de como la única fuente de información (Rodríguez-Muñiz et al., 2020).

Sin embargo, a pesar de estas reformas, los libros de texto continúan desempeñando un papel dominante en el aula hasta el día de hoy. Además, la producción de estos materiales ha estado fuertemente vinculada a las decisiones curriculares y a las políticas educativas (Rodríguez-Muñiz et al., 2020; Fernández y García, 2017). Las editoriales han jugado un papel crucial en la concreción del currículo, diseñando y produciendo libros de texto que reflejan y, en muchos casos, influyen en este. Sin embargo, este enfoque excesivo en el currículo puede llevar a que se descuide la buena praxis pedagógica que debería predominar en las aulas.

Con el auge e irrupción de la tecnología en las últimas décadas del siglo XX y principios del XXI, los libros de texto se han visto forzados a adaptarse y evolucionar. Los libros de texto digitales han empezado a hacerse un hueco en el ámbito educativo, ofreciendo nuevas formas de interacción y aprendizaje. Sin embargo, los libros de texto impresos siguen siendo una herramienta predominante en la educación (Rodríguez-Muñiz et al., 2020; Fernández y García, 2017).

En resumen, a lo largo del último siglo, los libros de texto han pasado de ser considerados la autoridad incuestionable en la enseñanza y el aprendizaje a ser una herramienta entre muchas en el aula, aunque siguen desempeñando un papel importante en la educación.

Asumiendo que los libros de texto siguen desempeñando un papel importante en la educación y ante la gran cantidad de opciones y editoriales disponibles, se vuelve imprescindible establecer un marco teórico sólido para analizar y comparar estas diferentes alternativas. Esta necesidad surge de la importancia de poder tomar decisiones educativas informadas y basadas en evidencias sólidas. Por lo tanto, es esencial diseñar o adoptar un instrumento de análisis eficiente que nos permita examinar

de manera crítica las distintas opciones de libros de texto, valorando sus ventajas y desventajas, su pertinencia en la praxis pedagógica y su alineación con el currículo. Solo de esta manera, podremos llegar a conclusiones fundamentadas y hacer elecciones pedagógicas eficaces que optimicen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2. Objetivos

Inspirados por la sección anterior, vamos a plantearnos un escenario en el que, como educadores, nos encontramos frente a la decisión de elegir entre dos posibles editoriales para nuestros libros de texto. Por ello, el objetivo que se persigue en este trabajo es el de fundamentar un marco teórico del cual podamos extraer aquellos instrumentos de análisis que nos permitan construir una comparación lo más rigurosa posible entre ambos libros. Sin embargo, con la intención de mantener un enfoque manejable y evitar sobrecargar el trabajo, limitaremos nuestro estudio a la comparación del tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones en dos libros de texto. Dicha elección será motivada dentro del apartado 4, en el que se expondrá el método.

Para alcanzar estos objetivos, los pasos que se seguirán serán los que siguen a continuación:

1. En primer lugar, estableceremos los antecedentes y la fundamentación teórica, donde se profundizará en las diversas definiciones y características que identifican a un libro de texto según diferentes autores. Seguidamente, se abordarán las posibles ventajas y desventajas que conlleva el uso de esta herramienta pedagógica. A continuación, se realizará una revisión de diferentes instrumentos de análisis presentes en la literatura, con el propósito de seleccionar y adaptar aquellos que mejor se adecuen a nuestro objeto de estudio. Y, por último, se proporcionarán algunos antecedentes relacionados con el estudio de las posibles dificultades que presentan nuestros jóvenes a la hora de enfrentar el área de sistemas de ecuaciones e inecuaciones.
2. En segundo lugar, se determinará el método de análisis. Para ello se expondrán los libros de textos escogidos, se justificará la elección del tema y, seguidamente, se declarará el instrumento de análisis escogido junto con las variables de análisis que complementarán a este último. Concretamente, combinaremos dos instrumentos de análisis: uno genérico que considera la organización de los contenidos, su análisis fenomenológico y el análisis conceptual; y un segundo instrumento específicamente diseñado para el análisis de problemas que complementará al primero.
3. En tercer lugar, se presentarán los resultados obtenidos y se añadirán análisis particulares que se han considerado relevantes, como el estudio de contenidos no expuestos de forma explícita

por los respectivos autores de los libros, aspecto que se tratará en una sección completa.

4. Por último, se emitirán las conclusiones derivadas del análisis.

3. Antecedentes y fundamentación teórica

3.1. ¿Qué es un libro de texto?

Siguiendo el artículo de Fernández y García (2017), en el contexto educativo, los rasgos intrínsecos al concepto “libro de texto” se han resumido a continuación:

- **Soporte de conocimientos escolares:** el libro de texto se puede considerar como un depósito de información y conocimiento. Los libros de texto contienen la información que se espera que los estudiantes aprendan en un curso o nivel educativo en cuestión. Esto puede incluir datos, teorías, conceptos, ejemplos, ilustraciones, gráficos y más. Los estudiantes pueden recurrir a los libros de texto para aprender de forma independiente, para revisar lo que se ha enseñado en clase o para profundizar en los temas de su interés.
- **Guía de enseñanza:** el libro de texto como camino estructurado para que los profesores impartan la enseñanza. Los libros de texto suelen estar organizados en capítulos o unidades que siguen un orden lógico y secuencial, lo que permite a los profesores planificar su enseñanza en torno a este. Además, los libros de texto a menudo incluyen sugerencias didácticas, objetivos de aprendizaje, resúmenes, evaluaciones y otros recursos que pueden ayudar a los profesores a estructurar su enseñanza.
- **Instrumento pedagógico:** un libro de texto va más allá de simplemente proporcionar información o servir de guía para la enseñanza. En este sentido, los libros de texto están diseñados para facilitar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Esto puede incluir la presentación de la información de una manera que sea fácil de entender, la inclusión de actividades y ejercicios que ayuden a los estudiantes a practicar y aplicar lo que están aprendiendo y la provisión de retroalimentación y evaluación para ayudar a los estudiantes a medir su progreso. Un buen libro de texto pedagógico está diseñado teniendo en cuenta las mejores prácticas de enseñanza y aprendizaje, y puede ser también una herramienta transversal que facilite el aprendizaje efectivo. En este enfoque se tendría en cuenta no solo los contenidos a impartir, sino también al alumnado y sus posibles dificultades.

Resulta evidente, tal y como se han ordenado estos tres últimos conceptos, que la interpretación

de lo que constituye un libro de texto variará, en cierta medida, en base al uso que se le confiera, la relevancia que se le atribuya y la dependencia que manifieste el docente respecto a este recurso.

Sin embargo, considerando la sección 1, sería tal vez simplista asumir que un libro de texto se concibe de forma ajena al contexto socio-cultural e histórico en el que se encuentra. En su esencia más fundamental, el significado de un libro de texto podría parecer inmutable con el paso del tiempo, pero, desafortunadamente, esta interpretación debe matizarse teniendo en cuenta numerosos factores enmarcados en la época en que se utiliza. Por consiguiente, el significado de un libro de texto está intrínsecamente vinculado a su contexto temporal, reflejando la dinámica del entorno educativo, político, económico y cultural de su época.

Por ello, y basándonos de nuevo en el artículo de Fernández y García (2017), se proporcionan los siguientes rasgos que, indudablemente, inciden en la autonomía pedagógica que idílicamente debería caracterizar a un libro de texto:

1. **Reflejo curricular:** el libro de texto como guía curricular que condiciona de manera importante el enfoque y método de enseñanza que se aplica en el aula, limitando en ocasiones la flexibilidad y creatividad del docente.
2. **Producto de consumo:** los libros de texto considerados como producto de consumo que generan ingresos significativos para el sector editorial. Este aspecto comercial puede influir en su diseño, contenido y en cómo se comercializan y se promueven dentro de la comunidad educativa.
3. **Vector político e ideológico:** los libros de texto pueden funcionar como conductos para la transmisión ideológica. El gobierno actual puede tener la intención de inculcar valores y perspectivas alineadas con su ideología entre los estudiantes. Esta transmisión puede ser tanto explícita como implícita, y tiene el potencial de impactar significativamente en la forma en que los estudiantes interpretan y comprenden su entorno. En última instancia, esto puede conducir a una visión sesgada del mundo, pudiendo limitar la capacidad de los estudiantes para desarrollar un pensamiento crítico sólido y verdaderamente independiente.
4. **Vector cultural:** al margen de la ideología política, los libros de texto también son portadores de cultura. Estos incorporan, transmiten y perpetúan ciertos aspectos culturales, normas, valores y creencias de una sociedad.

En definitiva, un libro puede ser interpretado de maneras muy diferentes por dos o más grupos de la población con intereses divergentes. Esto da lugar a una variedad de opiniones, tanto a favor como en contra. Sin embargo, lo esencial es que estas posturas planteen una base sólida de argumentos

para con ello construir soluciones que satisfagan de forma justa y equilibrada las distintas partes interesadas. De hecho, las múltiples posturas de la comunidad docente que se pueden encontrar al respecto se han extraído y resumido gracias al artículo de Fernández y García (2017), quienes recopilan hasta la fecha de la publicación todas las posturas fundamentadas de los distintos autores.

3.2. Beneficios y desventajas de los libros de texto

A continuación apoyándonos de nuevo en el artículo de Fernández y García (2017), y basándome en mi propia experiencia, enumeraré tanto los beneficios como las desventajas de los libros de texto.

Beneficios

- **Beneficios para los estudiantes:**
 - **Democratización del acceso al conocimiento:** los libros de texto proporcionan una fuente accesible y constante de información y materiales de estudio para los alumnos.
 - **Refuerzo del aprendizaje:** permite a los estudiantes repasar o adelantar contenidos a su propio ritmo, lo cual es útil en casos de ausencia o distracciones durante las explicaciones en clase.
 - **Estímulo de la autonomía:** al tener que trabajar con los textos por su cuenta, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de estudio y aprendizaje autónomo.
- **Beneficios para los profesores:**
 - **Facilitación de la enseñanza:** los libros de texto proporcionan un marco estructurado para la enseñanza, lo que puede ayudar a los profesores a centrarse en aspectos más complejos o personalizados del proceso de enseñanza-aprendizaje.
 - **Herramienta de evaluación:** los libros de texto suelen contener ejercicios y evaluaciones que pueden ser útiles para evaluar el progreso de los estudiantes.
- **Beneficios para la familia:**
 - **Participación en el aprendizaje:** los libros de texto permiten a las familias seguir el progreso de sus hijos en el centro educativo y participar en su aprendizaje, ayudando con las tareas o repasando lecciones.
- **Beneficios a nivel de sistema educativo:**

- **Estándares de enseñanza:** los libros de texto ayudan a que se mantengan los estándares de enseñanza en todo el sistema educativo, asegurando que todos los estudiantes reciban la misma información y contenido básico.
- **Beneficios en el contexto de las nuevas tecnologías:**
 - **Digitalización:** los libros de texto pueden adoptar formatos digitales (e-books) y aprovechar las ventajas de las nuevas tecnologías, como la interactividad, la portabilidad y la capacidad de actualización.
- **Beneficios desde una perspectiva cultural y social:**
 - **Trasmisión de patrimonio cultural e histórico:** los libros de texto pueden ayudar a transmitir el patrimonio cultural e histórico a las nuevas generaciones.

Desventajas

- **Desventajas para los estudiantes:**
 - **Limitación de la creatividad:** al seguir un guión preestablecido, los libros de texto pueden limitar la creatividad y el pensamiento crítico de los estudiantes.
 - **Desmotivación:** si los libros de texto no se adaptan a las necesidades y habilidades individuales de los estudiantes, pueden resultar desmotivadores.
 - **Falta de actualización:** los libros de texto pueden no estar al día con los avances más recientes en determinadas áreas.
 - **Preservación de contenidos incorrectos:** al ser objetos físicos, los libros de texto pueden preservar y transmitir información incorrecta.
- **Desventajas para los profesores:**
 - **Restricción de la enseñanza personalizada:** los libros de texto pueden limitar la capacidad del profesor para adaptar la enseñanza a las necesidades individuales de los estudiantes.
 - **Rigidez curricular:** pueden imponer un currículo rígido que no deje suficiente espacio para la improvisación, la exploración de temas de interés actual o la adaptación a las necesidades del grupo de estudiantes.
- **Desventajas para la familia:**

- **Costo:** los libros de texto pueden ser costosos, lo que puede ser una carga para las familias, especialmente si se actualizan con frecuencia.
- **Desventajas a nivel de sistema educativo:**
 - **Desigualdad:** aunque los libros de texto pueden proporcionar igualdad de contenidos, también pueden perpetuar las desigualdades si algunos estudiantes no pueden acceder a ellos debido a su costo.
 - **Estandarización excesiva:** la estandarización que proporcionan los libros de texto puede limitar la diversidad y la adaptabilidad de la educación.
- **Desventajas en el contexto de las nuevas tecnologías:**
 - **Adaptabilidad tecnológica limitada:** los libros de texto tradicionales pueden no adaptarse bien a las nuevas tecnologías, perdiendo oportunidades de aprendizaje interactivo y multimedia.

3.3. Instrumentos de análisis previos en la literatura

A lo largo de los años, se han desarrollado distintos enfoques para el diseño de instrumentos de análisis de libros de textos de matemáticas y, más específicamente aún, para el análisis de sus unidades didácticas. Muchos de ellos unificados por el concepto de *organizadores curriculares* de Rico (1997), que son categorías o áreas clave que se utilizan como marco para evaluar y guiar el diseño del currículo (Fernández, 2011; Monterrubio et al., 2012). En palabras de Rico (1997), los organizadores curriculares son “aquellos conocimientos que adoptamos como fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (Monterrubio et al., 2012). Rico considera estos organizadores: “la ubicación y el tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el currículo del Ministerio y de la comunidad autónoma correspondiente, la organización de los contenidos matemáticos, el análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos, los modelos y representaciones, los errores y dificultades, los materiales y recursos, el desarrollo histórico del tópico y la elaboración de una bibliografía básica”. Según Monterrubio et al. (2012), varias propuestas de instrumentos de análisis emergieron a partir de esta concepción, entre las que se encuentran las de Bodí y Valls (2002), Martín (2002) y Haro y Torregrosa (2002). Por ejemplo, Haro y Torregrosa analizaron la adecuación de los textos al espíritu de la ley LOGSE (BOE, 1990). Asimismo, Fernández (2011) también menciona muchos otros autores que se rigen por directrices similares a las de Rico, a saber, Bruno y Cabrera (2006), Merino y Bernabeu (2004), Contreras y Ordóñez (2006), Espinoza y Azcárate (2000).

Todos estos trabajos reflejan el compromiso con una evaluación y selección rigurosa de los materiales educativos, siempre en función de un currículo pertinente y efectivo. De hecho, aunque todos estos autores se basan en organizadores curriculares similares o derivados de los propuestos por Rico, aportan perspectivas diferentes. Por poner un ejemplo, Rey y Penalva (2002) analizan el campo afectivo en los manuales escolares de Matemáticas, un campo que se ha empezado a tener en mayor consideración estos últimos años, pero que quedaba relegado a un segundo plano en relación a la docencia y las matemáticas. Por otra parte, algunos autores se interesan en analizar el papel que ocupa la historia de las matemáticas y cómo está integrada en las unidades didácticas, este es el caso de Candray (2022), quien concluye que la historia, cuando se usa, se usa con un excesivo rol motivacional sin impartirse con un verdadero carácter didáctico.

Por lo tanto, la clave para llevar a cabo un análisis efectivo de los libros de texto de matemáticas para 4^o de ESO consiste en combinar estos enfoques para obtener una visión más completa y adaptarlos a las necesidades específicas de cada contexto educativo. Esta tarea requiere de una comprensión profunda de la matemática y de la pedagogía, así como de la habilidad para interpretar y evaluar críticamente los contenidos de los libros de texto. Dichos esfuerzos de unificación se observan en los trabajos como los de Fernández (2011) y Monterrubio et al. (2012).

Por último, y dejando al margen los organizadores curriculares, los cuales son de carácter más amplio, cabe mencionar que autores como González et al. (2015) se enfocan en el análisis de ejercicios y problemas presentes en los libros de texto, consolidando y unificando clasificaciones propuestas por múltiples autores hasta la fecha de su publicación.

3.4. Dificultades que afrontan nuestros jóvenes con los sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Muchos errores que los adolescentes cometen al resolver sistemas de ecuaciones e inecuaciones surgen debido a un déficit en el aprendizaje de aritmética en cursos anteriores, según indican autores como Tettay-Mejía et al. (2019). Dado que la aritmética es parte fundamental del lenguaje algebraico, muchos de los errores en el lenguaje algebraico se deben a una falta de bases en aritmética.

Además, el exceso de uso de métodos procedimentales en lugar de métodos creativos, de pensamiento crítico y abstracto puede provocar que los estudiantes eviten modelar problemas de palabras mediante ecuaciones (pese a haber recibido un curso al respecto) y recurran en exceso a métodos menos eficientes basados únicamente en aritmética, como muestran los resultados Hernández y Filloy (2014) en su pequeño estudio o como también señalan Tettay-Mejía et al. (2019). Por tanto, un libro con una colección de actividades sólida que contenga problemas de palabras se vuelve necesario.

Por otra parte, estos problemas pueden impedir a los alumnos conexiones conceptuales más elavadas como la interpretación geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales, en la comprensión de la relación entre las ecuaciones y las soluciones y en la transición de la aritmética elemental al álgebra escolar. Los estudiantes a menudo tienen dificultades con estas áreas, lo que se evidencia en sus errores al resolver ecuaciones e inecuaciones (Rodríguez et al., 2019).

Asimismo, una buena preparación y actualización de los profesores en el uso de recursos digitales podría contribuir a que los estudiantes asimilen conexiones entre la geometría y los sistemas de ecuaciones e inecuaciones. De hecho, en algunos estudios se observa un bajo nivel de integración de los recursos digitales en el proceso de enseñanza, con actividades que se centran en exceso en la transmisión de contenidos en lugar de fomentar un enfoque interactivo y participativo haciendo uso de la tecnología (Ward et al., 2021).

Además, estudios desvelan beneficios en los estudiantes si se les potencia el análisis de inecuaciones en base al uso de sistemas de representación gráficos (Torres, 2013). Por consiguiente, el uso de software matemáticos tan interesantes como GeoGebra podrían facilitar al tutor la transmisión de los conceptos más aún si se trata del tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Por todo lo anterior, es necesario desarrollar una colección sólida de actividades que contenga problemas de palabras para facilitar el aprendizaje de los estudiantes en esta área crucial de la matemática.

3.4.1. Algunos ejemplos donde se aprecian estas dificultades

Finalmente, para reforzar los argumentos presentados previamente, ilustraré ciertos escenarios donde se pone de relieve que la ausencia de rigor matemático, la insuficiente capacidad de abstracción, y las deficiencias tanto en habilidades lingüísticas como en dominio proposicional, dan lugar a retos predecibles que enfrentan los estudiantes en el ámbito de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

1. Los libros frecuentemente son demasiado escuetos a la hora de expresar los enunciados de sus problemas. Por ejemplo, el enunciado del ejercicio 3.4.1.1 es muy común encontrarlo en los libros tradicionales. Esta forma de enunciar aleja al alumno de cualquier apoyo lingüístico que le facilite la traducción simbólica.

Ejercicio 3.4.1.1. Resuelve el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

En su lugar, podrían utilizarse enunciados como el del ejercicio 3.4.1.2.

Ejercicio 3.4.1.2. Halla el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas verifican simultáneamente las ecuaciones que conforman el sistema (3.2).

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

2. Tal y como señalan Moreno y Cobo (1997), numerosos estudiantes cuando suman un término a un lado de la ecuación se les olvida que deben hacerlo de igual forma al otro lado de la igualdad para no alterarla. Esto más tarde se eleva al tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones cuando los alumnos no dominan el concepto de “sistemas de ecuaciones equivalentes”. Los estudiantes en estos casos se enfrentan a una falta de recursos matemáticos para expresar sus ideas y, por ello, les cuesta más interiorizar estos conceptos de forma intuitiva. Los alumnos rara vez materializan verbalmente lo que ocurre en (3.3). Es decir, no leen (3.3) como “el sistema (A) es equivalente al sistema (B) porque ambos comparten la misma solución”, en su lugar, se incurre en una lectura excesivamente esquemática y literal y desconocen operadores como el de equivalencia “ \Leftrightarrow ”.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x - 2y = 5 \end{array} \right\} (A) \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 4 \\ x - y = \frac{5}{2} \end{array} \right\} (B) \quad (3.3)$$

3. De nuevo, es común encontrarse en los libros técnicas procedimentales con los coeficientes de un sistema sencillo como el expuesto en (3.4) para probar su incompatibilidad. En estos casos es más útil dotar al alumno de la capacidad verbal suficiente para que sea capaz de traducir y deducir que el sistema es incompatible ya que no existen dos números cuya suma resulte en 1 y 2 simultáneamente. Ahondando más, se trataría de hacerles entender geoméricamente que infinitas rectas paralelas en el plano solo se distinguen por el término independiente.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

4. La mayoría de los libros de texto abusan de la notación “x” e “y” para denotar las incógnitas de un sistema de ecuaciones lineales. Esto les genera una alta dependencia sobre la notación (lo concreto) y les aleja de lo abstracto.

5. En muchos libros de texto, las funciones se imparten después del tema de sistemas de ecuaciones, desembocando esto en que los estudiantes no conciben una ecuación como el punto de corte de una función con el eje de abscisas o que no comprendan que hallar un sistema de ecuaciones consiste en hallar los puntos de intersección de sus funciones asociadas.
6. Las funciones suponen un salto dimensional que exige mayor demanda cognitiva en los alumnos al tener que trabajar en dos dimensiones frente a una sola como están acostumbrados en otras unidades temáticas previas. La falta de rigor matemático y de lecturas verbales hace que los estudiantes entiendan la recta “ $x = 1$ ” como un punto de la recta real debido al tema de ecuaciones. Más tarde, este error evoluciona al pedir a los estudiantes representar en el plano un sistema de ecuaciones triviales como el (3.5), ya que los estudiantes representan un solo punto en el plano y no dos rectas perpendiculares. Esto último sucede por la falta de rigor matemático, ya que ellos lo relacionan con otro sistema de ecuaciones no triviales cuya solución sí denote un punto en el plano expresado como $x = 3$ e $y = 2$, habiendo una convergencia desafortunada en la notación para expresar ideas distintas que únicamente difieren por el contexto. En estos casos los alumnos no disponen de la formalización matemática suficiente para distinguirlo y tienen que entenderlo por el contexto y con apoyo del profesor.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

7. Otra dificultad que arrastran es la falta de recursos para formalizar o encadenar proposiciones lógicas. Esto afecta severamente en problemas como los del tipo (3.6), ya que los alumnos se bloquean en el encadenamiento proposicional (*) y no son capaces de distinguir bien lo que es una disyuntiva.

$$\left. \begin{array}{l} (x+y)^2 = 9 \\ y = x-2 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} x+y = \pm 3 \\ y = x-2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(*)} \left. \begin{array}{l} x+y = 3 \\ y = x-2 \\ x+y = -3 \\ y = x-2 \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

De nuevo, esta falta de recursos en la formalización proposicional se ve reflejada cuando los alumnos se enfrentan a problemas del tipo (3.7):

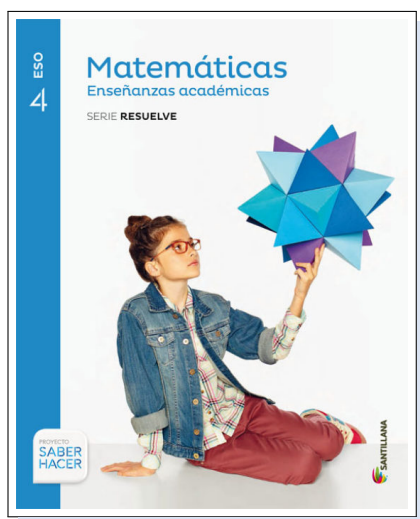
$$|x+3| < 2 \quad (A) \quad (x+3)(x-5) < 0 \quad (B) \quad (3.7)$$

4. Método

4.1. Libros de texto escogidos

Se ha escogido 4^o de ESO de Matemáticas Académicas. En concreto, se ha procurado que sean relativamente recientes o que, al menos, se sigan utilizando en algún instituto. Atendiendo a la imagen 4.1 se observan los libros seleccionados:

- El libro de Proyecto Saber Hacer (2016), siendo actualmente utilizando en el I.E.S. San Vicente, en el que desarrollé mi actividad de docente en prácticas.
- El libro de Sánchez-Bermejo et al. (2020), por ser uno de los libros más recientes que había disponibles en la biblioteca de la Facultad de Educación de la Universidad de Alicante.



(a) Proyecto Saber Hacer (2016).



(b) (Sánchez-Bermejo et al., 2020)

Pack de imágenes 4.1: Los dos libros seleccionados.

4.2. Justificación del tema escogido

Como futuro docente, he elegido el tema de “Sistemas de ecuaciones e inecuaciones” de 4^o de ESO en la especialidad de Matemáticas Académicas para mi análisis debido a varios factores.

En primer lugar, considero que este tema representa una piedra angular en el estudio de las matemáticas, proporcionando a los estudiantes herramientas esenciales para resolver problemas complejos. No solo se aplican en campos puramente matemáticos, sino que también tienen una importancia crucial en áreas como la física, la ingeniería y las ciencias económicas.

En segundo lugar, a lo largo de mi periodo de prácticas, observé que este tema suele presentar un desafío significativo para los estudiantes. Entre los posibles factores que contribuyen a esto, noté que existen ciertas carencias en los libros de texto utilizados, incluyendo, además, algún error grave que más tarde expondré.

4.3. Instrumentos de análisis escogidos

En este trabajo, seguiremos el instrumento de análisis didáctico propuesto por Fernández (2011) (véase tabla 1). Aunque el ejemplo presentado por la autora en su artículo está centrado en el tema de la proporcionalidad, nosotros lo enfocaremos al análisis del tema de “Sistemas de ecuaciones e inecuaciones” correspondiente a 4^o de ESO en la especialidad de Matemáticas Académicas.

ORGANIZACIÓN DEL CONTENIDO		<p>¿Qué orden ocupa el tema objeto de estudio en relación al resto de temas del texto?</p> <p>¿Es adecuado el orden que ocupa con respecto a la posición de otros temas? ¿Por qué?</p> <p>¿Qué organización presenta el contenido del tema?</p> <p>¿Los objetivos específicos del tema aparecen explícitos en el texto?</p> <p>¿Se establece alguna relación entre los contenidos del tema y otros contenidos del temario?</p>
ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO		<p>¿Cómo se introducen los conceptos?</p> <p>¿Se hace distinción entre distintos conceptos? ¿Cómo?</p> <p>¿Se utilizan situaciones reales para la introducción de conceptos?</p> <p>¿Se usan referencias históricas para presentar el contenido? ¿Dónde?</p>
ANÁLISIS CONCEPTUAL	DEFINICIONES	<p>¿Las definiciones son formales o se da una idea del concepto a través de situaciones?</p> <p>¿Por qué?</p> <p>¿Dónde está colocado el énfasis: en el procedimiento o en el concepto?</p>
	REPRESENTACIONES	<p>¿Qué tipos de representaciones se utilizan?</p> <p>¿Cómo se utilizan las representaciones?</p> <p>(para ejemplificar / contextualizar, para representar las ideas, etc)</p>
	PROBLEMAS, TIPOS, CARACTERÍSTICAS, USOS DEL CONCEPTO	<p>¿Hay problemas desarrollados y propuestos?</p> <p>¿Se plantean diferentes tipos de problemas? ¿Cuáles?</p> <p>¿Los problemas planteados presentan diferentes características?</p> <p>¿Qué métodos de resolución de problemas se exponen?</p> <p>¿Cuánta importancia se da a las aplicaciones de los contenidos?</p>

Tabla 1: Instrumento para el análisis de temas en libros de texto (Fernández, 2011).

A continuación, resumiré brevemente en qué consisten cada uno de los apartados del instrumento de Fernández (2011):

1. **Organización del Contenido:** esta sección examina la estructura y disposición del contenido en el libro de texto. Se centra en aspectos como la secuencia de los temas, la coherencia del orden, la interrelación entre los contenidos y si se especifican claramente los objetivos de cada tema.
2. **Análisis Fenomenológico:** aquí se investiga cómo se introducen los conceptos en el texto, la distinción entre diferentes conceptos, y el uso de ejemplos del mundo real e históricos para presentar los contenidos. En resumen, se trata de cómo los conceptos son contextualizados e introducidos a los estudiantes.
3. **Análisis Conceptual:**
 - a) **Definiciones:** este apartado se centra en la naturaleza de las definiciones proporcionadas para los conceptos, es decir, si son formales o se explican a través de situaciones, y en qué se pone énfasis, ya sea en el procedimiento o en el concepto en sí.
 - b) **Representaciones en la transmisión de los conceptos:** aquí se examinan los tipos de representaciones utilizadas para ilustrar los conceptos y cómo estas se utilizan para facilitar la comprensión.
 - c) **Actividades, Tipos, Características, Usos del Concepto:** este subapartado se enfoca en las actividades que se presentan, tanto desarrolladas como propuestas, los diferentes tipos y características de las actividades, los métodos de resolución que se presentan y cuánta importancia se le da a las aplicaciones de los contenidos.

Además, dentro del análisis conceptual, el tercer subapartado sobre la colección de actividades lo complementaremos con algunas métricas basadas en los recuentos de la clasificación de los problemas atendiendo a los criterios propuestos por González et al. (2015). Los criterios de clasificación que definen las métricas de recuento se resumirán en la sección 4.4.

Por último, destaco tres aspectos:

- No adoptaremos todas las métricas sugeridas en el criterio de González et al. (2015), sino que nos enfocaremos en aquellas que me han resultado particularmente interesantes y relevantes.
- Es vital reconocer que el tema en cuestión debe tenerse en cuenta al identificar posibles sesgos en nuestros análisis. Este factor debe considerarse al interpretar los resultados y al identificar rasgos comunes en ambas editoriales. Por ejemplo, los temas relacionados con la geometría

tienden a requerir un mayor número de ilustraciones en comparación con otros temas. Por lo tanto, la presencia de numerosas ilustraciones no debería considerarse un rasgo destacable, ya que es una expectativa inherente al tema en cuestión.

- En cualquier caso, dado que estamos comparando dos libros y asumimos que los mismos sesgos afectan a ambos temas de ambos libros, las diferencias que surjan entre ellos sí resultarán significativas.

4.4. Variables para el análisis de actividades

En la sección 5.3.3, se realizará un análisis de las actividades propuestas que consistirá en los siguientes pasos:

1. En primer lugar, se proporcionarán una tabla informativa en la que se comparará el número de actividades propuestas por cada editorial, diferenciando entre ejercicios rutinarios y problemas de palabras.
2. En segundo lugar, se ha hecho una revisión de posibles errores identificados en la colección de actividades.
3. Por último, y en tercer lugar, atendiendo al artículo de González et al. (2015) se describirán los criterios de clasificación a partir de los cuales se establecen los diferentes recuentos. En total, se han seleccionado cinco criterios de clasificación distintos, a saber:
 - a) **Según tipo de actividad.**
 - b) **Según el tipo de conexión.**
 - c) **Según la ilustración proporcionada en los enunciados.**
 - d) **Según si aglutina subtareas.**
 - e) **Según su formulación semántica.**

A continuación se procede a explicar los cinco criterios de clasificación seleccionados del artículo de González et al. (2015).

4.4.1. Según tipo de actividad

Se realizará por cada editorial un recuento de las actividades propuestas según su tipología atendiendo a la clasificación siguiente (González et al., 2015):

1. **Ejercicios:** son actividades en las que solo se necesita reconocer o recordar un concepto específico, una definición, o aplicar un proceso algorítmico conocido para determinar la solución. Estos son ejercicios rutinarios y no requieren de la originalidad del resolutor.
2. **Problemas de palabras:** estos problemas se enuncian en un contexto concreto que debe traducirse al lenguaje matemático para su resolución. Toda la información necesaria para resolverlos aparece en el enunciado y, además, suele indicarse la estrategia a seguir.
3. **Problemas para demostrar:** estos problemas requieren justificar la validez de una proposición, para lo cual se necesita recurrir a teoremas o propiedades relacionadas con la demostración solicitada y en los que se precisa del razonamiento deductivo.
4. **Problemas para descubrir:** estos problemas buscan mostrar una forma atrayente, divertida o entretenida de aprender matemáticas. Las soluciones requieren lógica e ingenio.
5. **Problemas de la vida real:** estos problemas hacen referencia a situaciones factibles de darse en la vida real y que precisan de la construcción de diagramas, realización de estimaciones, cálculo de medidas o elaboración de análisis y síntesis.
6. **Problemas de aplicación:** estos problemas son un tipo específico de problemas de geometría plana que no encajan bien con la definición de problemas de palabras, porque no requieren de la traducción al lenguaje matemático como tal, pero que tampoco pueden considerarse ejercicios.
7. **Problemas de la práctica matemática:** estos problemas permiten desarrollar procesos de exploración, formulación de hipótesis y su posterior validación, en los que se realizan conjeturas, verificaciones y argumentaciones.

4.4.2. Según el tipo de conexión

Se realizará por cada editorial un recuento de las actividades propuestas según su conexión con otras áreas atendiendo a la clasificación siguiente (González et al., 2015):

1. **Conexión con otras ramas de las matemáticas:** esta categoría incluye problemas que, aunque se encuentran en una unidad de estudio específica, su resolución involucra conceptos de otra rama de las matemáticas. Un ejemplo de esto es un problema en la unidad de sistemas de ecuaciones cuya solución requiere conceptos de geometría.
2. **Conexión con otras áreas disciplinares:** los problemas que se encuentran en esta categoría están relacionados con otras áreas del conocimiento fuera de las matemáticas.

3. **Conexión con la historia de las matemáticas:** Esta categoría incluye problemas que están relacionados con eventos o conceptos históricos en matemáticas.
4. **Sin conexión:** esta categoría incluye problemas que no tienen una conexión explícita con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas o con la historia de las matemáticas.

4.4.3. Según la ilustración proporcionada en los enunciados

Se realizará por cada editorial un recuento de las actividades propuestas según las ilustraciones proporcionadas en sus enunciados y atendiendo a la clasificación siguiente (González et al., 2015):

1. **Ilustración Decorativa:** refiere a las ilustraciones que no tienen ninguna finalidad claramente relacionada con el problema. Su principal función es embellecer o adornar la página, y no aportan datos significativos para la resolución del problema.
2. **Ilustración Motivadora:** estas ilustraciones pueden proporcionar una ayuda al estudiante, pero sin aportar datos claramente significativos.
3. **Ilustración Representativa:** estas ilustraciones incluyen datos que se dan explícitamente en el enunciado del problema. Pueden ser útiles para visualizar la información proporcionada en el texto y entender mejor la estructura del problema.
4. **Ilustración Informativa:** estas ilustraciones proporcionan datos que no se aportan en el enunciado del problema. Proporcionan información adicional necesaria para la resolución del problema.
5. **Sin Ilustración:** algunos problemas no contienen ninguna ilustración. Estos problemas dependen exclusivamente del texto para describir la situación y proporcionar los datos necesarios para resolver el problema.

4.4.4. Según si aglutina subtareas

Se realizará por cada editorial un recuento de las actividades propuestas atendiendo a si encapsulan subtareas o conforman un único enunciado para detectar posibles sobrecargas de trabajo camufladas (González et al., 2015):

1. **Formulación Simple:** actividades que presentan una sola cuestión al respecto, es decir, el la actividad no encapsula “subejercicios” o “subtareas”.

2. **Formulación Agrupada:** refiere a las actividades que sí encapsulan tareas. Por ejemplo, el problema 41 de la editorial Santillana (véase imagen A.5a) se plantea de forma agrupada con 4 subtareas.

4.4.5. Según su formulación semántica

Se realizará por cada editorial un recuento de las actividades propuestas atendiendo a si la actividad permite desempeñar una o más estrategias cognitivas para su resolución (González et al., 2015):

1. **Formulación sencilla:** actividades que implican una sola estrategia cognitiva. Por ejemplo, un enunciado que propusiera resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de “sustitución” no dejaría libertad al alumno y se consideraría de formulación sencilla (véase imagen 4.2a).
2. **Formulación compleja:** actividades que permiten más de una sola estrategia cognitiva. Por ejemplo, un enunciado que propusiera resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de resolución que el alumno considera más conveniente se consideraría de formulación compleja (véase imagen 4.2b).

4 Encuentra la solución de los siguientes sistemas utilizando el método de igualación:

<p>a. $\begin{cases} 8x + 3y = 2 \\ 5x + y = 3 \end{cases}$</p> <p>b. $\begin{cases} 4x - 5y = -1 \\ -3x - y = -4 \end{cases}$</p>	<p>c. $\begin{cases} 5 \cdot (2x - y) = y - 8 \\ x - (4y + 3) = -14x \end{cases}$</p> <p>d. $\begin{cases} \frac{x-2}{3} - \frac{y-1}{5} = 0 \\ -10x + 6y = -14 \end{cases}$</p>
--	--

(a)

56 Encuentra las soluciones de estos sistemas.

<p>a) $\begin{cases} x + y^2 = 3 \\ x^2 - y = 3 \end{cases}$</p> <p>b) $\begin{cases} \frac{x}{5} - y^2 = 0 \\ xy - 5 = 0 \end{cases}$</p> <p>c) $\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y} = -1 \\ x - y - 10 = 0 \end{cases}$</p>	<p>d) $\begin{cases} (x+y) \cdot (x-1) = -2 \\ (x+1) \cdot y = 0 \end{cases}$</p> <p>e) $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ 2xy = 4 \end{cases}$</p> <p>f) $\begin{cases} \frac{2}{y-x} + x = 4 \\ \frac{1}{x+1} - y = \frac{-19}{4} \end{cases}$</p>
--	--

(b)

Pack de imágenes 4.2: En (a) una actividad con formulación sencilla de la editorial Edelvives. En (b) una actividad con formulación compleja de la editorial Santillana.

5. Resultados del análisis

5.1. Organización del contenido

5.1.1. Situación respecto al resto de temas

Tema	Edelvives	Santillana
1	Números reales	Números reales. Porcentajes
2	Expresiones algebraicas. Polinomios	Potencias y radicales. Logaritmos
3	Ecuaciones e inecuaciones	Polinomios y fracciones algebraicas
4	Sistemas de ecuaciones y de inecuaciones	Ecuaciones e inecuaciones
5	Perímetros, longitudes, áreas y volúmenes	Sistemas de ecuaciones e inecuaciones
6	Semejanza	Áreas y volúmenes. Semejanza
7	Trigonometría	Trigonometría
8	Resolución de triángulos	Vectores y rectas
9	Geometría analítica	Funciones
10	Características globales de las funciones	Funciones polinómicas y racionales
11	Estudio de algunas funciones	Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas
12	Estadística	Estadística
13	Combinatoria	Combinatoria
14	Probabilidad	Probabilidad

Tabla 2: Esquemmatización de los distintos temas presentes en ambos libros. En verde el tema sometido a análisis. En rojo los temas que influyen en la comprensión geométrica de los sistemas de ecuaciones. En naranja los introductorios de Funciones que también supondrían un apoyo considerable.

En ambos índices (véase tabla 2 e imágenes A.1a, A.1b, A.1c) de las editoriales Edelvives y Santillana, el tema de “Sistemas de ecuaciones e inecuaciones” ocupa el cuarto y quinto lugar, respectivamente, después de tratar temas fundamentales como los números reales, las expresiones algebraicas y polinomios, y las ecuaciones e inecuaciones. La razón de esto es que el estudio de los sistemas de ecuaciones e inecuaciones requiere una comprensión sólida de los conceptos y técnicas introducidos en los temas anteriores. Por ejemplo, la resolución de sistemas de ecuaciones implica la manipulación de expresiones algebraicas y el uso de técnicas aprendidas en el estudio de las ecuaciones e inecuaciones. Además, los números reales, que son el primer tema, son la base de todo el estudio de las matemáticas y esenciales para entender los conceptos que vienen después.

Por lo tanto, introducir los sistemas de ecuaciones e inecuaciones después de estos temas parece

lógico desde el punto de vista pedagógico, pues se va de lo más simple a lo más complejo, permitiendo una progresión natural del aprendizaje.

No obstante, el tema objeto de estudio se encuentra precedido por temas de cálculo y seguido por temas como el de Geometría o Funciones. Podría ser interesante reflexionar sobre la idea de si siempre es necesario seguir una secuencia de lo simple a lo complejo. En este caso, es importante considerar la interrelación entre los sistemas de ecuaciones y conceptos sobre funciones y sobre conceptos geométricos y si estos últimos deberían ser impartidos o introducidos brevemente antes del área de ecuaciones e inecuaciones con el objetivo de facilitar la asimilación conceptual a los alumnos. Por poner un ejemplo, la mayoría de alumnos de 4^o de ESO tienen dificultades para relacionar una ecuación como el punto de corte con el eje de abscisas de su función asociada.

5.1.2. Situación de los contenidos ordinarios del propio tema

Para comenzar, es importante mencionar que existen algunos contenidos que se encuentran implícitos o que son tratados de forma indirecta, es decir, que no se presentan de manera explícita y que no se espera que sean abordados obligatoriamente. En el presente apartado, nos enfocaremos exclusivamente en aquellos contenidos que los autores han destacado explícitamente en el texto (véase tabla 3), sin embargo, en la sección posterior, trataremos estos contenidos implícitos.

Sección	Edelvives	Santillana
1	Sistemas de dos ecuaciones lineales	Sistemas de ecuaciones lineales
2	Sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas	Resolución de sistemas de ecuaciones
3	Método de Gauss	Sistemas de ecuaciones no lineales
4	Sistemas de ecuaciones no lineales	Sistemas de inecuaciones con una incógnita
5	Sistemas de inecuaciones con una incógnita	Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas
6	Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas	No aplica
7	Aplicaciones	No aplica

Tabla 3: Esquematización de las secciones presentes en ambos libros para el tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. En rojo claro se señalan los contenidos ordinarios de la editorial Edelvives que no son alcanzados por la editorial Santillana. No ocurre tal cosa al revés. “No aplica” significa que no existe una sección i -ésima.

Por una parte, la editorial Edelvives inicia el tema con sistemas de dos ecuaciones lineales, progresando a sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas e introduciendo el método de Gauss. A continuación, se abordan los sistemas de ecuaciones no lineales, seguidos de los sistemas de inecuaciones, primero con una incógnita y luego con dos. El tema concluye con una sección completa y

teórica dedicada a aplicaciones prácticas.

Por otro lado, la editorial Santillana, nunca considera un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas, empieza con sistemas de ecuaciones lineales, que consiste en una sección destinada a la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Posteriormente, se adentra en la resolución analítica de estos sistemas mediante los métodos clásicos. Luego, se presentan los sistemas de ecuaciones no lineales, seguidos de sistemas de inecuaciones, comenzando con una incógnita y luego avanzando a dos. Finalmente, aunque Santillana incorpora una colección de problemas de aplicación, carece de una sección teórica específica centrada en aplicaciones prácticas, una característica que sí se encuentra en Edelvives.

5.1.3. Contenidos implícitos dentro del tema

Otros contenidos	Editorial Edelvives	Editorial Santillana
Resolución de sistemas compatibles indeterminados	No	Sí
Discusión de sistemas en función de un parámetro	No	Sí
Resolución de sistemas mediante cambios de variable	Sí	No
Resolución de sistemas no lineales mediante reducción	Sí	Sí
Resolución de inecuaciones con valor absoluto	Sí	No
Resolución de inecuaciones con fracciones algebraicas	Sí	No
Resolución de inecuaciones de productos polinómicos	Sí	No

Tabla 4: Contenidos tratados, pero no expuestos de forma explícita por los autores en la tabla de contenidos. “Sí” indica que dicho contenido sí se trabaja en la editorial correspondiente.

Resolución de sistemas compatibles indeterminados

La resolución de sistemas compatibles indeterminados es un tema que se trata en la editorial Santillana durante la colección de problemas (véase imagen 5.1a). Este tipo de sistemas son introducidos con una actividad resuelta y, posteriormente, se propone al alumno unos pocos ejercicios al respecto. Por su parte, la editorial Edelvives no trata el tema.

Discusión de sistemas en función de un parámetro

Asimismo, la discusión de sistemas en función de un parámetro también es un tema muy interesante que la editorial Santillana pone de relieve durante la colección de ejercicios (véase imagen 5.1b). En cambio, la editorial Edelvives no trabaja este tipo de ejercicios.

Resolución de sistemas mediante cambios de variable

La editorial Edelvives contempla resoluciones mediante cambio de variable (véase imagen 5.2a), algo que para numerosos alumnos de secundaria puede suponer un gran ejercicio cognitivo y desafiante. Sin embargo, la editorial Santillana no considera este tipo de resoluciones pese a que ambas editoriales proponen sistemas de ecuaciones no lineales resolubles por reducción que también pueden resolverse mediante un cambio de variable. Esto ampliaría el abanico de recursos del alumno.

Resolución de sistemas no lineales mediante reducción

Ambas editoriales introducen la resolución de sistemas no lineales mediante el método de reducción. Este enfoque permite a los estudiantes apreciar la eficacia de este método en contraposición a la ineficiencia que puede presentar el método de sustitución en ciertos casos. No obstante, la editorial Santillana podría mejorar su presentación del método de reducción, ya que no destaca explícitamente la utilidad de esta estrategia como una forma de simplificar significativamente la resolución de sistemas (véase imagen 5.1c). Esta observación es algo que la editorial Edelvives sí realiza al menos de forma superficial (véase imagen 5.2b). Esta claridad es esencial para los estudiantes, ya que contribuye a entender la pertinencia y efectividad de las herramientas matemáticas a su disposición.

Resolución de inecuaciones con valor absoluto

La editorial Edelvives, presenta valores absolutos en la resolución de inecuaciones con una sola incógnita (véase imagen 5.2c). Sin embargo, la editorial Santillana no.

Resolución de inecuaciones con fracciones algebraicas

Ocurre de manera similar con la resolución de inecuaciones con fracciones algebraicas. La editorial Edelvives proporciona ejercicios al respecto esperando mucho más del alumno, pues permite potenciar en los alumnos el análisis por casos (véase imagen 5.2c). Por el contrario, la editorial Santillana omite este tipo de ejercicios.

Resolución de inecuaciones de productos polinómicos

No obstante, pese a que la editorial Edelvives propone inecuaciones con fracciones algebraicas del tipo (5.1),

$$\frac{5x + 10}{2x - 8} \geq 0 \quad (5.1)$$

ninguna de las dos editoriales presenta una inecuación producto del tipo (5.2).

$$(x + 1)(x - 3) \geq 0 \quad (5.2)$$

Por el contrario, en ambas editoriales se muestran inecuaciones (o sistemas de inecuaciones) similares a las del tipo (5.3).

$$x^2 - 2x - 3 \geq 0 \quad (5.3)$$

SABER HACER

Resolver un sistema de ecuaciones compatible indeterminado

50 Encuentra las soluciones de este sistema.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ -6x + 6 = -4y \end{cases}$$

PRIMERO. Se expresan las ecuaciones dejando los términos independientes en el segundo miembro y se resuelve el sistema por el método más adecuado.

$$\begin{array}{r} 3x - 2y = 3 \\ -6x + 6 = -4y \end{array} \xrightarrow{-2} \begin{array}{r} 3x - 2y = 3 \\ 6x - 4y = 6 \end{array}$$

$$\xrightarrow{-2} \begin{array}{r} 6x - 4y = 6 \\ 6x - 4y = 6 \end{array} \xrightarrow{-} \begin{array}{r} 6x - 4y = 6 \\ 6x - 4y = 6 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

SEGUNDO. Se analiza la solución.

Como $0 = 0$ se cumple para infinitos valores de x e y , el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto, existen infinitos valores que verifican las dos ecuaciones del sistema a la vez.

Fijamos el valor de x y expresamos el valor de y en función de este en cualquiera de las ecuaciones.

Para $x = \lambda$ hallamos el valor de y despejando en la primera ecuación:

$$3x - 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3x - 3}{2} \quad x = \lambda, \quad y = \frac{3\lambda - 3}{2}$$

Las soluciones son los pares $(x, y) = \left(\lambda, \frac{3\lambda - 3}{2}\right)$

(a)

SABER HACER

Resolver sistemas de ecuaciones en función de un parámetro

49 Encuentra las soluciones del sistema $\begin{cases} 2x + ay = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ en función del parámetro a .

PRIMERO. Se resuelve el sistema por el método más adecuado y se expresan las soluciones en función del parámetro.

$$\begin{array}{r} 2x + ay = 5 \\ x - y = 1 \end{array} \rightarrow x = 1 + y$$

$$2x + ay = 5 \xrightarrow{x=1+y} 2(1+y) + ay = 5 \rightarrow y = \frac{3}{2+a}$$

$$x = 1 + y \xrightarrow{y=\frac{3}{2+a}} x = 1 + \frac{3}{2+a} = \frac{a+5}{2+a}$$

SEGUNDO. Se analiza el valor de la solución. Esto se llama discutir la solución del sistema en función de a .

Como a aparece en el denominador, no existirá solución cuando este se anule.

- Para $a = -2$ no tiene solución. El sistema es incompatible.
- Para $a \neq -2$ el sistema es compatible determinado.

(b)

Resolver sistemas de ecuaciones no lineales por el método de reducción

51 Resuelve el sistema: $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 7 \\ 2x^2 - 4y^2 = 4 \end{cases}$

PRIMERO. Se iguala el coeficiente de las partes literales que sean iguales en las dos ecuaciones. En este caso, se iguala el coeficiente de x^2 .

$$\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 7 \\ 2x^2 - 4y^2 = 4 \end{array} \xrightarrow{-2} \begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 7 \\ 2x^2 + 6y^2 = 14 \\ \hline 2x^2 - 4y^2 = 4 \\ 2x^2 - 4y^2 = 4 \end{array}$$

SEGUNDO. Se restan las ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 6y^2 = 14 \\ -2x^2 - 4y^2 = 4 \\ \hline 10y^2 = 10 \rightarrow y = \pm 1 \end{array}$$

TERCERO. Se calcula el valor de la otra variable sustituyendo en una de las ecuaciones los valores hallados.

$$\begin{array}{r} x^2 + 3y^2 = 7 \\ x^2 + 3y^2 = 7 \xrightarrow{y=1} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 + 3y^2 = 7 \xrightarrow{y=-1} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \end{array}$$

Hay cuatro soluciones, que se obtienen combinando los dos valores de x obtenidos con cada uno de los dos valores de y .

$(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$

(c)

Pack de imágenes 5.1: Figuras que muestran las actividades resueltas que utiliza Santillana para introducir los siguientes contenidos. En (a) *Resolución de sistemas compatibles indeterminados*. En (b) *Discusión de sistemas en función de un parámetro*. En (c) *Resolución de sistemas no lineales mediante reducción*.

Las inecuaciones del tipo (5.2) se pueden resolver mediante dos formas:

1. Un análisis gráfico del signo de la parábola y sus puntos de corte con el eje de abscisas. Esto establecería una conexión gráfica con el tema de funciones.
2. Factorizando la parábola (5.3) en sus factores lineales como en (5.2) y analizando por casos su producto. Esto reforzaría la comprensión lógica del alumno viéndose “forzado” a tener que aplicar equivalencias lógicas como que si “un producto de dos números reales es no negativo, equivalentemente, ambos números son no negativos o ambos números son no positivos”.

Ninguna editorial expone alguna de estas vías de resolución, simplemente plantean ejercicios al respecto, siendo la intervención del docente casi necesaria y obligatoria.

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 - 3x = -8 \end{cases}$$

- Se aplica el cambio de variable

Los sistemas de ecuaciones no lineales con una ecuación homogénea (es decir, una cuyo término independiente es cero) se pueden resolver utilizando el siguiente procedimiento:

- Se divide la ecuación homogénea entre el término de mayor grado. En este caso puede ser cualquiera de los dos; elegimos, por ejemplo, x^2 :

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{4y^2}{x^2} = \frac{0}{x^2} \Rightarrow 1 - 4 \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow 1 - 4 \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0$$

- Se realiza el cambio de variable $t = \frac{y}{x}$, con lo que resulta la ecuación $1 - 4t^2 = 0$.
- Se resuelve la ecuación:

$$1 - 4t^2 = 0 \Rightarrow 4t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

- Se deshace el cambio y resulta:

$$\pm \frac{1}{2} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}x$$

- Se resuelve el sistema

Se reemplaza este valor en la segunda ecuación y se halla la solución de la ecuación resultante:

$$x^2 - 3 \left(\pm \frac{1}{2}x\right)^2 - 3x = -8 \Rightarrow x^2 - \frac{3x^2}{4} - 3x = -8 \Rightarrow x^2 - 12x + 32 = 0$$

Sus soluciones son $x = 8$ y $x = 4$. Según esto:

- Si $x = 8 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \cdot 8 = \pm 4$
- Si $x = 4 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \cdot 4 = \pm 2$

Por tanto, las soluciones finales son $(8, 4)$, $(8, -4)$, $(4, 2)$ y $(4, -2)$.

- Se comprueban las soluciones

$$\begin{cases} 8^2 - 4 \cdot (\pm 4)^2 = 0 \\ 8^2 - 3 \cdot (\pm 4)^2 - 3 \cdot 8 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64 - 64 = 0 \\ 64 - 48 - 24 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^2 - 4 \cdot (\pm 2)^2 = 0 \\ 4^2 - 3 \cdot (\pm 2)^2 - 3 \cdot 4 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 16 = 0 \\ 16 - 12 - 12 = -8 \end{cases}$$

(a)

Actividad resuelta

Resuelve el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 3x^2 - 7y^2 = 12 \\ -2x^2 + 5y^2 = -5 \end{cases}$$

En este caso, en el que todas las incógnitas están elevadas al cuadrado, la forma más sencilla de resolver el sistema es mediante el método de reducción.

- Se multiplica la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 y se suman las ecuaciones resultantes:

$$\begin{cases} 3x^2 - 7y^2 = 12 & \cdot 2 \rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 14y^2 = 24 \\ -2x^2 + 5y^2 = -5 \end{cases} \\ -2x^2 + 5y^2 = -5 & \cdot 3 \rightarrow \begin{cases} -6x^2 + 15y^2 = -15 \end{cases} \end{cases}$$

$$y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm \sqrt{9} = \pm 3$$

- Se reemplazan los valores obtenidos de y en cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo en la primera, y se obtiene el valor de la otra incógnita:

- Si $y = 3 \Rightarrow 3x^2 - 7 \cdot 3^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$
- Si $y = -3 \Rightarrow 3x^2 - 7 \cdot (-3)^2 = 12 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$

- Se sustituye en el sistema inicial y se comprueban las cuatro soluciones obtenidas, $(5, 3)$, $(5, -3)$, $(-5, 3)$ y $(-5, -3)$.

(b)

Actividades resueltas

- Encuentra el conjunto de valores de x que verifica:

$$|x - 3| \leq 5$$

Para resolver la inecuación, hay que recordar que:

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Rightarrow \begin{cases} x \leq a \\ -a \leq x \end{cases}$$

Se plantea el sistema y se resuelven ambas inecuaciones por separado:

$$|x - 3| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 \leq 5 \Rightarrow x \leq 8 \\ -5 \leq x - 3 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases}$$

Por tanto, el conjunto de valores que puede tomar x es la intersección de los intervalos $(-\infty, 8] \cap [-2, +\infty)$.

Luego, x puede tomar cualquier valor del intervalo $[-2, 8]$.

Se representa gráficamente del siguiente modo:

- Resuelve la siguiente inecuación: $\frac{x-1}{2x+6} > 0$

Para que una fracción sea positiva, puede ocurrir que:

- El numerador y el denominador sean positivos:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 2x + 6 > 0 \Rightarrow x > -3 \end{cases}$$

Es decir, x es un número del intervalo $(1, +\infty)$.

- El numerador y el denominador sean negativos:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \\ 2x + 6 < 0 \Rightarrow x < -3 \end{cases}$$

Esto es, x es un número del intervalo $(-\infty, -3)$.

Por tanto, la solución es $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ y se representa:

(c)

Pack de imágenes 5.2: Figuras que muestran las actividades resueltas que utiliza la editorial Edelvives para introducir los siguientes contenidos. En (a) Resolución de un sistema de ecuaciones no lineal mediante cambio de variable. En (b) Resolución de un sistema de ecuaciones no lineal mediante reducción. En (c) Resolución de una inecuación con valor absoluto.

5.1.4. ¿Se exponen los objetivos que se pretenden alcanzar?

De ambas editoriales, únicamente la editorial Santillana presenta formalmente los objetivos perseguidos en el tema. Estos son los que siguen a continuación:

1. Determinar gráficamente el número de soluciones de un sistema de ecuaciones.
2. Resolver un sistema de ecuaciones lineales.
3. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales.
4. Resolver sistemas de inecuaciones con una incógnita.
5. Resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.
6. Resolver sistemas de ecuaciones en función de un parámetro.
7. Resolver un sistema de ecuaciones compatible indeterminado.
8. Resolver sistemas de ecuaciones no lineales por el método de reducción.

Dichos objetivos se ven reflejados en la imagen A.1a del anexo.

5.2. Análisis fenomenológico

Los contenidos del tema se desglosan de manera secuencial por secciones. Por un lado, la editorial Santillana opta por una introducción basada en actividades resueltas, destinadas a facilitar la asimilación del concepto y proporciona un conjunto de actividades para que los estudiantes los resuelvan en cada página. Por otro lado, Edelvives presenta los conceptos y se enfoca en mostrar actividades resueltas de mayor complejidad y con mayor profundidad y detalle, reservando las actividades para el final y estableciendo una distinción más marcada entre teoría y práctica.

En cuanto a la presencia de referencias históricas, ambas editoriales establecen alguna, pero muy ocasionalmente y, en el caso de la editorial Santillana, fuera del temario ordinario. De hecho en Santillana utilizan como referencia histórica la evolución del cepillo de dientes a lo largo de la historia. Por su parte, la editorial Edelvives únicamente da una referencia histórica dando a conocer a Carl Friedrich Gauss, con el objetivo de que los alumnos sepan relacionar el nombre de la técnica con dicho matemático.



Imagen 5.3: Referencias históricas de la editorial Santillana.

3 MÉTODO DE GAUSS




El **método de Gauss** permite resolver, de forma más rápida y sencilla, sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas. Se trata de un procedimiento reductivo, es decir, es un procedimiento en el que se aplica el método de reducción.

Al resolver un sistema mediante esta técnica, se van obteniendo sistemas equivalentes al inicial, de forma que el sistema final sea escalonado, es decir, que cada ecuación tenga una incógnita menos que la anterior.

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ b'y + c'z = d' \\ c''z = d'' \end{cases}$$

Recuerda que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.



Johann Carl Friedrich Gauss, Matemático, astrónomo y físico alemán del siglo XVIII.

Imagen 5.4: Introducción al método Gauss de la editorial Edelvives en la que se aprecia la referencia histórica de Gauss y la introducción del concepto de equivalencia. En sus actividades resueltas la editorial insiste nuevamente en dicho concepto.

5.3. Análisis conceptual

5.3.1. Definiciones

Ambas editoriales, mediante la enumeración de pasos durante la exposición de sus respectivas actividades resueltas, enfatizan bastante las resoluciones procedimentales frente a la asimilación conceptual de las definiciones y el razonamiento lógico de las cuestiones matemáticas derivadas. En las dos editoriales, la comprensión conceptual y el razonamiento lógico, esenciales para que el

alumno desarrolle autonomía y pueda elaborar su propia secuencia de proposiciones lógicas hacia una solución, parecen relegados a un segundo plano (véase imagen 5.5).

Un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es aquel en el que la incógnita aparece en todas las inecuaciones con exponente uno.

Su expresión general es de la forma
$$\begin{cases} a_1x < b_1 \\ a_2x < b_2 \\ \dots \\ a_nx < b_n \end{cases}$$
 y en ella puede figurar cualquiera de los signos de desigualdad: $<$, \leq , $>$ o \geq .

Para resolver un sistema de inecuaciones, han de seguirse estos pasos:

- 1** Se resuelve por separado cada una de las inecuaciones que componen el sistema.
- 2** La solución del sistema es la intersección de todas las soluciones de las inecuaciones, es decir, las soluciones comunes a todas ellas.

El procedimiento para resolver un sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita es el mismo, independientemente del número de inecuaciones que lo compongan.

Al igual que ocurría con las soluciones de una inecuación, las soluciones de un sistema de inecuaciones se expresan en forma de intervalo o de unión de intervalos.

Imagen 5.5: Ejemplificación de la editorial Edelvives donde ya predispone al alumno a adquirir una metodología procedimental.

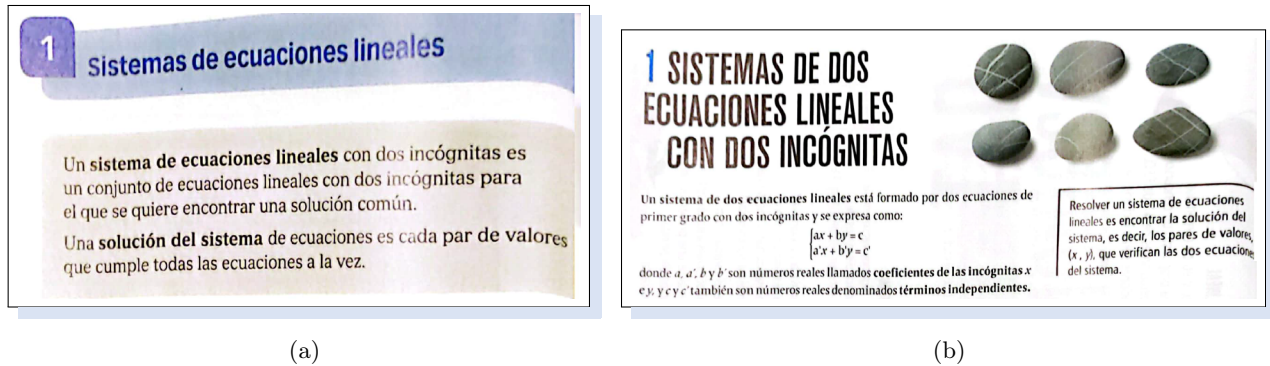
Por otra parte, en cuanto al rigor al introducir los conceptos, Santillana brinda definiciones más directas y simplificadas, en comparación con la presentación más rigurosa de Edelvives. Es destacable cómo Edelvives incorpora un enfoque algebraico y abstracto al introducir sus conceptos, un componente que se echa en falta en el estilo de Santillana. No obstante, Edelvives también incurre en ocasiones en algún tipo de resolución procedimental que no atiende a justificaciones. Además, en ambos casos, ninguna de las dos editoriales introduce los conceptos mediante su contextualización con situaciones reales.

A continuación, y con el objetivo de fundamentar los resultados del presente apartado, se proporcionarán algunos casos ilustrativos al respecto y se analizarán sus puntos fuertes y débiles.

Por ejemplo, Edelvives utiliza una representación simbólica, genérica y abstracta para representar los sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas y, además, asigna términos específicos a los elementos del sistema, al referirse a los “coeficientes de las incógnitas” y “términos independientes” (véase pack de imágenes 5.6). Este detalle aporta al alumnado una mayor habilidad para verbalizar conceptos matemáticos, algo que se puede considerar esencial en el aprendizaje de las matemáticas.

En cuanto a la definición de “solución del sistema” en ambas editoriales utilizan el término “par de valores”, en lugar de mencionar “puntos del plano” con el objetivo de forjar una relación geométrica

del sistema en la mente del alumno a la hora de verbalizarlo.



Pack de imágenes 5.6: Figuras que muestran cómo cada editorial introduce el concepto de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.

Por otra parte, ambas editoriales introducen de forma superficial la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, la editorial Santillana no proporciona ningún criterio de identificación para ello (véase imagen 5.7a), mientras que la editorial Edelvives sí. No obstante, la editorial Edelvives proporciona un criterio “mecánico” sin otorgar justificación al respecto, ni motivando al alumnado a preguntarse el porqué de dichos criterios (véase imagen 5.7b).

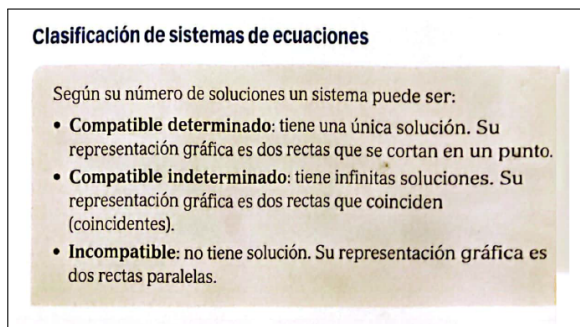
Supóngase que se dispone del siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y que nos piden “Hallar el conjunto de todos los puntos del plano que verifican simultáneamente el sistema de ecuaciones (5.4)”.

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x + y = 1 & (2) \end{cases} \quad (5.4)$$

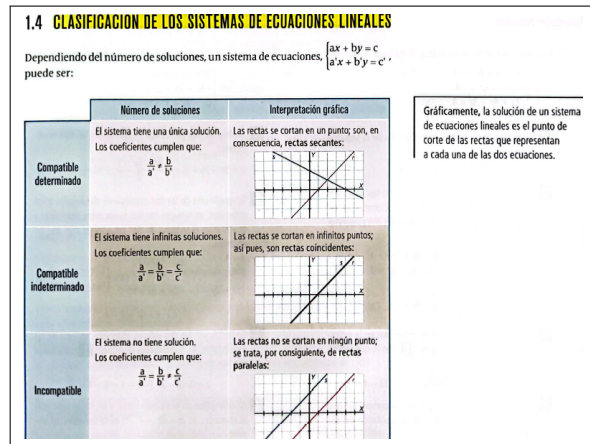
Atendiendo a la editorial Edelvives, el sistema es incompatible, pues se verifica la condición

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \longrightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \neq \frac{2}{1} \quad (5.5)$$

siendo esto una forma procedimental de realizar el análisis. ¿Sería más efectivo enseñar a un alumno de 4º de ESO a razonar que una misma suma no puede simultáneamente proporcionar dos resultados distintos y que, por tanto, necesariamente el sistema ha de ser incompatible?



(a)



(b)

Pack de imágenes 5.7: Figuras que muestran cómo editorial trata la clasificación de sistemas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.

Por otra parte, ninguna de las editoriales analizadas explica el concepto de equivalencia de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este concepto es vital si se pretende hacer entender a un alumno que las solución del sistema permanece inalterada si se realizan operaciones sobre cada ecuación del sistema, siempre y cuando se respeten las igualdades. Aunque, se aprecia un acercamiento superficial y sin justificación al respecto en la editorial Santillana, ya que no se especifica que la posibilidad de hacer eso radica en la conservación del conjunto solución al respetar las igualdades (véase imagen 5.8).

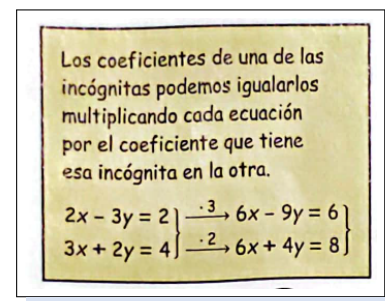


Imagen 5.8: Equivalencia de dos sistemas en Santillana.

En cambio, la editorial Edelvives sí expone el concepto de la equivalencia de sistemas cuando trata el método Gauss con sistemas lineales de tres incógnitas, sin haberlo realizado antes para el caso de dos incógnitas (véase imagen 5.4).

Por último, en cuanto al resto de secciones, cabe destacar que el estilo en la presentación de los conceptos se mantiene constante en base a lo señalado en este apartado.

5.3.2. Representaciones en la transmisión de los conceptos

En esta sección nos centraremos en las representaciones visuales que ambas editoriales utilizan para clarificar los conceptos a los estudiantes. Sin embargo, debemos diferenciar esto de las representaciones requeridas por parte de la editorial durante la resolución de problemas, las cuales se

considerarán en la sección 5.3.3 que sigue a continuación.

En general, en ambas editoriales se utilizan representaciones gráficas para apoyar los conceptos impartidos, fundamentalmente, los conceptos relacionados con las secciones siguientes:

- Sistemas de ecuaciones lineales (véase imágenes 5.7b y 5.9).
- Sistemas de inecuaciones con una incógnita (véase pack de imágenes 5.11).
- Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas (véase pack de imágenes 5.12).

En relación a la sección de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas es inevitable que un libro mínimo que se precie proporcione una mínima noción geométrica con la que el alumno sea capaz de relacionar dichos sistemas, sobre todo, para ilustrar conceptos como el de sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado y sistema incompatible.

Además, Edelvives utiliza alguna imagen motivadora para elevar de forma intuitiva en los alumnos la clasificación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas a tres incógnitas (véase imagen 5.10).

En cuanto a los sistemas de inecuaciones con una incógnita las representaciones de la editorial Edelvives podrían parecer superiores a las de la editorial Santillana (véase pack de imágenes 5.11). De hecho, la editorial Edelvives utiliza la notación conjuntista para tratar las intersecciones.

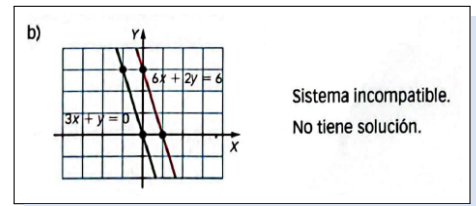


Imagen 5.9: Representación gráfica de un sistema incompatible en la editorial Santillana.

Planos en el espacio

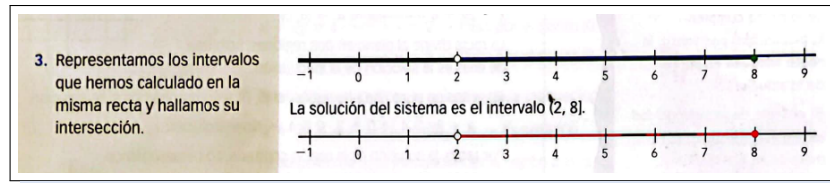
Gráficamente, la solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es la intersección de los tres planos del espacio que representan a cada una de las tres ecuaciones que forman dicho sistema.

Vamos a estudiar las posiciones relativas de tres planos en el espacio. Para ello, haz un corte en la mitad de tres cartulinas de distintos colores.

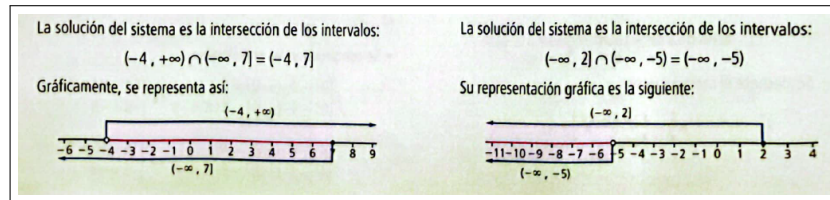
Observa la figura del margen, que muestra una posible disposición de los tres planos.

- a. ¿Cuántas posiciones relativas distintas hay con tres planos? Haz un dibujo de cada una de ellas.
- b. ¿Cómo podrías colocar los tres planos para que el sistema de ecuaciones fuese compatible determinado?
- c. Indica una posible colocación de los tres planos para que el sistema sea incompatible.

Imagen 5.10: Preguntas en la editorial Edelvives que elevan la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a tres incógnitas.

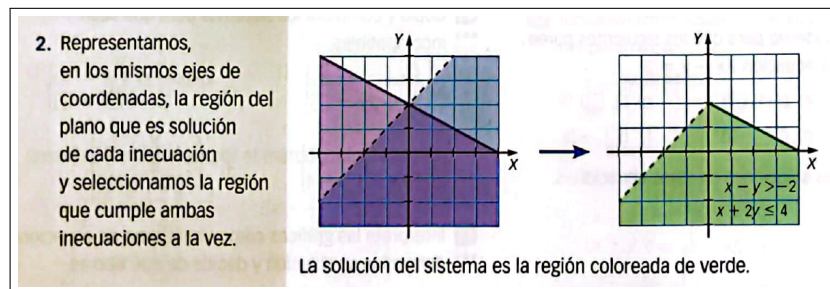


(a) Editorial Santillana

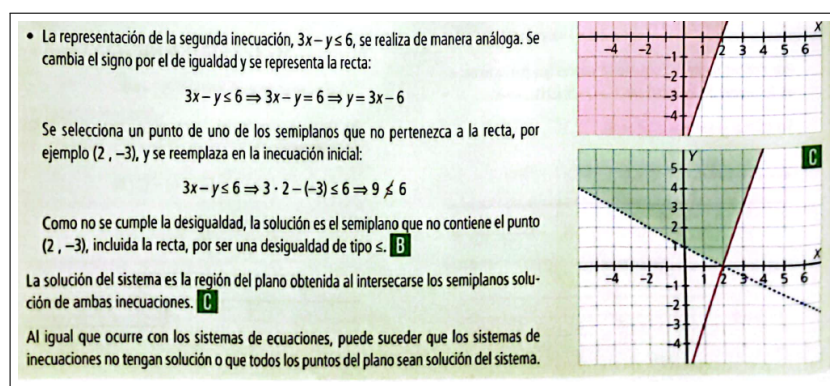


(b) Editorial Edelvives

Pack de imágenes 5.11: Figuras que muestran las representaciones utilizadas por las editoriales para visualizar las soluciones de un sistema de inecuaciones con una sola incógnita.



(a) Editorial Santillana



(b) Editorial Edelvives

Pack de imágenes 5.12: Figuras que muestran las representaciones utilizadas por las editoriales para visualizar las soluciones de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas.

Es importante señalar que, en la sección de sistemas de inecuaciones con dos incógnitas de ambas editoriales, no sólo se emplean las representaciones visuales como soporte, que sería lo esperado, sino que también se consideran como la solución en sí misma. De esta manera, se evita que el estudiante tenga que realizar el esfuerzo de definir la solución de manera analítica. Por ejemplificar esto último, en la imagen 5.12a se visualiza cómo se considera válida la solución gráfica y no se solicita proporcionar la solución analítica (5.6), i.e., como el conjunto de los puntos del plano que verifican (5.6). Esta dinámica se mantiene constante en ambas editoriales en lo que respecta a todos los ejercicios relacionados con sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} y < x + 2 & \text{si } x < 0 \\ y < -\frac{x}{2} + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Observación sobre representaciones de sistemas de ecuaciones no lineales

Resulta peculiar que, a pesar de la ausencia de representaciones gráficas para sistemas de ecuaciones no lineales en sus secciones teóricas, la editorial Edelvives incluye algunos ejercicios de este tipo, tal y como se refleja en la imagen 5.13. Este enfoque puede resultar desconcertante, ya que no se proporciona un acercamiento pertinente en el tema y, además, los contenidos de funciones se abordarían hacia el final del curso.

Con respecto a la editorial Santilla, esta se mantiene coherente en este aspecto.

22 Representa gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales e indica su solución:

a. $\begin{cases} x^2 + y = 7 \\ x \cdot y = 6 \end{cases}$	c. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + 2y = 3 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = \frac{-2}{x} \end{cases}$	d. $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 2x^2 + y = 9 \end{cases}$

Imagen 5.13: Ejercicio extraído de la editorial Edelvives donde se solicita una representación de funciones no lineales.

Para concluir, tanto Santillana como Edelvives incluyen ilustraciones meramente decorativas en sus textos. Sin embargo, la estética de las mismas difiere significativamente: mientras Santillana opta por un estilo más infantil, Edelvives prefiere un enfoque más sobrio. Es reseñable mencionar que en

Edelvives, cada sección teórica se introduce con unas imágenes que, aunque intentan establecer un vínculo con el tema a tratar, suelen establecer una relación un poco forzada (véase packs de imágenes A.2 y A.4 del anexo).

5.3.3. Actividades

Datos generales

Ambas editoriales, a lo largo de sus secciones teóricas, integran una variedad de ejercicios rutinarios que ya están resueltos con el objetivo de facilitar a los alumnos la comprensión del temario y proporcionarles también un marco de referencia. Asimismo, en el caso particular de Santillana, esta editorial propone al final de cada sección teórica actividades que han de ser resueltas por los alumnos.

Además, al final tema, ambas editoriales ofrecen una colección de actividades propuestas pensadas para que los alumnos trabajen todos los conceptos previamente tratados durante las secciones teóricas.

Cómo se puede observar en la tabla 5, las dos editoriales diferencian de forma muy marcada su colección de actividades propuestas en ejercicios rutinarios y problemas de palabras. En particular,

- La editorial Santillana consta de 101 actividades finales propuestas que se subdividen en 73 ejercicios y 28 problemas de palabras. En primer lugar, de los 73 ejercicios, un total de 29 son ejercicios que se distribuyen en las secciones teóricas y se proponen al final de cada una de ellas. Los 44 ejercicios restantes son de la colección final de problemas y 3 de ellos son ejercicios resueltos (véase pack de imágenes 5.1). En segundo lugar, existe una última sección de la colección denominada “Debes saber hacer”. Esta sección actúa como un compendio de seis actividades esenciales situados al final, señalando al estudiante que si logra resolver con éxito estas actividades, significa que ha adquirido los conocimientos fundamentales y las competencias asociadas con el tema. Por lo tanto, se considera que esta sección marca la conclusión de la colección.
- En cambio, la editorial Edelvives incluye únicamente 59 actividades propuestas al final de tema, de los cuales 37 son ejercicios rutinarios y 22 son problemas de palabras. A pesar de que la editorial Edelvives proporciona ejercicios resueltos al concluir cada sección teórica, se distingue de la editorial Santillana en un aspecto clave: no ofrece al final de cada sección teórica actividades propuestas al respecto, sino que se espera al final del tema para cualquier propuesta.

Editorial	Total de actividades propuestas	Ejercicios	Problemas de palabras
Edelvives	59	37	22
Santillana	101	73	28

Tabla 5: Recuento de ejercicios y problemas del total de actividades por cada editorial.

Antes de empezar, cabe aclarar que se descartarán de los siguientes análisis los siguientes ejercicios en relación a la editorial Santillana:

- Los tres problemas mostrados en el pack de imágenes 5.1, pues son ejercicios resueltos.
- La actividad 92, pues no tenía solución por una formulación desafortunada del enunciado que veremos en la sección 5.3.3.1 que sigue a continuación.

Por consiguiente, el total de actividades finales presentes en la editorial Santillana son 97.

5.3.3.1 Errores detectados

En líneas generales no detecté errores graves, a excepción de una actividad mal planteada por la editorial Santillana.

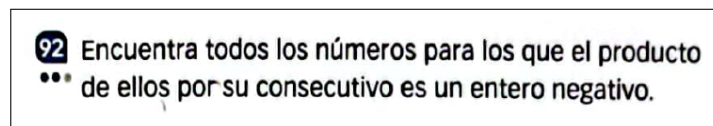


Imagen 5.14: Actividad mal planteada por la editorial Santillana.

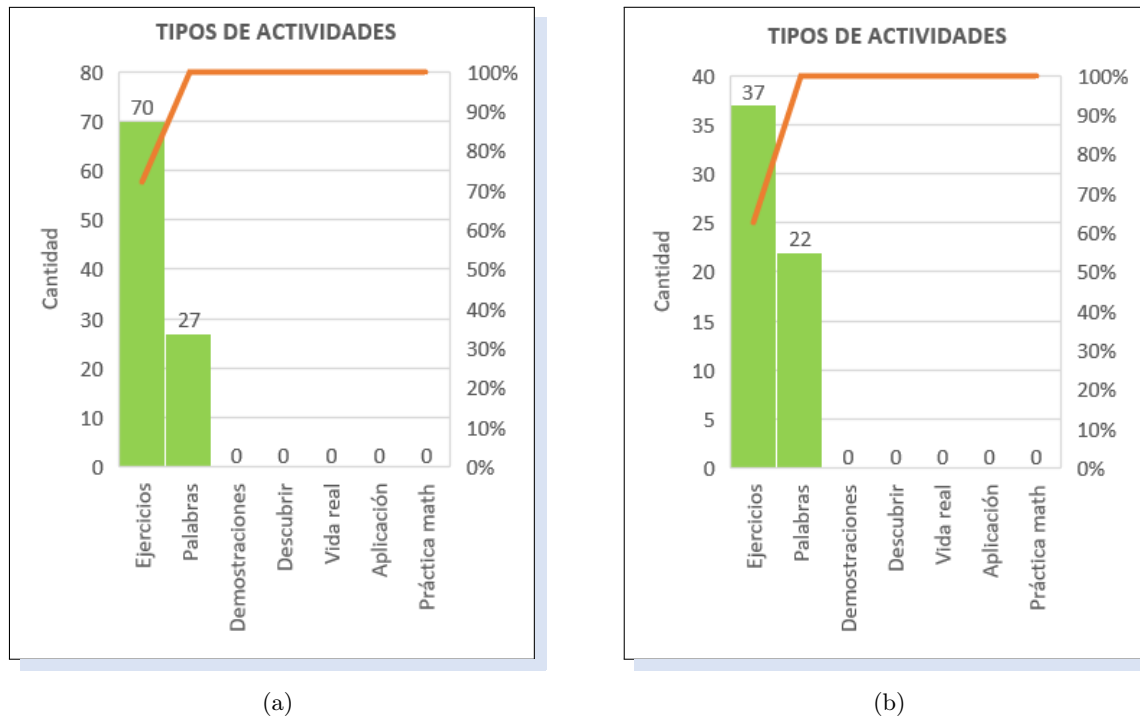
En la imagen 5.14 se observa claramente cómo la editorial persigue que su resolución se consiga mediante una inequación. Por tanto, el conjunto de números enteros solicitado por el problema 92 es el conjunto de enteros $5,7$, el cual es trivialmente vacío.

$$\{z \in \mathbb{Z} : z(z + 1) < 0\} = \emptyset \quad (5.7)$$

Sin embargo, puesto que el tema en el que se encuentra enmarcado el problema está enfocado a números reales, a uno le llama la atención esta actividad y más todavía si atendemos al estilo procedimental que caracteriza la editorial Santillana. Tanto es así, que consultando el solucionario que la editorial pone a disposición de los profesores, se comprueba que la solución se propone a través de los números reales llegando a que la solución es $(-1, 0)$, algo que es absurdo si se considera que un número real en el intervalo abierto $(-1, 0)$ no tiene consecutivo.

Por estos motivos, este ejercicio lo descarto del análisis en las siguientes ilustraciones sobre la editorial Santillana.

5.3.3.2 Tipos de actividades



Pack de imágenes 5.15: Diagramas de barras que muestran por cada editorial el número de problemas según su tipología. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.

El análisis de las actividades propuestas por las editoriales Santillana y Edelvives muestra una clara predominancia de ejercicios y problemas de palabras (véase imagen 5.15).

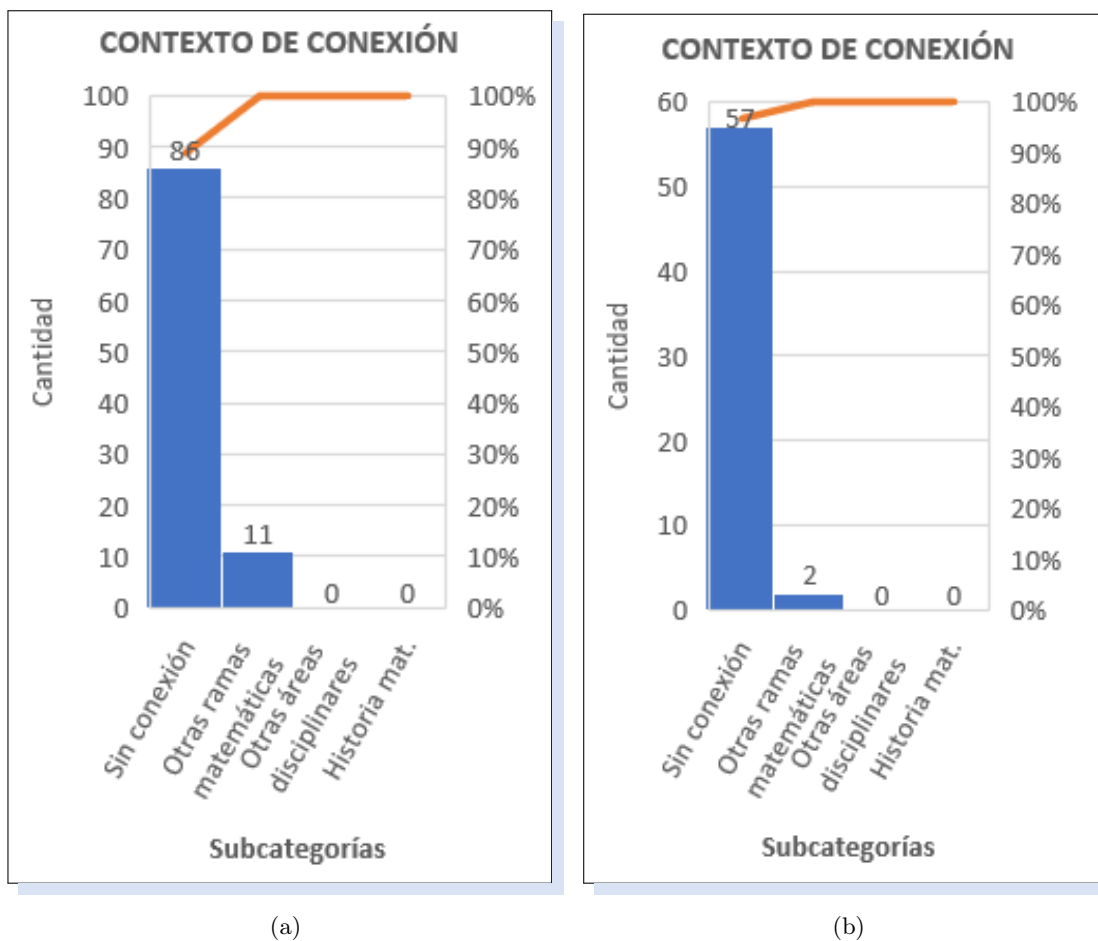
Para la editorial Santillana, de las 97 actividades en total, aproximadamente el 72% (70 actividades) son ejercicios, mientras que el restante 28% (27 actividades) se clasifican como problemas de palabras. Esta proporción sugiere un énfasis más fuerte en la práctica de técnicas y procesos algorítmicos (ejercicios), aunque aún ofrece una cantidad significativa de actividades que requieren la traducción de situaciones contextualizadas al lenguaje matemático (problemas de palabras).

Por otro lado, la editorial Edelvives presenta un total de 59 actividades, con un 63% (37 actividades) como ejercicios y un 37% (22 actividades) como problemas de palabras. Aunque también tiene un enfoque predominante en ejercicios, la proporción de problemas de palabras es mayor en Edelvives que en Santillana, lo que podría indicar un intento de equilibrar la práctica de habilidades

algorítmicas con la aplicación de matemáticas a situaciones más contextualizadas.

Por último, es reseñable que los únicos tipos de actividades presentes en cada editorial son los ejercicios rutinarios y problemas de palabras. No hay actividades de ningún otro tipo, por ejemplo, actividades en las que se tenga que realizar una demostración o establecer una conjetura. Esto puede contribuir a no desarrollar un pensamiento verdaderamente crítico y a limitar la creatividad de los alumnos.

5.3.3.3 Tipo de conexiones



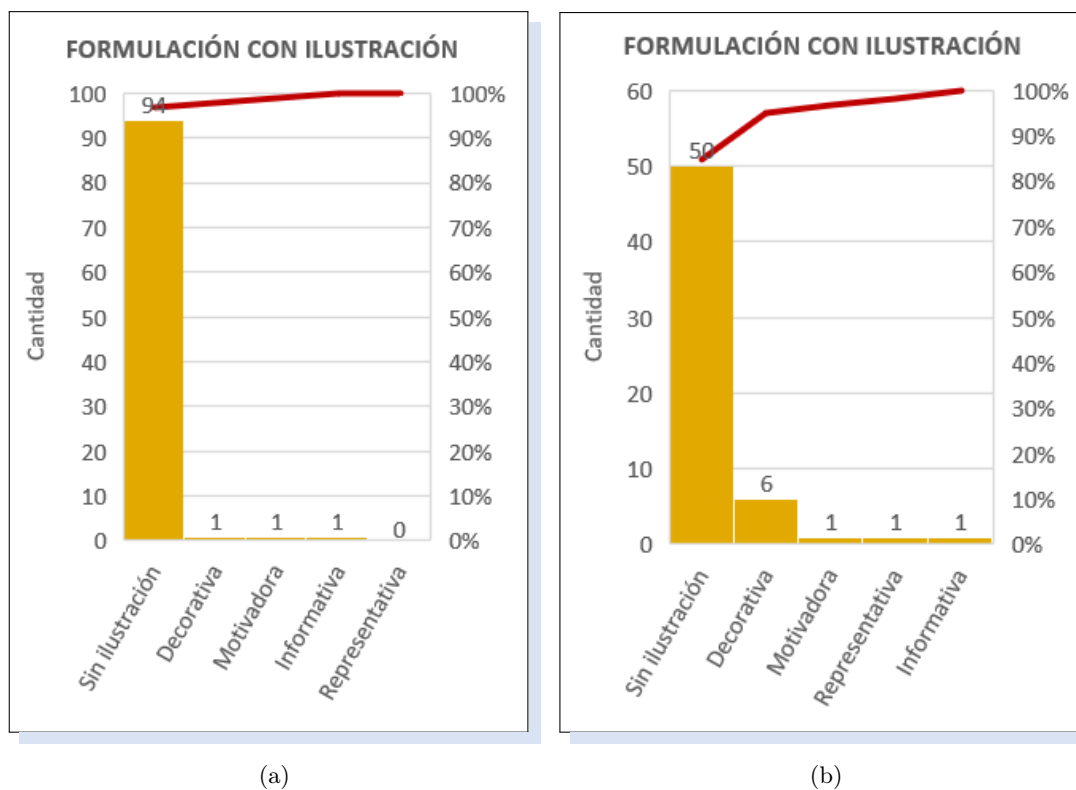
Pack de imágenes 5.16: Diagramas de barras que muestran por cada editorial el número de problemas según su conexión con otras áreas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.

Se observa en las dos editoriales un predominio de los problemas sin conexión, siendo la geometría la única conexión observada en ambas editoriales. Sin embargo, este vínculo se manifiesta con mayor relevancia en la editorial Santillana, en la cual, de sus 28 problemas de palabras, 11 están

relacionados con la geometría (véase imagen A.6). En contraste, en la editorial Edelvives, solamente 2 de sus 22 problemas de palabras muestran una conexión con la geometría, como puede observarse en los diagramas de barras reflejados en el pack de imágenes 5.16. No obstante, a favor de la editorial Edelvives se puede decir que se centra en problemas de palabras relacionados con sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. A diferencia de Santillana, que apenas toca este tema salvo en casos aislados, Edelvives ofrece una mayor cobertura en esta área específica de la matemática. Estos problemas son útiles porque ayudan al alumno a entender el concepto de conjunto factible, algo imprescindible en los problemas de optimización matemática.

No hay presencia de problemas relacionados con otras áreas disciplinares ni problemas relacionados con eventos o conceptos históricos en las matemáticas.

5.3.3.4 Tipos de ilustraciones en los enunciados



Pack de imágenes 5.17: Recuento de actividades en cada editorial según la ilustración que acompaña a sus respectivos enunciados. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.

Según los diagramas de cada editorial proporcionados en el pack de imágenes 5.17, la mayoría de los problemas no incluyen ninguna ilustración. En Santillana, el 97% de los problemas no tienen

ilustraciones, mientras que en Edelvives se trata de un 85 %. Además, Edelvives contiene un 10 % de enunciados con imágenes decorativas que tampoco aportan sustancialmente nada.

Esto podría sugerir una falta de elementos visuales que puedan ayudar a los alumnos a comprender algunos conceptos, esencialmente aquellos de relacionados con dos rectas situadas en el plano y el tipo de sistema de ecuaciones lineales que constituyen.

5.3.3.5 Agrupaciones sintácticas

En este apartado se ha realizado en cada editorial un recuento de las actividades propuestas atendiendo a si encapsulan subtareas o conforman un único enunciado para detectar posibles sobrecargas de trabajo camufladas. Siendo específicos, según González et al. (2015), dicha clasificación es la siguiente:

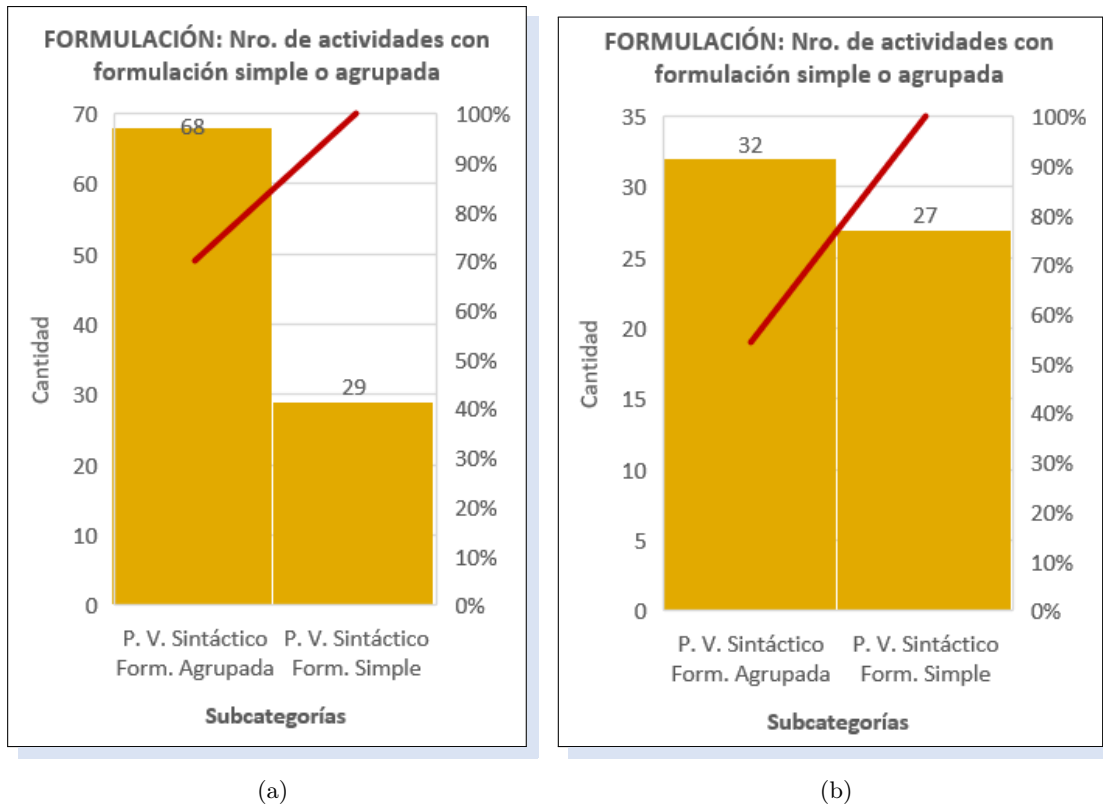
1. **Formulación Simple:** actividades que presentan una sola cuestión al respecto, es decir, el la actividad no encapsula “subejercicios” o “subtareas”.
2. **Formulación Agrupada:** refiere a las actividades que sí encapsulan tareas. Por ejemplo, el problema 41 de la editorial Santillana (véase imagen A.5a) se plantea de forma agrupada con 4 subtareas.

Analizando los datos proporcionados en los diagramas de barras proporcionados en el pack de imágenes 5.18, es evidente que la editorial Santillana muestra una inclinación pronunciada hacia el uso de enunciados agrupados en sus actividades, con un 70 % (68 de 97 actividades) de las mismas que contienen esta estructura. En contraste, solo el 30 % (29 de 97 actividades) de las actividades presentan enunciados simples.

En el caso de la editorial Edelvives, el balance es más equitativo, con un 54 % (32 de 59 actividades) de las actividades que presentan enunciados agrupados y un 46 % (27 de 59 actividades) que disponen de enunciados simples.

A raíz de esto último, uno puede inferir que si asumimos la hipótesis plausible de que en promedio cada una de las 68 actividades con formulación agrupada presenta en promedio 4 subtareas, el alumno se estaría enfrentando realmente a 68×4 apartados. Si se toma esto en cuenta, el volumen de trabajo que requiere el material de Santillana puede resultar significativamente más alto.

En este sentido, cabe expresar una inquietud relevante: los estudiantes que utilizan el libro de texto de Santillana podrían encontrarse con una carga de trabajo potencialmente mayor, que podría conducir a una sensación de fatiga y desmotivación si no se les proporciona una guía adecuada que les ayude a filtrarlos.

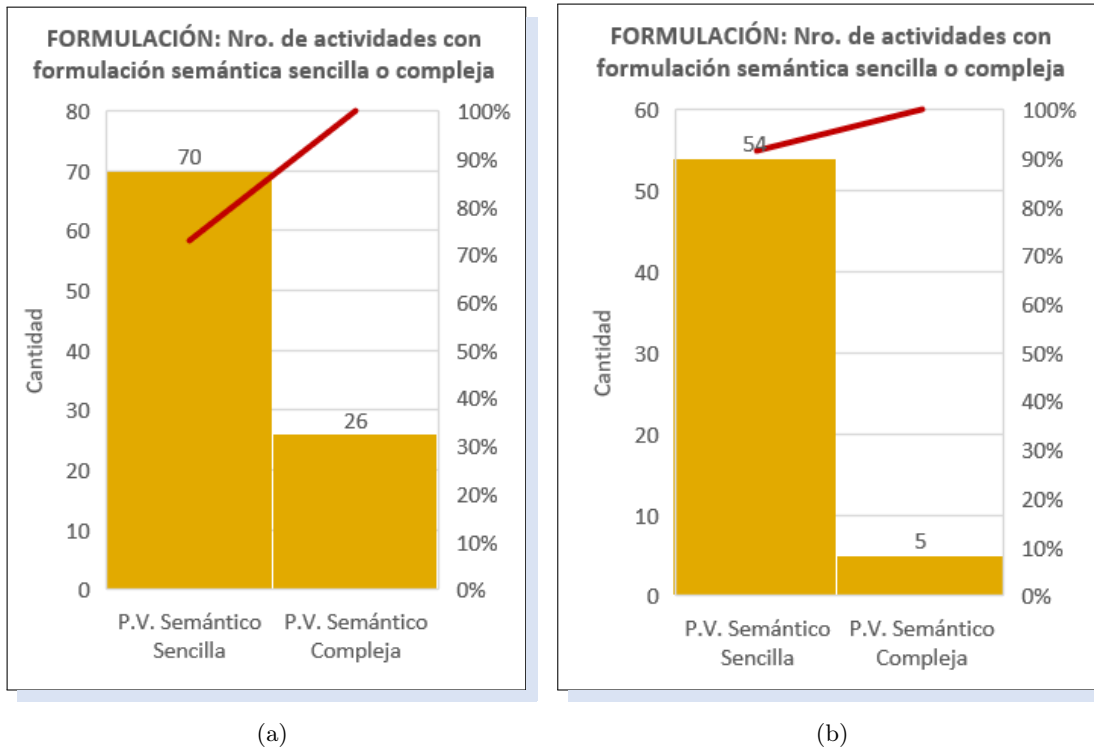


Pack de imágenes 5.18: Recuento de formulación simples y agrupadas en las colecciones de actividades de ambas editoriales.

5.3.3.6 Formulaciones semánticas

En este apartado se ha realizado en cada editorial un recuento de las actividades propuestas atendiendo a si la actividad permite desempeñar una o más estrategias cognitivas para su resolución. En concreto, según González et al. (2015), dicha clasificación es la siguiente:

1. **Formulación sencilla:** actividades que implican una sola estrategia cognitiva. Por ejemplo, un enunciado que propusiera resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de “sustitución” no dejaría libertad al alumno y se consideraría de formulación sencilla.
2. **Formulación compleja:** actividades que permiten más de una sola estrategia cognitiva. Por ejemplo, un enunciado que propusiera resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de resolución que el alumno considere más conveniente se clasificaría como de formulación compleja.



Pack de imágenes 5.19: Recuento de formulaciones sencillas y complejas en las colecciones de actividades de ambas editoriales.

A la luz de los datos mostrados en el pack de imágenes 5.19, se visualiza que existe una mayor proporción de actividades que especifican una sola estrategia cognitiva para su resolución en la editorial Edelvives. Para ser más exactos, hablamos de una proporción del 92% de formulación sencilla en la editorial Edelvives, frente a una proporción del 72% de la editorial Santillana. Es decir, en Edelvives la mayor proporción de actividades la representan ejercicios como el de la imagen 4.2a.

6. Conclusiones

Las conclusiones de este análisis apuntan a diferencias notables en los estilos de las dos editoriales estudiadas. A continuación sintetizo los resultados anteriormente expuestos y procederé a realizar una discusión al respecto cuando considere conveniente.

1. Organización del contenido:

1.1. Situación respecto al resto de temas:

En ambas editoriales el tema de “Sistemas de ecuaciones e inecuaciones” se encuentra después de tratar temas fundamentales como los números reales, las expresiones algebraicas y polinomios, y las ecuaciones e inecuaciones. Sin embargo, precede a temas clave como el de Geometría Analítica o Funciones.

La introducción temprana del tema de Funciones, que podría percibirse como más sencillo que otros, permitiría una mejor contextualización de los sistemas de ecuaciones y las inecuaciones desde una perspectiva geométrica. De este modo, los estudiantes podrían comprender mejor la representación geométrica de las ecuaciones e inecuaciones, así como su intersección y la formación de sistemas. Recordemos la dificultad que presentan los estudiantes a la hora de conectar los sistemas de ecuaciones con la geometría analítica que señalaban los autores Rodríguez et al. (2019). En parte, creo firmemente que esto también se debe al orden y exceso de compartimentación presentes en los libros de texto. Por lo tanto, sugeriría que el tema de las funciones se impartiera antes del tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones o que, en su defecto, se introdujera algún tipo de introducción sencilla que permita a los estudiantes relacionar este tema con conceptos analíticos sobre el plano como, por ejemplo, concebir los sistemas de ecuaciones lineales como posibles intersecciones en el plano de dos funciones. Esto podría fomentar una mayor comprensión intuitiva y ayudar a los estudiantes a establecer conexiones entre conceptos abstractos y sus representaciones geométricas.

En definitiva, la enseñanza de las matemáticas debería favorecer la construcción de puentes entre el álgebra y la geometría para fomentar un entendimiento más profundo de la matemática.

1.2. Situación de los contenidos ordinarios del propio tema:

Aunque ambas editoriales cubren conceptos similares, los contenidos ordinarios de la editorial Edelvives ofrecen un estilo más sobrio y adulto y una cobertura teórica más exhaustiva de este tema, incluyendo la resolución de sistemas con tres incógnitas y la introducción al método de Gauss (y el concepto de matriz), así como una sección teórica integral dedicada a contextualizar diversas aplicaciones prácticas de los conceptos estudiados, proporcionando un contexto esencial para los alumnos y que puede ayudarles a situarse muchísimo. Por su parte, Santillana, aunque incluye problemas prácticos, no dedica una sección teórica específica a las aplicaciones prácticas y tampoco trata en su colección de problemas aplicaciones prácticas relacionadas con sistemas de inecuaciones, las cuales son muy útiles como preludeo a los conjuntos factibles relativos a los problemas de minimización.

1.3. Contenidos implícitos dentro del tema

1.3.1. La editorial Santillana se destaca en la inclusión de contenidos como la resolución de sistemas compatibles indeterminados y la discusión de sistemas en función de un parámetro, que no son abordados por la editorial Edelvives. Este sería uno de los puntos fuertes de la editorial Santillana puesto que, aunque no cubra la misma extensión teórica que la editorial Edelvives, sí profundiza en estos aspectos que son de bastante relevancia en las matemáticas.

1.3.2. La editorial Edelvives ofrece una gama de contenidos no tratados por la editorial Santillana. Estos son la resolución de sistemas mediante cambios de variable, la resolución de inecuaciones con valor absoluto, la resolución de inecuaciones con fracciones algebraicas y la resolución de inecuaciones de productos polinómicos.

1.3.3. Ambas editoriales incluyen la resolución de sistemas no lineales mediante reducción.

Existen claras diferencias en la cobertura de estos contenidos, por lo que será el docente encargado quien deba conocer qué material es más interesante para sus alumnos. En cualquier caso, las posibles carencias que presenten los libros podrían suplirse con la intervención del docente.

1.4. ¿Se exponen los objetivos que se pretenden alcanzar?

Únicamente la editorial Santillana expone los objetivos que se pretenden alcanzar.

2. Análisis fenomenológico

Los contenidos del tema se desglosan de manera secuencial por secciones en ambas editoriales apoyándose en actividades resueltas tras la exposición de los conceptos teóricos. Sin embargo, Santillana mezcla la teoría con numerosas actividades a resolver por el alumno, lo que puede resultar agotador para los estudiantes, mientras que Edelvives separa más la teoría y la práctica, con actividades propuestas ubicadas únicamente al final de tema.

En cuanto a las referencias históricas, ninguna de las editoriales proporcionan referencias de peso salvo un caso muy puntual de la editorial Edelvives y, además, con un afán motivacional y anecdótico y sin un carácter verdaderamente pedagógico. Por su parte, Santillana solo establece una única referencia histórica que consiste en exponer la evolución del cepillo de dientes a lo largo de la historia del ser humano, algo que me parece absolutamente forzado y fuera de lugar para el tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones (véase imagen 5.3). Aspectos como estos, ponen de relieve la ausencia de un verdadero carácter pedagógico en el uso de un libro de texto tal y como señalaba Candray (2022).

3. Análisis conceptual:

3.1. Definiciones:

Las dos editoriales estudiadas, Santillana y Edelvives, tienden a enfocarse en resoluciones procedimentales, relegando a un segundo plano la comprensión conceptual de las definiciones y el razonamiento lógico de las cuestiones matemáticas derivadas, esenciales para la autonomía del estudiante. Si se les ofrece a los estudiantes excesivas herramientas procedimentales para resolver ejercicios, este enfoque puede generar una dependencia y una comprensión superficial de los conceptos subyacentes por parte de los estudiantes.

En cuanto al rigor conceptual, Santillana proporciona definiciones más simplificadas, mientras que Edelvives adopta un enfoque más riguroso y algebraico. Sin embargo, ambas editoriales no siempre proporcionan justificaciones completas para los procedimientos y no suelen contextualizar los conceptos con situaciones reales. No obstante, no podemos olvidar que Edelvives dedica una sección teórica única y exclusivamente para contextualizar aplicaciones prácticas de los contenidos previos, algo a tener muy en cuenta.

3.2. Representaciones en la transmisión de los conceptos:

Por una parte, ambas editoriales, Santillana y Edelvives, utilizan representaciones visuales para apoyar la comprensión de conceptos matemáticos y la resolución de ejercicios relacionados con sistemas de ecuaciones lineales e inecuaciones con una y dos incógnitas. Sin embargo, en sistemas de inecuaciones con dos incógnitas, ambas editoriales permiten soluciones gráficas como respuestas válidas, omitiendo en el alumno la necesidad de proporcionar una solución analítica al respecto.

Por otra parte, Edelvives incluye ejercicios con ecuaciones no lineales en las que pide una representación gráfica a pesar de la falta de apoyo gráfico al respecto en sus secciones teóricas, algo que no sería coherente por su parte.

Por último, en términos de estética, Santillana opta por un estilo más infantil, mientras que Edelvives adopta un enfoque más sobrio y adulto.

3.3. Actividades:

- **Tipos de actividades:** Ambas editoriales se enfocan principalmente en ejercicios y problemas de palabras. Estos últimos tratarían de paliar las deficiencias de traducción verbal y simbólica que señalaban autores como Tettay-Mejía et al. (2019).

No se observan actividades de demostraciones o conjeturas, algo que es indispensable si se quiere alejar al alumno de un pensamiento rígido.

- **Conexiones entre problemas:** Se observa una prevalencia de problemas sin conexión, con una presencia ocasional de la geometría. No se detectan conexiones con otras disciplinas.

Recordemos que autores como Torres (2013) desvelan beneficios en los estudiantes si se les imparte el tema de inecuaciones con sistemas de representación gráficos, algo que muy probablemente también suceda con ecuaciones.

- **Ilustraciones:** en ambas editoriales la mayoría de los problemas no incluyen ilustraciones útiles o significativas.

En particular, se aprecia la necesidad de más ilustraciones para facilitar la comprensión sobre la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.

Más aún, siendo Santillana y Edelvives libros puestos en producción en el año 2016 y 2020, respectivamente, echo en falta aplicaciones de GeoGebra asociadas a su libro que faciliten la asimilación de conceptos geométricos asociados a los sistemas de ecuaciones e inecuaciones.

Esto último apoyaría la tesis de Ward et al. (2021), en el que se afirma que existe un bajo nivel de integración de los recursos digitales en los libros de texto.

- **Agrupaciones sintácticas:** Santillana tiende a usar enunciados agrupados en sus actividades, mientras que Edelvives tiene un balance más equitativo entre enunciados simples y agrupados.

La editorial Santillana presenta un alto volumen de actividades camufladas a través de formulaciones agrupadas generando una posible sobrecarga de trabajo para el alumno. Por ello, quizás la editorial Santillana necesite reajustar su colección de actividades para alcanzar un equilibrio entre la teoría y la práctica.

- **Formulaciones semánticas:** Edelvives tiene una proporción más alta de actividades que especifican una sola estrategia cognitiva para su resolución. En Santillana, esta proporción es menor.

¿Significa esto que Edelvives proporciona menor libertad que la editorial Santillana? Sí, pero al forzar poner en práctica los distintos métodos de resolución en distintos ejercicios también propicia que los alumnos eviten poner en práctica siempre el mismo método de resolución, ya que por experiencia, bien es sabido que el método de sustitución es el preferido entre los jóvenes, aunque con ello adopten una vía de resolución menos eficiente en algunos casos. En cualquier caso, esto siempre puede ser intervenido por el docente encargado.

En resumen, estas observaciones resaltan la necesidad de considerar el perfil de los estudiantes

al elegir una editorial. Factores como el nivel de conocimientos previos del estudiante y el equilibrio entre teoría y práctica son esenciales. Aunque la editorial Santillana destaca por aspectos como la discusión paramétrica de sistemas y la resolución de sistemas compatibles indeterminados, la ausencia de estos no es algo que un profesor competente no pueda compensar con los materiales de Edelvives. Por ello, considero que Edelvives podría ser más adecuado para estudiantes más maduros, mientras que la editorial Santillana parece estar más enfocada hacia un perfil estudiantil más general.

Referencias

- Bodí, S. D. y Valls, J. (2002). Análisis del bloque curricular de números en los libros de texto de matemáticas. In *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, pages 301–312. Universitat d’Alacant/Universidad de Alicante.
- BOE (1990). LOGSE. Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. <https://www.boe.es/eli/es/lo/1990/10/03/1>.
- Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). La recta numérica en los libros de texto en españa. *Educación matemática*, 18(3):125–149.
- Candray, J. (2022). Análisis de libros didácticos de matemática en el salvador: una mirada al uso de la historia de la matemática en los libros oficiales de bachillerato. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 18(41):19–38.
- Contreras, Á. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1):65–84.
- Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de “límite de función”: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3):355–368.
- Fernández, C. (2011). Análisis de temas en los libros de texto de matemáticas: características de un instrumento para la actividad profesional del profesor de matemáticas. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, (56):77–85.
- Fernández, M. P. y García, C. (2017). El libro de texto como objeto de estudio y recurso didáctico para el aprendizaje: fortalezas y debilidades. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(1):201–217.
- González, E. M. L., Guerrero, A. C., Yáñez, J. C., y González, L. C. C. (2015). La resolución de problemas en los libros de texto: un instrumento para su análisis. *Avances de investigación en educación matemática*, (8):73–94.
- Haro, M. J. y Torregrosa, G. (2002). El análisis de libros de texto como tarea del profesorado de matemáticas. In *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, pages 357–372. Universitat d’Alacant/Universidad de Alicante.

- Hernández, P. y Filloy, E. (2014). Dificultades en las ecuaciones lineales en segundo grado de educación secundaria.
- Martín, C. (2002). Criterios para el análisis de libros de texto desde la perspectiva de la didáctica de la matemática.: Aplicación a la estadística y probabilidad. In *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales*, pages 373–385. Universitat d' Alacant/Universidad de Alicante.
- Merino, B. C. y Bernabeu, C. B. (2004). Significado de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, pages 5–18.
- Monterrubio, M. C., Ortega del Rincón, T., et al. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en educación secundaria. *Revista de educación*.
- Moreno, I. d. y Cobo, L. d. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado con una incógnita. *Revista Ema*, 2(3):247–258.
- Proyecto Saber Hacer (2016). *Matemáticas: enseñanzas académicas para 4^o de ESO*. Santillana Educación, 1st edition. Vínculo al libro.
- Rey, C. y Penalva, C. (2002). Análisis del campo afectivo en los libros de texto de matemáticas. In *Aportaciones de la Didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales*, pages 499–512. Universitat d' Alacant/Universidad de Alicante.
- Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. pages 39–59. Barcelona: ICE de la Universidad de Barcelona; Horsori.
- Rodríguez, M., Mena, A., Mena, J., Vázquez, P., y del Valle, M. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1):71–92.
- Rodríguez-Muñiz, L. J., Corte, Á., y Muñoz-Rodríguez, L. (2020). ¿ evolucionan los libros de texto de matemáticas con los cambios curriculares? estudio de la regresión y la correlación lineal en la educación secundaria en españa. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 103:65–79.
- Sánchez-Bermejo, D. M., Fernández, J. M. O., y Torralba, R. R. (2020). *Proyecto para que las cosas ocurran: Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas de 4^o de ESO*. 4^o.ESO. Editorial Luis Vives (Edelvives), 1st edition. Vínculo al libro.
- Tettay-Mejía, S. I., Pulgar-García, M., y Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis*, 15(2):193–205.

- Torres, A. (2013). Aplicación del enfoque gráfico en la enseñanza de inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica. *El cálculo y su enseñanza*, 4:83–102.
- Ward, S., Inzunza, S., y Palazuelos, J. (2021). Uso de recursos digitales por profesores de matemáticas en secundaria: un estudio exploratorio. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 21(1):1–17.

Anexos

Índice de Tablas

1.	Instrumento para el análisis de temas en libros de texto (Fernández, 2011).	13
2.	Esquematación de los distintos temas presentes en ambos libros. En verde el tema sometido a análisis. En rojo los temas que influyen en la comprensión geométrica de los sistemas de ecuaciones. En naranja los introductorios de Funciones que también supondrían un apoyo considerable.	19
3.	Esquematación de las secciones presentes en ambos libros para el tema de sistemas de ecuaciones e inecuaciones. En rojo claro se señalan los contenidos ordinarios de la editorial Edelvives que no son alcanzados por la editorial Santillana. No ocurre tal cosa al revés. “No aplica” significa que no existe una sección i -ésima.	20
4.	Contenidos tratados, pero no expuestos de forma explícita por los autores en la tabla de contenidos. “Sí” indica que dicho contenido sí se trabaja en la editorial correspondiente.	21
5.	Recuento de ejercicios y problemas del total de actividades por cada editorial.	34

Índice de Imágenes

4.1.	Los dos libros seleccionados.	12
	(a). Libro de 4 ^o de ESO, edición Santillana	12
	(b). Libro de 4 ^o de ESO, edición EDELVIVES	12
4.2.	En (a) una actividad con formulación sencilla de la editorial Edelvives. En (b) una actividad con formulación compleja de la editorial Santillana.	18
	(a). Edelvives	18
	(b). Santillana	18
5.1.	Figuras que muestran las actividades resueltas que utiliza Santillana para introducir los siguientes contenidos. En (a) <i>Resolución de sistemas compatibles indeterminados</i> . En (b) <i>Discusión de sistemas en función de un parámetro</i> . En (c) <i>Resolución de sistemas no lineales mediante reducción</i>	23
	(a). Resolución de sistemas compatibles indeterminados	23
	(b). Discusión de sistemas en función de un parámetro	23

(c).	Resolución de sistemas no lineales mediante reducción	23
5.2.	Figuras que muestran las actividades resueltas que utiliza la editorial Edelvives para introducir los siguientes contenidos. En (a) <i>Resolución de un sistema de ecuaciones no lineal mediante cambio de variable</i> . En (b) <i>Resolución de un sistema de ecuaciones no lineal mediante reducción</i> . En (c) <i>Resolución de una inecuación con valor absoluto</i>	24
(a).	Resolución de sistemas mediante cambio de variable	24
(b).	Resolución de sistemas no lineales mediante reducción.	24
(c).	Resolución de inecuaciones con valores absolutos o fracciones algebraicas	24
5.3.	Referencias históricas de la editorial Santillana.	26
5.4.	Introducción al método Gauss de la editorial Edelvives en la que se aprecia la referencia histórica de Gauss y la introducción del concepto de equivalencia. En sus actividades resueltas la editorial insiste nuevamente en dicho concepto.	26
5.5.	Ejemplificación de la editorial Edelvives donde ya predispone al alumno a adquirir una metodología procedimental.	27
5.6.	Figuras que muestran cómo cada editorial introduce el concepto de sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.	28
(a).	Definición de sistema de ecuaciones lineales en la editorial Santillana	28
(b).	Definición de sistema de ecuaciones lineales en la editorial Edelvives	28
5.7.	Figuras que muestran cómo editorial trata la clasificación de sistemas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.	29
(a).	Clasificación de sistemas de ecuaciones en la editorial Santillana	29
(b).	Clasificación de sistemas de ecuaciones en la editorial Edelvives	29
5.8.	Equivalencia de dos sistemas en Santillana.	29
5.9.	Representación gráfica de un sistema incompatible en la editorial Santillana.	30
5.10.	Preguntas en la editorial Edelvives que elevan la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas a tres incógnitas.	30
5.11.	Figuras que muestran las representaciones utilizadas por las editoriales para visualizar las soluciones de un sistema de inecuaciones con una sola incógnita.	31
(a).	Editorial Santillana	31
(b).	Editorial Edelvives	31
5.12.	Figuras que muestran las representaciones utilizadas por las editoriales para visualizar las soluciones de un sistema de inecuaciones con dos incógnitas.	31

(a). Editorial Santillana	31
(b). Editorial Edelvives	31
5.13. Ejercicio extraído de la editorial Edelvives donde se solicita una representación de funciones no lineales.	32
5.14. Actividad mal planteada por la editorial Santillana.	34
5.15. Diagramas de barras que muestran por cada editorial el número de problemas según su tipología. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.	35
(a). Santillana	35
(b). Edelvives	35
5.16. Diagramas de barras que muestran por cada editorial el número de problemas según su conexión con otras áreas. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.	36
(a). Santillana	36
(b). Edelvives	36
5.17. Recuento de actividades en cada editorial según la ilustración que acompaña a sus respectivos enunciados. En (a) la editorial Santillana y en (b) la editorial Edelvives.	37
(a). Santillana	37
(b). Edelvives	37
5.18. Recuento de formulación simples y agrupadas en las colecciones de actividades de ambas editoriales.	39
(a). Santillana	39
(b). Edelvives	39
5.19. Recuento de formulaciones sencillas y complejas en las colecciones de actividades de ambas editoriales.	40
(a). Santillana	40
(b). Edelvives	40
A.1. Capturas de los índices de contenidos de los libros de cada editorial.	53
(a). Índice de contenidos del libro de Proyecto Saber Hacer (2016)	53
(b). Dos primeras páginas del índice de contenidos del libro de Sánchez-Bermejo et al. (2020)	53
(c). Tercera y última página del índice de contenidos del libro de Sánchez-Bermejo et al. (2020)	53
A.2. Imágenes decorativas de las secciones teóricas en la editorial Edelvives.	54

(a).	Cadenas enganchadas simulando puntos de intersección	54
(b).	Pósits simulando planos tridimensionales	54
(c).	Cima de un puente suspendido simulando una especie de conjunto factible . . .	54
(d).	Lápices de colores	54
A.3.	Imágenes decorativas de la colección de actividades en la editorial Edelvives.	54
(a).	Violín	54
(b).	Jardín botánico	54
(c).	Cesta con manzanas	54
(d).	Flores	54
A.4.	Imágenes decorativas de las secciones teóricas en la editorial Santillana.	55
(a).	Cepillo de dientes	55
(b).	Pareja mostrando un concepto	55
(c).	Hombre mirando hacia arriba	55
(d).	Mujer corriendo	55
A.5.	Imágenes decorativas de la colección de actividades en la editorial Santillana.	56
(a).	Gráficas proporcionadas en la editorial Santillana	56
(b).	Una pareja andando por encima de unas cuerdas	56
(c).	Campamento que pretenden relacionar con sistemas de inecuaciones con dos incógnitas	56
A.6.	Problemas con conexión a la geometría en la editorial Santillana.	57

A. Imágenes

(a) Índice de contenidos del libro de Proyecto Saber Hacer (2016).

(b) Dos primeras páginas del índice de contenidos del libro de Sánchez-

(c) Tercera y última página del índice de contenidos del libro de Sánchez-Bermejo et al. (2020).

Pack de imágenes A.1: Capturas de los índices de contenidos de los libros de cada editorial.



(a) Cadenas enganchadas simulando puntos de intersección.



(b) Pósits simulando planos tridimensionales.

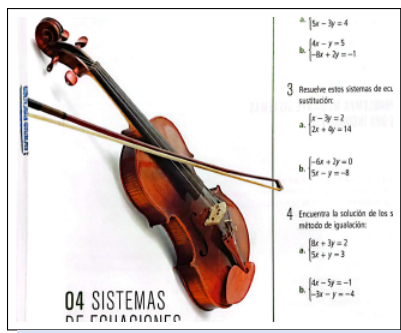


(c) Cima de un puente suspendido simulando una especie de conjunto factible.



(d) Lápices de colores.

Pack de imágenes A.2: Imágenes decorativas de las secciones teóricas en la editorial Edelvives.



(a) Violín.



(b) Jardín botánico.



(c) Cesta con manzanas.



(d) Flores.

Pack de imágenes A.3: Imágenes decorativas de la colección de actividades en la editorial Edelvives.



(a) Cepillo de dientes.



(b) Pareja mostrando un concepto.

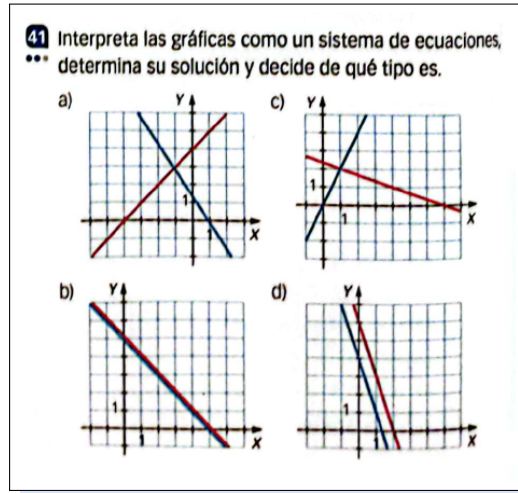


(c) Hombre mirando hacia arriba.



(d) Mujer corriendo.

Pack de imágenes A.4: Imágenes decorativas de las secciones teóricas en la editorial Santillana.



(a) Gráficas proporcionadas en la editorial Santillana.



(b) Una pareja andando por encima de unas cuerdas.



(c) Campamento que pretenden relacionar con sistemas de inecuaciones con dos incógnitas.

Pack de imágenes A.5: Imágenes decorativas de la colección de actividades en la editorial Santillana.

Problemas con sistemas

70 Calcula dos números naturales sabiendo que la tercera parte del mayor más la mitad del menor resulta el número inmediatamente anterior al menor, y la raíz cuadrada de la suma del mayor más el doble del menor es cinco.

71 Sabiendo que dos relojes cuestan igual que tres pulseras y que los cinco objetos cuestan 144 €, calcula cuánto cuesta cada uno y cuántos relojes se compran con el dinero con el que se compran 12 pulseras.

72 La suma de las áreas de dos cuadrados distintos es 97 cm² y la diferencia de sus perímetros es 20 cm. Halla el lado de cada cuadrado.

73 Halla las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 34 cm y cuyo perímetro es 92 cm.

74 Halla el perímetro de un rectángulo cuya área es 75 cm² y cuya altura es la tercera parte de la base.

75 Halla el área de un rombo sabiendo que su perímetro es 23,324 cm y la suma de sus diagonales es 16 cm.

76 El área de una corona circular cuyos radios se diferencian en 4 unidades es 100,53 cm². Calcula los radios.

77 Aumentando el lado de un cuadrado dos unidades, el área aumenta 20 unidades cuadradas. Halla el lado del cuadrado original.

78 Javier tiene ocho monedas y 3,10 €. Calcula cuántas monedas de cada tipo tiene sabiendo que son todas de 0,50 € o 0,20 €.

79 Juan le dice a Javier: «¡Cambió los billetes de 10 € que tengo por billetes de 5 €, y los billetes de 5 € por billetes de 10 €, seguiré teniendo el mismo dinero. Calcula el dinero que tengo si te digo que en total llevo 40 billetes».

80 Luisa lleva 20 monedas de 1 € y 2 € en su monedero. Decide cambiarlas por billetes de 5 € para no llevar tanto peso y le dan 5 billetes. Halla cuántas monedas de cada tipo llevaba.

81 La suma de dos números es 27 y la diferencia de sus cuadrados es 81. Halla los números.

82 Se sabe que un número entero es una unidad mayor que el triple de otro. Calculálos sabiendo, además, que la diferencia entre su producto y cuatro es el quintuplo del menor.

83 Halla dos números, tales que la suma de sus inversos es 0,7 y la tercera parte de su diferencia es 1.

84 Marta nació 4 años después que Carlos. Calcula sus edades sabiendo que al sumar a la suma de sus edades actuales la suma de las edades que tendrán dentro de 10 años resultan 40 años.

85 Alicia es la mayor de tres hermanos, Luis es el mediano y Ángel es el menor. La diferencia de edad entre Ángel y Luis es el doble de la diferencia de edad entre Alicia y Luis. Halla sus edades sabiendo que la suma de sus edades actuales es 23 años y que la diferencia de los cuadrados de las edades de Alicia y Luis es 88 años.

86 Resuelve un sistema para encontrar los números de dos cifras que cumplen estas condiciones:

- El cuadrado de la suma de sus cifras es 49 y las cifras son números consecutivos.
- El cuadrado de la suma de sus cifras es 49 y la diferencia entre las cifras es 3.
- El cuadrado de la suma de sus cifras es 49 y la suma de los cuadrados de las cifras es 37.

87 Se mezcla vinagre de 1,20 €/ℓ con vinagre de 1,60 €/ℓ, de forma que resultan 100 ℓ de vinagre de 1,30 €/ℓ. Calcula los litros de cada tipo de vinagre que se han mezclado.

88 La diagonal de un rectángulo mide 9 cm. Sumando la base del rectángulo y el doble de la altura se obtiene 18 cm. Halla el perímetro y el área del rectángulo.

89 Se han mezclado 300 kg de patatas de dos clases diferentes; una clase se vende a 2 €/kg, y otra a 2,50 €/kg. La mezcla resulta a 2,40 €/kg. Calcula cuántos kg de cada clase de patatas se han mezclado.

90 ¿Para qué números la diferencia de su cuadrado y su cuádruple es positiva?

91 ¿Qué números cumplen que su cuadrado menos su mitad da como resultado un número negativo?

92 Encuentra todos los números para los que el producto de ellos por su consecutivo es un entero negativo.

93 Cuatro bocadillos y cinco refrescos cuestan una cantidad, a, y dos bocadillos y un refresco cuestan otra cantidad, b. Calcula:

- El precio de un bocadillo con un refresco.
- El precio de un bocadillo y dos refrescos.
- El precio de diez bocadillos y ocho refrescos.
- El precio de cada artículo si $a = 8,30$ € y $b = 3,10$ €.

94 Considera un rectángulo y el cuadrado cuyo lado coincide con la diagonal del rectángulo. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que el área del cuadrado citado es 205 cm² y el área del rectángulo es 78 cm².

95 Calcula el área de un trapecio rectángulo sabiendo que la base mayor es doble de la menor, la altura coincide con la base menor y su perímetro es 19,243 cm.

DEBES SABER HACER

Sistemas de ecuaciones lineales

1 Resuelve:

$$\begin{cases} 2 \cdot (x - y) + x = 11 - 3y \\ x - 3 \cdot (y + 3x) = 4y - 12 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones no lineales con dos incógnitas

2 Resuelve:

$$\begin{cases} a) \begin{cases} (x + 2) \cdot y = -16 \\ 4x + y = 4 \end{cases} & b) \begin{cases} \sqrt{x + 6} - 1 = y \\ 2x - y = -5 \end{cases} \end{cases}$$

3 Resuelve:

$$\begin{cases} a) \begin{cases} \sqrt{x + 1} = 3 - y \\ -x + y^2 = -2 \end{cases} & b) \begin{cases} \frac{-2}{x} = \frac{y + 2}{xy} \\ \frac{1}{x} + 2y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Sistemas de Inecuaciones con una y dos incógnitas

4 Resuelve:

$$\begin{cases} x + 6 \leq 3x + 4 \\ \frac{x + 3}{2} \geq x \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + y \leq 2 \\ \frac{x + 3}{2} \geq y \end{cases}$$

Problemas

5 Por un chándal y unas zapatillas de deporte que costaban 135 € he pagado 85,50 € en rebajas, ya que en la sección de textil tienen el 40% de descuento, y en la de calzado, el 30%. ¿Qué precio tenía cada artículo y cuánto me han costado?

6 Halla todos los números para los que el doble de su cuadrado es mayor que 8.

Imagen A.6: Problemas con conexión a la geometría en la editorial Santillana.