

FEM-WAVELET PARA LA PLACA DE MINDLIN-REISSNER

Victoria Vampa, Mar'ia Teresa Mart'ın
Dpto. de Ciencias B'asicas, Facultad de Ingenier'ia,
Dpto. de Matem'atica, Facultad de Ciencias Exactas,
Universidad Nacional de La Plata, Argentina.
victoriavampa@gmail.com, mtmartin@fisica.unlp.edu.ar

Resumen

En los últimos años ha tenido gran impulso la utilización de funciones wavelets como espacio de aproximación en el esquema clásico de elementos finitos. Existen numerosas propuestas de elementos FEM-Wavelets con ejemplos de aplicaciones en el ámbito de la mecánica computacional. En este trabajo se presenta el desarrollo de dos elementos: un elemento de viga para el modelo de Timoshenko y uno de placa para el modelo de Mindlin-Reissner. En ambos casos se utilizan las funciones de escala de Daubechies, que poseen ventajosas propiedades como la ortogonalidad, soporte compacto mínimo y su condición de varios momentos nulos. Se muestran resultados numéricos en problemas test clásicos. Palabras clave: FEM-Wavelet, Daubechies, beam element, plate element

1. INTRODUCCIÓN

Métodos numéricos que combinan el concepto de elementos finitos con la teoría wavelet han despertado gran interés desde los años 90 en diversas ramas de la ingeniería. Esto se debe a que el análisis wavelet, con sus funciones altamente localizadas en dimensión espacial y múltiples escalas, proporciona un aporte ventajoso al método de elementos finitos convencional.

En mecánica estructural, se han desarrollado elementos finitos basados en wavelets para problemas de vigas y placas. Han et al. en [1] utilizaron las splines wavelets para desarrollar distintos elementos finitos 1D y 2D mientras que, Xiang et al. [7] construyeron elementos finitos para problemas elastomecánicos usando B-splines sobre el intervalo. Por otro lado, con funciones de escala de Daubechies, Ma et al. [3] presentaron un elemento de viga para el modelo de Euler-Bernoulli, y estudiaron su comportamiento en problemas con singularidades. Para placas, Chen et al. [4] formularon un elemento siguiendo el modelo de Kirchhoff, mientras que en Alvarez Díaz et al., [8], se desarrollaron los elementos DSCW con funciones de escala de Daubechies para resolver problemas de flexión de placas delgadas y moderadamente gruesas y se analizó el orden de la wavelet a utilizar en base a su regularidad. Aplicaciones de éstos elementos para problemas de vigas y placas se presentaron en [5] y [9].

En este trabajo se presentan elementos finitos desarrollados en una forma similar al método de elementos finitos standard -utilizando las funciones de escala wavelet de Daubechies para las funciones de forma-, aplicados en un modelo de viga y uno de placa. En la Sección 2 se introducen conceptos básicos del análisis wavelet y se describe el cálculo de los coeficientes de conexión (integrales del producto de las funciones base y sus derivadas). En la Sección 3 se describe la formulación de un elemento finito para la viga de Timoshenko y en la 4 se describe la formulación de un elemento finito para la placa de Mindlin-Reissner, en ambos casos utilizando la función de escala de Daubechies. En la Sección 5 se muestran resultados numéricos. Las conclusiones se presentan en la Sección 6.

2. ANÁLISIS WAVELET

Las wavelets son funciones generadas a partir de una única función ϕ , llamada wavelet madre, mediante operaciones simples de dilación y traslación [10]. Dicha wavelet proporciona una descomposición del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ en una suma directa de subespacios cerrados W_j , $j \in \mathbb{Z}$. Mediante esta descomposición se puede definir una sucesión de subespacios cerrados $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ que constituyen un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R})$ [10]. $\phi \in V_0$ es llamada "función de escala" y considerando

$$\phi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \quad (1)$$

se tiene que, para cada j en \mathbb{Z} , la familia

$$\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

es también una base de Riesz de V_j [10]. Consecuentemente, existen coeficientes $\{p_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$, tal que la función de escala $\phi(x)$ satisface la llamada "relación de dos escalas":

$$\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N(2x - k) \quad (3)$$

2.1. WAVELETS DE DAUBECHIES

En su trabajo fundamental de 1988, Daubechies [11], desarrolla una familia de wavelets ortogonales y de soporte compacto, ϕ_N y ψ_N (donde N es el orden de la Daubechies). Las funciones de escala ϕ_N , son tales que poseen soporte incluido en $[0, N-1]$, y se tiene, entonces, de acuerdo a Eq.(3)

$$\phi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N(2x - k) \quad (4)$$

2.2. EVALUACIÓN DE LAS FUNCIONES DE ESCALA Y SUS DERIVADAS

Al utilizar funciones de escala de Daubechies como funciones test en el método de elementos finitos, tanto las funciones como sus derivadas deben ser evaluadas. Al carecer de expresión explícita, las funciones de escala de Daubechies sólo pueden calcularse en puntos especiales. Para ello, la relación de dos escalas, Eq.(4), es diferenciada m veces:

$$\phi_N^{(m)}(x) = 2^m \sum_{k=0}^{N-1} p_k \phi_N^{(m)}(2x - k) \quad (5)$$

Evaluando Eq.(5) en los enteros del intervalo $[0, N-1]$, se obtiene un sistema homogéneo de N ecuaciones lineales que resulta singular. Se requiere, entonces, una condición de normalización para que la solución quede unívocamente determinada, como la propuesta por Beylkin [13]

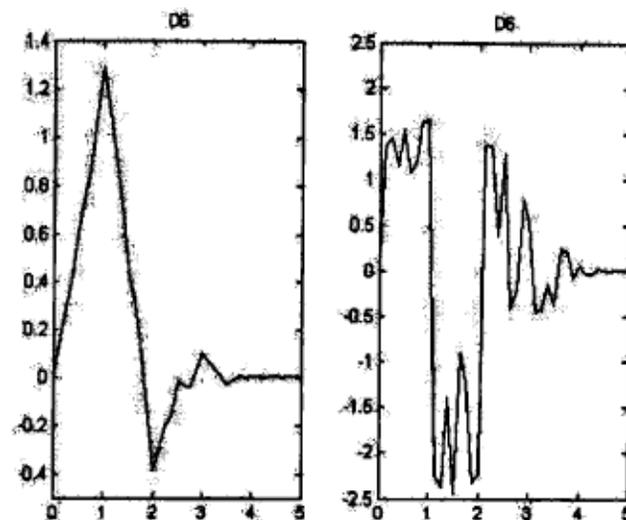
$$\sum_k k^m \phi_N^{(m)}(x - k) = m! \quad (6)$$

donde m es un entero positivo.

2.3. CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE CONEXIÓN

Para obtener las matrices de rigidez y los vectores de carga, resulta necesario calcular diferentes tipos de coeficientes de conexión de la forma [12]:

$$\Gamma_{i,j}^{d_1 d_2} = \int_0^1 \phi^{(d_1)}(\xi - i) \phi^{(d_2)}(\xi - j) d\xi \quad (7)$$

Figura 1: Función de escala y su derivada, $N=6$

$$R_l^m = \int_0^1 \xi^m \phi(\xi - i) d\xi \quad (8)$$

donde ϕ denota la función base y los índices d_1 y d_2 se refieren a los órdenes de las derivadas. El problema que surge al utilizar las funciones de escala de Daubechies $\phi(x)$, es cómo calcular estos coeficientes, dado que las Daubechies no tienen una expresión explícita. Por otro lado, la naturaleza oscilatoria de estas funciones base de Daubechies, hacen que la integración numérica standard no pueda utilizarse (ver Figura 1). Siguiendo la propuesta de Beylkin [13] para calcular estas integrales se sustituye la relación de dos escalas en la ecuación (7) y se obtiene:

$$\Gamma_{i,j}^{d_1 d_2} = 2^{d_1+d_2} \sum_{k,l} p_k p_l \int_0^1 \phi^{(d_1)}(2\xi - 2i - k) \phi^{(d_2)}(2\xi - 2j - l) d\xi \quad (9)$$

Luego, con transformaciones adecuadas, ([12],[13]), se obtiene la siguiente expresión en términos de los coeficientes de conexión originales,

$$\Gamma_{i,j}^{d_1 d_2} = 2^{d-1} \sum_{r,s} [p_{r-2i} p_{s-2j} + p_{r-2i+1} p_{s-2j+1}] \Gamma_{r,s}^{d_1 d_2} \quad (10)$$

que puede también escribirse en forma matricial como,

$$(2^{d-1} P - I) \vec{\Gamma}^{d_1 d_2} = 0 \quad (11)$$

donde, $d = d_1 + d_2$, $\vec{\Gamma}^{d_1 d_2}$ es una vector columna, I es la matriz identidad y P es una matriz compuesta de combinaciones de coeficientes wavelet.

Para determinar unívocamente los coeficientes de conexión $\Gamma_{i,j}^{d_1 d_2}$, una cantidad suficiente de ecuaciones no-homogéneas pueden obtenerse a partir de utilizar distintos valores de m y n en la expresión [12],

$$\frac{mn \dots (m - (d_1 - 1))(n - (d_2 - 1))}{m + n - d + 1} = \sum_{k,l} c_k^m c_l^n \Gamma_{k,l}^{d_1 d_2} \quad (12)$$

Luego, agregando estas ecuaciones a la ecuación (11) los coeficientes de conexión son calculados. Es importante señalar que para valores grandes de N y d se presentan dificultades numéricas y han sido desarrollados varios algoritmos eficientes, [12]. Los coeficientes de conexión para los vectores de carga Eq.(8) son obtenidos en forma similar (ver[6]).

3. ELEMENTO PARA LA VIGA DE TIMOSHENKO

En la formulación general de una viga de longitud L , sometida a una carga uniforme, la energía potencial total está dada por

$$\pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx - \alpha \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \theta\right)^2 dx - \int_0^L w q dx \quad (13)$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{GAk}{2}. \quad (15)$$

Aquí w es el desplazamiento perpendicular al eje de la viga, E es el módulo de Young del material, I es el momento de inercia de la sección, y q la carga en dirección perpendicular al eje de la viga a la que está sometida la viga. Además, γ indica la deformación por corte transversal, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de corte del material, ν el coeficiente de Poisson, k es un factor de corrección debido a la distribución no uniforme de los esfuerzos de corte y considerada para una sección rectangular $\frac{5}{8}$ [14], y $A = hb$, es el área de la sección transversal de la viga. Es importante señalar que en la expresión anterior Eq.(13), la primera integral corresponde a la energía de flexión, mientras que la segunda a la energía de corte.

Considerando la matriz de transformación T entre el espacio físico y el espacio wavelet [8], y las funciones de escala j , las expresiones de Galerkin para θ y w son,

$$\theta = \Phi T^{-1} \hat{\theta}, \quad w = \Phi T^{-1} \hat{w} \quad (16)$$

Luego, sustituyendo en (13) e imponiendo la condición de estacionariedad del funcional, $\pi(\delta\pi = 0)$, se obtienen la matriz elemental y el sistema algebraico elemental correspondiente,

$$\begin{bmatrix} K_v^1 & K_v^2 \\ (K_v^2)^T & K_v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix} \quad (17)$$

Las matrices K_v^i y el vector carga R tienen la expresión siguiente,

$$\begin{aligned} R &= ((T)^{-1})^T \int_0^1 q(\xi) \Phi^T d\xi \\ K_v^1 &= EIA_1^{11} + GAkA_1^{00} \\ K_v^2 &= -GAkA_1^{01} \\ K_v^3 &= GAkA_1^{11} \end{aligned} \quad (18)$$

donde,

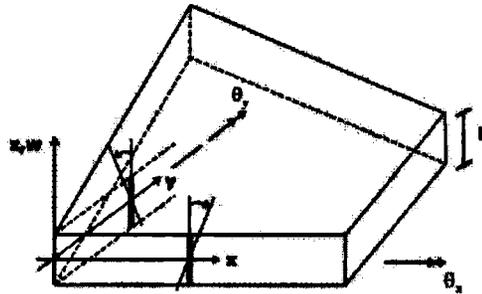
$$A_s^{d_1 d_2} = l_{e,s}^{1-(d_1+d_2)} (T_s^{-1})^T \Gamma_s^{d_1 d_2} T_s^{-1}, \quad s = 1, 2 \quad (19)$$

$l_{e,s}$ es la longitud del elemento, $\Gamma_s^{d_1 d_2}$ son los coeficientes de conexión definidos antes en Eq.(7) y el subíndice s denota la función de escala φ^s considerada (en este caso $s = 1$). Este tema fue desarrollado en detalle en [8] para su utilización tanto en problemas 1D como con producto tensorial en 2D.

En la Tabla 1 a continuación se muestran los resultados numéricos para el caso de una viga empotrada con carga uniforme $Lh = 10$, utilizando Daubechies de orden 6, D6. Cada elemento tiene 5 grados de libertad: dos en los extremos y 3 nodos interiores. La solución exacta es $U_{MAX} = 0,002604$ [1].

Tabla 1: Viga empotrada sometida a carga uniforme

Cant. elementos	$\frac{U}{U_{MAX}}$
4	0.75
8	0.94
16	0.98
32	0.99
64	1.00



4. ELEMENTO PARA LA PLACA DE MINDLIN-REISSNER

El modelo basado en la teoría de placas y láminas de R.D.Mindlin y E.Reissner, describe la deformación de una placa de pequeño espesor bajo la acción de una carga transversal. Este modelo resulta adecuado para pequeñas deformaciones y su característica más importante es que, similar al modelo de viga de Timoshenko, y a diferencia del modelo clásico de Kirchhoff, permite las deformaciones por acción del corte transversal. Con las suposiciones de este modelo, las componentes del desplazamiento, en las direcciones x e y , u y v , varían linealmente con z , mientras que el desplazamiento vertical (deflexión) es independiente de z . Se tiene, entonces,

$$u = -z\theta_x(x, y) \quad v = -z\theta_y(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (20)$$

De acuerdo a la teoría de Mindlin-Reissner y a partir de considerar el estado de equilibrio de la placa, el funcional de energía potencial que se debe minimizar es,

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \kappa^T C_b \kappa \, dx dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \gamma^T C_s \gamma \, dx dy - \int_{\Omega_e} q w \, dx dy \quad (21)$$

$$\kappa = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}^T \quad \gamma = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right\}^T \quad (22)$$

$$C_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad C_s = \frac{Et k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde, Ω_e es el dominio elemental, q es la carga distribuida, t es espesor de la placa (que se supone constante), E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson y k un parámetro de ajuste del corte con

valor $\frac{5}{6}$ (ver Figura 2).

Cabe señalar que, similar al modelo de viga, el primer término en (21) corresponde a la energía elástica asociada a la flexión, y el segundo, que representa la energía de deformación debida a esfuerzos de corte, tiene más peso, en la medida que el espesor de la placa se vuelve pequeño en comparación con la longitud. Las expresiones de Galerkin para 2D pueden obtenerse a partir de lo desarrollado para una dimensión, mediante producto tensorial [8]. Suponiendo que funciones de escala de Daubechies, $\phi^1(\xi)$ y $\phi^2(\eta)$ generan análisis multirresolución $\{V_j^1\}$ and $\{V_j^2\}$ respectivamente, el espacio producto de V_j^1 y V_j^2 , $j \in \mathbb{Z}$, es

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^2 \tag{24}$$

y $\{V_j\}$ genera un análisis multirresolución de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Entonces, tanto el desplazamiento como las rotaciones), pueden expresarse en términos del vector de coeficientes wavelets, α , a partir de la matriz de transformación elemental, T

$$T = T^1 \otimes T^2$$

y utilizando las funciones de escala de $\{V_j\}$,

$$\varphi = \varphi^1 \otimes \varphi^2$$

Como antes, sustituyendo en (21) e imponiendo la condición p ($\delta\pi=0$), se obtienen el sistema algebraico elemental correspondiente,

$$\begin{bmatrix} K_p^1 & K_p^2 & K_p^3 \\ K_p^4 & K_p^5 & K_p^6 \\ K_p^7 & K_p^8 & K_p^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_x \\ \hat{\theta}_y \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} R &= ((T)^{-1})^T \int_0^1 \int_0^1 q(\xi, \eta) \varphi^T d\xi d\eta \\ K_p^1 &= D_0 \{A_1^{11} \otimes A_2^{00} + (1-\nu)/2 A_1^{00} \otimes A_2^{11}\} + C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{00} \\ K_p^2 &= D_0 \{\nu A_1^{10} \otimes A_2^{01} + (1-\nu)/2 A_1^{01} \otimes A_2^{10}\} \\ K_p^3 &= -C_0 A_1^{01} \otimes A_2^{00} \\ K_p^4 &= (K^2)^T \\ K_p^5 &= D_0 \{A_1^{00} \otimes A_2^{11} + (1-\nu)/2 A_1^{11} \otimes A_2^{00}\} + C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{00} \\ K_p^6 &= -C_0 A_1^{00} \otimes A_2^{01} \\ K_p^7 &= (K^3)^T \\ K_p^8 &= (K^6)^T \\ K_p^9 &= C_0 A_1^{11} \otimes A_2^{00} + A_1^{00} \otimes A_2^{11} \end{aligned}$$

$$y D_0 = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \text{ and } C_0 = \frac{Et}{2(1+\nu)}$$

5. APLICACIONES

De acuerdo a la formulación desarrollada en la Sección 4 se presenta un ejemplo numérico típico. Una placa cuadrada isoparamétrica de espesor moderado es sometida a una carga uniforme q simplemente soportada en sus bordes. Sea ν el coeficiente de Poisson con fijo en 0.3, t el espesor de la placa y L su

Tabla 2: Placa cuadrada simplemente soportada sometida a carga uniforme.

t/L	$w_c/(qL^4/100D_0)/U_{MAX}$	
	(1x1)DSCW6	(2x2)DSCW6
0.001	0.77	0.85
0.01	0.77	0.85
0.05	0.78	0.89
0.1	0.80	0.94
0.15	0.82	0.97
0.2	0.84	0.99
0.3	0.87	1.00
0.35	0.88	1.00

longitud. Para construir los elementos finitos de placa, se utilizaron funciones de escala Daubechies en $2D$ con N coeficientes y mallas uniformes para el dominio Ω . De esta forma un elemento finito (DSCWN) tiene $(N-1)_2$ nodos, y tiene en total $3 \times (N-1)_2$ DOFs (en este modelo cada nodo tiene 3 grados de libertad). En primer lugar se utilizó un sólo elemento, con $N = 6$, y 75 grados de libertad y luego mallas de 2×2 DSCW6. Se presentan en la Tabla 2 los resultados numéricos obtenidos. Se muestran los desplazamientos centrales relativos al valor exacto ([7]) para espesores $0.001 < t < 0.35$. Puede observarse que los resultados constituyen excelentes aproximaciones, incluso con mallas gruesas, no observándose deterioro por bloqueo al disminuir el espesor (ver Figura 3). En ese sentido, se analizaron las aproximaciones con espesores aún más finos (hasta $10e^{-5}$) y los valores obtenidos con mallas de 4×4 elementos superan el 95% de los valores exactos.

6. CONCLUSIONES

Se presenta el desarrollo de dos elementos finitos para aproximar problemas de vigas y placas utilizando las bases wavelets de Daubechies e interpolación independiente. Este desarrollo en algunos aspectos resulta similar al de los elementos finitos standard, aunque el cálculo de las matrices de rigidez, presenta características diferentes a través de los llamados coeficientes de conexión. Los resultados numéricos obtenidos en los casos presentados, muestran que el método propuesto constituye una alternativa eficiente a los elementos finitos standard.

Referencias

- [1] Han, J., Ren, W. and Huang, Y., A spline wavelet finite-element method in structural mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66, 166-190.
- [2] Wei, G.W., Wavelets generated by using discrete singular convolution kernels, J.Phys. A: Math.Gen., 2000, 33, 8577-8596.
- [3] Ma, J., Xue, J., Yang, S. and He, Z., A study of the construction and application of a Daubechies wavelet-based beam element, Finite Elements in Analysis and Design., 2003, 39, 965-975.
- [4] Chen, X., Yang, S., Ma, J. and He, Z., The construction of wavelet-finite element and its application, Finite Elements in Analysis and Design., 2004, 40, 541-554.

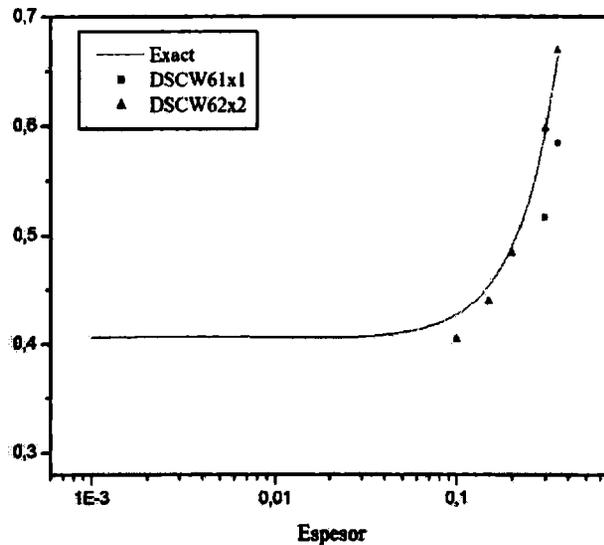


Figura 3: Comparación de resultados obtenidos utilizando DSCW6 con la solución exacta

- [5] Vampa, V., Alvarez Díaz, L. and Martín, M.T., Daubechies wavelet beam element, *Mecánica Computacional*, 2007, 26, 654-666.
- [6] Chen, X., He, Z., Xiang, J. and Li B., A dynamic multiscale lifting computation using Daubechies wavelet, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, :188, 228-245.
- [7] Xiang, J., Chen, X., He, Y. and He, Z., The construction of plane elastomechanics and Mindlin plate elements of B-spline wavelet on the interval, *Finite Elements in Analysis and Design.*, 2006, 42, 1269-1280.
- [8] Alvarez Díaz, L., Martín, M.T. and Vampa, V. Daubechies wavelet beam and plate finite elements, aceptado en *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008.
- [9] Martín, M. T. and Vampa, V., A Daubechies wavelet Mindlin-Reissner plate element, *Mecánica Computacional*, 2008, aceptado para ser publicado en las actas del próximo XVII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF2008).
- [10] Chui, C. K. , *An introduction to wavelets*, Academic Press, New York, 1992.
- [11] Daubechies, I. , *Ten Lectures on Wavelets*, MA SIAM: Philadelphia, 1992.
- [12] Latto, A., Resnikoff, H.L. and Tenenbaum, E., The evaluation of connection coefficients of compactly supported wavelets, *Proceedings of the USA-French Workshop on Wavelets and Turbulence*. Princeton University, 1995.
- [13] Beylkin, G., On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 6, 1716-1740.
- [14] Bathe, K.J. , *The finite Element Method*, Springer, 1980