CAMBIO EN VARIABLES CUANTITATIVAS POR ALUMNOS DE 4 AÑOS DESDE UN ENFOQUE FUNCIONAL

Change in quantitative variables by 4-year-old students from a functional approach

Fuentes, S[a]., Cañadas, M. C[a]. y Anglada, L[b].

[a]Universidad de Granada, [b]Centro Universitario María Inmaculada de Antequera

Resumen

Esta investigación se enmarca en un proyecto sobre pensamiento algebraico en educación infantil y primaria realizado en España (www.pensamientoalgebraico.es). Después de cuatro sesiones con un grupo de 21 niños de 4 años, entrevistamos individualmente a 5 de esos niños. Les presentamos un contexto motivador como lo es un viaje al espacio y coger piedras lunares. Les propusimos una situación de cambio, al meter piedras en una caja "mágica". Esta situación involucraba la función f(n)=n+2. Nos centramos en las evidencias que mostraron en las relaciones entre las variables y cómo expresaban la relación. Utilizaron expresiones como "siempre salen más", "salen muchas", "se convierte en más". Los 5 niños concluyeron que siempre salían más piedras de las que entraban en la caja. Todos identificaron el cambio-aumento y algunos de ellos cuantificaron el cambio como dos más.

Palabras clave: *Cambio, early algebra, educación infantil, máquina de funciones, pensamiento funcional.*

Abstract

This research is part of a project on algebraic thinking in early childhood and primary education carried out in Spain (www.pensamientoalgebraico.es/en). After four sessions with a group of 21 4-year-old children, we interviewed 5 of these children individually. We presented them with a motivating context such as a trip to space and picking up moonstones. We proposed them a situation of change by putting stones in a "magic" box. This situation involved the function f(n)=n+2. We focused on the evidence they showed in the relationships between the variables and how they expressed the relationship. They used expressions such as "always come out more", "come out many", "becomes more". All 5 children concluded that more stones always came out than went into the box. They all identified the change-increase and some of them quantified the change as two more.

Keywords: *Change, early algebra, childhood education, function machine, functional thinking.*

INTRODUCCIÓN

Esta investigación está inmersa en el *early algebra*, que propone trabajar conceptos y tareas algebraicas desde educación infantil. Específicamente nos centramos en el enfoque funcional, que pone su atención en las relaciones que se pueden establecer entre dos o más conjuntos numéricos que covarían.

Aunque en educación infantil no hay referencia explícita al sentido algebraico, sí encontramos contenidos relacionados con este mismo sentido (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022a). En particular, la noción de cambio de los atributos de un objeto o de un conjunto va a ser primordial para posteriormente establecer relaciones cuantitativas entre ellos. Además, esta etapa educativa es previa a educación primaria, donde sí se recoge este sentido.

Fuentes, S., Cañadas, M. C. y Anglada, L. (2023). Cambio en variables cuantitativas por alumnos de 4 años desde un enfoque funcional. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 243–250). SEIEM.

Esto supone un inmenso desafío, para investigadores y docentes, pues las investigaciones sobre esta temática en este nivel educativo son escasas, aunque en España observamos cierto auge en el último curso de educación infantil (e.g., Acosta y Alsina, 2018; Anglada y Cañadas, 2021; Castro et al., 2017; Fuentes y Cañadas, 2022), y primeros años de educación primaria (e.g., Cañadas y Fuentes, 2015; Fuentes y Cañadas, 2021; Morales et al., 2018). Esta investigación contribuye a esta línea de trabajo, centrándose en niños de 4 años y fijando su interés en la noción de cambio cuantitativo en un contexto funcional del *early algebra*.

El objetivo principal de este trabajo es identificar el cambio que perciben niños de 4 años al resolver una tarea de generalización que involucra la función lineal $f(n)=n+2$.

ANTECEDENTES Y MARCO CONCEPTUAL

El objetivo principal del enfoque funcional del *early algebra* es promover el pensamiento algebraico a través del trabajo con funciones, relaciones y elementos matemáticos asociados a ellas. Adoptamos la definición de pensamiento funcional de Cañadas y Molina (2016), quienes lo definen como un proceso cognitivo "basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que la constituyen" (p. 211).

En el currículo español no existía hasta 2022 mención explícita a la introducción de elementos algebraicos antes de la educación secundaria. En la actualidad se reconoce la necesidad de abordar el sentido algebraico en educación primaria (MEFP, 2022b). Aunque en el currículo de educación infantil no hay mención explícita al sentido algebraico, si se incluyen la observación de los atributos de los objetos y las similitudes y diferencias entre diferentes elementos o conjuntos, consideraciones que también encontramos en los estándares del National Council of Teacher of Mathematics (2003).

> "...También establecen relaciones entre algunos de los atributos de los objetos y materias y su comportamiento físico cuando se interviene sobre ellas, estableciendo correlaciones, a su vez, entre dichas intervenciones y los efectos que producen. Ello conlleva el desarrollo de estrategias como la anticipación y la previsión, la formulación de hipótesis y la observación de fenómenos para constatar si se cumple lo esperado, y la discriminación entre las características o atributos permanentes y los variables..." (MEFP, 2022a, p 21).

El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que covarían (Blanton y Kaput, 2004; Smith, 2008). Esta variación es el cambio que experimentan los objetos o cantidades involucradas. Al establecer las relaciones de orden, correspondencia, clasificación y comparación propuestas en el currículo, es donde toma relevancia la noción de cambio en educación infantil. Identificar el cambio es el primer paso para establecer relaciones funcionales entre los conjuntos. Alsina y Pincheira (2022), proponen que identificar el cambio es un proceso clave en el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional, ya que permite introducir elementos algebraicos en situaciones cotidianas. Dienes (1971) incorporó la noción de cambio, no solo aritmético, sino cualitativo, en las actividades propuestas a los alumnos al trabajar con una máquina de funciones y los estados inicial y final de un elemento. Warren et al. (2013), en el trabajo con 6 alumnos de 1° de primaria, destaca el valor de los gestos y conversaciones que los alumnos comparten para lograr la generalización.

Consideraremos, que la primera evidencia de pensamiento funcional es la identificación del cambio que se produce entre las variables involucradas, ya que para establecer la relación entre las variables es necesario identificar si hay cambio entre ellas y cuál es ese cambio.

En la revisión de antecedentes, encontramos algunas investigaciones que concuerdan con nuestro estudio en edad y tema, aunque aún son muy escasas. Uno de nuestros principales antecedentes evidencia pensamiento funcional en 4 años. Se trata de un estudio de casos, donde se plantearon tareas de generalización, sobre los objetos necesarios para una fiesta de cumpleaños involucrando las funciones *f(n)=n* y *f(n)=3n*. La niña logró la generalización y verbalizó la relación funcional entre las variables involucradas en ambas tareas (Fuentes y Cañadas, 2022). En otra investigación, con ayuda de recursos tecnológicos, los alumnos de 5 años descubrieron la regla general que utilizó un robot programable para llegar a un casillero específico, según las palmadas que da el investigador (Anglada y Cañadas, 2021). Castro et al. (2017) llevaron a cabo tres intervenciones con un grupo de 12 alumnos de 5 años. En las intervenciones se apreció que los alumnos establecieron la relación *f(n)=n* y *f(n)=2n*. En todas estas investigaciones se utilizó un contexto motivador y desafiante para el alumno. En estas investigaciones está inmersa la noción de cambio y es la base para las observaciones que se presentan. De ahí que consideramos prestar atención a esta noción en 4 años.

METODOLOGÍA

Esta investigación es de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández et al, 2010), es exploratorio ya que encontramos escasa evidencia de investigaciones en este ámbito con alumnos de 4 años.

Se trabajó con un grupo de 21 niños de infantil de 4 años en un experimento de enseñanza de 4 sesiones en el curso académico 22-23, en un colegio público de la ciudad de Granada. La elección del centro fue intencionada, por disponibilidad de tiempo y disposición de toda la comunidad educativa. El contexto en el que se enmarcan las tareas propuestas a los niños es un viaje al espacio. Trabajamos con el cambio que experimentaban objetos al pasar por una máquina de funciones ("caja mágica"). En la siguiente tabla resumimos algunas características de las sesiones.

Tabla 1: Descripción de las sesiones

	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Sesión 4	Entrevista
Contexto	Viaje al espacio	Viaje al espacio	Piedras lunares	Piedras lunares	Piedras lunares
Tipo de variable	Cualitativa	Cualitativa	Cuantitativa	Cuantitativa	Cuantitativa
Cambio	Cualitativo (Tamaño)	Cualitativo (Tamaño y color)	Cuantitativo (+1)	Cuantitativo (+2)	Cuantitativo (+2)

Aunque todos los alumnos participaron en las sesiones e identificaron el cambio, por disponibilidad y calendario escolar, entrevistamos individualmente a 5 alumnos. La elección de estos alumnos fue intencionada, por las respuestas y participación demostrada en el trabajo con el grupo completo. Los criterios para ser entrevistados fueron: (a) participación activa, (b) identificación del cambio, (c) generalización y (d) que se expresen en público.

Un grupo de investigadores del proyecto en el que está inmersa esta investigación, diseñamos un protocolo de entrevista semiestructurada, dos de las investigadoras implementamos las entrevistas. En la tarea propuesta en la sesión 4 y en la entrevista, nos centramos en el cambio cuantitativo que experimentaban el número de los objetos que entraban y salían de la caja mágica. La variable independiente es el número de piedras lunares que entra; y la dependiente, el número de piedras lunares que sale. La función involucrada en esta tarea es *f(n)=n+2*. En la entrevista, nuestro objetivo era que además de identificar el cambio lo pudiesen cuantificar.

Para el trabajo individual, pusimos a disposición del alumno: (a) material concreto: piedras lunares, la caja mágica y hueveras de cartón con distribución de numicom, que representaban los números (b) material pictórico: franelograma con tabla de funciones y (c) material simbólico: hoja en blanco. Estos materiales se observan en la figura 1. El alumno podía utilizar los materiales cuando y como quisiera y la investigadora le preguntaba por casos particulares y por la generalización.

Figura 1: Entrevista individual y materiales utilizados

Para que los alumnos observasen el cambio, se introducían en la máquina piedras lunares y, dentro de la máquina, la investigadora le añadía dos piedras lunares. Pedíamos a los alumnos que explicaran lo que observaban y que representaran en una tabla la información obtenida, para ello utilizamos el franelograma con columnas y encabezados y hueveras. Así, emergieron parejas de datos. Por ejemplo, entra una piedra y salen 3 piedras. Utilizamos números menores que 10, por ser con los que estaban familiarizados y se les plantearon en orden no consecutivo para evitar la recurrencia. Por último, dimos a los alumnos un folio para que describieran qué pasó en la sesión.

En general, iniciamos las entrevistas con la introducción al contexto de la tarea. La investigadora metía en la máquina mágica un número de piedras lunares, ocurría el cambio en la máquina y salían dos piedras más. El número de piedras que entraban iba variando según el desarrollo de la entrevista. Si el alumno identificaba y cuantificaba el cambio, le pedíamos al alumno que gestionara la máquina. La aplicación de cada entrevista tuvo un tiempo estimado de 15 minutos y estuvo a cargo de las autoras de este trabajo. Las entrevistas fueron grabadas en vídeo. El análisis de las entrevistas pretende describir las nociones de cambio cuantitativo que perciben los alumnos.

Las investigadoras del equipo y autoras de este trabajo analizamos los vídeos de las entrevistas, buscando episodios donde los alumnos identificaron el cambio y lo cuantificaron. Analizamos estos episodios en el siguiente apartado.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Analizamos los vídeos de las entrevistas, en búsqueda de expresiones que evidenciaran el cambio y/o la relación entre las variables involucradas, más allá de casos particulares. Observamos como expresaron el cambio y cómo generalizaron la relación existente entre las variables.

A continuación, recogemos algunos fragmentos que evidencian la identificación del cambio cuantitativo y/o la relación entre las variables y un resumen de lo observado en la entrevista. Registramos con Ai, con i=1, 2,…, 5 a cada alumno entrevistado; e I, para la investigadora.

Alumno 1

I: ¿Qué hace la máquina?

A1: Hacerlos más.

I: Pero, ¿cuántas? (Se le insiste en que diga un número).

A1: No lo sé.

I: Ahora vamos a meter 1 piedra en la máquina. Va a salir 3, ¿qué pasó?

A: Que cuando metimos este aquí [coge la huevera de 1], se convirtieron en estos [coge la huevera de 3]. [Coloca en el franelograma las hueveras correspondientes a 1 y 3]

Este alumno no necesitó trabajar con material concreto, se fue directamente a trabajar con la representación pictórica y con la tabla de funciones. Estableció el cambio de que salen más bolas de las que entran, pero no estableció la relación funcional correcta. En la tabla de funciones, reconoció el número de piedras que entraban y que salían de la máquina mágica y reconoció las parejas de datos relacionadas. En la hoja en blanco representó los elementos que estaban en la tabla. Dibujó las piedras que entraban a la izquierda, el cambio lo representó con una interrogación en un cuadrado y a la derecha los elementos que salían de la caja (ver figura 2).

Figura 2: Entrevista A1

Alumno 2

I: ¿Qué hace la máquina?

A2: Salían más piedras.

I: Vamos a poner 3 piedras en la máquina... ¿Qué crees tú que va a pasar?

A2: Se hacen más.

I: ¿Cuántas más?

A2: Salen 4.

Este alumno utilizó el material concreto al comienzo de la entrevista. Cuando se le preguntó por las piedras que salían al meter 3, buscó la huevera con 3 espacios y dijo que le faltaban 2, ya que debían salir 5 piedras. Luego, se le invitó a trabajar con las piedras sobre la mesa, para que comparara las piedras que metía y que sacaba. Ordenamos las piedras en columnas.

I: ¿Qué observas?

A2: Que el 3 es más bajo y el 5 es más alto.

I: ¿Qué más observas?

A2: Que 3 más 5 son 8 (cuenta las piedras de ambas columnas).

I: Si las juntas son 8. Pero, ¿si están separadas?

A2: Son 3 y 5.

I: Y si ahora metemos 1 piedra... ¿cuántas van a salir?

A2: 3.

I: ¿Y si metemos 5 piedras?

A2: Salen 7.

En este punto, el alumno gestionó la máquina. La investigadora metió 4 piedras y el niño, dentro de la máquina, puso 2 más (saliendo 6 piedras). Repitió la operación correctamente con otros valores. El niño reconoció el cambio que se producía e identificó la relación funcional correcta. En la tabla nombró los elementos que entraban y salían de la máquina e identificó parejas de valores. En la hoja en blanco representó los elementos de la tabla de funciones, simbolizó las piedras como cuadrados y, si tenía espacio, colocó al lado los números (por ejemplo, 1 y 3). Observamos lo que hizo en la figura 3 (hemos marcado las parejas en un recuadro).

Figura 3: Entrevista A2

Alumno 3

I: Van a ingresar 2 piedras a la máquina. ¿Cuántas crees que van a salir?

A3: 4 [muestra 4 dedos].

I: Sí, salieron 4... ¿Por qué lo sabías?

A3: Porque después del 5 viene el 4.

I: Ahora vamos a meter 1 piedra, ¿cuántas van a salir?

A3: 3.

I: ¿Cómo lo sabes?

A3: Porque después del 2 va el 3.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio como el número que viene después del siguiente, para cada valor por el que se le pregunta. Utilizó la tabla, identificando los elementos de entrada y de salida y las parejas que se corresponden. No trabajó en la hoja en blanco.

Alumno 4

I: Al meter 2 piedras en la máquina, salen 4... ¿qué hace la máquina?

A4: No sé.

I: Probemos otra vez, cuando entran 5 piedras, salen 7. ¿Qué podemos decir que hace la máquina?

A4: Salen dos más.

...

I: [Cambiamos de rol] Y si entran 4, ¿cuántas deben salir?

A4: Pues 6.

I: ¿Qué hiciste?

A4: Le puse dos.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio de la máquina como dos más, para cada valor por el que le preguntamos, contestando correctamente. Dejamos al alumno gestionar la máquina. Utilizó la tabla de funciones, identificando los elementos de entrada y de salida y las parejas que se corresponden, puede extraer información de la tabla son dificultad. No quiso trabajar en la hoja en blanco.

Alumno 5

I: Cuando ingresan dos piedras, salen cuatro... ¿Qué hace la máquina?

A5: Que entran dos y salen cuatro.

I: Y si entra una... ¿cuántas crees que van a salir?

A5: Dos (ve las que salen). Pues digo tres.

I: ¿Y si meto tres?

A5: Cinco.

I: ¿Por qué?

A5: Porque es el que falta (en alguna parte del franelograma están representados todos los números) y ahora van a salir 6... Porque después del 5 va el 6.

Este alumno utilizó material concreto en toda la entrevista. Reconoció el cambio como que salen más elementos, pero solo identifica que sale el que sigue. Utilizó la tabla como almacenamiento, reconociendo los elementos que entraban y los que salían y las parejas que se corresponden. No trabajó en la hoja en blanco.

En la tabla 2 presentamos un panorama general del trabajo realizado en las entrevistas.

Tabla 2. Resumen de entrevistas

	Alumno				
	A1	A2	A3	A4	A5
Identifican el cambio	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Relación que identifican	$f(n)>n$	$f(n)=n+2$	$f(n)=n+1+1$	$f(x)=n+2$	$f(x)=n+1$

Se observa que todos los alumnos entrevistados identificaron que la máquina realizaba un cambio en los valores que entraban en la máquina respecto a los que salían. Los cinco alumnos verbalizaron la relación funcional, ya sea sin cuantificar el cambio (expresando que salen más) o cuantificándolo (es el siguiente del siguiente, sumándole uno y uno o sumándole dos). Todas las respuestas fueron adecuadas, aunque en el segundo caso (con cambio cuantificado) fueron más precisas. En todos los entrevistados observamos evidencia de pensamiento funcional y de generalización. En los alumnos A2, A3 y A4, las relaciones que identificaron fueron equivalentes.

CONCLUSIONES

El objetivo principal de este trabajo fue identificar el cambio que perciben los niños de 4 años al resolver una tarea de generalización que involucra una función lineal. Lo alcanzamos mediante el análisis y descripción de las entrevistas, que dejan evidencias de la percepción del cambio en las variables involucradas.

Al comparar este estudio con otros previos, coincidimos en que los alumnos evidenciaron pensamiento funcional al trabajar con conjuntos que covarían. Al igual que en Fuentes y Cañadas (2022), que fue un estudio de casos con una niña, nuestros entrevistados identificaron el cambio y la relación entre las variables.

Un aporte de esta investigación es dar peso a la identificación del cambio dentro del enfoque funcional como uno de los factores que llevan a establecer la relación funcional y la generalización. Una de las primeras evidencias de pensamiento funcional es la identificación del cambio y de las relaciones entre las variables involucradas. Mostramos un ejemplo sobre cómo trabajar del cambio cualitativo al cuantitativo y mostrar finalmente evidencias de pensamiento funcional.

Esta investigación aporta evidencia del trabajo que realizan los alumnos cuando se les plantean tareas de pensamiento funcional, aunque sabemos que los hallazgos no son generalizables por tratarse de una muestra muy reducida. Queda pendiente ampliar la muestra a otro tipo de estudiantes y ver si los resultados son similares.

Es importante proponer a los alumnos situaciones de cambio, poniendo el foco en la entrada, la salida o la transformación. Proponerles contextos cercanos y desafiantes ayudan a que se involucren en tareas de este estilo. Esperamos que actividades como esta sean un aporte a la tarea docente.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el proyecto con referencia PID2020-113601GB-I00, financiado por la Agencia Estatal de Investigación (AEI) de España y ANID n° 72210402, Gobierno de Chile.

Referencias

Acosta, Y. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización algebraica a partir de 3 años: el caso de los patrones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 111-120). SEIEM.

Alsina, A. y Pincheira, N. (2022). El cambio: Un conocimiento esencial del álgebra temprana. *Revista Científica Ecociencia*, *9*(6), 49-76. https://doi.org/10.21855/ecociencia.96.737

Anglada, M. L. y Cañadas, M. C. (2021). Correspondencia y generalización de estudiantes de último curso de Educación Infantil. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 125-132). SEIEM.

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades student's capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135-142). PME.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina, y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Comares.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 6*(2), 1-13.

Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores. 1: operadores aditivos*. Teide.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x) = 3x y f(x) = 5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269-277). SEIEM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación, 5° edición*. McGraw Hill.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022a). Real Decreto 95/2022, de 1 de febrero, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Infantil. *BOE*, 28, 1-33.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2022b). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. *BOE*, 56, 24386-24504.

Morales, R., Cañadas, M. C., Brizuela, B. M. y Gómez, P. (2018). Relaciones funcionales y estrategias de alumnos de primero de educación primaria en un contexto funcional. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(3), 59-78.

National Council Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Routledge.

Warren, E., Miller, J., y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.