

# Zur mathematischen Modellierung des kapillaren Anstiegs

**Dissipative Mechanismen und nicht-lineare Oszillationen**

Bachelorarbeit von El Assad Ouro-Koura

Tag der Einreichung: 27. September 2023

Gutachter: Prof. Dr. Dieter Bothe

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Regine von Klitzing

Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Mathematische  
Modellierung und Analysis,  
Fachbereich Mathematik

Institut für kondensierte  
Materie - Weiche Materie an  
Grenzflächen, Fachbereich  
Physik



---

## **Erklärung zur Abschlussarbeit gemäß §22 Abs. 7 und §23 Abs. 7 APB der TU Darmstadt**

---

Hiermit versichere ich, El Assad Ouro-Koura, die vorliegende Bachelorarbeit ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Fall eines Plagiats (§38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte elektronische Fassung gemäß §23 Abs. 7 APB überein.

Bei einer Thesis des Fachbereichs Architektur entspricht die eingereichte elektronische Fassung dem vorgestellten Modell und den vorgelegten Plänen.

Darmstadt, 27. September 2023



---

El Assad Ouro-Koura



---

## Danksagung

---

An dieser Stelle möchte ich mich sowohl bei Frau Prof. Dr. Regine von Klitzing, als auch beim Herrn Prof. Dr. Dieter Bothe bedanken, welche sich dieser Arbeit angenommen haben.

Ich bedanke mich nochmals beim Herrn Prof. Dr. Dieter Bothe und Dr. Mathis Fricke dafür, dass Sie es mir ermöglicht haben, dass ich diese Bachelorarbeit im Rahmen des Projekts *B02* im SFB1194 schreiben darf. Dies ermöglichte mir auch abseits des kapillaren Anstiegs einen großen Einblick in die Physik der Benetzungsprozesse. In diesem Kontext möchte ich mich auch bei Joel De Coninck aufgrund seiner Unterstützung bedanken.

Ein besonderer Dank geht an Dr. Mathis Fricke, welcher mir während der gesamten Zeit, als engagierter Betreuer zur Seite stand und mir stets mit Rat und Tat unterstützt hat.

Veröffentlicht unter CC-BY 4.0 International

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1. Einleitung und Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Oberflächenspannung . . . . .	3
2.2. Benetzung . . . . .	4
2.3. Der kapillare Anstieg . . . . .	6
<b>3. Kapillarer Anstieg - Klassisches Modell nach Bosanquet</b>	<b>11</b>
3.1. Analyse . . . . .	11
3.1.1. Modell und Entdimensionalisierung . . . . .	11
3.1.2. Analytische Resultate . . . . .	13
3.1.3. Numerische Resultate . . . . .	15
3.1.4. Physikalische Interpretation . . . . .	16
3.2. Experimenteller Vergleich . . . . .	18
<b>4. Kapillarer Anstieg - Dynamischer Kontaktwinkel</b>	<b>21</b>
4.1. Analyse . . . . .	21
4.1.1. Modell und Entdimensionalisierung . . . . .	21
4.1.2. Analytische Resultate . . . . .	23
4.1.3. Numerische Resultate . . . . .	29
4.1.4. Physikalische Interpretation . . . . .	31
4.2. Experimenteller Vergleich . . . . .	32
<b>5. Kapillarer Anstieg - Slip-Modell</b>	<b>37</b>
5.1. Analyse . . . . .	37
5.1.1. Modell und Entdimensionalisierung . . . . .	37
5.1.2. Analytische Resultate . . . . .	40
5.1.3. Numerische Resultate . . . . .	41
5.1.4. Physikalische Interpretation . . . . .	42
<b>6. Kapillarer Anstieg - Kombinationsmodell</b>	<b>43</b>
6.1. Analyse . . . . .	43
6.1.1. Modell und Entdimensionalisierung . . . . .	43
6.1.2. Analytische Resultate . . . . .	45
6.1.3. Numerische Resultate . . . . .	46
6.1.4. Physikalische Interpretation . . . . .	46
<b>7. Fazit und Ausblick</b>	<b>49</b>

---

<b>A. Anhang</b>	<b>53</b>
A.1. Hartman-Grobman-Theorem . . . . .	53



---

# 1. Einleitung und Motivation

---

Der Effekt der Kapillarität ist allgegenwärtig. Sie spielt sowohl in der Natur, als auch in der Industrie eine wichtige Rolle. So bildet sie in der Natur beispielsweise die Grundlage für die Nährstoffaufnahme von Pflanzen und Bäumen. In der Industrie findet die Kapillarität Anwendung in der Ölgewinnung, bei Druckvorgängen und bei der Produktion verschiedener Haushaltsutensilien, wie zum Beispiel Schwämme.

Unter einer Kapillare versteht man hierbei ein Röhrchen, dessen Innendurchmesser sehr klein ist typischerweise im mm Bereich. In diesem Fall dominiert die Oberflächenspannung gegenüber der Gravitation, wodurch sich Flüssigkeiten ohne äußere Einwirkungen entgegen der Gravitationskraft bewegen können. Als konkretes Beispiel behandelt diese Arbeit den Anstieg einer Flüssigkeit in einer Röhre, welche sich in einem Wasserbad befindet. Diesen Vorgang nennt man den kapillaren Anstieg.

Aufgrund des breiten Anwendungsgebietes der Kapillarität ist es sinnvoll das Phänomen besser zu verstehen, als auch beschreiben zu können. Dieses bessere Verständnis kann beispielsweise dazu verwendet werden, etwaige Prozesse zu optimieren, neue Anwendungsmöglichkeiten zu entdecken und Vorhersagen über das Verhalten von bestimmten Systemen zu machen. Durch den relativ simplen Aufbau des kapillaren Anstiegs, als auch der Tatsache, dass dabei die verschiedensten physikalische Effekte auftreten, bietet sich dieser als guter Ausgangspunkt an, um das Phänomen genauer zu studieren.

## Ziel

Diese Bachelorarbeit entsteht im Rahmen des Projekts *B02 - Direkte Numerische Simulation lokal gekoppelter Grenzflächentransportprozesse an Kontaktlinien bei dynamischen Benetzungsprozessen* im SFB1194 und behandelt die Beschreibung der Dynamik des kapillaren Anstiegs. Diese Arbeit verfolgt mehrere Ziele. Zum Einen dient sie als Überblick über die verschiedenen Modelle zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs und zum Anderen als Einstieg in die Thematik der Kapillarität und Benetzung im Allgemeinen. Gerade im Rahmen des Projekts B02 lässt sich diese Arbeit als Einstieg für künftige Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen nehmen.

In dieser Arbeit werden sowohl bereits existierende Modelle vorgestellt, als auch ein neues Modell eingeführt. Die Modelle werden aus einer numerischen, analytischen und physikalischen Sichtweise diskutiert als auch verglichen.

## Gliederung

In dem Kapitel 2 werden zunächst die physikalischen Grundlagen diskutiert, welche im Kontext des kapillaren Anstiegs relevant sind, als auch der generelle Aufbau eingeführt. Wichtige Begriffe hierbei sind die Oberflächenspannung und die Benetzung.

---

Im Kapitel 3 wird das klassische Modell des kapillaren Anstiegs nach Bosanquet [12] eingeführt. Hierbei wird das Modell um die Betrachtung der Meniskusmasse erweitert. Darauf aufbauend wird das Modell eigenständig numerisch, analytisch als auch physikalisch untersucht und zum Schluss mit experimentellen Daten aus [3] und [8] verglichen.

Die Kapitel 4 und 5 führen weitere bereits bestehende Modelle ein. Der Aufbau dieser Kapitel ist der selbe wie in Kapitel 3. Für das Modell aus Kapitel 4 sei auf [2] verwiesen, während das Modell aus Kapitel 5 auf [9] beruht. Es sei erwähnt, dass das Modell in Kapitel 5 aktuell nur für zwei Raumdimensionen vorliegt, wodurch hier auf einen experimentellen Vergleich verzichtet werden muss. Wie bereits zuvor wird auch dieses Modell numerisch, analytisch und physikalisch untersucht.

In dem Kapitel 6 wird ein Kombinationsmodell aus den Modellen aus Kapitel 4 und 5 eingeführt, welches in der Literatur noch nicht behandelt wurde. Der Ansatz für das Modell stammt hierbei von Dr. Mathis Fricke und beschreibt wie bereits zuvor den kapillaren Anstieg für zwei Raumdimensionen.

Die mathematische und numerische Analyse, sowie die physikalische Interpretation in den Kapiteln 3-6 wurden eigenständig von mir erbracht und stellen eines der Hauptresultate dieser Arbeit dar.

---

## 2. Grundlagen

---

Bevor die verschiedenen Modelle zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs eingeführt werden, sollen zunächst die theoretischen Grundlagen thematisiert werden. Dieses Kapitel dient als theoretisches Fundament für die nachfolgenden Kapitel und führt den generellen Aufbau des kapillaren Anstiegs ein. Dieser Abschnitt stützt sich dabei auf [7, Kapitel 1 und 2].

---

### 2.1. Oberflächenspannung

---

Im Kontext des kapillaren Anstiegs bildet die Oberflächenspannung die treibende Kraft. Sie beruht auf der Tatsache, dass es für Moleküle in einer Flüssigkeit energetisch vorteilhafter ist sich im Inneren der Flüssigkeit zu befinden als an der Oberfläche. Um dieses Verhalten genauer zu verstehen betrachte eine Gas-Flüssigkeit-Grenzfläche, wie sie in Abbildung 2.1 zu sehen ist. Die Moleküle innerhalb der Flüssigkeit spüren eine isotrope Anziehungskraft der sie umgebenden Flüssigkeitsmoleküle. Dies ist nicht mehr der Fall für die Flüssigkeitsmoleküle, welche sich an der Grenzfläche befinden. Auf dem Weg vom Inneren der Flüssigkeit an die Grenzfläche muss sich das Molekül somit gegen eine attraktive, in die Flüssigkeit gerichtete Kraft bewegen, was zu einer Steigerung der potentiellen Energie des Moleküls führt. Als Konsequenz besitzen die Moleküle an der Grenzfläche eine höhere Energie als die Moleküle innerhalb der Flüssigkeit. Da jedes System einen Zustand der minimalen Energie anstrebt, versucht das System im Gleichgewicht die Oberfläche zu minimieren.

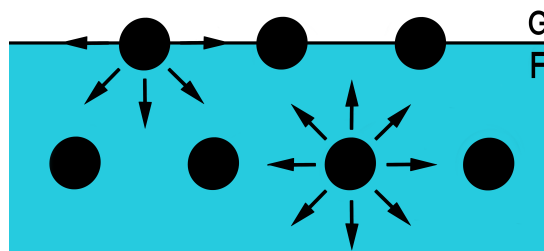


Abbildung 2.1.: Attraktive Kraft auf die Moleküle innerhalb einer Flüssigkeit.

Damit lässt sich nun die Oberflächenspannung  $\sigma$  durch die Arbeit definieren, die aufgewendet werden muss, um die Grenzfläche einer Flüssigkeit infinitesimal zu vergrößern

$$\delta W = \sigma dA. \quad (2.1)$$

Die Einheit dieser Größe ist gegeben durch  $[\sigma] = \text{J m}^{-2}$ . Eine Betrachtung der Abbildung 2.2 und die Tatsache, dass sich die Einheit der Oberflächenspannung auch als  $[\sigma] = \text{N m}^{-1}$  schreiben lässt, erlaubt eine weitere Interpretation der Oberflächenspannung als Kraft pro Einheitslänge. In der Abbildung 2.2 ist ein Rahmen mit einem beweglichen Stab zu sehen. Der Stab lässt sich in die positive (rechts) und die negative (links) x-Richtung bewegen. Zwischen dem Rahmen und dem beweglichen Stab befindet sich ein planarer Flüssigkeitsfilm. Beschleunigt man den Stab nun in die positive x-Richtung so beobachtet man, dass die Kraft zur Beschleunigung des Stabes größer ist, als die Kraft die man aufgrund seiner Trägheit erwarten würde. Der Ursprung liegt darin, dass bei der Bewegung des Stabes in die positive x-Richtung die Oberfläche des Flüssigkeitsfilms vergrößert wird.

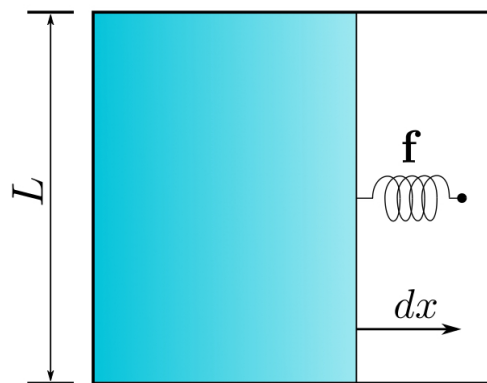


Abbildung 2.2.: Zur Interpretation der Oberflächenspannung als Kraft pro Einheitslänge (Quelle: [10]).

Dies führt auf die Definition der Oberflächenspannung  $\sigma$  durch die infinitesimale Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um den Stab infinitesimal in die positive x-Richtung zu bewegen

$$\delta W = |\mathbf{f}| \cdot dx = 2|\sigma|Ldx. \quad (2.2)$$

Der Faktor 2 in der vorangegangenen Formel rührt daher, dass in dem Aufbau zwei Oberflächen präsent sind. Mittels diesem Aufbau lässt sich die Oberflächenspannung  $\sigma$  als Kraft pro Einheitslänge auffassen, welche in die Flüssigkeit gerichtet ist und versucht die Oberfläche zu minimieren.

---

## 2.2. Benetzung

---

Nun soll die Auswirkung der Oberflächenspannung auf das Verhalten von Flüssigkeiten auf einem Substrat, hier einem Feststoff, untersucht werden. Als Ausgangspunkt dient hierbei Abbildung 2.3. Die für die Beschreibung relevanten Grenzflächen sind hierbei gegeben durch die Flüssigkeit-Feststoff-Grenzfläche, die Feststoff-Gas-Grenzfläche und die Flüssigkeit-Gas-Grenzfläche. Die dazugehörigen Oberflächenspannungen werden im Folgenden mit  $\sigma_{ls}$ ,  $\sigma_{sg}$  und  $\sigma_{lg}$  notiert.

In der Praxis wird zwischen zwei Arten von Benetzung unterschieden. Zum Einen existiert die *totale Benetzung*, bei der das Substrat vollständig benetzt wird und zum Anderen die *partielle Benetzung*, bei der das

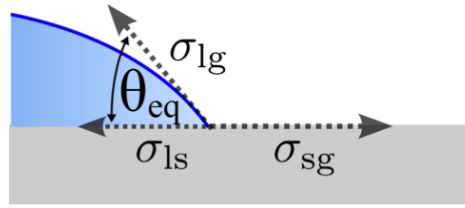


Abbildung 2.3.: Benetzung eines Feststoffs durch eine Flüssigkeit (Quelle: [10]).

Substrat nur teilweise oder gar nicht benetzt wird. Welche Art von Benetzung vorliegt, lässt sich mittels dem *Benetzungsparameter*  $S$  entscheiden, welcher durch

$$S := [E_{Substrat}]_{trocken} - [E_{Substrat}]_{feucht} \quad (2.3)$$

definiert ist. Hierbei ist  $[E_{Substrat}]_{trocken}$  die zusätzliche Energie des Systems aufgrund der Feststoff-Gas-Grenzfläche und  $[E_{Substrat}]_{feucht}$  die zusätzliche Energie des Systems aufgrund der Flüssigkeit-Feststoff-Grenzfläche. Ist die Bedingung  $S > 0$  erfüllt so liegt eine totale Benetzung vor, während Im Fall  $S < 0$  eine partielle Benetzung vorliegt.

Eine äquivalente Definition des Benetzungsparameters ist gegeben durch

$$S = \sigma_{sg} - (\sigma_{ls} + \sigma_{lg}). \quad (2.4)$$

Damit gibt der Benetzungsparameter den Nettoenergiegewinn pro zusätzlich benetzte Einheitsfläche an. Im Falle der totalen Benetzung ( $S > 0$ ) gewinnt das System somit an Energie durch Benetzung des Substrats. Der resultierende Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_{eq}$  im stationären Zustand ist gegeben durch  $\theta_{eq} = 0$ . Im Falle der partiellen Benetzung ( $S < 0$ ) benetzt die Flüssigkeit das Substrat nur teilweise und nimmt im Gleichgewichtszustand eine sphärische Form an. Der resultierende Gleichgewichtskontaktwinkel ist größer als Null. Während man im Falle  $\theta_{eq} \leq \pi/2$  von einer *stark benetzenden* Flüssigkeit spricht, nennt man die Flüssigkeit im Falle  $\theta_{eq} \geq \pi/2$  *schwach benetzend*.

Um den Gleichgewichtskontaktwinkel einer partiell benetzenden Flüssigkeit im stationären Zustand zu bestimmen, ist es sinnvoll die Interpretation der Oberflächenspannung als Kraft pro Einheitslänge zu betrachten. Mittels dieser Interpretation handelt es sich bei der Oberflächenspannungskraft um einen Vektor. Der Gleichgewichtskontaktwinkel lässt sich nun aus einem Kräftegleichgewicht der an der Kontaktlinie (Feststoff-Flüssigkeit-Gas-Grenzfläche) angreifenden Kapillarkräfte herleiten. Betrachtet man die Kraftwirkung pro Einheitslänge so erhält man gerade ein Kräftegleichgewicht der Oberflächenspannungen, siehe Abbildung 2.3. Hierbei muss die Oberflächenspannung, welche mit der Flüssigkeit-Gas-Grenzfläche assoziiert ist auf die Substratebene projiziert werden, was auf folgende Gleichung führt

$$\sigma_{lg} \cos \theta_{eq} = \sigma_{sg} - \sigma_{ls}. \quad (2.5)$$

Die Gleichung (2.5) wird auch *Young-Gleichung* genannt.

Im Nachfolgenden wird  $\sigma$  anstatt  $\sigma_{lg}$  für die Oberflächenspannung, welche mit der Flüssigkeit-Gas-Grenzfläche assoziiert ist, verwendet. Damit und mit der Gleichung (2.5) lässt sich der Benetzungsparameter als

$$S = \sigma(\cos \theta_{eq} - 1) \quad (2.6)$$

schreiben. Dadurch, dass  $\sigma$  nicht negativ ist, kann der Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_{eq}$  nur definiert werden, wenn der Benetzungsparameter negativ ist. Wäre  $\sigma$  negativ so würde die Flüssigkeit keine stabile Konfiguration annehmen, da sie durch Vergrößerung ihrer Grenzfläche stets an Energie gewinnen würde. Dies wird in der Natur allerdings nicht beobachtet.

Eine alternative Herleitung beruht auf der Interpretation der Oberflächenspannung als Energie pro zusätzliche Einheitsfläche. Im Gleichgewichtszustand gilt die Bedingung

$$\delta W = 0 = (\sigma_{sg} - \sigma_{ls})dx - \sigma \cos \theta_{eq} dx, \quad (2.7)$$

was auf die selbe Gleichung wie (2.5) führt.

---

## 2.3. Der kapillare Anstieg

---

Zum Schluss soll noch der kapillare Anstieg in einer dünnen Röhre diskutiert werden. Hierbei wird zunächst die Kapillarlänge  $\kappa^{-1}$  eingeführt, welche eine charakteristische Größe ist, um zu entscheiden, ob in der vorliegenden Situation die Oberflächenspannung oder die Gravitationskraft dominiert. Ihre Definition ist gegeben durch

$$\kappa^{-1} := \sqrt{\sigma/\rho g}, \quad (2.8)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit und  $\sigma$  wie bereits zuvor die Oberflächenspannung bzgl. der Flüssigkeit-Gas-Grenzfläche meint. Für Längenskalen  $r < \kappa^{-1}$  ist die Oberflächenspannung dominierend, während dies für Längenskalen  $r > \kappa^{-1}$  nicht mehr der Fall ist, siehe auch [7, Kapitel 2, Abschnitt 2.1].

Mit den vorangegangenen Grundlagen, lässt sich nun der kapillare Anstieg in einer dünnen Röhre beschreiben, als Ausgangspunkt dient hierbei der Aufbau wie in Abbildung 2.4.

Die Flüssigkeit und das Gas in dem betrachtenden Aufbau seien beliebig. Der Winkel, welcher der Meniskus mit der Kapillarwand bildet, wird mit  $\theta$  bezeichnet. Es wird angenommen, dass es sich bei der Form der Flüssigkeit-Luft-Grenzfläche, während des gesamten Anstiegs um eine sphärische Kappe handelt. Die Apexhöhe der Flüssigkeitssäule wird mit  $h$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.3.1.** *Die Annahme, dass es sich um eine Flüssigkeit-Gas-Kombination handeln soll ist nicht zwingend notwendig. Anstatt einem Gas lässt sich auch eine weitere Flüssigkeit betrachten.*

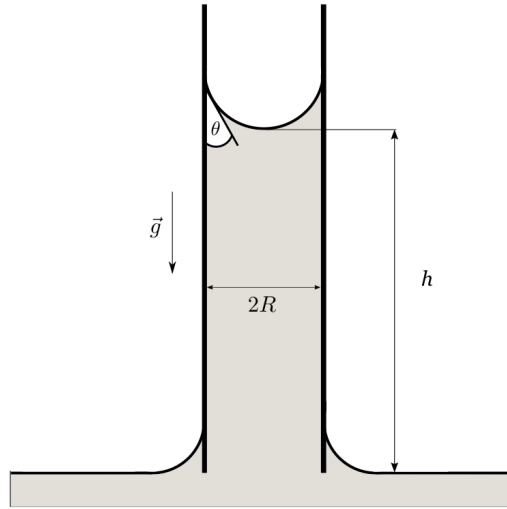


Abbildung 2.4.: Prinzipieller Aufbau des kapillaren Anstiegs (Quelle: [10]).

Da der Meniskus ebenfalls Masse besitzt und somit den Aufstieg der Flüssigkeit in der Röhre beeinflusst, soll dieser genauer untersucht werden. Sei die Flüssigkeit-Luft-Grenzfläche eine Kugelkappe einer Kugel mit Radius  $r$ . Eine Beschreibung der Meniskushöhe aus einem Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse antiparallel zur Gravitationsbeschleunigung  $\vec{g}$  ist und dessen Ursprung sich zentriert in der Apexhöhe befindet, liefert die Höhenfunktion

$$h_{Meniskus}(x, y) = \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 \leq R^2. \quad (2.9)$$

Die Berechnung des Volumenintegrals von (2.9) unter Beachtung des Zusammenhangs

$$r = \frac{R}{\cos \theta} \quad (2.10)$$

führt auf das zusätzliche Volumen

$$\tilde{V} = \pi R^3 \left( \frac{3 \cos \theta^2 - 2(1 - \sin \theta^3)}{3 \cos \theta^3} \right). \quad (2.11)$$

Dies entspricht einer mittleren Höhe von

$$\hat{h} = R \left( \frac{3 \cos \theta^2 - 2(1 - \sin \theta^3)}{3 \cos \theta^3} \right). \quad (2.12)$$

Somit ist das Gesamtvolumen der Wassersäule durch

$$V = \pi R^2 (h + \hat{h}) \quad (2.13)$$

und die Masse der Wassersäule durch

$$M = \rho V \quad (2.14)$$

gegeben.

Damit die Kapillarkraft die Gravitationskraft dominiert, muss der Radius  $R$  der Kapillare die Bedingung  $R < \kappa^{-1}$  erfüllen. An der Kontaktlinie der Flüssigkeit mit der Kapillarwand treffen nun Flüssigkeit, Luft und Kapillarwand aufeinander. Um den Aufstieg der Flüssigkeit in der Kapillare zu beschreiben, wird der *Aufstiegsparameter*  $I$

$$I := \sigma_{sg} - \sigma_{ls} \quad (2.15)$$

eingeführt. Unter der vereinfachenden Annahme, dass sich die Meniskusform während dem Anstieg nicht verändert, steigt die Flüssigkeit auf, wenn sie die Bedingung  $I > 0$  erfüllt. Im Falle, dass  $I < 0$  gilt, wird die Flüssigkeit nicht aufsteigen. Mittels (2.5) und der Tatsache, dass der Kontaktwinkel unter der vorherigen Annahme durch den Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_{eq}$  gegeben ist, ist dies äquivalent zu

$$\theta_{eq} < 90^\circ. \quad (2.16)$$

Damit muss die Flüssigkeit stark benetzend sein, siehe Abschnitt 2.2. Ist die Bedingung (2.16) erfüllt gewinnt das System somit an Energie indem es die Kapillarwand benetzt.

Im statischen Fall ist die Energie des Systems ungefähr durch

$$E(h) \approx -2\pi\sigma \cos \theta_{eq} R(h + \hat{h}) + \frac{1}{2}\pi R^2(h + \hat{h})^2 \rho g \quad (2.17)$$

geben und ist die Summe von *Oberflächenenergie* plus der *potentiellen Energie*. Eine Berechnung des Minimums von (2.17) liefert die Gleichgewichtshöhe

$$h_\infty := h_e - \hat{h}, \quad (2.18)$$

mit

$$h_e = \frac{2\sigma \cos \theta_0}{\rho g R}. \quad (2.19)$$

Die Größe  $h_e$  bezeichnet die *Jurin's Höhe* und beschreibt die Gleichgewichtshöhe eines Systems ohne Berücksichtigung der zusätzlichen Meniskusmasse. Die Berücksichtigung der Meniskusmasse führt somit zu einem Korrekturterm  $\hat{h}$ , wodurch die korrigierte Gleichgewichtshöhe durch (2.18) gegeben ist. Für den Rest dieser Arbeit soll angenommen werden, dass die zusätzliche Meniskusmasse nicht verschwindet dies ist äquivalent zu der Bedingung  $\hat{h} \neq 0$ .



---

Nun sollen noch die Anfangsbedingungen diskutiert werden. Prinzipiell können diese beliebig gewählt werden. Da sich manche der in dieser Arbeit vorgestellten Theoreme für allgemeine Bedingungen nicht zeigen lassen, schränkt sich diese Arbeit auf die Anfangsbedingungen

$$h(0) = h_0, \quad 0 \leq h_0 \leq h_\infty, \quad \dot{h}(0) = 0 \quad (2.20)$$

ein.



---

## 3. Kapillarer Anstieg - Klassisches Modell nach Bosanquet

---

In diesem Kapitel soll zunächst das klassische Modell nach Bosanquet [12] zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs vorgestellt werden. Da dieses Modell ein Spezialfall des Modells aus Kapitel 4 ist, sind die Beweise der hier gezeigten analytischen Resultate ebenfalls ein Spezialfall der korrespondierenden Beweise aus Kapitel 4.

---

### 3.1. Analyse

---

Zunächst soll das Modell hergeleitet und sowohl analytisch, als auch numerisch untersucht werden. Die Aussagen aus den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 sind dabei stark an [1] angelehnt mit der Erweiterung, dass die Masse des Meniskus zusätzlich berücksichtigt wird. Für die Beweise der entsprechenden Resultate wurde hierbei ein Zugang gewählt, welcher auf die Theorie von nichtlinearen Operatoren verzichtet und sich mehr auf die klassische Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen stützt.

#### 3.1.1. Modell und Entdimensionalisierung

Die klassische Beschreibung des kapillaren Anstiegs nach Bosanquet beruht auf einem Kräftegleichgewicht der an der Wassersäule wirkenden Kräfte und ist gegeben durch

$$2\pi R\sigma \cos \theta_{eq} = \pi R^2(h + \hat{h})\rho g + \pi R^2\rho \frac{d((h + \hat{h})\dot{h})}{dt} + 8\pi\eta(h + \hat{h})\dot{h}. \quad (3.1)$$

Hierbei beschreibt  $h = h(t)$  die Apexhöhe der Flüssigkeitssäule,  $g$  den Betrag der Gravitationsbeschleunigung,  $\sigma$  die Oberflächenspannung,  $R$  den Radius der Kapillare,  $\rho$  die Dichte,  $\eta$  die dynamische Viskosität des Fluids und  $\hat{h}$  die zusätzliche gemittelte Höhe durch den Meniskus, siehe Gleichung (2.12). Die obigen Terme beschreiben von links nach rechts, die Kapillarkraft, die Gravitationskraft, die Trägheit des Systems und die innere Reibungskraft der Wassersäule. Eine essentielle Annahme dieses Modells ist, dass der Kontaktwinkel während des Anstiegs konstant bleibt und somit durch den Gleichgewichtskontaktwinkel  $\theta_{eq}$  gegeben ist. Zur Herleitung dieses Modells werden die Kräfte näherungsweise modelliert und es wird angenommen, dass das Strömungsprofil innerhalb der Flüssigkeitssäule einer Poiseuille Strömung entspricht. Unter diesen Annahmen wird der Beitrag der Strömung in Nähe der Kontaktlinie vernachlässigt. In Kapitel 5 wird sich zeigen, dass die Strömung in Nähe der Kontaktlinie im Allgemeinen einen starken Einfluss auf den Anstieg der Flüssigkeitssäule hat.

Umformen der Differentialgleichung (3.1) führt auf

$$\frac{2\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = (h + \hat{h})\rho g + \rho \frac{d((h + \hat{h})\dot{h})}{dt} + \frac{8\eta}{R^2}(h + \hat{h})\dot{h}. \quad (3.2)$$

Die Bezeichnung Differentialgleichung soll im Nachfolgenden durch die Abkürzung DGL ersetzt werden.

**Bemerkung 3.1.1.** *Unter Vernachlässigung des Gravitationsterms, der Trägheit des Systems und der zusätzlichen Meniskusmasse vereinfacht sich die DGL (3.2) zu der Lucas-Washburn-Gleichung*

$$\frac{2\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \frac{8\eta}{R^2}h\dot{h}. \quad (3.3)$$

*Diese kann beispielsweise genutzt werden, um die horizontale Bewegung einer Flüssigkeit mit geringer Dichte unter Einwirkung von Kapillarkräften zu beschreiben. Die Lösung lautet unter der Annahme  $h(0) = 0$*

$$h(t) = \sqrt{\frac{R\sigma \cos \theta_{eq}}{2\eta}}\sqrt{t}. \quad (3.4)$$

*Da im Anfangsstadium des kapillaren Anstiegs sowohl die Trägheit als auch die Gravitationskraft vernachlässigbar sind, sollte die Anstiegshöhe  $h(t)$  proportional zu  $\sqrt{t}$  ansteigen.*

Das Modell unter Berücksichtigung der Meniskusmasse kann leicht auf das Modell in [1] zurückgeführt werden.

**Bemerkung 3.1.2.** *Mit der Transformation  $\tilde{h}(t) = h(t) + \hat{h}$  transformiert sich die DGL (3.2) zu der selben DGL wie in [1], wodurch sich die Ergebnisse aus [1] mit einer geringfügigen Modifikation übertragen lassen.*

Mittels der Transformationen

$$H = \frac{h + \hat{h}}{h_e}, \quad T = \frac{t}{\tau}, \quad (3.5)$$

lässt sich die DGL (3.2) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.20) zu

$$H\dot{H} + H + \omega \frac{d(H\dot{H})}{dT} = 1 \quad (3.6)$$

und den Anfangsbedingungen

$$H(0) = \frac{h_0 + \hat{h}}{h_e} =: H_0, \quad 0 < H_0 \leq 1, \quad \dot{H}(0) = 0 \quad (3.7)$$

transformieren.

Hierbei deutet der Punkt oberhalb der Variablen  $H$  in der DGL (3.6) die Ableitung nach der entdimensionalisierten Zeit  $T$  an. Die Größe  $h_e$  steht für die Jurin's Höhe (2.19) und die Koeffizienten  $\omega$  und  $\tau$  sind durch

$$\tau = \frac{16\eta\sigma \cos \theta_{eq}}{\rho^2 g^2 R^3}, \quad (3.8)$$

sowie

$$\omega = \frac{\rho^2 g R^4}{64\eta^2 h_e} = \frac{\rho^3 g^2 R^5}{128\eta^2 \sigma \cos \theta_{eq}} \quad (3.9)$$

gegeben. Der Koeffizient  $\tau$  besitzt die Einheit einer Sekunde, während  $\omega$  dimensionslos ist.

**Bemerkung 3.1.3.** *Es ist bemerkenswert, dass die gesamte DGL zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs durch einen einzigen Parameter  $\omega$  beschrieben werden kann. Dadurch beruht die nachfolgende Analyse des kapillaren Anstiegs im nächsten Abschnitt maßgeblich auf dem Parameter  $\omega$ . Die Auswirkungen der ursprünglichen physikalischen Größen, wie zum Beispiel  $\rho$  auf den kapillaren Anstieg kann dann mittels dem Zusammenhang (3.9) bestimmt werden.*

### 3.1.2. Analytische Resultate

Wie bereits erwähnt untersucht dieser Abschnitt die Eigenschaften von Lösungen der DGL (3.2). Über die Existenz, Eindeutigkeit und Beschränktheit dieser Lösungen bzgl. der Anfangsbedingungen (2.20) trifft folgendes Theorem eine Aussage.

**Theorem 3.1.4.** *Die DGL (3.2) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.20) besitzt eine eindeutige Lösung auf dem Intervall  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ , welche der Bedingung  $0 < h(t) < \sqrt{3}h_e - \hat{h}$  genügt. Des Weiteren existiert eine Umgebung  $U_0$  von 0 in  $\mathbb{R}_+$ , s.d. für  $s \in U_0$*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{h_0 + \hat{h}}{h_e} \right)^2 + \int_0^{\frac{t}{\tau\sqrt{\omega}}} \left( 1 - \sqrt{\left( \frac{h_0 + \hat{h}}{h_e} \right)^2 + s^2 + \mathcal{O}(s^3)} \right) G \left( \frac{t}{\tau\sqrt{\omega}} - s \right) ds - \hat{h} \\ \leq h(t) \leq \sqrt{\left( \frac{h_0 + \hat{h}}{h_e} \right)^2 + \frac{t^2}{\tau^2\omega} + \mathcal{O}(s^3)} h_e - \hat{h} \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit

$$G(z) := \sqrt{\omega} \left( 1 - \exp \left( -\frac{z}{\sqrt{\omega}} \right) \right) \quad (3.11)$$

gilt.

*Beweis.* Für den Beweis siehe [1, Korollar 2] und beachte Bemerkung 3.1.2. Damit sich der Beweis auf diesen Fall übertragen lässt, sei noch erwähnt, dass die Aussage des Korollars auch für den Fall  $\alpha = 1$  gilt und die Funktion  $u$  in dem Beweis nur positiv auf dem Intervall  $[\alpha^2/2, 3/2]$  ist. Alternativ führt auch der Beweis von Theorem 4.1.5 für den Spezialfall  $\tilde{\zeta} = 0$  auf dieses Theorem.  $\square$

Als nächstes sollen die asymptotischen Eigenschaften der Lösung der DGL (3.2) diskutiert werden. Dafür muss zunächst die Definition eines kritischen Punktes genannt werden.

**Definition 3.1.5.** Sei  $D \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$  gegeben und betrachte die DGL

$$y'(t) = f(y(t)), \quad t > 0. \quad (3.12)$$

- (1) Ein Punkt  $y_0 \in D$  mit  $f(y_0) = 0$  heißt kritischer Punkt von  $f$ .
- (2) Ein kritischer Punkt  $y_0$  von  $f$  heißt stabil, falls für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle Lösungen  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  von (3.12) mit  $|v(0) - y_0| < \delta$  gilt, dass für alle  $t > 0$  der Abstand  $|v(t) - y_0| < \epsilon$  bleibt.
- (3) Ein kritischer Punkt  $y_0 \in D$  heißt attraktiv, falls es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle Lösungen  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$  von (3.12) mit  $|v(0) - y_0| < \delta$  gilt, dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} |v(t) - y_0| = 0$ .
- (4) Ein kritischer Punkt  $y_0 \in D$  heißt asymptotisch stabil, falls er stabil und attraktiv ist.

Mit der vorherigen Definition kann nun das nachfolgende Theorem formuliert werden.

**Theorem 3.1.6.** Sei  $h = h(t)$  eine Lösung der DGL (3.2). Dann ist der kritische Punkt nach Umformung in ein System 1. Ordnung gegeben durch  $(h_\infty, 0)$ . Des Weiteren tritt für  $\omega > 0.25$  eine Änderung des Verhaltens des Systems auf. Während das System für  $\omega < 0.25$  monoton gegen die Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  strebt, konvergiert es für  $\omega > 0.25$  oszillierend um die Gleichgewichtshöhe gegen eben diese. Der kritische Punkt  $(h_\infty, 0)$  besitzt eine Umgebung  $U$  in  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , so dass sich die Lösungen von (3.2) mit Anfangswerten innerhalb dieser Umgebung durch

$$h(t) \approx \begin{cases} h_\infty + \exp(-\beta t)(c_1 \exp(\mu_1 t) - c_2 \exp(-\mu_1 t)) & \text{für } 0.25 > \omega > 0 \\ h_\infty + \exp(-\beta t)(c_3 \sin(\mu_2 t) + c_4 \cos(\mu_2 t)) & \text{für } 0.25 < \omega \end{cases} \quad (3.13)$$

approximieren lassen, hierbei gilt  $\mathbb{R}_+^* := (0, \infty)$ . Die Konstanten sind durch  $\beta = \frac{1}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_1 = \frac{\sqrt{1-4\omega}}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_2 = \frac{\sqrt{4\omega-1}}{2\omega\tau}$ ,  $c_1 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta + \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_2 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta - \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_3 = (h_0 - h_\infty) \frac{1}{2\omega\mu_2}$  und  $c_4 = h_0 - h_\infty$  gegeben.

*Beweis.* Für einen Beweis betrachte den Beweis in Theorem 6.1.2 für den Spezialfall  $\tilde{\zeta} = 0$ . □

**Bemerkung 3.1.7.** Die kritische Bedingung  $\omega < 0.25$  bzw.  $\omega > 0.25$  für den Regimewechsel entspricht gerade dem Resultat  $\Omega < 2$  aus [3], wobei der Zusammenhang zwischen  $\Omega$  aus [3] zu dem hier eingeführten  $\omega$  durch

$$\omega = \frac{1}{\Omega^2 \cos \theta_{eq}} \quad (3.14)$$

gegeben ist und  $\theta_{eq} = 0$  angenommen wird.

Zum Schluss soll die Stabilität des Systems untersucht werden. Mit der Definition in 3.1.5 folgt nun:

**Theorem 3.1.8.** Der eindeutige kritische Punkt  $(h_\infty, 0)$  von (3.2) nach Umformung in ein System 1. Ordnung ist asymptotisch stabil. Des Weiteren gilt für alle Lösungen der DGL (3.2) mit den Anfangswerten (2.20)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty. \quad (3.15)$$

*Beweis.* Für den Beweis siehe Theorem 4.1.8 für den Spezialfall  $\tilde{\zeta} = 0$ . □

### 3.1.3. Numerische Resultate

Die numerische Untersuchung soll anhand der DGL (3.6) erfolgen. Dies bietet im Vergleich zur DGL (3.2) den Vorteil, dass das gesamte System mittels dem einzelnen Parameter  $\omega$  beschrieben werden kann. Die im Nachfolgenden erzeugten Lösungskurven wurden in der Programmiersprache Python mittels der Routine `odeint` aus dem Modul `scipy.integrate` erzeugt und anschließend mit dem Modul `matplotlib.pyplot` visualisiert.

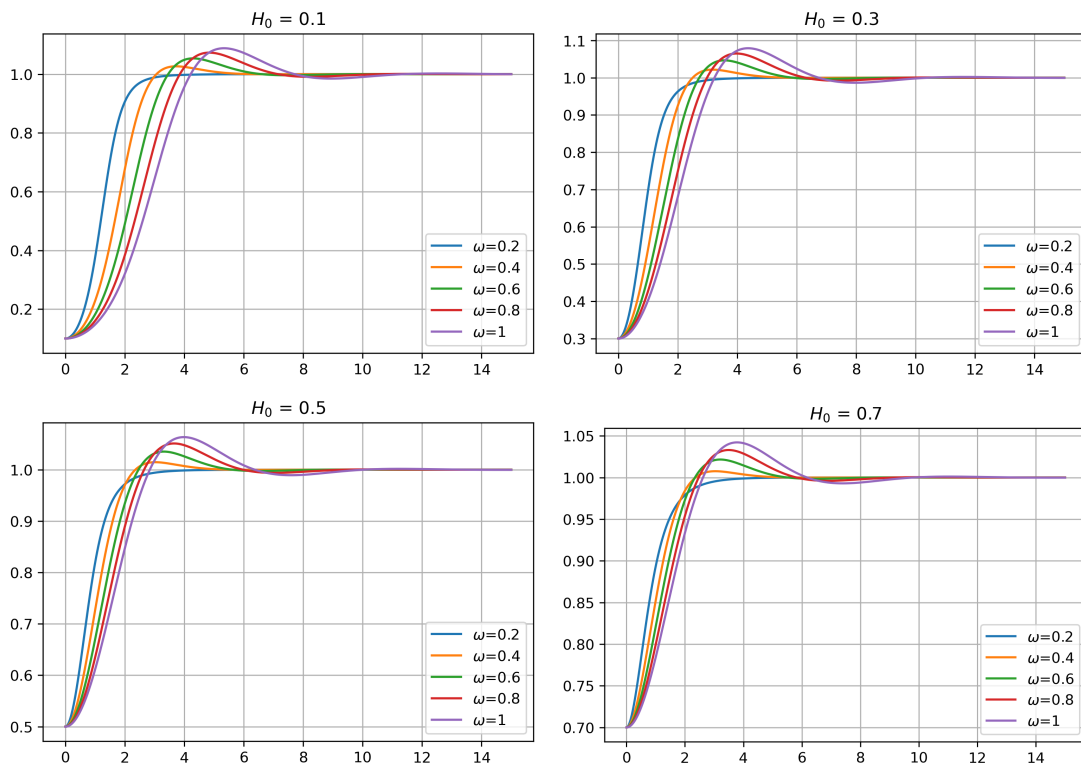


Abbildung 3.1.: Lösungen der DGL (3.6) in Abhängigkeit von  $\omega$  und  $H_0$ .

In der Abbildung 3.1 ist das qualitative Verhalten der Lösung für verschiedene Werte von  $\omega$  und verschiedene Anfangshöhen  $H_0$  zu sehen. Jeder der hier gezeigten Kurven zeigt einen ähnlichen Verlauf auf. Zunächst steigt die Lösung rasant an und pendelt sich im Anschluss bei einem Wert von 1 ein. Da der Anstieg allerdings mit  $\omega$  und  $H_0$  variiert, soll als erstes die Auswirkung des Parameters  $\omega$  auf die Lösungskurve untersucht werden. Mit steigendem  $\omega$  nimmt die maximale Anstiegshöhe des Systems zu. Dies geht so weit, dass das System für hohe Werte von  $\omega$  den Regimewechsel von einem monotonen zu einem oszillatorischen Anstieg vollzieht, siehe Theorem 3.1.6. Gleichzeitig ist zu sehen, dass die Anstiegszeit zur Erreichung der maximalen Anstiegshöhe

zunimmt. Die Anfangshöhe  $H_0$  wirkt sich gegenläufig zu  $\omega$  auf das System aus. Während die maximale Anstiegshöhe mit steigender Anfangshöhe sinkt, sinkt die Anstiegszeit bis zur Erreichung der maximalen Anstiegshöhe. Eine physikalische Interpretation dieser Beobachtungen folgt im nächsten Abschnitt.

Die Abbildung 3.1 bestätigt Theorem 3.1.8, wonach sich jede Lösung der DGL (3.6) mit den Anfangsbedingungen (3.7) bei 1 einpendelt. Des Weiteren liegt die maximale Anstiegshöhe jeder Lösungskurve unterhalb der Schwelle  $\sqrt{3}$  und die Anfangshöhe wird in keinem Fall unterschritten so wie es Theorem 3.1.4 vorhersagt. Dies bleibt auch dann wahr, wenn man  $\omega$  über einen größeren Bereich variiert wie man in Abbildung 3.2 sieht.

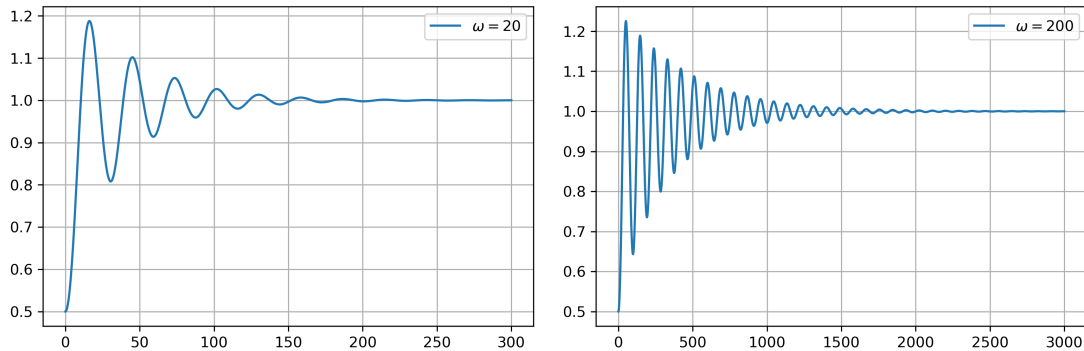


Abbildung 3.2.: Die Lösungen der DGL (3.6) sind gemäß Theorem 3.1.4 durch  $\sqrt{3}$  beschränkt.

Zum Schluss soll noch der Regimewechsel des Systems gemäß des Theorems 3.1.6 untersucht werden. Nach diesem Theorem sollte das System lokal sein Verhalten wechseln, sobald  $\omega$  den Wert 0.25 überschreitet. Der monotone Anstieg sollte in einen oszillatorischen Anstieg übergehen, was sich auch belegen lässt, siehe Abbildung 3.3.

### 3.1.4. Physikalische Interpretation

Zunächst soll die Abhängigkeit der Anstiegsgeschwindigkeit von  $\omega$  interpretiert werden. Nach der Abbildung 3.1 scheint die Anstiegsgeschwindigkeit mit  $\omega$  zu sinken. Dies widerspricht den Erwartungen, da der Term  $\omega$  invers von  $\eta^2$  abhängt und eine höhere Viskosität eine geringere Anstiegsgeschwindigkeit bedeuten sollte. Dieser Widerspruch lässt sich dadurch auflösen, dass die Zeittransformation in (3.5) von  $\tau$  und damit von den physikalischen Größen abhängt. Löst man die DGL (3.6) in den dimensionsbehafteten Größen so steigt die Anstiegsgeschwindigkeit mit wachsendem  $\omega$  siehe Abbildung 3.4.

Transformiert man nun das System (3.6) mittels der Transformation  $z(s) = \frac{1}{2}H(T(s))^2$  mit  $s = T/\sqrt{\omega}$  so lässt sich für das neue System eine Energiefunktion angeben, welche durch (4.23) für den Spezialfall  $\tilde{\zeta} = 0$  gegeben ist. Die Terme beschreiben von links nach rechts die kinetische Energie, die Oberflächenenergie, die potentielle Energie, sowie die Energie, welche durch die innere Reibung verloren geht.

Die Energiefunktion (4.23) liefert eine Erklärung dafür, weshalb die maximale Anstiegshöhe des Systems mit sinkender Anfangshöhe zunimmt. Mit sinkender Anfangshöhe erhöht sich die Anfangsenergie  $E(0)$  des Systems, siehe Abbildung 3.5. Dies führt dazu, dass mehr Energie in kinetische Energie umgewandelt wird, wodurch die maximale Anstiegshöhe steigt. Dies ähnelt der Auslenkung einer gedämpften Feder weg von ihrer Gleichgewichtslage. Je stärker die Auslenkung ist, desto höher ist die Amplitude der ersten Schwingung.



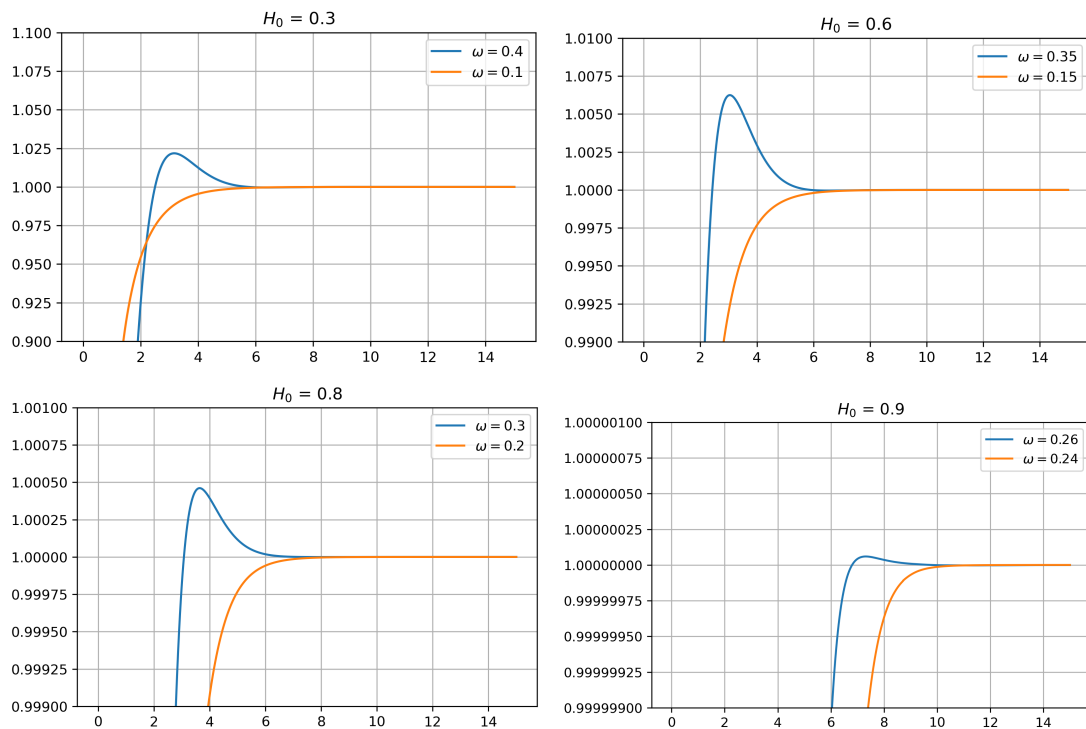


Abbildung 3.3.: Regimewechsel des Systems für  $\omega > 0.25$ .

Als nächstes soll die Abhängigkeit der maximalen Anstiegshöhe von  $\omega$  untersucht werden. Da der Reibungsterm in (4.23) invers von  $\sqrt{\omega}$ , als auch der Anstiegsgeschwindigkeit abhängt, sinkt der Reibungsverlust des Systems mit steigendem  $\omega$ . Dadurch wird nun mehr Energie in kinetische Energie umgewandelt was zu einem höheren Impuls des Systems führt. Wie zuvor steigt die maximale Anstiegshöhe des Systems. In dem obigen Analogon der gedämpften Schwingung entspricht dies einer Verringerung der Dämpfungskonstante.

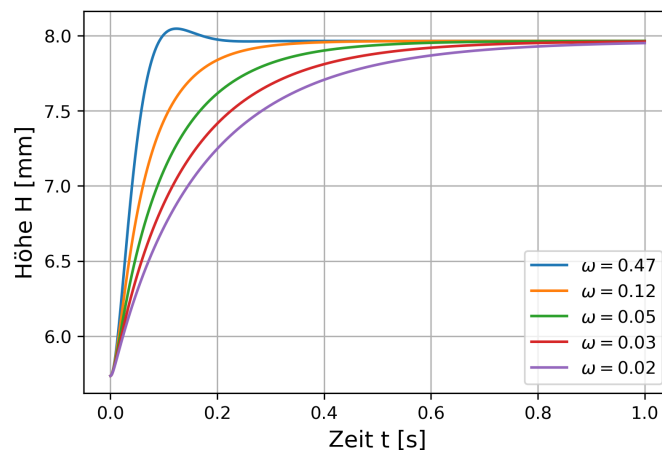


Abbildung 3.4.: Lösungen der DGL (3.6) in dimensionsbehafteten Größen.

Die verringerte Anstiegszeit bei steigender Anfangshöhe ist eine Konsequenz davon, dass das System einen kürzeren Weg bis zur Erreichung der maximalen Anstiegshöhe hat.

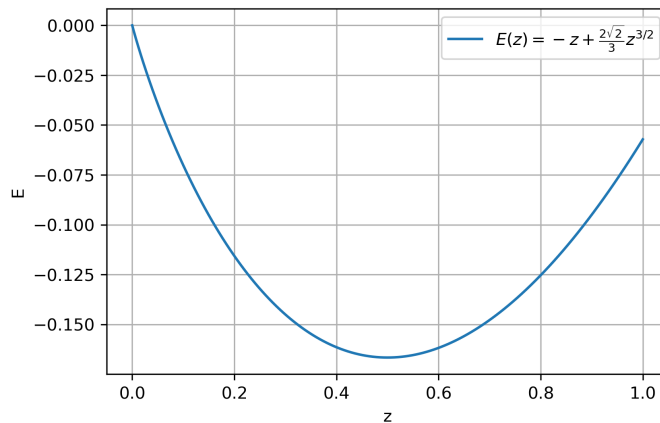


Abbildung 3.5.: Verlauf der Energiefunktion (4.23) für  $\dot{z} = 0$ .

Zusammengefasst lässt sich der kapillare Anstieg, welcher durch die DGL (3.2) beschrieben wird, als ein gedämpftes Federsystem auffassen. Der Faktor  $\omega$  beschreibt hierbei die Trägheit des Systems und ist ebenfalls ein Maß für den Reibungsverlust. Die innere Reibung bewirkt die Dämpfung, während die Oberflächenenergie das System antreibt und somit als Feder wirkt. Die Balance zwischen Oberflächenenergie und potentielle Energie bewirkt schlussendlich, dass sich das System auf der Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  einpendelt.

Am Ende dieses Abschnitts soll noch die Auswirkung der physikalischen Größen  $\rho$ ,  $\sigma$  etc. auf das System diskutiert werden. Dadurch, dass das System (3.6) bereits analysiert wurde, lassen sich die Auswirkungen unmittelbar aus dem Term (3.9) ablesen. Eine Erhöhung der Größen  $\rho$  und  $R$  führen dazu, dass  $\omega$  wächst und somit an maximaler Anstiegshöhe gewinnt, da die Verluste aufgrund der Reibung abnehmen. Da  $\omega$  invers von  $\eta$ ,  $\sigma$  und  $\cos \theta_{eq}$  abhängt, führt eine Erhöhung dieser Größen zu einer Verringerung von  $\omega$  und damit zu einer Erhöhung der Reibungsverluste.

### 3.2. Experimenteller Vergleich

Nun soll das Modell (3.2) mit experimentellen Daten verglichen werden. Dazu wird das Modell zunächst mit den beiden Experimente aus [3] verglichen. In beiden Experimenten werden die Kapillaren in ein Flüssigkeitsbad platziert. Während es sich bei der Flüssigkeit im ersten Experiment um Ethanol handelt, handelt es sich beim zweiten Experiment um Ether. Die genauen Spezifikationen sind in der nachfolgenden Tabelle 3.1 zusammengefasst. Für genauere Details bzgl. der Experimente siehe [3].

Tabelle 3.1.: Eigenschaften der Flüssigkeiten aus den Experimenten in [3].

	$\cos \theta_{eq}$	R in $\mu\text{m}$	$\rho$ in $\text{kg m}^{-3}$	$\sigma$ in $\text{mN m}^{-1}$	$\eta$ in $\text{mPa s}$	$\omega$
Ethanol	1	689	780	21.6	1.17	1.88
Ether	1	669	710	16.6	0.3	28.0

Da die Rohdaten des Experiments nicht auffindbar sind, wurden die Datenpunkte aus dem Paper mittels dem online Tool *WebPlotDigitizer* extrahiert und anschließend mittels Python ausgewertet. Die Lösung der DGL (3.9) wurde wie bereits erwähnt mittels der Routine *odeint* aus dem Modul *scipy.integrate* generiert und

anschließend auf eine Lösung der DGL (3.2) transformiert. Nach (4.47) sollte  $\omega$  in einem Größenbereich von  $10^{-4} \sim 10^3$  liegen.

Für beide Experimente liegt  $\omega$  oberhalb der Schwelle von 0.25. Nach der vorhergegangenen Theorie sollten also Oszillationen zu erwarten sein. Der Vergleich von Datenpunkten zu Modell ist in Abbildung 3.6 zu sehen.

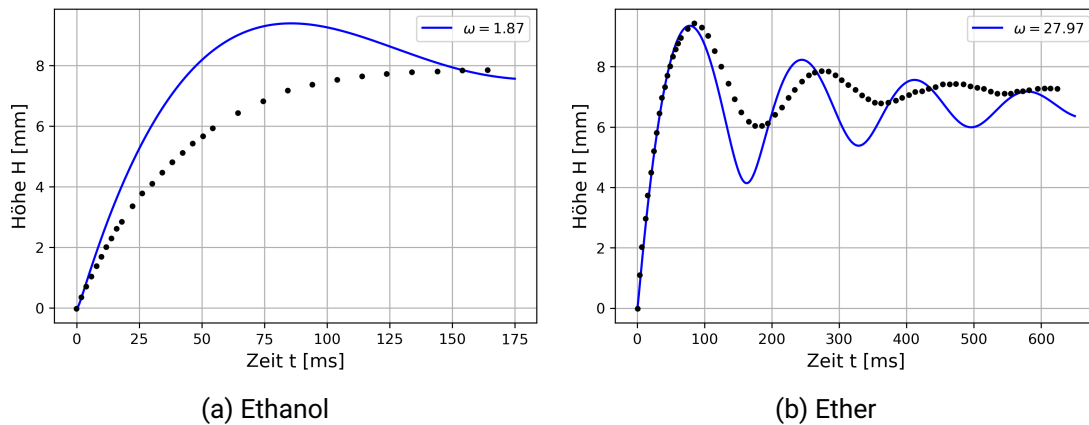


Abbildung 3.6.: Vergleich des Modells (3.2) (blaue Kurven) zu den Datenpunkten (schwarze Punkte) aus den Experimenten aus [3].

Während das Ether wie zu erwarten Oszillationen aufweist, ist dies für Ethanol nicht der Fall. Dies kann verschiedene Ursachen haben. Zum Einen ist die Grenzbedingung für den Regimewechsel nur eine Approximation für Systeme, welche in der Nähe der Gleichgewichtslösung starten, was hier nicht der Fall ist. Des Weiteren können nicht beachtete physikalische Effekte dazu beitragen, dass das System an Energie bzw. an Dynamik verliert. So beobachtet man beispielsweise in Experimenten, dass der Kontaktwinkel über den Verlauf nicht konstant ist, sondern sich ändert. Diese Änderung ist mit einer gewissen Reibung verbunden auf die im nächsten Kapitel eingegangen wird. Im Allgemeinen scheint das hier vorgestellte Modell die Dynamik des Systems überzubewerten, so dass vermutlich zusätzliche Dissipationsmechanismen noch beachtet werden müssen.

Als Letztes sei noch erwähnt, dass der Offset zwischen Gleichgewichtshöhe der Lösungskurve und Gleichgewichtshöhe der Datenpunkte, siehe Abbildung 3.6b vermutlich auf die Messunsicherheit des Kontaktwinkels zurückzuführen ist. Auf die letzte Anmerkung wird im nachfolgenden Kapitel genauer eingegangen.

Als nächstes und letztes Experiment soll das Experiment aus [8] untersucht werden. Die Extraktion und Visualisierung der Datenpunkte erfolgte wie zuvor.

Aufgrund der Tatsache, dass sich die Datenpunkte nur für die Flüssigkeit n-Pentan sinnvoll extrahieren lassen, beschränkt sich der Vergleich lediglich auf diese Flüssigkeit. Die genauen Eigenschaften von n-Pentan finden sich in der Tabelle 3.2.

Tabelle 3.2.: Eigenschaften von n-Pentan aus [8].

	$\cos \theta_{eq}$	R in $\mu\text{m}$	$\rho$ in $\text{kg}/\text{m}^3$	$\sigma$ in $\text{mN m}^{-1}$	$\eta$ in $\text{mPa s}$	$\omega$
n-Pentan	0.70	550	601	16.5	0.22	14.81

Nach dem Wert von  $\omega$  sollte n-Pentan oszillierend gegen die Gleichgewichtshöhe streben. Dies ist auch der Fall wie in Abbildung 3.7 zu sehen ist. Trotz der richtigen Vorhersage über das Anstiegsverhalten von n-Pentan

in diesem Experiment ist auch hier eine Überschätzung der Dynamik des Systems erkennbar. Dies macht sich dadurch bemerkbar, dass die Lösungskurve zu stark oszilliert und die maximale Anstiegshöhe zu hoch ist. Im Gegensatz zu 3.6b tritt hierbei allerdings kein Offset zwischen experimenteller Gleichgewichtshöhe und theoretischer Gleichgewichtshöhe auf.

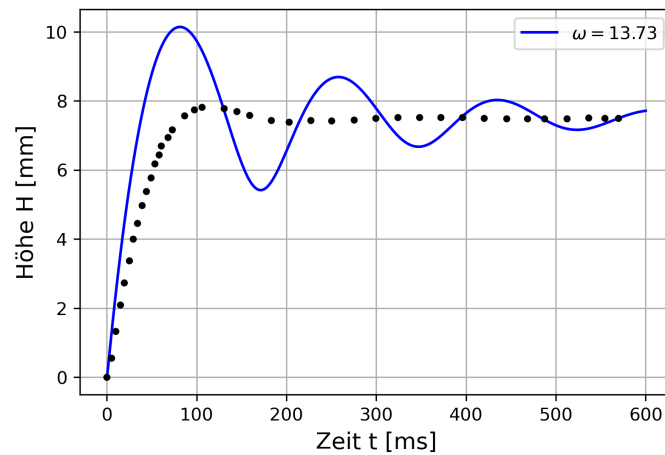


Abbildung 3.7.: Vergleich des Modells (3.2) (blaue Kurve) zu den Datenpunkten (schwarze Punkte) aus den Experimenten aus [8].

Wie bereits erwähnt beruht die Überschätzung der Dynamik des Systems auf der nicht Beachtung gewisser physikalischer Effekte, wie zum Beispiel dem dynamischen Kontaktwinkel, welcher mit einer gewissen Reibung verbunden ist. Das Modell, welches im nächsten Kapitel vorgestellt wird, korrigiert dies.

---

## 4. Kapillarer Anstieg - Dynamischer Kontaktwinkel

---

In diesem Kapitel soll die DGL zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs (3.2) um einen dynamischen Kontaktwinkel erweitert und die daraus resultierenden Lösungen untersucht werden. Dabei wird angenommen, dass der Kontaktwinkel linear von der Kontaktliniengeschwindigkeit bzw. der Anstiegsgeschwindigkeit abhängt.

---

### 4.1. Analyse

---

Nachdem die DGL (3.2) zunächst um den dynamischen Kontaktwinkel erweitert wird, soll die DGL wie zuvor sowohl mathematisch, als auch numerisch untersucht werden.

#### 4.1.1. Modell und Entdimensionalisierung

Um die Dynamik des Kontaktwinkels zu beschreiben, wird zunächst ein linearer Ansatz der Form

$$\sigma(\cos \theta_{eq} - \cos \theta) = \zeta \dot{h}. \quad (4.1)$$

verwendet. Der hier eingeführte Parameter  $\zeta$  hat die Dimension einer Reibung und sorgt somit für eine Dämpfung des Systems. Der Ansatz hat seinen Ursprung in einer molekularkinetischen Betrachtungsweise des Anstiegs, siehe auch [2]. Aus der molekularkinetischen Theorie folgt die explizite Form von  $\zeta$  zu

$$\zeta = \frac{k_B T}{K_0 \lambda^3}, \quad (4.2)$$

wobei  $k_B$  die Boltzmann-Konstante meint,  $K_0$  die Frequenz mit denen Moleküle an der Kontaktlinie ausgetauscht werden und  $\lambda$  die durchschnittliche Länge, die für diesen Austausch benötigt wird, siehe [2]. Dieser Ansatz ergibt zusammen mit der DGL (3.2)

$$\frac{2}{R}(\sigma \cos \theta_{eq} - \zeta \dot{h}) = \frac{8\eta}{R^2}(h + \hat{h})\dot{h} + \rho \frac{d}{dt}((h + \hat{h})\dot{h}) + \rho g(h + \hat{h}), \quad (4.3)$$

während sich die Anfangsbedingungen (2.20) nicht verändern.

**Bemerkung 4.1.1.** Für die Wahl  $\zeta = 0$  geht das Modell (4.3) gerade in das Modell (3.2) über. Somit stellt das hier vorgestellte Modell eine Erweiterung des ursprünglichen Modells (3.2) dar. Dadurch, dass im Falle  $\zeta \neq 0$  ein Term proportional zu  $\dot{h}$  hinzukommt, müssen die Beweise aus dem vorherigen Kapitel bzw. aus [1] verallgemeinert werden.

Um die spätere Analyse übersichtlich zu halten, soll die DGL (4.3) normalisiert und auch entdimensionalisiert werden. Dies geschieht wie zuvor mittels der Transformationen

$$H = (h + \hat{h})/h_e \quad \text{und} \quad T = t/\tau. \quad (4.4)$$

Die modifizierte DGL lautet mit diesen Transformationen

$$\frac{2}{R} \left( \sigma \cos \theta_{eq} - \zeta \frac{h_e}{\tau} \dot{H} \right) = \frac{8\eta}{R^2} \frac{h_e^2}{\tau} H \dot{H} + \rho \frac{h_e^2}{\tau^2} \frac{d}{dT} (H \dot{H}) + \rho g h_e H, \quad (4.5)$$

wobei der Punkt über dem  $H$  die Ableitung nach der entdimensionalisierten Zeit  $T$  meint.

Unter der Beibehaltung der Anfangsbedingung (2.20) ergibt sich die neue Anfangsbedingung zu

$$H(0) = (h_0 + \hat{h})/h_e =: H_0, \quad 0 < H_0 \leq 1, \quad \dot{H}(0) = 0. \quad (4.6)$$

Setzt man nun

$$\tau = \frac{16\eta\sigma \cos \theta_{eq}}{\rho^2 g^2 R^3} \quad (4.7)$$

so vereinfacht sich die DGL zu

$$1 - \tilde{\zeta} \dot{H} = H \dot{H} + H + \omega \frac{d}{dT} (H \dot{H}) \quad (4.8)$$

mit

$$\tilde{\zeta} = \zeta \cdot \frac{\rho g R^2}{8\eta\sigma \cos \theta_{eq}} = \zeta \cdot \frac{16\eta}{\rho^2 g R^3} \cdot \omega, \quad \omega = \frac{\rho^3 g^2 R^5}{128\eta^2 \sigma \cos \theta_{eq}}. \quad (4.9)$$

Sowohl  $\tilde{\zeta}$  als auch  $\omega$  sind dimensionslos. Dies ist nun die gesuchte normalisierte und entdimensionalisierte DGL.

**Bemerkung 4.1.2.** Wie bereits zuvor, ist es bemerkenswert, dass die gesamte DGL (4.3) durch die zwei Parameter  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  beschrieben werden kann. Der Parameter  $\tilde{\zeta}$  beschreibt den Einfluss des dynamischen Kontaktwinkels auf das System bzw. die damit assoziierten Reibungsverluste.

## 4.1.2. Analytische Resultate

Um die Analyse zu vereinfachen wird die folgende Transformation durchgeführt

**Lemma 4.1.3.** *Das Anfangswertproblem, im Folgendem mit AWP abgekürzt, bestehend aus der DGL (4.8) mit den Anfangsbedingungen (4.6) kann mit der Transformation  $z(s) = \frac{1}{2}H(T(s))^2$ ,  $s = T/\sqrt{\omega}$  zu*

$$1 = \ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\sqrt{\omega}} + \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}}{\sqrt{2\omega z}} + \sqrt{2z}, \quad (4.10)$$

mit

$$z(0) = H_0^2/2 =: z_0, \quad 0 < z_0 \leq 1/2, \quad \dot{z}(0) = 0 \quad (4.11)$$

transformiert werden. Hierbei bedeuten die Punkte oberhalb der Variablen  $z$  die Ableitung nach der modifizierten Zeit  $s$ .

*Beweis.* Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass  $\dot{z} = \sqrt{\omega}H\dot{H}$  gilt. □

Als nächstes soll die DGL (4.10) auf Existenz, Eindeutigkeit und globale Eigenschaften untersucht werden. Die Resultate dieser Untersuchung sind im folgenden Theorem zusammengefasst.

**Satz 4.1.4.** *Sei  $z = z(s)$  eine Lösung des AWP's aus dem Lemma 4.1.3. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1) *Die Funktion  $z$  ist eine Lösung folgender Integralgleichung*

$$z(s) = z_0 + \int_0^s \left( 1 - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{2\omega z(t)}} - \sqrt{2z(t)} \right) G(s-t) dt \quad (4.12)$$

mit

$$G(z) = \sqrt{\omega} \left( 1 - \exp \left( -\frac{z}{\sqrt{\omega}} \right) \right). \quad (4.13)$$

(2) *Die DGL (4.10) zusammen mit den Anfangsbedingungen (4.11) hat eine eindeutige Lösung auf  $\mathbb{R}_+$ , welche den Bedingungen*

$$z_0 \leq z(s) \leq \frac{3}{2}, \quad s > 0 \quad (4.14)$$

und

$$|\dot{z}(s)| \leq \sqrt{3}, \quad s > 0 \quad (4.15)$$

genügt.

(3) Es existiert eine Umgebung  $U_0$  von 0 in  $\mathbb{R}_+$ , so dass für  $s \in U_0$  gilt

$$z_0 + \int_0^s \left( 1 - \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} - \sqrt{H_0^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) s^2 + \mathcal{O}(s^3)} \right) G(s-t) ds \leq \quad (4.16)$$

$$z(s) \leq z_0 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3).$$

*Beweis.* Im Folgenden wird der Beweis zwecks besserer Strukturierung in mehrere Teilschritten aufgeteilt.

(i) Zunächst wird die Gleichung (4.10) umgestellt

$$\ddot{z} + \frac{\dot{z}}{\sqrt{\omega}} = 1 - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}}{\sqrt{2\omega z}} - \sqrt{2z}. \quad (4.17)$$

Multiplikation mit  $\exp\left(\frac{s}{\sqrt{\omega}}\right)$  liefert

$$\frac{d}{ds} \left( \exp\left(\frac{s}{\sqrt{\omega}}\right) \dot{z}(s) \right) = \exp\left(\frac{s}{\sqrt{\omega}}\right) \left( 1 - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}(s)}{\sqrt{2\omega z(s)}} - \sqrt{2z(s)} \right). \quad (4.18)$$

Zweifache Integration liefert

$$z(s) = z_0 + \int_0^s \exp\left(-\frac{u}{\sqrt{\omega}}\right) \left( \int_0^u \exp\left(\frac{t}{\sqrt{\omega}}\right) \left( 1 - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{2\omega z(t)}} - \sqrt{2z(t)} \right) dt \right) du. \quad (4.19)$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge und anschließende Integration über die Variable  $u$  führt auf die gesuchte Integralgleichung

$$z(s) = z_0 + \int_0^s G(s-t) f(z(t)) dt \quad (4.20)$$

mit

$$G(z) = \sqrt{\omega} \left( 1 - \exp\left(-\frac{z}{\sqrt{\omega}}\right) \right), \quad f(z(t)) = \left( 1 - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{2\omega z(t)}} - \sqrt{2z(t)} \right). \quad (4.21)$$

(ii) Um die Positivität zu zeigen, wird die DGL (4.10) mit  $\dot{z}$  multipliziert. Dies liefert

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2} \dot{z}^2 - z + \frac{2\sqrt{2}}{3} z^{3/2} \right) = -\frac{\dot{z}^2}{\sqrt{\omega}} \left( 1 + \frac{\tilde{\zeta}}{\sqrt{2z}} \right) \leq 0, \quad (4.22)$$

falls  $z > 0$  gilt. Daraus folgt, dass die Energiefunktion

$$E(s) := \frac{1}{2} \dot{z}(s)^2 - z(s) + \frac{2\sqrt{2}}{3} z(s)^{3/2} \quad (4.23)$$



monoton abnimmt. Zusammen mit

$$E(0) = \frac{2\sqrt{2}}{3}z_0^{3/2} - z_0 = H_0^2 \left( \frac{H_0}{3} - \frac{1}{2} \right) < 0 \quad (4.24)$$

folgt daraus

$$E(s) \leq E(0) < 0 \quad (4.25)$$

für alle  $s > 0$ .

Mit den vorherigen Resultaten folgt, dass  $z$  folgende Bedingung

$$-E(s) + E(0) = z - \frac{2\sqrt{2}}{3}z^{3/2} - \frac{1}{2}\dot{z}(s)^2 + E(0) \geq 0, \quad s > 0 \quad (4.26)$$

erfüllen muss. Damit muss  $z$  auch der Ungleichung

$$z - \frac{2\sqrt{2}}{3}z^{3/2} + E(0) \geq 0, \quad s > 0 \quad (4.27)$$

genügen. Man kann leicht zeigen, dass die obige Funktion für jedes  $z_0$ , welches die Bedingung aus (4.11) erfüllt, nur auf dem Intervall  $[z_0, 3/2]$  nicht negativ ist. Damit folgt die erste Ungleichung. Berücksichtigt man nun, dass  $z$  nicht negativ ist und durch  $3/2$  nach oben beschränkt ist, muss auch

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\dot{z}(s)^2 \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\dot{z}(s)^2 + E(0) \geq z - \frac{2\sqrt{2}}{3}z^{3/2} - \frac{1}{2}\dot{z}(s)^2 + E(0) \geq 0, \quad s > 0 \quad (4.28)$$

gelten. Dies liefert die zweite Ungleichung.

- (iii) Um die Existenz als auch die Eindeutigkeit zu zeigen, soll das AWP in Lemma 4.1.3 nochmal präziser formuliert werden. Betrachte dazu folgendes AWP

$$\ddot{z}(t) = 1 - \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\omega}} - \tilde{\zeta} \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{2\omega z(t)}} - \sqrt{2z(t)} = f(t, z(t), \dot{z}(t)), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.29)$$

$$z(0) = z_0, \quad 0 < z_0 \leq 1/2, \quad \dot{z}(0) = 0$$

mit

$$f : D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x, y) \longmapsto 1 - \frac{y}{\sqrt{\omega}} - \tilde{\zeta} \frac{y}{\sqrt{2\omega x}} - \sqrt{2x}. \quad (4.30)$$

Das zugehörige AWP 1. Ordnung lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{z_2(t)}{\sqrt{\omega}} - \tilde{\zeta} \frac{z_2(t)}{\sqrt{2\omega z_1(t)}} - \sqrt{2z_1(t)} \\ \tilde{\zeta} \frac{z_2(t)}{\sqrt{2\omega z_1(t)}} - \sqrt{2z_1(t)} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{z}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{z}(0) &= \begin{pmatrix} z_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < z_0 \leq 1/2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{f} : D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 - \frac{y}{\sqrt{\omega}} - \tilde{\zeta} \frac{y}{\sqrt{2\omega x}} - \sqrt{2x} \\ \tilde{\zeta} \frac{y}{\sqrt{2\omega x}} - \sqrt{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die  $t$  Abhängigkeit von  $\tilde{f}$  ist lediglich implizit, somit handelt es sich bei der DGL im AWP (4.31) um eine autonome DGL. Der Rand der Menge  $D$  ist gegeben durch

$$\partial D = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

Dadurch, dass  $f$  differenzierbar und somit lokal lipschitzstetig ist, existiert eine lokale Lösung des Problems. Aufgrund der Beschränktheitseigenschaft (4.14) jeder Lösung und der Tatsache, dass die Funktion  $\tilde{f}$  auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar ist, folgt mittels dem Fortsetzungssatz [siehe 5, Satz 2.3.2], dass diese Lösung auf  $\mathbb{R}_+$  existiert. Nach dem Eindeutigkeitsatz [siehe 5, Satz 2.1.3] ist diese Lösung eindeutig.

- (iv) Als letztes soll nun die obere und untere Schranke hergeleitet werden. Unter Ausnutzung der Beschränktheit der Funktion selbst, als auch ihrer Ableitung und der Tatsache, dass die Funktion nicht negativ ist, folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} z(s) &\leq z_0 + \int_0^s \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) G(s-t) ds \\ &= z_0 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) \int_0^s G(s-t) ds \\ &= z_0 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) \sqrt{\omega} \left( s - \sqrt{\omega} \left( 1 - \exp\left(-\frac{s}{\omega}\right) \right) \right) \\ &= z_0 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}\tilde{\zeta}}{\sqrt{2\omega z_0}} \right) \frac{s^2}{2} + \mathcal{O}(s^3) =: \tilde{z}(s), \end{aligned} \quad (4.34)$$

wobei die letzte Gleichheit aus einer Taylorentwicklung der Exponentialfunktion folgt. Dieses Resultat kann nun gewinnbringend genutzt werden, indem man in (4.12) den Term  $\tilde{\zeta} \dot{z}(t) / \sqrt{2\omega z(t)}$  durch  $\sqrt{3}\tilde{\zeta} / \sqrt{2\omega z_0}$  abschätzt und  $z(t)$  in  $\sqrt{2z(t)}$  durch  $\sqrt{2\tilde{z}(t)}$  ersetzt. Dies liefert die untere Schranke.

□

Dies führt auf das nachfolgende Theorem.

**Theorem 4.1.5.** Die DGL (4.3) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.20) besitzt eine eindeutige Lösung  $h = h(t)$  auf  $\mathbb{R}_+$  für die

$$h_0 \leq h(t) \leq \sqrt{3}h_e - \hat{h} \quad (4.35)$$

gilt. Außerdem existiert eine Umgebung  $U_0$  von 0 in  $\mathbb{R}_+$ , so dass für  $t \in U_0$  die Lösung  $h(t)$  durch

$$\begin{aligned} & \left( (h_0 + \hat{h})^2 + 2h_e^2 \int_0^{t/\tau\sqrt{\omega}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} - \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) s^2 + \mathcal{O}(s^3)} \right) \times \right. \\ & \left. G\left(\frac{t}{\tau\sqrt{\omega}} - s\right) ds \right)^{1/2} - \hat{h} \leq h(t) \leq \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) \frac{h_e^2}{\tau^2\omega} t^2 + \mathcal{O}(t^3)} - \hat{h} \end{aligned} \quad (4.36)$$

beschränkt ist.

*Beweis.* Dies ist eine direkte Konsequenz aus Satz 4.1.4. □

Zum Schluss dieses Abschnittes soll noch die Asymptotik der Lösung besprochen werden. Dazu wird zunächst eine hinreichende Bedingung für das Auftreten von Oszillationen gegeben.

**Satz 4.1.6.** Der kritische Punkt  $(H_0, \dot{H}_0) = (1, 0)$  von (4.8) ändert für

$$\left( \frac{1 + \tilde{\zeta}}{2} \right)^2 = \omega \quad (4.37)$$

sein lokales Verhalten. Für  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 \geq \omega$  handelt es sich bei dem kritischen Punkt um einen stabilen Knoten. Das heißt, dass die Lösung monoton gegen die Gleichgewichtslösung  $h_\infty$  konvergiert, während es sich für  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 < \omega$  um eine stabile Spirale handelt, das heißt, dass die Lösung oszillierend gegen die Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  konvergiert.

*Beweis.* Es reicht die äquivalente DGL (4.10) zu betrachten. Zunächst wird die DGL mittels der Transformation  $x(t) = z(t)$  und  $y(t) = \dot{z}(t)$  in die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \left( 1 - \frac{y}{\sqrt{\omega}} - \tilde{\zeta} \frac{y}{\sqrt{2\omega x}} - \sqrt{2x} \right) \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

1. Ordnung transformiert. Es ist leicht zu sehen, dass der kritische Punkt eindeutig durch  $(1/2, 0)$  gegeben ist. Die Linearisierung dieser DGL führt auf

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta \\ \dot{\eta} &= -\frac{1 + \tilde{\zeta}}{\sqrt{\omega}} \eta - \xi. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Hierbei bezeichnen  $\eta$  und  $\xi$  die lineare Abweichung von dem kritischen Punkt. Die Eigenwerte dieser Linearisierung sind durch

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1+\tilde{\zeta}}{2\sqrt{\omega}} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2\sqrt{\omega}}\right)^2 - 1} = \frac{1+\tilde{\zeta} \pm \sqrt{(1+\tilde{\zeta})^2 - 4\omega}}{2\sqrt{\omega}} \quad (4.40)$$

gegeben. In jedem Fall sind die Realteile der Eigenwerte negativ und die Bedingung dafür, dass die Eigenwerte rein reell sind, ist durch  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2\omega}\right)^2 - \frac{1}{\omega} \geq 0$  bzw.  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 \geq \omega$  gegeben. Sind die Eigenwerte imaginär so folgt aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen, dass die Lösung der linearisierten DGL, oszilliert, während die Lösung bei rein reellen Eigenwerten monoton steigt. Für den Fall  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 \geq \omega$  handelt es sich bei dem kritischen Punkt der linearisierten DGL somit um einen stabilen Knoten, während im Fall  $\left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 \leq \omega$  eine Oszillation um den kritischen Punkt stattfindet. Nach dem Theorem von Hartman-Grobman siehe Anhang A.1 existierte ein Homöomorphismus  $f$ , welches Lösungen der linearisierten DGL (4.39) lokal um den kritischen Punkt  $(1/2, 0)$  auf Lösungen des AWP's (4.11) abbildet. Da ein Homöomorphismus insbesondere bijektiv ist, oszilliert einer der beiden Lösungen dann und nur dann, wenn die andere Lösung oszilliert. □

Für die dimensionsbehaftete DGL (4.3) bedeutet dies

**Theorem 4.1.7.** *Sei  $h(t)$  eine Lösung der DGL (4.3). Dann ist der kritische Punkt gegeben durch  $(h_\infty, 0)$ . Des Weiteren tritt für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  eine Änderung des Verhaltens des Systems auf. Während das System für  $\omega < \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  monoton gegen die Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  strebt, konvergiert es für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  oszillierend um die Gleichgewichtshöhe gegen eben diese. Des Weiteren besitzt der kritische Punkt  $(h_\infty, 0)$  eine Umgebung  $U$  in  $\mathbb{R}_+^*$ , so dass sich die Lösungen von 4.3 mit Anfangswerten innerhalb dieser Umgebung durch*

$$h(t) \approx \begin{cases} h_\infty + \exp(-\beta t)(c_1 \exp(\mu_1 t) - c_2 \exp(-\mu_1 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 > \omega > 0 \\ h_\infty + \exp(-\beta t)(c_3 \sin(\mu_2 t) + c_4 \cos(\mu_2 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 < \omega \end{cases} \quad (4.41)$$

approximieren lassen. Die Konstanten sind durch  $\beta = \frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{\zeta}+1)^2 - 4\omega}}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_2 = \frac{\sqrt{4\omega - (\tilde{\zeta}+1)^2}}{2\omega\tau}$ ,  $c_1 = (h_0 - h_\infty)^{\frac{\beta+\mu_1}{2\mu_1}}$ ,  $c_2 = (h_0 - h_\infty)^{\frac{\beta-\mu_1}{2\mu_1}}$ ,  $c_3 = (h_0 - h_\infty)^{\frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\mu_2}}$  und  $c_4 = h_0 - h_\infty$  gegeben.

*Beweis.* Der erste Teil des Theorems ist eine direkte Konsequenz aus dem vorherigen Satz. Bei der angegebenen Approximation handelt es sich um die Lösung des linearisierten Modells von (4.8). Die Approximationseigenschaft ist nun eine Folgerung aus [5, Satz 4.1.2]. □

**Satz 4.1.8.** *Der eindeutige kritische Punkt  $(1/2, 0)$  von 4.38 ist asymptotisch stabil. Des Weiteren gilt für alle Lösungen des AWP's (4.1.3)*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{1}{2}. \quad (4.42)$$

*Beweis.* Dies ist eine Folgerung des *Invarianzprinzip von La Salle* [siehe 5, Satz 8.4.3]. Wie bereits erwähnt ist die DGL im AWP (4.31) autonom, wodurch sich der Definitionsbereich der Funktion  $\tilde{f}$  auch als

$$D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \quad (4.43)$$

schreiben lässt. Die zugehörige Ljapunov Funktion ist gegeben durch

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - x + \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}, \quad (4.44)$$

dass es sich bei (4.44) um eine Ljapunov Funktion handelt, folgt aus (4.22). Da diese auf dem hier betrachteten Bereich stetig differenzierbar ist, ist sie lokal lipschitzstetig. Des Weiteren stimmt die Menge  $\{x \in \tilde{D} : \dot{V}(x) = 0\}$  mit der maximal schwach invarianten Teilmenge  $M$  übereinstimmt und diese ist gerade gegeben durch  $\{(1/2, 0)\}$ . Aus (4.14) folgt die Kompaktheit der Menge  $\tilde{\gamma}_+(x)$  womit der Satz anwendbar ist.  $\square$

Als Konsequenz ergibt sich:

**Satz 4.1.9.** *Der Gleichgewichtspunkt  $(h_\infty, 0)$  von (4.3) ist asymptotisch stabil. Des Weiteren gilt für jede Lösung der DGL 4.3 mit den Anfangsbedingungen (2.20)*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty. \quad (4.45)$$

*Beweis.* Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem Satz 4.1.8.  $\square$

### 4.1.3. Numerische Resultate

In diesem Abschnitt soll die Lösung des kapillaren Anstiegs mit einem dynamischen Kontaktwinkel numerisch untersucht werden. Die Untersuchung wird sich dabei auf die äquivalente DGL (4.8) beschränken. Diese DGL bietet den Vorteil, dass sich der kapillare Anstieg vollständig mittels zweier Parameter beschreiben lässt.

Zunächst soll die Abhängigkeit der Lösung von den Parametern  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  untersucht werden. Dafür wird die DGL für verschiedene Kombinationen von  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  gelöst. Dies geschieht wieder mittels der Routine `odeint` des Moduls `scipy.integrate` aus der Programmiersprache Python. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind in der Abbildung 4.1 zu sehen.

Der prinzipielle Verlauf unterscheidet sich nicht zu dem von Modell (3.6). Während die Lösung anfangs rasant steigt, pendelt sie sich im Anschluss bei einem Wert von 1 ein.

Wie bereits zuvor steigt mit wachsendem  $\omega$  sowohl die maximale Anstiegshöhe, als auch die entdimensionalisierte Zeit  $T$  zur Erreichung der maximalen Anstiegshöhe. Eine Erhöhung des Reibungsparameters  $\tilde{\zeta}$  wirkt sich gegenläufig zu  $\omega$  bzgl. der maximalen Anstiegshöhe aus. So führt eine Erhöhung von  $\tilde{\zeta}$  zu einer Verringerung der maximalen Anstiegshöhe. Auch hier führen hohe Werte für  $\omega$  zu einer Oszillation des Systems. Im Gegensatz zum Modell (3.6) werden diese Oszillationen mit steigenden Werten für  $\tilde{\zeta}$  unterdrückt. Diese Beobachtung ist im Einklang mit der kritischen Bedingung (4.37) für den Regimewechsel.

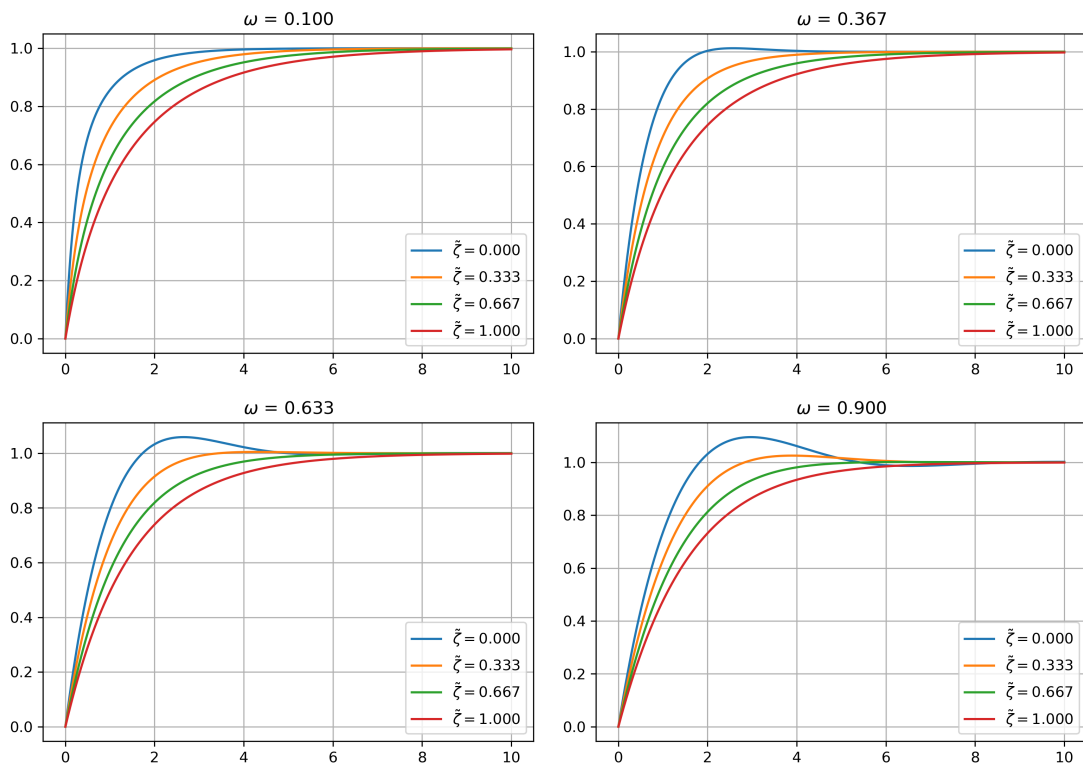


Abbildung 4.1.: Lösung der DGL (4.8) in Abhängigkeit von  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$ .

Als nächstes soll die Abhängigkeit der Lösung von der Anfangshöhe untersucht werden. Dazu wird die DGL für feste Werte von  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  und variablen Werten der Anfangshöhe  $H_0$  gelöst, siehe Abbildung 4.2.

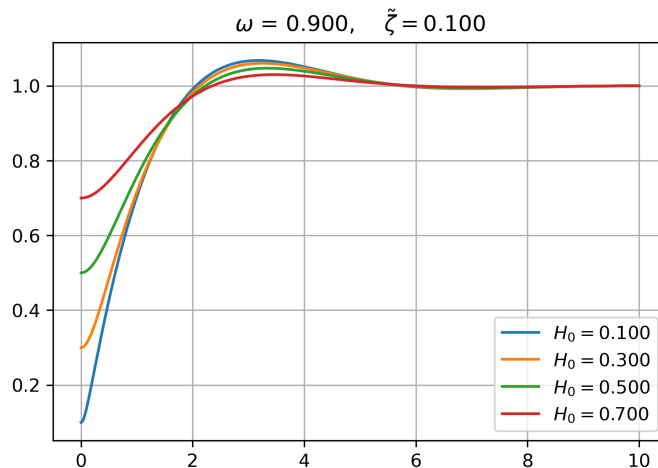


Abbildung 4.2.: Abhängigkeit zwischen der Lösung von (4.8) und der Anfangshöhe  $H_0$ .

Wie bereits zuvor steigt auch hier die maximal Anstiegshöhe mit sinkender Anfangshöhe. Der prinzipielle Verlauf des Anstiegs ändert sich unter einer Variation der Anfangshöhe nicht.

Zum Schluss soll noch der Regimewechsel von monotonem zu oszillatorischem Anstieg untersucht werden.

Dazu wird die DGL (4.8) für festes  $\tilde{\zeta}$  in Abhängigkeit von  $\omega$  solange gelöst bis der Regimewechsel stattfindet. Ein Lösungskurve wird dabei als oszillierend bezeichnet, falls sie die Gleichgewichtshöhe mindestens einmal überschreitet. Aufgrund der endlichen Maschinengenauigkeit eines Computers muss hierbei noch eine Fehlertoleranz von  $10^{-16}$  berücksichtigt werden, welche die Maschinengenauigkeit in der Programmiersprache Python darstellt. Mittels dieser Methode wird im Anschluss die Abhängigkeit  $\omega(\tilde{\zeta})$  generiert, siehe Abbildung 4.3. Die genaue Implementation der oben beschriebenen Methode findet sich im Anhang, siehe Algorithmus 1. Die Abhängigkeit  $\omega(\tilde{\zeta})$  folgt einem monoton steigenden Verlauf, welcher einen geringen Offset für  $\tilde{\zeta} = 0$  aufzeigt. Dieser Offset ist gerade durch  $\omega(0) = 0.25$  gegeben. Das ist nicht verwunderlich, da sich das Modell für  $\tilde{\zeta} = 0$  zu dem Modell 3.6 vereinfacht und die kritische Bedingung für die Oszillation in dem Fall durch  $\omega = 0.25$  gegeben ist. Für Werte von  $\omega$  oberhalb der Kurve in Abbildung 4.3 oszilliert das System um die Gleichgewichtshöhe, während das System für Werte von  $\omega$  unterhalb der Kurve monoton steigt.

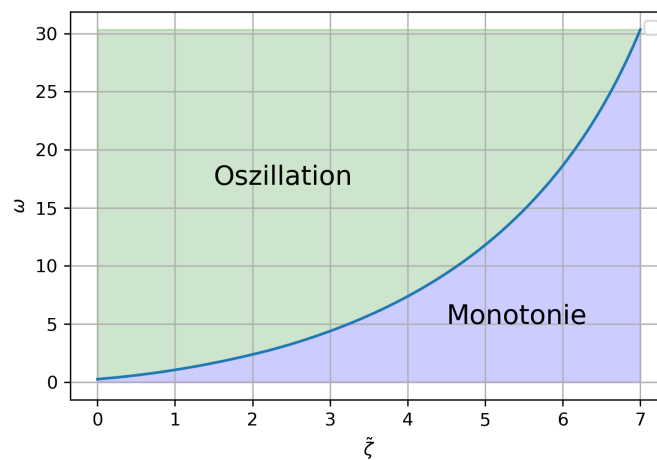


Abbildung 4.3.: Numerische Bestimmung des Regimewechsels der DGL (4.8). Die Anfangshöhe  $H_0$  bleibt während der gesamten Routine fest.

Nach Satz 4.1.6 müsste die Abhängigkeit  $\omega(\tilde{\zeta})$  durch  $\omega(\tilde{\zeta}) = \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  für Anfangshöhen nahe 1 gegeben sein. In der Tat nähert sich die numerisch gefundene Abhängigkeit  $\omega(\tilde{\zeta})$  für  $H_0 \rightarrow 1$  gegen die analytisch gefundene Abhängigkeit  $\omega(\tilde{\zeta}) = \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  an, siehe Abbildung 4.4. Aus der Abbildung 4.4 ist ebenfalls zu sehen, dass der Einfluss der Anfangshöhe auf die Abweichung des tatsächlichen Regimewechsels zu dem analytisch vorhergesagten Regimewechsel für kleine  $\tilde{\zeta}$  vernachlässigbar ist.

#### 4.1.4. Physikalische Interpretation

Wie bereits im Abschnitt 3.1.4 erwähnt, beschreibt die Funktion (4.23) die Energie des Systems beschrieben durch die DGL (4.10) und (4.22) die zeitliche Änderung der Energie. Im Gegensatz zu dem Modell im vorherigen Abschnitt ist der Term  $\tilde{\zeta}$  hier im Allgemeinen größer Null. Dies führt zu einem weiteren Reibungsmechanismus, wodurch das System zusätzlich an Energie verliert. Bezug nehmend auf das Analogon der gedämpften Feder aus dem Abschnitt 3.1.4 bedeutet dies, dass eine zusätzliche Reibungsquelle auftritt, welche von der aktuellen Position der Feder abhängt und linear von dem Reibungsterm  $\tilde{\zeta}$  abhängt. Die Interpretation der übrigen Terme ist exakt dieselbe wie zuvor. So beschreibt der erste Term in (4.23) die kinetische Energie, während die anderen beiden Terme die Oberflächenenergie und die potentielle Energie beschreiben. Der ursprüngliche Reibungsterm beschreibt wie zuvor den Verlust aufgrund der inneren Reibung des Systems.

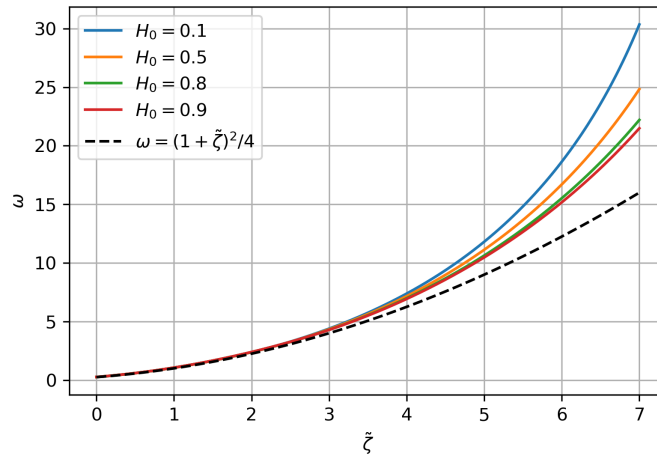


Abbildung 4.4.: Abhängigkeit des Regimewechsels von der Anfangshöhe  $H_0$

Der Zusammenhang zwischen der Dynamik des Systems zu der Anfangshöhe und die Abhängigkeit der Anstiegszeit von  $\omega$ , als auch von der Anfangshöhe ist dieselbe wie zuvor und wird somit nicht nochmal wiederholt.

Zusammengefasst lässt sich der kapillare Anstieg, welcher durch die DGL (4.3) beschrieben wird, wie bereits zuvor als gedämpftes Federsystem interpretieren, wobei ein zusätzlicher geschwindigkeitsabhängiger Reibungsterm auftritt und zu einer zusätzlichen Dämpfung des Systems führt

Wie bereits zuvor soll noch die Auswirkung der physikalischen Größen  $\rho$ ,  $\sigma$ , etc. auf das System diskutiert werden. Dadurch, dass das System beschrieben durch die DGL (4.8) bereits numerisch analysiert wurde, lassen sich die Auswirkungen unmittelbar aus den Termen der Gleichung (4.9) ablesen. Eine Erhöhung der Größen  $\rho$  und  $R$  führt wie bereits zuvor dazu, dass  $\omega$  wächst und das System somit an maximaler Anstiegshöhe gewinnt, da die Verluste aufgrund der Reibung abnehmen. Gleichzeitig steigt der Parameter  $\tilde{\zeta}$ , womit der Reibungsverlust aufgrund des dynamischen Kontaktwinkels zunimmt. Da  $\tilde{\zeta}$  linear von  $\zeta$  abhängt und  $\omega$  nicht von  $\zeta$  abhängt, führt eine Erhöhung dieser Größe ausschließlich zu einer Erhöhung der Reibungsverluste durch den dynamischen Kontaktwinkel, womit das System vermehrt an Energie verliert.

## 4.2. Experimenteller Vergleich

Um die hier gewonnen Ergebnisse auch experimentell vergleichen zu können, soll zunächst bestimmt werden in welchem Größenbereich die Parameter  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  für ein gewöhnliches Experiment liegen. Dafür wird angenommen, dass der Radius der Kapillare im Bereich von  $10^{-6}$  m bis  $10^{-3}$  m liegt und es sich bei der zu untersuchenden Flüssigkeit um Wasser oder einen *gewöhnlichen* Kohlenwasserstoff handelt. Hierbei meint "gewöhnlich", dass die Flüssigkeit keine stark abweichenden Eigenschaften im Vergleich zu den meisten Kohlenwasserstoffen in Bezug auf die hier relevanten Größen aufweist. Ist dies der Fall, so bewegen sich die Parameter in folgender Größenordnung

$$\omega : 10^{-20} \sim 10^3 \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta} : 10^{-9} \sim 10^3. \quad (4.46)$$



Die starke Variation der Größenordnung von  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  tritt aufgrund der starken Abhängigkeit der Parameter vom Radius auf. Zusammen mit dem relativ großen Variationsbereich, der hier für den Radius angenommen wird, folgt ein großer Variationsbereich für  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$ . So führt die Annahme, dass der Radius in der Größenordnung von  $10^{-3}$  m liegt zu den Größenordnungen

$$\omega : 10^{-4} \sim 10^3 \quad \text{und} \quad \tilde{\zeta} : 10^{-2} \sim 10^3 \quad (4.47)$$

je nach Experiment. Die genauen Annahmen für die einzelnen Größenordnungen sind in der nachfolgenden Tabelle zu sehen.

Tabelle 4.1.: Größenordnungen der Parameter zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs für Wasser oder gewöhnliche Kohlenwasserstoffe.

Parameter	$\cos \theta_{eq}$	$g$ in $\text{m s}^{-2}$	$R$ in $\text{m}$	$\rho$ in $\text{kg m}^{-3}$	$\sigma$ in $\text{N m}^{-1}$	$\eta$ in $\text{Pa s}$	$\zeta$ in $\text{Pa s}$
Ordnung	$10^0$	$10^1$	$10^{-6} \sim 10^{-3}$	$10^2 \sim 10^3$	$10^{-2} \sim 10^{-1}$	$10^{-3} \sim 10^{-2}$	$10^{-2} \sim 10^1$

Die Größenordnung für  $\zeta$  ist dabei aus [2] entnommen, wo es heißt, dass die Größenordnung von  $\zeta$  eins bis drei Größenordnungen höher ist als die von  $\eta$ .

Wie bereits im vorherigen Abschnitt, soll das in diesem Kapitel vorgestellte Modell mit experimentellen Daten verglichen werden. Hierzu werden die gleichen Experimente aus [3] und [8] untersucht und mit dem Modell (4.3) verglichen.

Die Auswertung der Daten für die beiden Experimente erfolgt hierbei genauso wie im vorherigen Kapitel. Die Eigenschaften der beiden Flüssigkeiten sind nochmals in der nachfolgenden Tabelle zu sehen. Die Tabelle wurde diesmal allerdings um die Spalte  $\tilde{\zeta}/\zeta$  erweitert. Beachte, dass nach (4.9) alle Größen im Ausdruck  $\tilde{\zeta}/\zeta$  a priori bekannt sind.

Tabelle 4.2.: Eigenschaften der Flüssigkeiten Ethanol und Ether aus [3].

	$\cos \theta_{eq}$	$R$ in $\mu\text{m}$	$\rho$ in $\text{kg m}^{-3}$	$\sigma$ in $\text{mN m}^{-1}$	$\eta$ in $\text{mPa s}$	$\omega$	$\tilde{\zeta}/\zeta$
Ethanol	1	689	780	21.6	1.17	1.88	18.0
Ether	1	669	710	16.6	0.3	28.0	83.0

Die Werte der beiden Größen  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}/\zeta$  liegen in dem vorher abgeschätzten Größenbereich. Da der Wert für  $\zeta$  a priori nicht bekannt ist, lässt sich Theorem 6.1.2 nicht nutzen, um eine Vorhersage über das Verhalten des Systems zu machen. Stützt man sich lediglich auf das Verhältnis von  $\omega$  zu  $\tilde{\zeta}/\zeta$  so sollte eher für das Ether-Experiment Oszillationen zu erwarten sein. Dies zeigt sich auch im Experiment. Die experimentellen Daten (schwarze Punkte) sind in der nachfolgenden Abbildung 4.5 zu sehen.

Während das Ethanol monoton steigend gegen die Gleichgewichtshöhe strebt, oszilliert das Ether gegen die Gleichgewichtshöhe. Abbildung 4.5 zeigt ebenfalls das Modell (4.8), welches bzgl.  $\zeta$  an die Datenpunkte angepasst wurde. Hierzu wurde das Modell auf die dimensionsbehafteten Größen zurücktransformiert. Mittels einer *Least-Squares-Kurvenanpassung* wurde der optimale Wert für  $\tilde{\zeta}$  gefunden, so dass die Kurve den Verlauf der Datenpunkte am Besten beschreibt. Die Werte für  $\zeta$  sind in der Abbildung gegeben.

Aus der Abbildung 4.5 ist zu sehen, dass die Lösungen der DGL die Verläufe gut wiedergeben. Dabei fällt allerdings auf, dass der monotone Anstieg besser beschrieben wird als der Oszillatorische. Während die

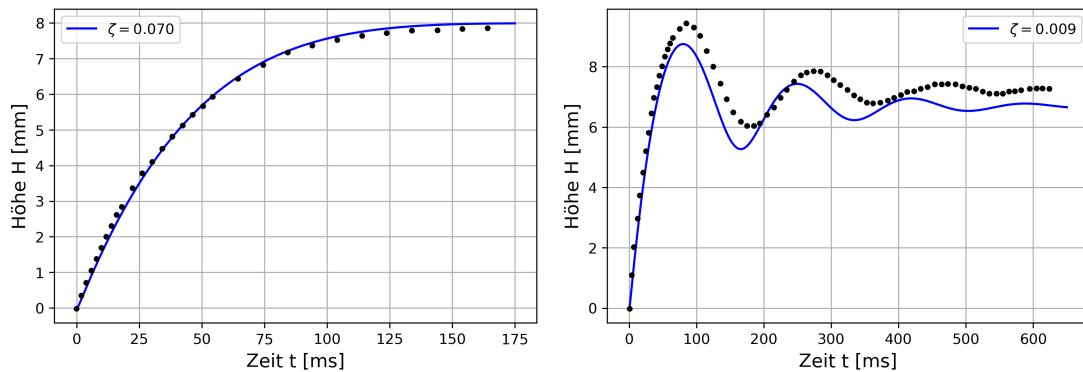


Abbildung 4.5.: Vergleich des Modells (4.3) mit den experimentellen Daten aus [3]. Die schwarzen Punkte repräsentieren die experimentellen Daten, während die blaue Kurve Modell (4.3) widerspiegelt.

Datenpunkte des monotonen Verlaufs nahezu vollständig auf der Lösungskurve liegen, weist die oszillatorische Näherungskurve zum Einen einen Offset auf und zum Anderen eine verkürzte Periode. Die verkürzte Periode ist vermutlich eine Konsequenz des Offsets zwischen Lösungskurve und Datenpunkten. Eine mögliche Erklärung für diesen Offset wird am Ende dieses Abschnitts geliefert. Im Vergleich zum vorherigen Modell wird die Dynamik des Systems hierbei nicht überschätzt.

Nun soll das Experiment aus [8] untersucht werden. Dabei wird lediglich die Kurve des n-Pentan betrachtet, wie es im vorherigen Kapitel der Fall war. Wie zuvor wird der optimale Wert für  $\tilde{\zeta}$  mittels einer *Least-Squares-Kurvenanpassung* bestimmt und visualisiert. Die Eigenschaften dieser Flüssigkeit ist in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Tabelle 4.3.: Eigenschaften der Flüssigkeit n-Pentan aus [8]

	$\cos \theta_{eq}$	R in $\mu\text{m}$	$\rho$ in $\text{kg m}^{-3}$	$\sigma$ in $\text{mN m}^{-1}$	$\eta$ in $\text{mPa s}$	$\omega$	$\tilde{\zeta}/\zeta$
n-Heptan	0.70	550	601	16.5	0.22	14.81	88.41

Da sich das Verhältnis der Größen  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}/\zeta$  zwischen den Verhältnissen der Flüssigkeiten aus dem vorherigen Experiment befindet, lässt sich hier keine Vorhersage über das Verhalten des Systems machen. Da das Verhältnis allerdings eher auf Seiten des Ethanol liegt, könnte man vermuten, dass keine Oszillation auftritt. Die Resultate des Experiments sind in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.

Entgegen der Vermutung, dass das System ein monotonen Verhalten aufzeigt, oszilliert es. Mittels der selben *Least-Squares-Kurvenanpassung* wie zuvor erhält man für den Reibungskoeffizienten  $\zeta = 0.033$ . Vergleicht man dies nun mit der Reibung aus dem Ethanol-Experiment  $\zeta = 0.07$  so lässt sich das auftreten der Oszillation mittels des geringeren Reibungsverlustes aufgrund des dynamischen Kontaktwinkels erklären. Nichts desto trotz fällt auch hier ein gewisser Offset zwischen den experimentellen Daten und der Lösungskurve auf. Dies lässt sich mittels der Unsicherheit in der Bestimmung des Gleichgewichtskontaktwinkels erklären. Da die Gleichgewichtshöhe von dem Gleichgewichtskontaktwinkel abhängt, können Messunsicherheiten zu einer Diskrepanz zwischen tatsächlichem Verlauf und dem theoretischen Verlauf führen. So führt ein Gleichgewichtskontaktwinkel von  $41.48^\circ$  zu einem Verschwinden des Offsets, siehe Abbildung 4.7.

Mittels dem modifizierten Kontaktwinkel verbessert sich die Beschreibung enorm. Nun liegen die Datenpunkte nahezu vollständig auf der Lösungskurve. Um allerdings ein prädiktives Modell zu erhalten, müssen weitere Effekte bzgl. des kapillaren Anstiegs untersucht werden. Wie bereits erwähnt kann die Dissipation aufgrund der

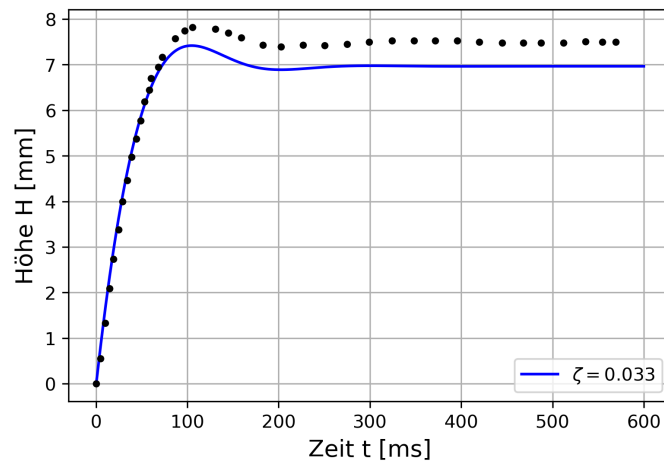


Abbildung 4.6.: Vergleich des Modells (4.3) mit den experimentellen Daten aus [8].

Strömung in Nähe der Kontaktlinie den Anstieg stark beeinflussen. Diesen Einfluss behandelt das nachfolgende Modell.

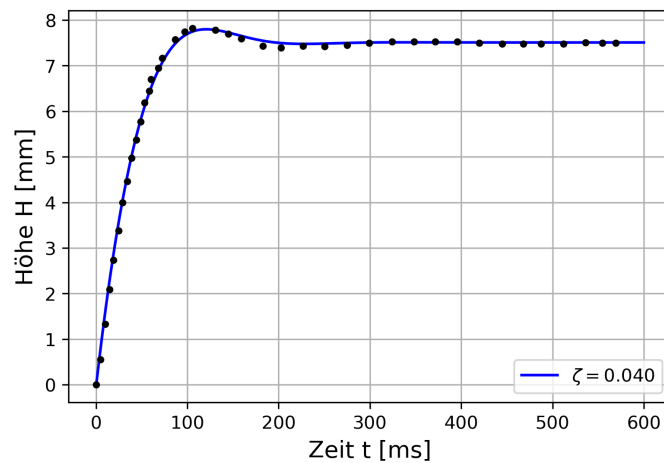


Abbildung 4.7.: Vergleich des Modells (4.3) mit den experimentellen Daten aus [8] mit einem veränderten Gleichgewichtskontaktwinkel.



---

## 5. Kapillarer Anstieg - Slip-Modell

---

Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Modellen beruht das in diesem Kapitel vorgestellte Näherungsmodell nicht auf einer approximativen Kräftebilanz der an der Wassersäule angreifenden Kräfte, sondern auf einer detaillierteren Betrachtung der Masse- und Impulsbilanz des Systems. Mittels diesem Ansatz wird die Dissipation aufgrund der Strömung in Kontaktliniennähe berücksichtigt. Da das Modell hier nicht hergeleitet werden soll, wird auf das Paper [9] von Dirk Gründing oder auf [13] für eine genaue Herleitung, als auch für die Annahmen an dieses Modell verwiesen.

---

### 5.1. Analyse

---

Wie bereits in den beiden vorangegangenen Kapiteln wird das Modell zunächst eingeführt und dann analytisch, numerisch, als auch physikalisch untersucht. Da das System im Folgenden nur für einen 2D ähnlichen Aufbau hergeleitet wird, muss auf einen experimentellen Vergleich verzichtet werden.

#### 5.1.1. Modell und Entdimensionalisierung

Als Ausgangspunkt für dieses Modell dient hierbei der Querschnitt, welcher in Abbildung 2.4 zu sehen ist. Im Gegensatz zu den vorherigen Modellen wird hier allerdings keine zylindrische Kapillare betrachtet. Vielmehr wird der Querschnitt mit einer gewissen Tiefe  $D$  in die Papierebene translatiert.

Wie bereits zuvor soll auch hier der Meniskus berücksichtigt werden. Beschreibt man die Meniskushöhe aus einem Koordinatensystem, welches in der Apexhöhe verankert ist und dessen  $z$ -Achse antiparallel zu  $\vec{g}$  liegt, so lautet die Höhenfunktion des Meniskus

$$\Delta h(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für} \quad -R/2 \leq x \leq R/2, -D/2 \leq y \leq D/2. \quad (5.1)$$

Hierbei wird angenommen, dass die  $x$  Achse in Abbildung 2.4 nach rechts zeigt, während der sich der Ursprung in der Mitte der Kapillare befindet. Mit der Höhenfunktion (5.1) ist das zusätzliche Volumen durch den Meniskus durch

$$\hat{V} = \frac{RD}{2 \cos \theta} \left( 2 - \sin \theta - \frac{\arcsin \cos \theta}{\cos \theta} \right) \quad (5.2)$$

gegeben, siehe [9]. Was zu einer mittleren Höhe von

$$\hat{h} = \frac{R}{2 \cos \theta} \left( 2 - \sin \theta - \frac{\arcsin \cos \theta}{\cos \theta} \right) \quad (5.3)$$

führt. Die Gleichgewichtshöhe unter Berücksichtigung der Meniskusmasse ist durch

$$h_\infty = h_e - \hat{h} \quad (5.4)$$

geben. Hierbei beschreibt  $h_e$  die Näherung der Gleichgewichtshöhe nach Jurin in 2D und lautet explizit

$$h_e = \frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{\rho g R}. \quad (5.5)$$

Der Grund weshalb hier ein anderer Aufbau betrachtet wird liegt darin, dass zur Herleitung der zugehörigen DGL eine asymptotische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung benötigt wird, welche nur in 2D bekannt ist.

Zwei essentielle Annahmen, welche die Herleitung an das Modell stellt sind, dass zum Einen der Kontaktwinkel über den gesamten Anstieg konstant bleibt und zum Anderen, dass die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmoleküle an der Kapillarwand nicht verschwindet. Genauer soll die tangentielle Geschwindigkeit an der Kapillarwand folgende Beziehung erfüllen

$$L \partial_n \mathbf{Pv} = \mathbf{Pv}. \quad (5.6)$$

Hierbei beschreibt  $\mathbf{P}$  die Projektion der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  auf die Kapillarwandebene und ist durch das dyadische Produkt  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  gegeben, wobei  $\mathbf{n}$  die äußere Normale der Kapillarwand meint. Die hier eingeführte Größe  $L$  wird *Sliplänge* genannt und hat die Dimension einer Länge. Die Bedingung (5.6) beschreibt eine lineare Extrapolation der Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Kapillare. Da die restlichen Annahmen für die nachfolgende Interpretation und Analyse nicht relevant sind, wird für diese auf [9] verwiesen.

Das unter den vorangegangenen Randbedingungen und unter Betrachtung der Masse- und Impulsbilanz hergeleitete Modell lautet

$$\frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \rho g (h + \hat{h}) + \rho \frac{d}{dt} (\dot{h} (h + \hat{h})) + \frac{3\eta}{R(R + 3L)} \dot{h} h + \frac{\eta \bar{h}}{RL} \dot{h} - \rho \dot{h}^2 \frac{3(15L^2 + 10LR + 2R^2)}{5(R + 3L)^2}. \quad (5.7)$$

Hierbei beschreiben die Terme von links nach rechts die Kapillarkraft, die Gewichtskraft, die Trägheit, die innere Reibung in der Kanalströmung unterhalb der Kontaktlinie, die Reibung aufgrund der lokalen Strömung in der Kontaktlinienregion und einen Konvektionsterm. Es ist zu sehen, dass der Term, welcher die innere Reibung beschreibt, nun eine  $L$ -Abhängigkeit besitzt. Dies ist eine Folge der nicht verschwindenden tangentialen Geschwindigkeit an der Kapillarwand. Der Term aufgrund der Strömung in der Kontaktlinienregion rührt daher, dass die Annahme eines parabolischen Strömungsfeldes innerhalb der Flüssigkeit nicht korrekt ist. Während sich das Strömungsfeld weg von der Flüssigkeit-Luft-Grenzfläche gut durch ein parabolisches Strömungsprofil beschreiben lässt, ist dies nicht mehr zutreffend für die Strömung unmittelbar unterhalb der Flüssigkeit-Luft-Grenzfläche. Dieses Strömungsprofil lässt sich allerdings mittels der Navier-Stokes-Gleichung

beschreiben. Mit der resultierenden Strömung ist nun eine gewisse Reibung verbunden, welche durch den obigen Term beschrieben wird.

Um die Analyse des obigen Modells zu vereinfachen, soll der letzte Term in (5.7) vernachlässigt werden, wodurch nicht näher auf diesen eingegangen werden soll. Dies führt auf die DGL

$$\frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \rho g(h + \hat{h}) + \rho \frac{d}{dt}(\dot{h}(h + \hat{h})) + \frac{3\eta}{R(R + 3L)} \dot{h}h + \frac{\eta \bar{h}}{RL} \dot{h}. \quad (5.8)$$

Die Konstante  $\bar{h}$  in (5.8) beschreibt hierbei eine Integrationslänge, welche in [9] durch  $\bar{h} \approx 0.14\Delta h(R)$  gegeben ist. Hierbei meint  $\Delta h(R)$  die Höhenfunktion (5.1) ausgewertet an der Stelle  $R$ .

Auf dem Weg zur normalisierten und entdimensionalisierten Form der DGL (5.8) sollen nun die selben Schritte wie bereits zuvor vollzogen werden. Da sich die Vorfaktoren in (5.8) nun von den Vorfaktoren in (4.3) unterscheiden müssen auch die Konstanten für die Entdimensionalisierung und die Normalisierung anders gewählt werden. Zusammen mit den Transformationen

$$H = (h + \hat{h})/h_e, \quad T = t/\tau \quad (5.9)$$

vereinfacht sich die DGL zu

$$1 - \tilde{\zeta} \dot{H} = H \dot{H} + H + \omega \frac{d}{dT}(H \dot{H}) \quad (5.10)$$

wobei die Parameter  $\tilde{\zeta}$  und  $\omega$  durch

$$\tilde{\zeta} = \frac{\bar{h} \rho g R}{\sigma \cos \theta_{eq}} \left( \frac{R}{3L} - \frac{\hat{h}}{\bar{h}} + 1 \right) \quad \text{und} \quad \omega = \frac{(R(R + 3L))^2 \rho^3 g^2 R}{9\eta^2 \sigma \cos \theta_{eq}}. \quad (5.11)$$

gegeben sind.

Die explizite Form von  $\tau$  lautet

$$\tau = \frac{3\eta \sigma \cos \theta_{eq}}{R(R + 3L)\rho^2 g^2 R}. \quad (5.12)$$

Während sich die Konstanten  $\tau$ ,  $h_e$  und der Parameter  $\omega$  für den Fall  $L=0$  nur um einen Vorfaktor von denen aus Gleichung (2.19), (4.7) und (4.9) unterscheiden, weist der Parameter  $\tilde{\zeta}$  aus (5.11) eine unterschiedliche Struktur zu dem aus Gleichung (4.9) auf. So hängt das hier eingeführte  $\tilde{\zeta}$  nun invers von der Sliplänge  $L$  ab anstatt linear von dem Reibungsparameter  $\zeta$  und weist zwei zusätzliche Abhängigkeiten von der gemittelten Höhe  $\hat{h}$  und der Integrationslänge  $\bar{h}$  auf. Vor allem tritt für den Grenzübergang  $L \rightarrow 0$  eine Singularität für  $\tilde{\zeta}$  auf. Im Gegensatz zu dem vorherigen Modell kann die Reibung, welche mit der Sliplänge  $L$  verbunden ist im Allgemeinen nicht verschwinden. Die physikalische Interpretation des Parameters  $L$  erfolgt im Abschnitt 5.1.4.

## 5.1.2. Analytische Resultate

Dadurch, dass die DGL (5.10) exakt die selbe Struktur wie die DGL (4.8) besitzt, lassen sich die analytischen Resultate eins zu eins aus Kapitel 4 übernehmen. Für die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung von (5.8) bedeutet dies

**Theorem 5.1.1.** Die DGL (5.8) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.20) besitzt eine eindeutige Lösung  $h = h(t)$  auf  $\mathbb{R}_+$  für die

$$h_0 \leq h(t) \leq \sqrt{3}h_e - \hat{h} \quad (5.13)$$

gilt. Außerdem existiert eine Umgebung  $U_0$  von 0 in  $\mathbb{R}_+$ , so dass die Lösung  $h(t)$  für  $t \in U_0$  durch

$$\begin{aligned} & \left( (h_0 + \hat{h})^2 + 2h_e^2 \int_0^{t/\tau\sqrt{\omega}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} - \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) s^2 + \mathcal{O}(s^3)} \right) \times \right. \\ & \left. G\left(\frac{t}{\tau\sqrt{\omega}} - s\right) ds \right)^{1/2} - \hat{h} \leq h(t) \leq \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) \frac{h_e^2}{\tau^2\omega} t^2 + \mathcal{O}(t^3)} - \hat{h} \end{aligned} \quad (5.14)$$

beschränkt ist.

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

Des Weiteren folgt für den Regimewechsel:

**Theorem 5.1.2.** Sei  $h(t)$  eine Lösung der DGL (5.8). Dann ist der kritische Punkt gegeben durch  $(h_\infty, 0)$ . Des Weiteren tritt für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  eine Änderung des Verhaltens des Systems auf. Während das System für  $\omega < \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  monoton gegen die Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  strebt, konvergiert es für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  oszillierend um die Gleichgewichtshöhe gegen eben diese. Des Weiteren besitzt der kritische Punkt  $(h_\infty, 0)$  eine Umgebung  $U$  in  $\mathbb{R}_+^*$ , so dass sich die Lösungen von (5.8) mit Anfangswerten innerhalb dieser Umgebung durch

$$h(t) \approx \begin{cases} h_\infty + \exp(-\beta t)(c_1 \exp(\mu_1 t) - c_2 \exp(-\mu_1 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 > \omega > 0 \\ h_\infty + \exp(-\beta t)(c_3 \sin(\mu_2 t) + c_4 \cos(\mu_2 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 < \omega \end{cases} \quad (5.15)$$

approximieren lassen. Die Konstanten sind durch  $\beta = \frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{\zeta}+1)^2 - 4\omega}}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_2 = \frac{\sqrt{4\omega - (\tilde{\zeta}+1)^2}}{2\omega\tau}$ ,  $c_1 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta + \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_2 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta - \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_3 = (h_0 - h_\infty) \frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\mu_2}$  und  $c_4 = h_0 - h_\infty$  gegeben.

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

Wie zuvor soll zum Schluss noch die Stabilität des Systems (5.8) untersucht werden.



**Theorem 5.1.3.** Der Gleichgewichtspunkt  $(h_\infty, 0)$  von (5.8) ist asymptotisch stabil. Des Weiteren gilt für jede Lösung der DGL (5.8) mit den Anfangsbedingungen (2.20)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty. \quad (5.16)$$

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

### 5.1.3. Numerische Resultate

Da die numerische Analyse auf der DGL (5.10) beruht und diese sich formal nicht von (4.8) unterscheidet, wird für die numerische Analyse auf Abschnitt 4.1.3 verwiesen. Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich eins zu eins auf das Modell beschrieben durch die DGL (5.10) übertragen.

Trotz der Tatsache, dass in diesem Kapitel keine experimentellen Vergleiche gezogen werden können, sollen noch dimensionsbehaftete Lösungskurven gezeigt werden und dabei die Auswirkung des Parameters  $L$  auf das System untersucht werden. Die Lösungskurven sind in der Abbildung 5.1 zu sehen. Für die physikalischen Größen wurden dabei die Eigenschaften von n-Pentan verwendet, siehe Tabelle 3.2.

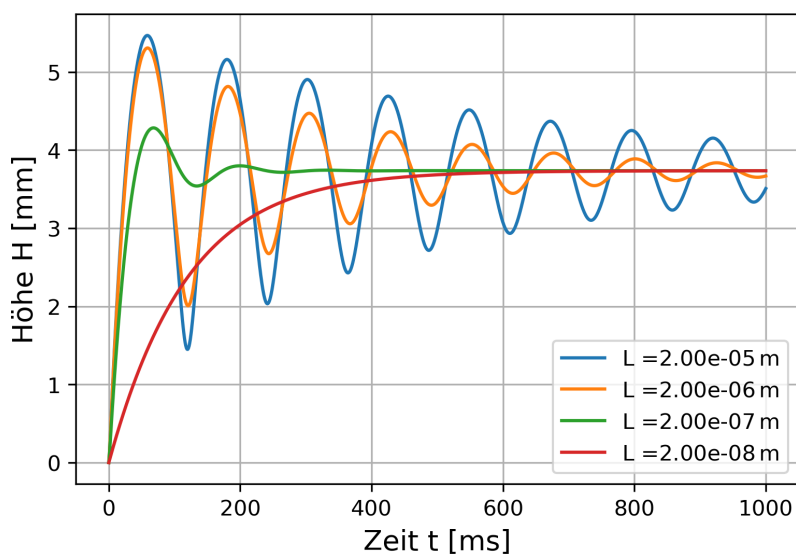


Abbildung 5.1.: Auswirkung des der Sliplänge  $L$  auf die Lösung des Systems (5.8).

In der Abbildung 5.1 ist zu sehen, dass die Dynamik des System mit wachsender Sliplänge  $L$  zunimmt. Sowohl die Anstiegsgeschwindigkeit, als auch die maximale Anstiegshöhe nimmt zu. Während das Systems bei einem Wert von  $L = 2e^{-5}$  m oszilliert, zeigt es für  $L = 2e^{-8}$  m lediglich einen monotonen Verlauf. Damit kann der Parameter  $L$  einen Regimewechsel des Systems hervorrufen. Beachtet man, dass das n-Pentan in dem ursprünglichen Experiment schwingt und nimmt an, dass dies in dem hier betrachteten Aufbau ebenfalls der Fall wäre so müsste  $L$  in einem Größenbereich zwischen Mikrometer und Nanometer liegen.

---

#### 5.1.4. Physikalische Interpretation

Die Bedeutung der Terme  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  ist analog zu Abschnitt 4.1.4. Dies bedeutet, dass man sich das Modell wie ein gedämpftes Schwingsystem vorstellen kann, welches über zwei Mechanismen Energie verliert. Der erste Mechanismus ist aufgrund der inneren Reibung im Strömungskanal unterhalb der Kontaktlinie. Und der zweite Mechanismus beruht auf der inneren Reibung aufgrund der Strömung in Kontaktlinien Nähe. Wie zuvor wirkt  $\omega$  als Feder, welches das System antreibt.

Es wurde bereits erwähnt, dass der Verlust aufgrund der inneren Reibung nun eine  $L$ -Abhängigkeit aufweist. Diese Abhängigkeit rührt daher, dass ein parabolisches Strömungsprofil im Inneren der Kapillare angenommen wurde, dessen Tangentialkomponente an der Kapillarwand nicht verschwindet. Somit reiben die Flüssigkeitsmoleküle an der Kapillarwand was mit einer Reibung verbunden ist, wie man es auch erwarten würde. Dies hat die  $L$ -Abhängigkeit zur Folge.

Der zweite Mechanismus ist nun keine Konsequenz eines dynamischen Kontaktwinkels mehr, sondern vielmehr eine Konsequenz einer lokalen Strömung in der Nähe der Kontaktlinie. Dies führt zu einer nicht vernachlässigbaren Dissipation aufgrund der Reibung zwischen Kapillarwand und Fluid, als auch der Reibung durch die lokale Strömung in der Kontaktlinien Nähe. Die Variable  $L$  ist für beide Dissipationsmechanismen ein Maß für den Reibungsverlust.

Damit beruhen beide Dissipationsmechanismen auf einer Reibung der Flüssigkeit mit der Kapillarwand, wobei sich die Beschreibung des Strömungsprofils je nach Abschnitt unterscheidet.

Nun soll noch die Auswirkung der neuen physikalischen Größe  $L$  auf das System untersucht werden. Die Auswirkungen der übrigen Größen bleibt unverändert.

Nach der Gleichung (5.11) führt eine Erhöhung der Größe  $L$  zu einer Erhöhung von  $\omega$ , womit die maximale Anstiegshöhe und die Anstiegsgeschwindigkeit zunehmen.

Da  $\tilde{\zeta}$  invers von  $L$  abhängt, führt eine Erniedrigung dieser Größe zu einer Erhöhung von  $\tilde{\zeta}$ , womit der Reibungsverlust aufgrund der Strömung in Nähe der Kontaktlinie zunimmt. Eine Konsequenz davon ist, dass sowohl die Anstiegsgeschwindigkeit als auch die maximale Anstiegshöhe abnehmen.

---

## 6. Kapillarer Anstieg - Kombinationsmodell

---

In den beiden vorherigen Kapiteln wurden zwei Dissipationsmechanismen diskutiert, welche zu einem Energieverlust während dem kapillaren Anstieg führen. Während das Modell in Kapitel 4 den Reibungsverlust aufgrund des dynamischen Kontaktwinkels berücksichtigt, berücksichtigt das Modell in Kapitel 5 den Reibungsverlust aufgrund der Strömung in der Nähe der Kontaktlinie. Da beide Mechanismen einen nennenswerten Einfluss auf den Anstieg haben, sollte ein akkurates Modell zur Beschreibung des kapillaren Anstiegs auch beide Effekte berücksichtigen. Die Aufgabe dieses Kapitels ist es nun solch ein Modell einzuführen und zu untersuchen.

---

### 6.1. Analyse

---

Wie bereits zuvor soll das Modell eingeführt und im Anschluss aus einer analytischen, numerischen und physikalischen Sichtweise untersucht werden. Da dieses Modell eine Erweiterung des Modells (5.8) ist, beschreibt auch dieses Modell lediglich den 2D ähnlichen Aufbau, der in Kapitel 5 beschrieben wurde.

#### 6.1.1. Modell und Entdimensionalisierung

Um ein Modell herzuleiten, welches beide physikalischen Effekte berücksichtigt wird der wohl naheliegendste Ansatz verwendet und die DGL (5.8) um einen dynamischen Kontaktwinkel der Form (4.1) erweitert. Dies führt auf folgende DGL

$$\frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \rho g(h + \hat{h}) + \rho \frac{d}{dt}(\dot{h}(h + \hat{h})) + \frac{3\eta}{R^2} \dot{h}h + \frac{1}{R} \left( \frac{\eta \bar{h}}{L} - \zeta \right) \dot{h}. \quad (6.1)$$

Definiert man den Reibungskoeffizienten

$$\beta := \frac{\eta}{L} \quad (6.2)$$

so lautet das Modell

$$\frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \rho g(h + \hat{h}) + \rho \frac{d}{dt}(\dot{h}(h + \hat{h})) + \frac{3\eta}{R^2} \dot{h}h + \frac{1}{R} (\beta \bar{h} - \zeta) \dot{h}. \quad (6.3)$$

Während der Koeffizient  $\zeta$  die Reibung bzgl. der Kontaktliniengeschwindigkeit beschreibt, beschreibt der Parameter  $\beta$  die Reibung bzgl. der Strömung in der Kontaktlinienregion, d.h. eine Reibung pro Fläche. Dies wirkt sich auf die Dimension der beiden Koeffizienten aus

$$[\zeta] = \text{Pa} \cdot \text{s}, \quad [\beta] = \frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{m}}. \quad (6.4)$$

Eine molekular dynamische Betrachtung des Anstiegs in [11] unter Berücksichtigung beider Effekte liefert folgenden Zusammenhang zwischen den Reibungskoeffizienten  $\zeta$  und  $\beta$

$$L = \frac{\delta \eta}{\zeta} \quad (6.5)$$

bzw.

$$\beta = \frac{\zeta}{\delta}. \quad (6.6)$$

Hierbei beschreibt  $\delta$  die Breite der Kontaktlinienregion. Eingesetzt in (6.1) liefert dies

$$\frac{\sigma \cos \theta_{eq}}{R} = \rho g(h + \hat{h}) + \rho \frac{d}{dt}(\dot{h}(h + \hat{h})) + \frac{3\eta}{R^2} \dot{h}h + \frac{1}{R} \left(1 + \frac{\bar{h}}{\delta}\right) \zeta \dot{h}. \quad (6.7)$$

Die DGL (6.7) besitzt die selbe Struktur, wie die DGL (4.3) mit dem wichtigen Unterschied, dass  $\zeta$  nun den Vorfaktor  $1 + \bar{h}/\delta$  aufweist. Je nach Werten von  $\bar{h}$  und  $\delta$  kann dieser Vorfaktor den Anstieg stark beeinflussen.

Mit den Transformationen (5.9) transformiert sich die DGL (6.7) zu

$$1 - \tilde{\zeta} \dot{H} = H \dot{H} + H + \omega \frac{d}{dT}(H \dot{H}) \quad (6.8)$$

wobei die Parameter  $\tilde{\zeta}$  und  $\omega$  durch

$$\tilde{\zeta} = \frac{\delta \rho g R}{\sigma \cos \theta_{eq}} \left( \frac{(1 + \bar{h}/\delta) R \zeta}{3\eta \delta} + 1 + \frac{\bar{h}}{\delta} - \frac{\hat{h}}{\delta} \right) \quad \text{und} \quad \omega = \frac{R^3 \rho^3 g^2}{9\eta^2 \sigma \cos \theta_{eq}}. \quad (6.9)$$

gegeben sind. Während  $\omega$  im Vergleich zu Kapitel 5 unverändert bleibt, weist  $\tilde{\zeta}$  eine leicht unterschiedliche Struktur auf. So ersetzt  $\delta$  formal die Rolle von  $\bar{h}$ , wobei  $\bar{h}$  nun in einem zusätzlichen Term auftritt. Des Weiteren besitzt der von der Sliplänge  $L$  abhängige Term nun einen Vorfaktor  $(1 + \bar{h}/\delta)$ . Dieser Vorfaktor kann sich je nach Verhältnis von  $\bar{h}$  zu  $\delta$  stark auf das System auswirken und ist somit im Allgemeinen nicht vernachlässigbar. Im Gegensatz zu dem Modell aus Kapitel 4 verschwindet der zusätzliche Reibungsverlust im Allgemeinen für  $\zeta = 0$  nicht. Dies ist auch zu erwarten, da bereits in Kapitel 5 erwähnt wurde, dass der Reibungsverlust aufgrund der Strömung in der Kontaktlinienregion im Allgemeinen nicht verschwindet.

## 6.1.2. Analytische Resultate

Da auch die DGL (6.8) exakt die selbe Form wie die DGL (4.8) besitzt, lassen sich auch hier die analytischen Resultate eins zu eins aus Kapitel 4 übernehmen. Wie bereits in Kapitel 5 bedeutet dies für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

**Theorem 6.1.1.** Die DGL (5.8) zusammen mit den Anfangsbedingungen (2.20) besitzt eine eindeutige Lösung  $h = h(t)$  auf  $\mathbb{R}_+$  für die

$$h_0 \leq h(t) \leq \sqrt{3}h_e - \hat{h} \quad (6.10)$$

gilt. Außerdem existiert eine Umgebung  $U_0$  von 0 in  $\mathbb{R}_+$ , so dass die Lösung  $h(t)$  für  $t \in U_0$  durch

$$\begin{aligned} & \left( (h_0 + \hat{h})^2 + 2h_e^2 \int_0^{t/\tau\sqrt{\omega}} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} - \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) s^2 + \mathcal{O}(s^3)} \right) \times \right. \\ & \left. G\left(\frac{t}{\tau\sqrt{\omega}} - s\right) ds \right)^{1/2} - \hat{h} \leq h(t) \leq \sqrt{(h_0 + \hat{h})^2 + \left( 1 + \frac{\sqrt{3}h_e\tilde{\zeta}}{(h_0 + \hat{h})\sqrt{\omega}} \right) \frac{h_e^2}{\tau^2\omega} t^2 + \mathcal{O}(t^3)} - \hat{h} \end{aligned} \quad (6.11)$$

beschränkt ist.

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

Des Weiteren folgt für den Regimewechsel:

**Theorem 6.1.2.** Sei  $h(t)$  eine Lösung der DGL (6.1). Dann ist der kritische Punkt gegeben durch  $(h_\infty, 0)$ . Des Weiteren tritt für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  eine Änderung des Verhaltens des Systems auf. Während das System für  $\omega < \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  monoton gegen die Gleichgewichtshöhe  $h_\infty$  strebt, konvergiert es für  $\omega > \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2$  oszillierend um die Gleichgewichtshöhe gegen eben diese. Des Weiteren besitzt der kritische Punkt  $(h_\infty, 0)$  eine Umgebung  $U$  in  $\mathbb{R}_+^*$ , so dass sich die Lösungen von (6.1) mit Anfangswerten innerhalb dieser Umgebung durch

$$h(t) \approx \begin{cases} h_\infty + \exp(-\beta t)(c_1 \exp(\mu_1 t) - c_2 \exp(-\mu_1 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 > \omega > 0 \\ h_\infty + \exp(-\beta t)(c_3 \sin(\mu_2 t) + c_4 \cos(\mu_2 t)) & \text{für } \left(\frac{1+\tilde{\zeta}}{2}\right)^2 < \omega \end{cases} \quad (6.12)$$

approximieren lassen. Die Konstanten sind durch  $\beta = \frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_1 = \frac{\sqrt{(\tilde{\zeta}+1)^2 - 4\omega}}{2\omega\tau}$ ,  $\mu_2 = \frac{\sqrt{4\omega - (\tilde{\zeta}+1)^2}}{2\omega\tau}$ ,  $c_1 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta + \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_2 = (h_0 - h_\infty) \frac{\beta - \mu_1}{2\mu_1}$ ,  $c_3 = (h_0 - h_\infty) \frac{\tilde{\zeta}+1}{2\omega\mu_2}$  und  $c_4 = h_0 - h_\infty$  gegeben.

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

Wie zuvor soll zum Schluss noch die Stabilität des Systems (5.8) untersucht werden.

**Theorem 6.1.3.** *Der Gleichgewichtspunkt  $(h_\infty, 0)$  von (6.1) ist asymptotisch stabil. Des Weiteren gilt für jede Lösung der DGL (6.1) mit der Anfangsbedingung (2.20)*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_\infty. \quad (6.13)$$

*Beweis.* Für den Beweis siehe Kapitel 4. □

### 6.1.3. Numerische Resultate

Wie bereits in den beiden vorherigen Kapiteln beruht die numerische Analyse auf der DGL (6.8). Da diese sich formal nicht von der DGL (4.1) unterscheidet, wird für die Untersuchung der Auswirkungen der Parameter  $\omega$  und  $\tilde{\zeta}$  auf Abschnitt 4.1.3 verwiesen.

Dadurch, dass  $\zeta$  in (6.7) nun den Vorfaktor  $1 + \bar{h}/\delta$  aufweist und dieser unter Umständen sehr groß werden kann, sollte ein  $\zeta$ , welches man aus einer Kurvenanpassung des Modells (6.7) an Datenpunkte erhält, geringer sein, als ein  $\zeta$ , welches man mit dem Modell aus Kapitel 4 erhält.

Da sich die Parameter  $\delta$  und  $\hat{h}$  ebenfalls ändern können, soll auf diese nochmal kurz eingegangen werden. Sowohl eine Erhöhung von  $\delta$  als auch eine Erhöhung von  $\bar{h}$  führt zu einer Erhöhung von  $\tilde{\zeta}$ , wodurch der Reibungsverlust zunimmt und das System an Dynamik verliert.

### 6.1.4. Physikalische Interpretation

Die physikalische Interpretation beruht wie bereits zuvor auf der DGL (6.8). Da diese exakt die selbe Form wie die DGL (5.10) hat, verändert sich die Interpretation im Wesentlichen nicht. Wie bereits erwähnt sind nun zwei Dissipationsmechanismen zu beachten. Genau genommen sind es drei Dissipationsmechanismen, wenn man die Dissipation aufgrund des parabolischen Strömungsprofils abseits von der Kontaktlinienregion berücksichtigt. Dieser Mechanismus soll allerdings für den Moment vernachlässigt werden. Die zu den beiden anderen Mechanismen zugehörigen Reibungskoeffizienten können beide in Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten  $\zeta$  ausgedrückt werden. Somit muss lediglich die Auswirkung von  $\zeta$  auf die beiden Parameter  $\tilde{\zeta}$  und  $\omega$  untersucht werden.

Da beide Reibungsparameter linear von  $\zeta$  abhängen, bedeutet eine Erhöhung von  $\zeta$  eine erhöhte Energiedissipation aufgrund von beiden Mechanismen. Dies sieht man auch an dem Parameter  $\tilde{\zeta}$ . Eine Erhöhung von  $\zeta$  führt zu einer Erhöhung von  $\tilde{\zeta}$ , während  $\omega$  unverändert bleibt. Dies hat zur Folge, dass der Energieverlust des Systems zunimmt. Die maximale Anstiegshöhe nimmt ab, während die Zeit bis zur Erreichung der maximalen Anstiegshöhe zunimmt. Insgesamt verliert das System somit an Dynamik.

Die Tatsache, dass das hier zu erwartende  $\zeta$  für gegebene experimentelle Daten geringer sein sollte als das  $\zeta$ , welches man mit dem Modell aus Kapitel 4 erhält, folgt daraus, dass nun zwei separate Dissipationsmechanismen betrachtet werden. Somit wird die gesamte Energiedissipation nicht auf den dynamischen Kontaktwinkel projiziert und dieser nicht überschätzt.

Die Tatsache, dass die Reibungsverluste mit steigendem  $\delta$  und  $\hat{h}$  zunehmen ist eine Konsequenz davon, dass beide Parameter ein Maß für die Kontaktlinienregion sind, in der die lokale Strömung relevant ist. Vergrößert sich die Region so vergrößert sich die Fläche, die zur Energiedissipation aufgrund der lokalen Strömung beiträgt.

Das hier vorgestellte Modell lässt sich somit als ein gedämpftes Federsystem auffassen, welches durch drei Mechanismen Energie verliert. Der erste Mechanismus tritt aufgrund des parabolischen Strömungsprofils

---

unterhalb der Kontaktlinienregion auf, während der zweite Mechanismus aufgrund der lokalen Strömung in der Kontaktlinienregion entsteht. Der dritte und letzte Mechanismus ist eine Konsequenz des dynamischen Kontaktwinkel.





---

## 7. Fazit und Ausblick

---

### Fazit

Der kapillare Anstieg lässt sich als ein gedämpftes Federsystem auffassen, welches über drei im Allgemeinen nicht vernachlässigbare Dissipationsmechanismen verfügt. Die Oberflächenenergie und die Gravitation definieren das Potential und fungieren somit als Feder und die Dissipationsmechanismen als Dämpfung. Der erste Dissipationsmechanismus beruht hierbei auf dem dynamischen Kontaktwinkel. Die Änderung des Kontaktwinkels ist mit einer gewissen Reibung verbunden, welche das System dämpft. Der zweite Dissipationsmechanismus ist eine Konsequenz der lokalen Strömung in der Kontaktlinienregion, in der es zur Reibungsverlusten kommt, da die Strömung hier auf die Kapillarwand trifft. Der dritte Dissipationsmechanismus tritt aufgrund des parabolischen Strömungsprofils unterhalb der Kontaktlinie auf.

Da diese Mechanismen nicht vernachlässigbar sind, ist aus den Kurvenanpassungen der Modelle in Kapitel 3 und 4 an die experimentellen Daten zu sehen. Während das Modell aus Kapitel 3 die Dynamik des Systems im Allgemeinen überschätzt, ist dies für das Modell in Kapitel 4 nicht mehr der Fall. Allerdings weist das Modell in Kapitel 4 die Schwäche auf, dass es den zweiten Dissipationsmechanismus nicht berücksichtigt. Als Konsequenz dessen ergibt sich, dass die gesamten Reibungsverluste in den ersten Dissipationsmechanismus projiziert werden, was zu einer Überschätzung des Reibungsparameters  $\zeta$  führt.

Ein akkurates Modell, welches beide Dissipationsmechanismen berücksichtigt, führt im Allgemeinen auf einen geringeren Wert von  $\zeta$ , wie es im Modell aus Kapitel 6 der Fall ist.

Ein Maß für den Anteil des ersten Reibungsmechanismus ist durch  $\zeta$  gegeben. Je höher  $\zeta$  ist, desto höher ist der Reibungsverlust, der mit dem dynamischen Kontaktwinkel assoziiert ist. Im Falle des zweiten Dissipationsmechanismus geben sowohl die Größe  $L$ , als auch die Größen  $\delta$  und  $\bar{h}$  Aufschluss über das Maß des Reibungsverlusts aufgrund der lokalen Strömung in Nähe der Kontaktlinie.

### Ausblick

Dadurch, dass das Modell in Kapitel 6 lediglich für einen 2D ähnlichen Aufbau hergeleitet werden konnte, musste auf den experimentellen Vergleich verzichtet werden. Damit stellt sich die künftige Aufgabe, welches im Rahmen des Projekts *BO2* gelöst werden soll, ein Modell für den 3D-Fall herzuleiten. Aufbauend auf einem 3D Modell des kapillaren Anstiegs, welches beide Dissipationsmechanismen berücksichtigt, ergeben sich eine Fülle an potentiellen Fragestellungen bzw. Experimenten auf die im Nachfolgenden etwas eingegangen werden soll.

Um ein gefundenes 3D Modell, welches beide Dissipationsmechanismen berücksichtigt, validieren zu können, ist es wichtig, beide Dissipationsmechanismen näher untersuchen zu können. Somit ist es wichtig Experimente

---

zu konstruieren, welche eine genauere Untersuchung der beiden Mechanismen erlauben.

Um die hier vorgestellte Theorie zusätzlich zu validieren ist es wichtig, charakteristische Größen wie den Reibungskoeffizienten oder die Sliplänge  $L$  durch unabhängige Experimente zu bestimmen und zu vergleichen. In diesem Zusammenhang lassen sich dann hier vorgestellte funktionelle Zusammenhänge bestätigen. Mittels der dann bekannten Werte für  $\omega$  und  $L$  lassen sich im Anschluss Vorhersagen über verschiedene Systeme machen und validieren.

Des Weiteren ist ein für die Anwendung interessantes Experiment die Untersuchung des kapillaren Anstiegs für variable Werte der Gravitationsbeschleunigung  $g$ . Vor allem im Falle  $g = 0$  wird die Transportrate des Anstiegs durch die Gesamtdissipation des Systems festgelegt. Auf diesem Experiment aufbauend könnte man versuchen die Geschwindigkeit der Benetzung zu beeinflussen, was beispielsweise in der Wirtschaft zur Prozessoptimierung genutzt werden könnte. Es sei noch erwähnt, dass der Fall  $g = 0$  einer horizontalen Kapillare entspricht.

---

# Literaturverzeichnis

---

- [1] L. Plociniczak, M. Switala (2018). *Monotonicity, oscillations and stability of a solution to a nonlinear equation modelling the capillary rise*, Faculty of Pure and Applied Mathematics, Wrocław University of Science and Technology, 362, 1-8.
- [2] G. Martic, J. De Coninck, T.D. Blake (2003). *Influence of the dynamic contact angle on the characterization of porous media*, Journal of Colloid Interface Science, 263, 213-216.
- [3] D.Quere (1997). *Inertial capillarity*, Europhys. Lett., (EPL) 39 (5), 553-538.
- [4] J. Guckenheimer, P.J.Holmes (2013). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Vol. 42, Springer Science Business Media.
- [5] Jan W. Prüss, Mathias Wilke (2010). *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Springer Basel AG.
- [6] J. Guckenheimer, P.J.Holmes (1960). *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 11(4), 610-620.
- [7] P. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quere (2004). *Capillarity and Wetting Phenomena* Springer Science Business Media New York.
- [8] J. Dhar (2019). *Universal oscillatory dynamics in capillary filling*, (EPL) 125 14003.
- [9] D. Gründing (2020). *An enhanced model for the capillary rise problem* International Journal of Multiphase Flow. 128 103210.
- [10] M. Fricke (2020), *Mathematical Modeling and Volume-Of-Fluid based simulation of dynamic Wetting*.
- [11] T.D. Blake, J. Fernandez-Toledano, G. Doyen, J.D. Coninck (2015). *Forced wetting and hydrodynamic assist*, Physiks of Fluids 27, 112101.
- [12] C.H. Bosanquet M.A. (1923), *On the flow of liquids into capillary uses*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 45:267, 525-531.
- [13] D. Gründing et al. (2020), *A comparative study of transient capillary rise using direct numerical simulations*, Elsevier - Applied Mathematical Modelling, 142-165.



---

# A. Anhang

---

## A.1. Hartman-Grobman-Theorem

---

Betrachte das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion ist.

In diesem Fall existiert nach dem Satz von Peano eine Lösung zumindestens für eine gewisse Umgebung  $(c, -c)$  von 0. Dies liefert eine lokale Abbildung  $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , welche durch  $\phi_t(x_0) = x(t, x_0)$  gegeben ist. Eine Nullstelle der Funktion  $f$  in (A.1) wird Gleichgewichtslösung genannt. Linearisiert man das Anfangswertproblem (A.1) in einer Gleichgewichtslösung  $\bar{x}$  und ignoriert den quadratischen Term erhält man die DGL

$$\dot{\xi} = Df(\bar{x})\xi \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{A.2})$$

wobei  $Df(\bar{x})$  die Jacobimatrix der Funktion  $f$  an der Stelle  $\bar{x}$  meint und  $\xi = x - \bar{x}$  die lineare Abweichung vom kritischen Punkt beschreibt. Es soll  $\xi \ll 1$  gelten. Die Verbindung der Abbildung  $\phi_t$  aus (A.1) zur linearisierten Differentialgleichung (A.2) ist gegeben durch

$$D\phi_t(\bar{x})\xi = e^{tDf(\bar{x})}\xi. \quad (\text{A.3})$$

Das Hartman-Grobman-Theorem stellt nun eine Verbindung der Lösungen von (A.1) zu Lösungen der Differentialgleichung (A.2) her und lautet

**Theorem A.1.1.** (*Hartman-Grobman*)

*Besitzt die Jacobimatrix  $Df(\bar{x})$  des AWP nur Eigenwerte ungleich 0 oder rein imaginäre Eigenwerte dann existiert ein Homöomorphismus  $h$  definiert auf einer Umgebung  $U$  von  $\bar{x}$  in  $\mathbb{R}^n$ , welcher lokal Bahnen der Abbildung  $\phi_t$  von (A.1) auf Bahnen der Abbildung  $e^{tDf(\bar{x})}$  abbildet.*

*Beweis.* Das Theorem stammt aus [siehe 4, S. 13] und der Beweis lässt sich in [6] finden. □

---

**Algorithm 1** Regimetransition

---

**Require:** initial value  $x_0$ , timeline  $t$  on which the ODE is solved, relative accuracy  $rel\_err$  of the critical piont

**Ensure:** critical point  $\omega_u$

---

```
omega_u = 1
omega_l = 1
i = 1
j = 1

y = odeint(dyn_cap_rise_non_dim,x00,t,args=(omega_u,zeta_tilde))

#increase omega_u as long as no oscillations occur
while all(y[:,0] <= 1 + 1e-16) do
    omega_u = 2**i
    i = i+1
    y = odeint(dyn_cap_rise_non_dim,x00,t,args=(omega_u,zeta_tilde))
end while

y = odeint(dyn_cap_rise_non_dim,x00,t,args=(omega_l,zeta_tilde))

#decrease omega_l as long as oscillations occur
while not all(y[:,0] <= 1 + 1e-16) do
    omega_l = 2**(-j)
    j = j+1
    y = odeint(dyn_cap_rise_non_dim,x00,t,args=(omega_l,zeta_tilde))
end while

#determine the exact point where oscillations occur up to a relative accuracy of rel_err
#determine the center of omega_u and omega_l.
#in case that for (omega_u+omega_l)/2 no oscillations occur set omega_l to
#(omega_u+omega_l)/2 otherwise set omega_u to (omega_u+omega_l)/2
while (omega_u-omega_l)/omega_u > rel_err do
    y = odeint(dyn_cap_rise_non_dim,x00,t,args=((omega_u+omega_l)/2,zeta_tilde))
    if all(y[:,0] <= 1+1e-16) then:
        omega_l = (omega_l+omega_u)/2
    else:
        omega_u = (omega_l+omega_u)/2
    end if
end while

return omega_u
```

---