Análisis dinámico del modelo de Solow

Grado en Economía

Facultad de Economía y Empresa

VNiVERSiDAD Đ SALAMANCA

AUTOR: GUILLERMO HIMERIO GÓMEZ RODRÍGUEZ
GuilleGomez@usal.es

TUTOR: JOSÉ MANUEL CASCÓN BARBERO
casbar@usal.es

Salamanca, junio 2023

Trabajo Fin de Grado

Título: Análisis dinámico del modelo de Solow

Grado en Economía

Facultad de Economía y Empresa

VNiVERSiDAD D SALAMANCA

AUTOR: GUILLERMO HIMERIO GÓMEZ RODRÍGUEZ

GuilleGomez@usal.es

Firmado por GOMEZ RODRIGUEZ, GUILLERMO HIMERIO (FIRMA) el día 07/07/2023 con un certificado emitido por AC DNIE 004

TUTOR: JOSÉ MANUEL CASCÓN BARBERO

casbar@usal.es

Salamanca, junio 2023

Índice

Índice de figuras

Resumen

El modelo de Solow, propuesto por el economista Robert Solow en la década de 1950, es una herramienta fundamental para comprender el crecimiento económico a largo plazo. Solow fue un pionero en el estudio del crecimiento económico, sentando las bases para que futuros economistas estudiaran de forma más profunda las causas y consecuencias de este. El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado es analizar el modelo de Solow, contemplando diferentes funciones de producción, específicamente las funciones de Cobb-Douglas y CES. Se examinará cómo estos cambios afectan a la dinámica del crecimiento y la estabilidad de equilibrio en el marco de dicho modelo.

1 Introducción

El crecimiento económico ha sido un tema ampliamente tratado por numerosos economistas desde la creación de ésta como ciencia. Esto fue así debido a que, hasta la Primera Revolución Industrial y durante los primeros 18 siglos de nuestra era, el crecimiento fue prácticamente nulo.

Este advenimiento del desarrollo de la producción llamó la atención de autores como Robert Malthus (Malthus, 1872) o David Ricardo (Ricardo, 1817), los cuáles comenzaron a crear sus primeras teorías o modelos para tratar de explicar las causas de lo que estaba sucediendo. Si bien los modelos representaban de una forma creíble la realidad, estos primeros economistas no supieron explicar cuestiones como por qué unos países crecían más rápido que otros. Fue entonces cuando surgió la escuela neoclásica que, por medio de las matemáticas, desarrolló modelos que permitieron explicar estas cuestiones que anteriormente no tenían respuesta.

Entre estos economistas neoclásicos apareció Robert Solow, el cuál introdujo en 1956 un modelo que explicaba el crecimiento económico a largo plazo (Solow, 1956) y que le sirvió para ganar el premio Nobel de Economía en 1987. Dicho modelo resuelve las dudas acerca del crecimiento de la renta nacional o por qué algunos países crecen más rápido que otros.

La estructura en la que se ordena el trabajo es la siguiente: en el segundo apartado se introducirá el modelo económico mencionado, considerando todas las variables que contiene, así como los supuestos simplificadores iniciales. A continuación, en el siguiente capítulo se formulará la ecuación fundamental del modelo y concretaremos su forma específica para las funciones Cobb-Douglas y CES, así como se analizará su estabilidad dinámica concluyendo con la ejemplificación de cada caso. Por último, en el cuarto apartado se relajarán los supuestos simplificadores del comienzo.

2 Modelo económico

Para medir este crecimiento, Solow se apoyó en la tasa de variación de la producción, la cual se puede medir a traves del PIB. Para empezar, denotaremos $Y(t)$ como la producción de bienes y servicios de la economía en el instante del tiempo t.

A su vez, $Y(t)$ se puede descomponer de la siguiente manera:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t) + NX(t) \tag{1}$$

donde:

- $C(t)$: Consumo privado de las familias en bienes y servicios (*alimentos, vehículos, smartphones, educación, transporte,...*).
- $I(t)$: Inversión de las empresas en bienes o servicios necesarios para su producción (*materias primas, máquinas, edificios,...*).
- $G(t)$: Gasto del sector público para proveer a la ciudadanía de bienes (*construcción de parques, hospitales, escuelas,...*) y servicios (*iluminación de las calles, alcantarillado, suministro de agua,...*).
- $NX(t)$: (Exportaciones netas) Diferencia entre el gasto de los extranjeros en bienes producidos dentro de nuestro país (exportaciones) y el gasto de los residentes de nuestro país en bienes del extranjero (importaciones).

Por simplicidad, en la primera parte de este trabajo asumiremos que:

- No existe ningún tipo de gasto público:

$$G(t) = 0. \tag{2}$$

- No se intercambian bienes y servicios con el exterior (economía cerrada):

$$NX(t) = 0. \tag{3}$$

Por tanto, la ecuación (1) queda de la siguiente manera:

$$Y(t) = C(t) + I(t), \tag{4}$$

es decir, que la producción de un país depende únicamente del consumo de las familias y de la inversión de las empresas. Por otro lado, consideraremos otros supuestos simplificadores:

- El ahorro de las familias se traduce directamente en inversión por parte de las empresas:

$$S(t) = I(t), \tag{5}$$

- El ahorro es una tasa constante proporcional a la renta:

$$S(t) = sY(t), \tag{6}$$

  donde s es la tasa de ahorro ($0 < s < 1$). De esta manera, y utilizando (4), (5) y (6), podemos llegar a la conclusión de que el consumo es la parte restante de la renta que no se destina al ahorro:

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \tag{7}$$

- La producción depende de dos factores: la mano de obra (L) y el capital (K):

$$Y(t) = F(K, L), \tag{8}$$

  donde $F(K, L)$ representa una función de producción en la que existe una relación entre los dos factores, los cuáles se combinan para obtener una cantidad de producto final.

- La variación del capital es la diferencia entre la inversión necesaria para reponerlo y la depreciación de mismo:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - \delta K(t), \tag{9}$$

donde δ corresponde a la tasa de depreciación del capital ($0 < \delta < 1$).

- El tamaño de la población es equivalente a la oferta laboral (L), es decir, no existe desempleo, y esta crece a un ritmo constante igual a n

$$\frac{dL}{dt} = nL(t), \qquad \text{donde } n > 0. \tag{10}$$

Además, al ser la función F una función neoclásica, cumple las siguientes cuatro propiedades:

1. Es homogénea de grado uno, es decir, $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \quad \forall \lambda > 0$.
2. Solo utilizando uno de los factores no puede existir producción, por lo tanto, $F(K, 0) = F(0, L) = 0$
3. Tanto el producto marginal de K como de L son positivos: $\frac{\partial F}{\partial K}(K, L) > 0, \quad \frac{\partial F}{\partial L}(K, L) > 0$. Y esta productividad marginal es decreciente: $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}(K, L) < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2}(K, L) < 0$
4. Cumple las condiciones de Inada (Inada, 1963), lo cual significa que la productividad de las primeras unidades de capital y trabajo es alta, pero cuando hay muchas unidades de alguno de los factores sus productos marginales tienden a cero.

3 Formulación del modelo

Con todo esto, tenemos ya la base para comenzar a construir el modelo. Comenzaremos por transformar la función de producción en términos per cápita. Como la función es homogénea de grado uno, podemos dividirla por la población, que como dijimos en (10), es equivalente a la oferta laboral L:

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k,1) = y(k) \tag{11}$$

donde $k = \frac{K}{L}$. Si teniendo en cuenta esto, derivamos k respecto al tiempo:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{L} \cdot K\right) = -\frac{\frac{dL}{dt}}{L^2} \cdot K + \frac{1}{L} \cdot \frac{dK}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot \frac{\frac{dL}{dt}}{L} \cdot K + \frac{1}{L} \cdot \frac{dK}{dt} \tag{12}$$

Teniendo en cuenta (6), (7), (9) y (10), sustituimos:

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot n \cdot K + \frac{1}{L}(sY - \delta K) = -nk + sy - \delta k = sy - (n+\delta)k.$$

En consecuencia, la ecuación fundamental de Solow quedaría:

$$\frac{dk}{dt} = sy - (n+\delta)k, \tag{13}$$

donde $y = f(k) = \frac{F(K,L)}{L}$, es decir, y depende de la función de producción que escojamos para representar el modelo. De esta manera, vamos a proceder al estudio de las dos funciones con las que realizaremos este trabajo, la Cobb-Douglas y la CES.

3.1 Función Cobb-Douglas

Esta es la función neoclásica básica que se utiliza en los cursos introductorios de microeconomía en todas las universidades del mundo. Su origen procede de principios del siglo XX, cuando el economista y matemático Charles Cobb observó que la parte que les correspondía a los trabajadores era el 70% de la renta nacional, mientras que para los capitalistas era el 30% restante. Esto le llevó a plantearse si existía alguna función de producción en la que cada factor recibía su producto marginal, y además este reparto fuese constante. Fue entonces cuando, junto a Paul Douglas, publicó un trabajo sobre crecimiento económico (Cobb y Douglas, 1928) en el que definían lo que ahora se conoce como función Cobb-Douglas. Esta función es de la siguiente forma:

$$F(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}, \tag{14}$$

donde A representa el progreso tecnológico (el cual es exógeno al modelo), K es el stock de capital, L es la fuerza laboral, α es el peso del capital sobre la producción, y por ende, $1-\alpha$, es el peso complementario sobre el total de la renta que recae sobre el trabajo.

Si introducimos esta función en y tenemos:

$$y = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

Y sustituyendo $y(t)$ en (11), nos queda la ecuación de Solow para el caso de la función Cobb-Douglas:

$$\frac{dk}{dt} = sAk^{\alpha} - (n+\delta)k. \tag{15}$$

Se trata de un ecuación diferencial ordinaria no lineal. En concreto es una ecuación de Bernouilli (Gandolfo, 1997), que deberemos linealizar para poder resolver. Para ello realizaremos el cambio de variable $u = k^{1-\alpha}$, obteniendo:

$$u'(t) = -(\delta+n)(1-\alpha)u(t) + sA(1-\alpha). \tag{16}$$

Podemos dividir está ecuación en tres términos: la primera se corresponde con la derivada de u, la segunda sería la variable u y el coeficiente constante que la multiplica, la cuál denominaremos a; y por último, el último termino constante, que llamaremos b. Ahora si, procedemos a resolver esta ecuación integrándola de la siguiente manera:

Primero comenzaremos por calcular la solución homogénea, que se correspondería con la situación en la que el término b fuese igual a 0:

$$\frac{1}{u(t)}u^{'}(t) = -(\delta+n)(1-\alpha) \tag{17}$$

Integrando a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\int \frac{1}{u}du = \ln(u) + c_1 \;\; ; \int -(\delta+n)(1-\alpha)dt = -(\delta+n)(1-\alpha)t + c_2 \tag{18}$$

Igualando ambos miembros y haciendo algunas operaciones:

$$\begin{aligned} \ln(u) &= -(\delta+n)(1-\alpha)t + C \\ e^{\ln(u)} &= e^{-(\delta+n)(1-\alpha)t+C} \\ u_h(t) &= Ce^{-(\delta+n)(1-\alpha)t} \end{aligned}$$

dónde $C = c_1 + c_2$. Esta es la solución de la parte homogénea. Para calcular la solución particular, buscamos el estado estacionario, es decir, $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$. Esto significa que $u^{'}(t)$ es igual a 0. Por lo que nos queda:

$$(\delta+n)(1-\alpha)u(t) = sA(1-\alpha)$$

Despejando $u(t)$, que denominaremos $u_p(t)$:

$$u_p(t) = \frac{sA}{\delta+n} \tag{19}$$

Agrupando u_h y u_p y deshaciendo el cambio de variable de $u = k^{1-\alpha}$ nos queda:

$$k(t) = \left(Ce^{-(\delta+n)(1-\alpha)t} + \frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \textit{con } C = k_0^{1-\alpha} - \frac{sA}{\delta+n} \tag{20}$$

es decir, C es una constante que representa la desviación del valor inicial de k con respecto a su valor de equilibrio.

3.1.1 Estabilidad

Empezaremos por analizar la situación de estado estacionario. Dicha situación se da cuando la economía se encuentra en equilibrio a largo plazo, esto es, cuando el capital per cápita no experimenta cambios. Para el caso de una EDO autónoma como esta, las soluciones estacionarias están caracterizadas como las raíces del segundo miembro de la ecuación (15), que denotaremos como $f(k)$.

Si igualamos a 0 esta ecuación y despejamos k, obtenemos:

$$sAk^{\alpha} - (n+\delta)k = 0 \Rightarrow k[sAk^{\alpha-1} - (n+\delta)] = 0$$

$$k_1 = 0 \ \ o \ \ k_2 = \left(\frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{21}$$

Así, vemos que $f(k)$ tiene dos soluciones. La primera no tiene ningún significado económico, pues un $k = 0$ no genera ningún tipo de crecimiento económico. La segunda es el punto de equilibrio del modelo, que denotaremos como k^*, en el cual no hay crecimiento ni decrecimiento de la economía. Podemos extraer la conclusión de que $f(k)$ es positiva entre $(0, k_2)$, y negativa entre (k_2, ∞). De aquí se deduce que k_1 es un punto de equilibrio inestable, pues si la EDO se inicializa con cualquier condición inicial mayor que cero (por muy pequeña que sea), crecerá y se alejará de k_1.

Por otro lado, podemos concluir que k_2 es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable en sentido económico. Para cualquier condición inicial con $k > 0$, el sistema evolucionará acercándose a k_2. Si la renta per cápita inicial es superior a k_2, decrecerá (pues $f(k)$ es negativo). En cambio, si la renta per cápita inicial es inferior a k_2, está crecerá hasta k_2 (pues $f(k)$ es positivo en ese intervalo). Con todo esto, podemos representar la curva de fase:

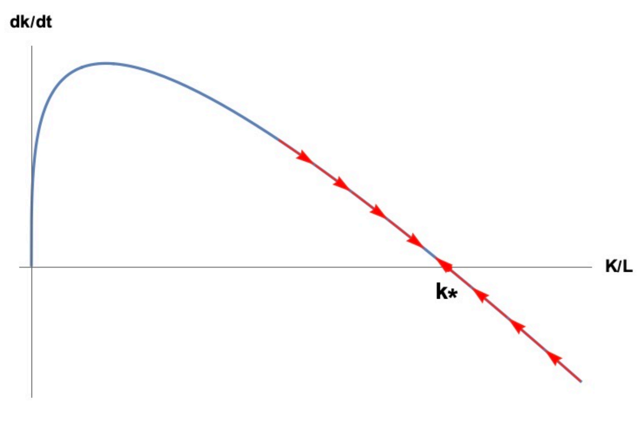


Figura 3.1: Curva de fase con función Cobb-Douglas

Para confirmar que los cálculos son correctos, hallaremos el límite cuando t tiende a infinito de la función (20). Por lo tanto:

$$\lim_{t\to\infty}\left(C_1 e^{-(\delta+n)(1-\alpha)t}+\frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}=\left(\frac{sA}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

De manera análoga, obtenemos el mismo resultado del valor del capital de estado estacionario que en la ecuación (21).

3.1.2 Ejemplos

Vamos a ilustrar este análisis con dos ejemplos. Uno será el país A, el cual tiene una tasa de ahorro (s) del 9% y una tasa de natalidad (n) del 2%. Por otro lado tenemos al país B, que tiene una tasa de ahorro del 16% y una tasa de natalidad del 5%. Ambos coinciden en que el estado de la tecnología (A) es igual a 1, y que la depreciación del capital (δ) es del 4%. Si tenemos en cuenta que la función de producción es $F = AK^{0,3}L^{0,7}$ y que ambas economías parten de una cantidad de k igual a 1, veamos como serían las funciones de producción y el capital de estado estacionario (k^*) de las mismas:

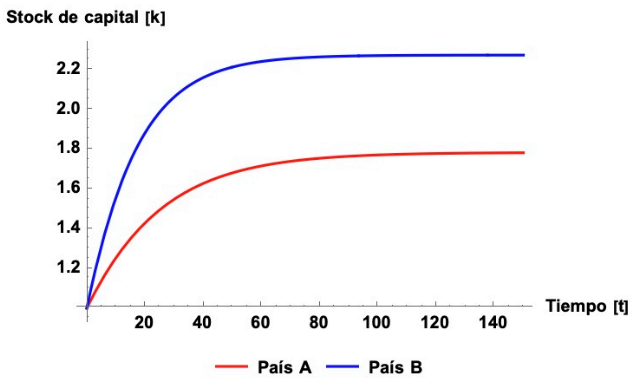


Figura 3.2: Representación de la función de producción de los países A y B.

Como vemos, la función de producción del país B es mayor que la del país A. Esto se debe a que, aunque el primero tiene una tasa de natalidad más baja (2 vs 5), también tiene una tasa de ahorro significativamente inferior a la del segundo país (9 vs 16). Así, podemos afirmar (aunque no los hayamos calculado todavía) que el capital de estado estacionario (k^*) del país B será más alto que el del país A.

Procedemos ahora a calcularlos:

$$k_A^* = 1.78467, \quad k_B^* = 2.27493.$$

Por tanto, vemos que se cumple la predicción que habíamos realizado sobre qué país tendría el capital más alto en estado estacionario. De esta forma, comprobamos que ambas economías tienden en el largo plazo a su capital de estado estacionario. Vamos ahora a hacer un análisis similar para la función CES.

3.2 Función CES

La función CES, o de elasticidad de sustitución constante, es una función introducida por el mismo Robert Solow, que más tarde fue perfeccionada por Kenneth Arrow (Arrow et al., 1961), en la que se determina la facilidad con que los factores de producción pueden ser sustituidos entre sí en el proceso de producción. La función toma la siguiente forma:

$$F(K, L) = A(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \tag{22}$$

donde ρ es el parámetro de sustitución entre capital y trabajo, que viene a representar la sustituibilidad entre ambos factores de producción. De hecho, en este trabajo tomaremos el supuesto de que $\rho < 1$, debido a que así se pueden mantener las propiedades referentes a rendimientos marginales decrecientes mencionadas en el apartado 2. Esta ρ está relacionado con la elasticidad de sustitución (σ) de los factores de la manera:

$$\sigma = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

Además, tenemos de nuevo el parámetro A, el cual es un indicativo de la productividad, y el parámetro α, que se sitúa entre $0 < \alpha < 1$, el cual hace referencia al peso de cada factor de producción sobre el output final. Si nos damos cuenta, cuando ρ tiende a 0 la función CES tiende a la Cobb-Douglas de parámetro α y $\sigma = 1$. Esto significa que los factores de producción son sustitutos en una proporción constante, es decir, que pueden sustituirse uno por otro siempre que la relación entre ambos factores se mantenga constante.

Si introducimos la función (22) en $y(t)$:

$$y = \frac{F(K,L)}{L} = A\frac{(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{L} = A\left(\frac{\alpha K^\rho}{L^\rho} + (1-\alpha)\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{23}$$

y definiendo $k^\rho = \frac{K^\rho}{L^\rho}$ en (23), obtenemos:

$$y = A(\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} \tag{24}$$

Si esto lo introducimos en la ecuación (13), nos queda la ecuación fundamental de Solow cuando la función de producción considerada es la CES:

$$\frac{dk}{dt} = sA(\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} - (n+\delta)k \tag{25}$$

3.2.1 Estabilidad

En este apartado haremos un análisis del estado estacionario similar al realizado con la función Cobb-Douglas. Para representar la curva de fase, primero debemos determinar en qué casos el modelo representa un punto de equilibrio estable. Para ello, calcularemos en qué situaciones existen raíces reales positivas de la ecuación (25):

$$sA(\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} - (n+\delta)k = 0 \Rightarrow (\alpha k^\rho + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} = \left(\frac{n+\delta}{sA}\right)k$$

Si denotamos $\left(\frac{n+\delta}{sA}\right)$ como $\beta^{\frac{1}{\rho}}$ y elevando todo a ρ, se obtiene:

$$\alpha k^\rho + (1-\alpha) = \beta k^\rho \Rightarrow (\beta - \alpha)k^\rho = (1-\alpha) \Rightarrow k^* = \left(\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Se distinguen por tanto dos casos: el primero es el caso de que $\beta \leq \alpha$. No existe solución real positiva, y por tanto no hay puntos de equilibrio. La función $f(k)$ es siempre positiva, es decir, k crece de forma indefinida. El segundo caso es que $\beta > \alpha$. Existe una solución de equilibrio, dada por k^*. En este caso, razonando igual que el caso de la Cobb-Douglas ($f(k)$ es positiva entre $(0, k^*)$ y negativa entre (k^*, ∞) deducimos que k^* es globalmente asintóticamente estable en sentido económico. Por lo tanto, sea cual sea el capital per cápita inicial, el sistema evolucionará hacia la solución de equilibrio. De esta forma, si calculamos el límite de la ecuación (25) con $\beta \leq \alpha$:

$$\lim_{k \to \infty} [sA(\alpha k^{\rho} + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} - (n+\delta)k] = \infty \tag{26}$$

La representación de la curva de fase para este primer caso la podemos ver en la figura 3.3 (izq). Dónde como vemos, el capital per cápita crece de forma indefinida,

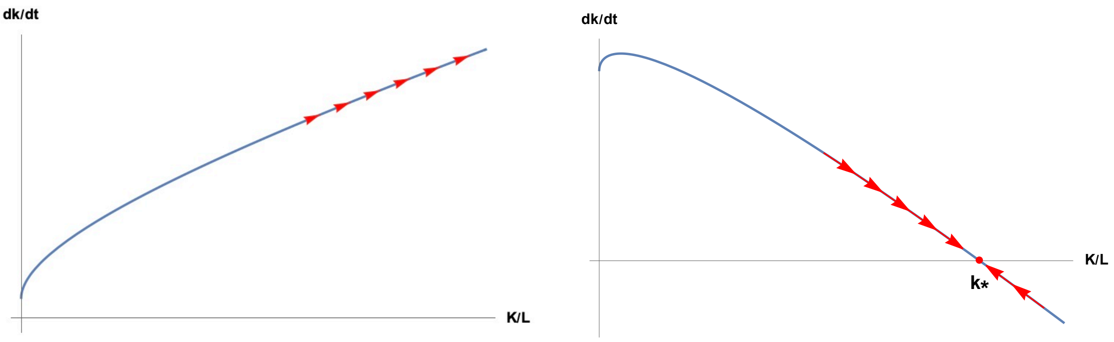


Figura 3.3: Curva de fase CES con p.e. inestable (izq) y p.e. estable (dcha)

y no existe un k^* de estado estacionario. En este caso, el modelo representa una solución explosiva. Por contra, si calculamos el límite de esta ecuación (25) con $\beta > \alpha$, obtenemos:

$$\lim_{k \to \infty} [sA(\alpha k^{\rho} + (1-\alpha))^{\frac{1}{\rho}} - (n+\delta)k] = -\infty \tag{27}$$

Siendo la representación de dicha situación la correspondiente a la figura 3.3 (dcha). Viéndose así, cómo la curva de fase es similar a la que podríamos encontrar en el caso de la Cobb-Douglas, en la que el capital per cápita tiende a un k^*.

3.2.2 Aproximación Numérica

Como la ecuación (25) no tiene solución analítica conocida, esto nos lleva a emplear métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias. En concreto, en este trabajo emplearemos el método de Euler, tanto en su forma implícita como explícita. Estas técnicas buscan estimar la solución analítica de la ecuación diferencial mediante la generación de una serie de puntos que se aproximan a la solución. Estos métodos aproximan la primera derivada de y utilizando el siguiente esquema en diferencias:

$$y(x+h) \approx y(x) + hy^{'}(x)$$

Así, se permite aproximar el valor $y(x+h)$ a partir de un valor anterior $y(x)$ y de la derivada (correspondiente a la ecuación diferencial). El parámetro h hace referencia a la distancia que hay entre x_n y x_{n+1}.

A partir de aqui es dónde se diferencian el método explícito del implícito. El explícito emplea la información del punto (x_n, y_n) para estimar el valor del siguiente punto (x_{n+1}, y_{n+1}) de la forma:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{28}$$

Mientras que el implícito utiliza el siguiente esquema para aproximar y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \tag{29}$$

Ambos métodos son de orden 1. Esto quiere decir que el error cometido en la aproximación es de orden h, correspondiente al parámetro de discretización. El método de Euler explícito es condicionalmente estable, mientras que el método de Euler implícito es incondicionalmente estable (Gandolfo, 1997). Esto quiere decir que en el primer caso, si el parámetro h no es suficientemente pequeño, la aproximación numérica puede degenerar. En cambio, esto no ocurre con el segundo procedimiento, pero este exige un mayor coste computacional.

3.2.3 Ejemplos

Procedemos a calcular la solución numérica para el caso del País B, utilizado en el apartado de la función Cobb-Douglas, a través del método de Euler implícito y explícito con $\rho = 0.6$ y $h = 0.6$:

El capital de estado estacionario en este caso sería: $k^* = 2.45818$. Como podemos ver en la figura 3.4 (izq), tanto el método de Euler explícito como implícito aportan aproximaciones similares con estos parámetros. También cabe mencionar que, aunque la forma de la función es similar a la obtenida con la función Cobb-

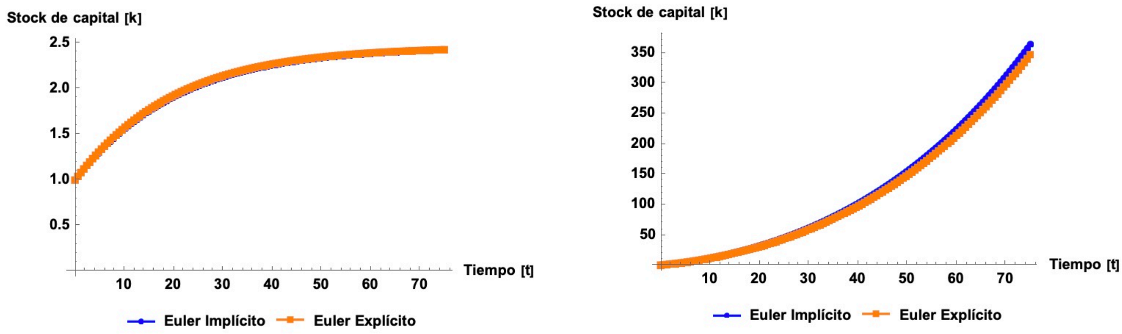


Figura 3.4: S.N CES con punto de equilibrio estable (izq) e inestable (dcha).

Douglas, la obtenida con la función CES es superior a esta. Esto se debe al parámetro ρ, que en la Cobb-Douglas sería 0, y en la función CES es 0.6 (en este caso). El razonamiento económico subyacente en esto es que, en la Cobb-Douglas $\sigma = 1$, y en la CES sería $\sigma = 2$, y cuanto mayor es la elasticidad de sustitución entre los factores, quiere decir, que si por ejemplo, un factor se vuelve más costoso, se podrá retirar parte de ese factor para compensarlo con más cantidad del otro, lo que lleva a que pueda llegarse a un capital de estado estacionario más alto.

Si calculamos la solución numérica de tipo explosiva de la función CES anteriormente analizada en el apartado de "Estabilidad", podremos comprobar cómo es el comportamiento del stock de capital a medida que se avanza en el tiempo. Esto lo vemos en la figura 3.4 (dcha). Teniendo en cuenta los parámetros del caso que refleja una dinámica estable excepto la consideración de una tasa de ahorro del 80%, comprobamos que el stock de capital tiende a crecer de forma exponencial a lo largo del tiempo con estos parámetros. Esto puede ser debido a que la elevada tasa de ahorro puede trasladarse a una mayor inversión en capital.

4 Ampliación del modelo

La finalidad de esta última sección es completar el modelo teniendo en cuenta las otras dos variables de las que depende el PIB que en un principio no incluimos por simplicidad, siendo éstas el gasto público y las exportaciones netas. Si definimos el gasto público como:

$$G = \tau Y \tag{30}$$

donde $0 < \tau < 1$ representa un tipo impositivo sobre la renta que financia el gasto público. Además, vamos a considerar que existe equilibrio presupuestario: $G = T$. Introducimos también las exportaciones netas de la siguiente manera:

$$NX(t) = X - M$$

$$NX(t) = X_0 + x_1\varepsilon - (m_1 Y - m_2\varepsilon) \tag{31}$$

$$NX(t) = X_0 - m_1 Y + \Phi\varepsilon \tag{32}$$

siendo X_0 una variable exógena al modelo que viene a representar que la demanda externa de bienes domésticos es un valor dado, $0 < m_1 < 1$ es la propensión marginal a importar, y $-1 < \Phi\varepsilon < 2$ es $(x_1\varepsilon + m_2\varepsilon)$, la cual representa la suma de la sensibilidad de las exportaciones y las importaciones a una variación en el tipo de cambio ε.

Ahora bien, vamos a considerar ahora que el ahorro privado, S_p, es igual a:

$$S_p = s(1 - \tau)Y, \tag{33}$$

donde S_p es igual a al porcentaje de la renta s que ahorra la gente después de detraer la tasa impositiva τ. Si partimos de nuevo de la ecuación (1), podemos restar en ambos miembro los impuestos T y pasar el consumo al lado izquierdo de la ecuación:

$$Y - C - T = I + G - T + (X - M) \tag{34}$$

Vamos a despejar ahora la inversión I para obtener:

$$(Y - C - T) + (T - G) + (M - X) = I \tag{35}$$

De esta manera, vemos cómo el primer elemento del lado izquierdo de la ecuación se corresponde con el ahorro privado S_p, el segundo es el ahorro público, que llamaremos S_g, y el tercero es el ahorro exterior, que denominaremos S_e. La suma de estos tres es igual al ahorro total de la economía S_T. Si sustituimos cada uno de los elementos por las variables de las que depende, llegamos a:

$$(s(1 - \tau) + m_1)Y - X_0 - \Phi\varepsilon = I \tag{36}$$

Esta es la nueva identidad $S_T = I$. Vamos ahora con la función de producción. Consideraremos una función Cobb-Douglas similar a la utilizada en el modelo de (Mankiw et al., 1992), pero sustituyendo el capital humano por G:

$$F(K, L, G) = AL^{1-\alpha-\beta}K^{\alpha}G^{\beta}, \tag{37}$$

donde A sigue siendo el parámetro de la tecnología, K es el factor capital, L es el factor trabajo, y G es el gasto público de la economía. Si esta ecuación la dividimos por el trabajo L, obtenemos la producción per cápita:

$$\frac{Y}{L} = \frac{F(K, L, G)}{L} = \frac{AL^{1-\alpha-\beta}K^{\alpha}G^{\beta}}{L} = Ak^{\alpha}g^{\beta} = Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} = y, \tag{38}$$

siendo k el capital per cápita y g el gasto público per cápita, donde por simplicidad estamos considerando que $\beta = 1-\alpha$. En cuanto a esta función de producción, vemos que cumple algunas de las propiedades de las funciones de producción neoclásicas:

1. Exhibe rendimiento constantes a escala, es decir, $F(\lambda K, \lambda L, \lambda G) = \lambda F(K, L, G)$, $\forall \lambda > 0$.

2. En caso de utilizar solo uno de los factores no puede existir producción.

3. El producto marginal de K, L y G son positivos.

4. Cumple las condiciones de Inada (Inada, 1963)

Si realizamos de nuevo los cálculos como en (12):

$$\frac{dk}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = -\frac{1}{L} \cdot \frac{\frac{dL}{dt}}{L} \cdot K + \frac{1}{L} \cdot \frac{dK}{dt}, \tag{39}$$

pero en este caso I es igual a la ecuación (36), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{dk}{dt} &= -\frac{1}{L}nK + \frac{1}{L}[(s(1-\tau) + m_1)Y - X_0 - \Phi\varepsilon - \delta K] \\
&= -nk + [(s(1-\tau) + m_1)y - x_0 - \phi\varepsilon] - \delta k = \\
&= [(s(1-\tau) + m_1)]y - x_0 - \phi\varepsilon - (n+\delta)k
\end{aligned} \tag{40}$$

Ahora introducimos en esta última ecuación la función y de (38), para conseguir la nueva ecuación fundamental de Solow con los supuestos ampliados:

$$\frac{dk}{dt} = [(s(1-\tau) + m_1)]Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} - x_0 - \phi\varepsilon - (n+\delta)k \tag{41}$$

Vamos ahora con la definición de gasto público. Partiendo de la ecuación (30), expresándola en términos per cápita y sustituyendo y por (38), obtenemos:

$$\frac{G}{L} = \frac{\tau Y}{L} \Rightarrow g = \tau y \Rightarrow g = \tau Ak^{\alpha}g^{1-\alpha} \tag{42}$$

Si despejamos g en términos de k:

$$g^{\alpha} = \tau Ak^{\alpha} \Rightarrow g = (\tau Ak^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow g = (\tau A)^{\frac{1}{\alpha}}k \tag{43}$$

Vamos a sustituir este valor de g en la ecuación (41) y a simplificar términos para llegar a:

$$\frac{dk}{dt} = [(s(1-\tau) + m_1)A(\tau A)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - (n+\delta)]k - x_0 - \phi\varepsilon \tag{44}$$

Por último, tomaremos la simplificación de que el primer término que multiplica a k lo denominaremos β y el segundo término lo llamaremos γ, de modo que nos queda:

$$\frac{dk}{dt} = [\beta - \gamma]k - x_0 - \phi\varepsilon \tag{45}$$

4.1 Estabilidad

En este apartado, analizaremos la dinámica de evolución de la ecuación (45) a lo largo del tiempo. Para ello denominaremos como en los anteriores casos al segundo término de la anterior EDO como $h(k)$. Si igualamos $h(k)$ a 0, obtenemos:

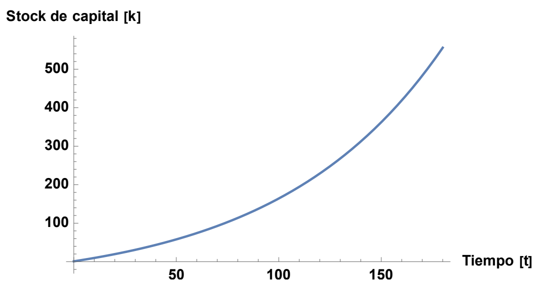
$$(\beta - \gamma)k - x_0 - \phi\varepsilon = 0 \Rightarrow k = \left[\frac{x_0 + \phi\varepsilon}{\beta - \gamma}\right] \tag{46}$$

Si observamos esta ecuación nos damos cuenta de que cualquier valor negativo de k no sería económicamente admisible. Partiendo de que $(x_0 + \phi\varepsilon)$ lo consideramos negativo, existen dos casos: el primero es que $\beta > \gamma$. En esta situación, la curva de fase tiene pendiente positiva y el capital per cápita tiene un crecimiento explosivo de forma infinita y por tanto tendría un punto de equilibrio inestable. El segundo caso es que $\beta < \gamma$, en cuyo caso la curva de fase tendría una pendiente negativa, lo que llevaría a la economía a tener un equilibrio de estado estacionario estable.

4.1.1 Ejemplo

Para ilustrar este análisis vamos a considerar dos casos. El caso A tiene unos valores que son similares a los de España en los últimos años: $\alpha = 0.8, s = 0.076, m_1 = 0.08, \tau = 0.145, A = 1, n = 0.02, \delta = 0.057, x_0 = 0.057, \phi = -0.84, \varepsilon = 1.03$. En este caso $\beta > \gamma$. El caso B tiene los mismos valores que el caso A, pero con $\alpha = 0.3$, lo que entonces provoca $\beta < \gamma$. Esto hace que tenga un crecimiento al comienzo, hasta que alcanza el k de equilibrio, y un decrecimiento desde valores superiores al equilibrio hasta llegar a este. Vamos a graficar estos dos casos en las figuras 4.1 y 4.2, donde los de la izquierda son con punto de equilibrio inestable y los de la derecha con punto de equilibrio estable.

A raíz de estas dos gráficas, vemos que un ahorro de la economía demasiado alto podría llevarla a un crecimiento excesivo a través de la inversión en capital, y un sobrecalentamiento de la economía como consecuencia. Esto evidentemente es dañino para el país porque puede provocar fenómenos como una alta inflación. En cambio, un ahorro más moderado en comparación con n y δ pueden llevarla a que se tienda a un k de estado estacionario en el que la economía tiene una tasa de crecimiento sostenido.



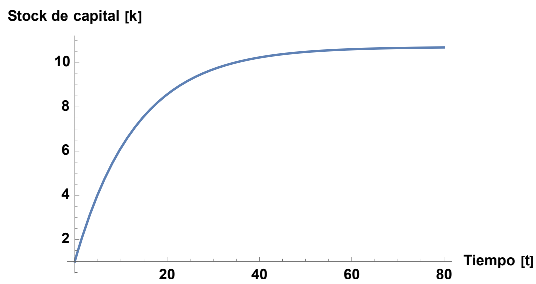


Figura 4.1: Funciones de producción con p.e. inestable (izq) e estable (dcha).

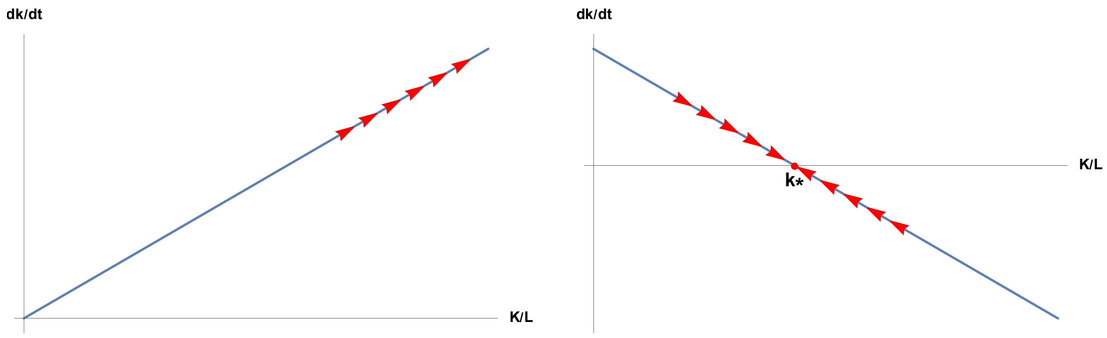


Figura 4.2: Curvas de fase modelo ampliado con $\beta > \gamma$ (izquierda) $\beta < \gamma$ (derecha).

5 Conclusiones

El modelo tradicional estudiado en un principio con la función Cobb-Douglas refleja las hipótesis que estableció Robert Solow, siendo estas que la acumulación de capital per cápita contribuye al crecimiento de la economía, pero este tiene rendimientos decrecientes a medida que avanza el tiempo. En cuanto a la estabilidad, este modelo tiene una solución estable en todo momento.

En el modelo trabajado en el siguiente capítulo, sea este el modelo con función CES, sigue las principales hipótesis del anterior, pero sin embargo, cuando el ratio entre $\frac{sA}{n+\delta}$ es menor o igual que el peso del capital sobre la producción total (α), no existe punto de equilibrio estable, y tiende a un crecimiento exponencial del capital per cápita.

En el último modelo del trabajo nos encontramos con una ecuación lineal, que se ha obtenido tras una severa simplificación que no refleja de forma feaciente la realidad, ya que el caso en el que el modelo tiene un punto de equilibrio inestable, es cuando la parte que hace que aumente k (β) es superior a la parte que genera el crecimiento de este (γ). Esto desde un punto de vista económico es inverosímil, porque un ahorro elevado no tiene porque ser causante de un crecimiento exponencial de la economía. Mas bien incluso al revés: puede debilitar la demanda agregada, generar un gasto público bajo y desequilibrios en la balanza comercial.

Bibliografía

Acemoglu, D. (2008). *Introduction to modern economic growth*. Princeton university press.

Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., y Solow, R. M. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. *The review of Economics and Statistics*, pág. 225–250.

Barro, R. J. y i Martin, X. S. (2018). *Crecimiento económico*. Reverté.

Chiang, A. C. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. Número 330.11/Ch53fE/4a. ed. McGraw-Hill.

Cobb, C. W. y Douglas, P. H. (1928). A theory of production.

Gandolfo, G. (1997). *Economic dynamics: study edition*. Springer Science & Business Media.

Inada, K.-i. (1963). On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization1. *The Review of Economic Studies*, 30(2):119–127. 10.2307/2295809.

Jiménez, F. (2012). *Elementos de teoría y políticas macroeconómicas para una economía abierta. Tomo I*. Pontificia Universidad Católica del Perú. Fondo Editorial.

Malthus, T. R. (1872). *An Essay on the Principle of Population.*.

Mankiw, N. G., Romer, D., y Weil, D. N. (1992). A contribution to the empirics of economic growth. *The quarterly journal of economics*, 107(2):407–437.

Puértolas, V. A. (2018). La demanda de importaciones y exportaciones, 2000–2017. *Papeles de Economía Española*, 158:40.

Ricardo, D. (1817). *On the Principles of Political Economy and Taxation*. J. Murray London.

Solow, R. M. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *The quarterly journal of economics*, 70(1):65–94.

Anexo: Código de Mathematica

https://docs.google.com/document/d/1gRNgtYavbPLEFZDALvNE2OmzWAT0P9ibvCoZnLD0UpE/edit?usp=sharing