Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster)
Volume 12, No.5 (2023), hal 477 - 484

PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF ULAR BERGANTIAN

Evi Nopitasari, Fransiskus Fran , Meliana Pasaribu

INTISARI

Graf G merupakan pasangan himpunan $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak-kosong dari titik-titik dan $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang titik. Misalkan p merupakan banyaknya titik dan q merupakan banyaknya sisi. Fungsi f disebut pelabelan rata-rata (mean labeling) jika pada graf G himpunan titik dipetakan ke bilangan 0, 1, 2, …, q merupakan pemetaan injektif dan menghasilkan fungsi yang setiap sisinya dipetakan ke bilangan 1, 2, 3, …, q merupakan pemetaan bijektif. Misalkan u, v merupakan titik-titik di graf G. Label sisi (u, v) adalah rata-rata dari penjumlahan $f(u)$ dan $f(v)$ jika hasil penjumlahannya genap dan rata-rata dari penjumlahan $f(u)+f(v)$ dan 1 jika ganjil. Graf yang dapat dilabelkan dengan pelabelan rata-rata disebut graf rata-rata. Pada artikel ini dikaji mengenai pelabelan rata-rata dan ditunjukkan bahwa graf ular segitiga bergantian $A(T_n)$ dan graf ular segiempat bergantian $A(Q_n)$ merupakan graf rata-rata. Graf $A(T_n)$ terbentuk dari lintasan $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ dengan menggabungkan u_i dan u_{i+1} dengan i ganjil ke titik baru. Graf $A(Q_n)$ dibentuk dari lintasan $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ dengan menggabungkan u_i dan u_{i+1}, i, dengan i ganjil ke titik-titik baru. Tujuan dari penelitian ini adalah menyusun pola pelabelan rata-rata pada graf $A(T_n)$ dan $A(Q_n)$. Dikonstruksikan dua buah graf yaitu graf $A(T_n)$ dan $A(Q_n)$. Setelah graf terbentuk, dilakukan pelabelan untuk menemukan pola yang memenuhi kondisi pelabelan rata-rata.dan diperoleh pola pelabelan rata-rata pada graf $A(T_n)$ dan $A(Q_n)$.

Kata Kunci : *graf rata-rata, pemetaan injektif, lintasan.*

PENDAHULUAN

Pelabelan pada graf adalah fungsi yang memasangkan unsur-unsur pada graf yaitu titik dan sisi dengan bilangan bulat non negatif. Pelabelan graf menurut daerah asalnya (domain) dibagi menjadi tiga yaitu pelabelan titik (daerah asalnya titik), pelabelan sisi (daerah asalnya sisi), dan pelabelan total (daerah asalnya titik dan sisi) [1]. Salah satu perluasan dari pelabelan titik yaitu pelabelan rata-rata. Graf yang dapat dilabelkan rata-rata merupakan graf rata-rata [2]. Diberikan $G = (V, E)$ dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jika $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \cdots, q\}$ injektif, dengan q menyatakan banyaknya sisi pada graf G dan menghasilkan $f^*: E(G) \to \{1, 2, \cdots, q\}$ bijektif , maka $f^*(u, v) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ untuk $f(u) + f(v)$ genap dan $f^*(u, v) = \frac{f(u)+f(v)+1}{2}$ untuk $f(u) + f(v)$ ganjil.

Pada tahun 2011, Ramya dan Jayenthi melabelkan rata-rata pada beberapa graf pohon dan diperoleh hasil bahwa graf T_n adalah graf rata-rata [3]. Kaneria dan Meghpara pada tahun 2015 melabelkan rata-rata pada beberapa graf sikel (C_n), bistar (B_n), dan kipas ganda (Df_n) serta dapat disimpulkan bahwa graf-graf tersebut adalah graf rata-rata [4]. Ditahun yang sama, Ponraj dan Narayanan melabelkan rata-rata *cordial* pada graf ular segitiga (T_n), graf ular segitiga bergantian $A(T_n)$, dan graf ular segitiga ganda bergantian $DA(T_n)$ serta diperoleh hasil graf tersebut adalah graf rata-rata *cordial* [5]. Pada tahun 2016 Jadav dan Ghodasara melabelkan terhubung kuat pada graf ular segitiga bergantian $A(T_n)$ dan graf ular segiempat bergantian $A(Q_n)$ serta diperoleh hasil graf tersebut adalah graf terhubung kuat. Berdasarkan penelitian-penelitian sebelumnya, diambil definisi pelabelan rata-rata dan graf $A(T_n)$ dan $A(Q_n)$.

Pada artikel ini disusun pola pelabelan rata-rata dan diaplikasikan pelabelannya pada graf $A(Tn)$ dan $A(Qn)$. Dikonstruksikan dua buah graf yaitu graf $A(Tn)$ dan $A(Qn)$. Setelah graf terbentuk, selanjutnya dilakukan pelabelan untuk menemukan pola yang memenuhi kondisi pelabelan rata-rata. Jika graf $A(Tn)$ dan $A(Qn)$ dapat dilabelkan dengan pelabelan rata-rata, maka graf tersebut adalah graf rata-rata.

BEBERAPA DEFINISI YANG DIGUNAKAN

Misalkan A dan B adalah sebarang himpunan tak kosong. Relasi f dari A ke B merupakan fungsi jika setiap elemen A dihubungkan tepat satu elemen di B. Fungsi f dinotasikan sebagai $f: A \rightarrow B$.

Definisi 1 [7] *Fungsi f dikatakan satu-satu atau injektif jika tidak ada dua elemen dari himpunan A yang memiliki image yang sama, dengan kata lain jika $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$ atau secara ekuivalen $f(a) = f(b)$ $maka$ $a = b$.*

Definisi 2 [7] *Fungsi f dikatakan pada atau surjektif jika setiap elemen himpunan B merupakan image dari satu atau lebih elemen himpunan A, dengan kata lain himpunan B merupakan range dari f* [3].

Definisi 3 [7] *Fungsi f dikatakan bijektif jika fungsi f merupakan fungsi injektif dan juga fungsi surjektif.*

Diberikan x bilangan riil. Fungsi *floor* dari x dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bahwa nilai bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x *(floor)* dan $\lceil x \rceil$ menyatakan nilai bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x *(ceiling)*. Dengan kata lain *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan *ceiling* membulatkan x ke atas [7].

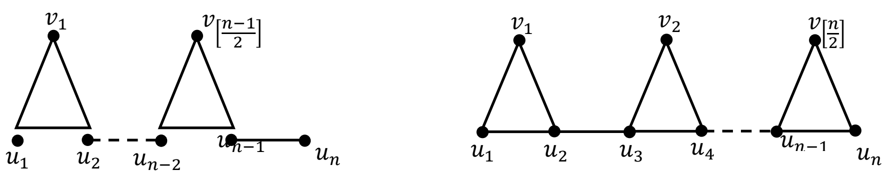
Graf G merupakan pasangan himpunan $G = (V, E)$ yang dalam hal ini $V(G)$ adalah himpunan tak-kosong dari titik (*vertices)* dan $E(G)$ adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik [7]. Pasangan dua titik yang dihubungkan oleh suatu sisi biasanya dinotasikan dengan (u, v) [8]. Banyaknya titik pada suatu graf G disebut dengan order yang dinotasikan dengan $|V(G)|$, sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf G disebut ukuran yang dinotasikan dengan $|E(G)|$ [9]. Pada penelitian ini diasumsikan order sebagai p dan ukuran sebagai q. Lintasan adalah jejak tanpa titik berulang yang dapat ditulis dengan $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ [10].

PELABELAN RATA-RATA PADA GRAF $A(T_n)$

Sebelum membahas pelabelan rata-rata pada graf $A(T_n)$, terlebih dahulu diberikan definisi graf ular segitiga bergantian $(A(T_n))$.

Definisi 4 [5] *Graf ular segitiga bergantian $A(T_n)$ adalah graf yang terbentuk dari lintasan $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ dengan menghubungkan titik u_i dan u_{i+1} ke titik baru $v_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ dimana $1 \leq i \leq n, i$* ganjil.

A.



Gambar 1. (a) Graf $A(T_n)$ dengan n Ganjil, (b) Graf $A(T_n)$ dengan n Genap

Definisi 5 [3] *Misalkan Graf $G = (V, E)$ dengan V simpul dan E sisi dikatakan graf rata-rata jika memiliki fungsi injektif f yang memetakan $V(G)$ ke $\{0, 1, 2, \dots, q\}$ sehingga untuk setiap sisi (u, v) dilabelkan dengan $f^*(e) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ genap dan $f^*(u, v) = \frac{f(u)+f(v)+1}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ ganjil. Setiap label sisi yang dihasilkan berbeda.*

Teorema 6 Graf $A(T_n)$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf rata-rata.

Bukti Diberikan graf $A(T_n)$ untuk $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 1, diketahui $V(A(T_n) = \{u_k | 1 \leq k \leq n\} \cup \left\{v_j | 1 \leq j \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$ dan $E(A(T_n)) = \left\{(u_k, u_{k+1}), \left(u_k, v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}\right) \middle| 1 \leq k \leq n, k \text{ } ganjil\right\} \cup \left\{\left(u_k, v_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}\right) \middle| 1 \leq k \leq n, k \text{ } genap\right\}$. Selain itu, diketahui bahwa graf $A(T_n)$ memiliki titik sebanyak $1 +$

$3\left(\frac{n-1}{2}\right)$, jika n ganjil, $3+3\left(\frac{n-2}{2}\right)$, jika n genap dan sisi sebanyak $4\left(\frac{3-1}{2}\right)$, jika n ganjil, $4+3\left(\frac{n-2}{2}\right)$, jika n genap. Didefinisikan $f: V(A(T_n)) \to \{0,1,2,\cdots,q\}$ dengan q adalah banyaknya sisi sebagai berikut.

$$f(u_i)=\begin{cases}4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil-4, i \text{ ganjil}\\ 4\left(\frac{i}{2}\right)-1, i \text{ genap}\end{cases}$$

$$f(v_j)=4j-2$$

Akan dibuktikan bahwa f memenuhi injektif dan setiap sisi (u,v) dilabelkan dengan $f^*(u,v)=\frac{f(u)+f(v)}{2}$ jika $f(u)+f(v)$ genap dan $f^*(u,v)=\frac{f(u)+f(v)+1}{2}$ jika $f(u)+f(v)$ ganjil.

i). Akan ditunjukkan f injektif.

Ambil $v_i, v_j \in V(A(T_n))$.

Diketahui $\quad f(v_i)=f(v_j)$.

Maka

$$4i-2=4j-2$$
$$4i=4j$$
$$i=j$$
$$v_i=v_j$$

Misalkan $u_k, k_l \in V(A(T_n))$

a). Apabila k dan l bilangan ganjil

$$f(u_k)=f(u_l)$$
$$4\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-4=4\left\lceil\frac{l}{2}\right\rceil-4$$
$$k=l$$

b). k dan l bilangan genap

$$f(u_k)=f(u_l)$$
$$4\left(\frac{k}{2}\right)-1=4\left(\frac{l}{2}\right)-1$$
$$k=l$$
$$u_k=u_l$$

Jika setiap titik pada graf $A(T_n)$ dipetakan tepat satu ke setiap sisi dan tidak ada dua titik yang dikatakan pada bilangan yang sama, maka graf $A(T_n)$ memenuhi sifat injektif simpul ke sisi.

ii). Akan dibuktikan setiap label sisi $A(T_n)$ berbeda. Didefinisikan $f^*(u,v)$ pada graf $A(T_n)$ adalah sebagai berikut.

$$f^*(u_i,u_{i+1})=\begin{cases}\left\lceil\dfrac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil+4\left(\frac{i+1}{2}\right)-5}{2}\right\rceil, i \text{ ganjil}\\ \left\lceil\dfrac{2i+4\left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil-5}{2}\right\rceil, i \text{ genap}\end{cases}$$

$$f^*(v_j,u_i)=\begin{cases}\left\lceil\dfrac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil+4j-6}{2}\right\rceil, i \text{ ganjil}\\ \dfrac{2i+4j-3}{2}, i \text{ genap}\end{cases}$$

Akibatnya setiap sisi memiliki label berbeda maka $A(T_n)$ adalah graf rata-rata. ■

Kasus I: n ganjil

$$f: V\big(A(T_n)\big) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 4\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 4, i \text{ ganjil} \\ 4\left(\frac{i}{2}\right) - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_j) = 4j - 2$$

$$f^*: E(A(T_n)) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 4\left(\frac{n-1}{2}\right)\right\}$$

$$f^*(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 4\left(\frac{i+1}{2}\right) - 5}{2} \right\rceil, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{2i + 4\left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil - 5}{2} \right\rceil, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(v_j, u_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 4j - 6}{2} \right\rceil, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{2i + 4j - 3}{2} \right\rceil, i \text{ genap} \end{cases}$$

Kasus II: n genap

$$f: V\big(A(T_n)\big) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 4 + 3\left(\frac{n-2}{2}\right)\right\}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 4, i \text{ ganjil} \\ 4\left(\frac{i}{2}\right) - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_j) = 4j - 2$$

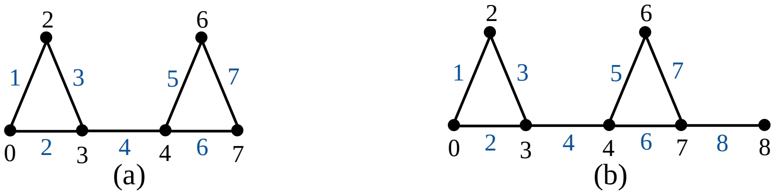
$$f^*: E(A(T_n)) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 4 + 3\left(\frac{n-2}{2}\right)\right\}$$

$$f^*(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 4\left(\frac{i+1}{2}\right) - 5}{2} \right\rceil, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{2i + 4\left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil - 5}{2} \right\rceil, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(v_j, u_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{4\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 4j - 6}{2} \right\rceil, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \frac{2i + 4j - 3}{2} \right\rceil, i \text{ genap} \end{cases}$$

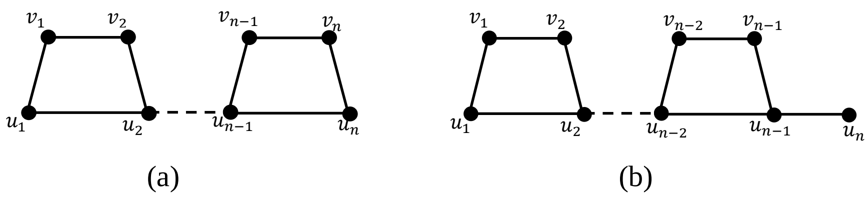
Dengan demikian graf $A(Q_n)$ adalah graf rata-rata.

Diberikan contoh pelabelan rata-rata pada graf $A(T_4)$ dan $A(T_5)$ pada Gambar 2.



Gambar 2. (a) Graf $A(T_4)$ dan (b) Graf $A(T_5)$

Definisi 7 *Graf ular segiempat bergantian $A(Q_n)$ dibentuk dari lintasan $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$ dengan menghubungkan titik u_i dan u_{i+1} ke dua titik baru $v_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ dan $v_{\lceil \frac{i}{2} \rceil + 1}$ dimana $1 \le i \le n, i$ ganjil, sehingga setiap sisinya diubah menjadi sikel C_4 bergantian.*



Gambar 3. (a) Graf $A(Q_n)$ dengan n genap, (b) Graf $A(Q_n)$ dengan n ganjil

Teorema 8 Graf $A(Q_n)$ dengan $n \ge 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ adalah graf rata-rata.
Bukti Diberikan graf $A(Q_n)$ untuk $n \ge 3$, $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Gambar 2, diketahui $V(A(Q_n)) = \{u_k | 1 \le k \le n\} \cup \left\{v_k | 1 \le j \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right\}$ dan $E(A(Q_n)) = \{(u_k, u_{k+1}), (u_k, v_k), (v_k, v_{k+1}) | 1 \le k \le n, k \in \mathbb{N}\}$. Selain itu, diketahui bahwa graf $A(Q_n)$ memiliki titik sebanyak $4\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$, jika n ganjil, $4\left(\frac{n-2}{2}\right) + 4$, jika n genap dan sisi sebanyak $5\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ jika n ganjil, $5\left(\frac{n-2}{2}\right) + 4$, jika n genap. Didefinisikan $f: V(A(Q_n)) \to \{0, 1, 2, \cdots, q\}$ sebagai berikut.
Didefinisikan $f: V(A(Q_n)) \to \{1, 2, 3, \dots, q\}$ dengan q adalah banyaknya sisi dikatakan graf rata-rata jika memenuhi 2 syarat yaitu injektif dan setiap sisi (u, v) dilabelkan dengan $f^*(u, v) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ genap dan $f^*(u, v) = \frac{f(u)+f(v)+1}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ ganjil.
i). Akan ditunjukkan f injektif.
Ambil $v_i, v_j \in V(A(Q_n))$.
Diketahui $f(v_i) = f(v_j)$,

a). Apabila i dan j bilangan ganjil

$$f(v_i) = f(v_j)$$
$$5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 5 = 5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 5$$
$$i = j$$

b). i dan j bilangan genap

$$f(v_i) = f(v_j)$$
$$5\left(\frac{i}{2}\right) - 1 = 5\left(\frac{i}{2}\right) - 1$$
$$i = j$$

Diberikan $u_k, k_l \in V(A(Q_n))$.
Jika $f(u_k) = f(u_l)$

a). Apabila k dan l bilangan ganjil

$$f(u_k) = f(u_l)$$
$$5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 3 = 5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 3$$
$$k = l$$

b). k dan l bilangan genap

$$f(u_k) = f(u_l)$$
$$5\left(\frac{i}{2}\right) - 2 = 5\left(\frac{i}{2}\right) - 2$$
$$k = l$$

Setiap titik pada graf $A(Q_n)$ dipetakan tepat satu ke setiap sisi dan tidak ada dua simpul yang dikatakan pada bilangan yang sama, maka graf $A(Q_n)$ memenuhi sifat injektif simpul ke sisi.

ii). Dari pelabelan titik di atas diperoleh pelabelan sisi dengan fungsi:

$$f^*(v_j, u_i) = \begin{cases} \dfrac{10\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 8}{2}, & i \text{ ganjil} \\ \left\lceil\dfrac{10\left(\frac{i}{2}\right) - 3}{2}\right\rceil, & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 6}{2}, & i \text{ ganjil} \\ \dfrac{5\left(\frac{i}{2}\right) + 5\left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil - 6}{2}, & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = \frac{5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 5}{2}$$

Dengan demikian graf $A(Q_n)$ adalah graf rata-rata.■

Kasus I: n ganjil

$$f: V\big(A(Q_n)\big) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 5, & i \text{ ganjil} \\ 5\left(\frac{i}{2}\right) - 1, & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 5\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 3, & i \text{ ganjil} \\ 5\left(\frac{i}{2}\right) - 2, & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*: E(A(Q_n)) \to \left\{0, 1, 2, \cdots, 5\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$$

$$f^*(u_i, v_j) = \begin{cases} \dfrac{10\left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil - 8}{2}, & i \text{ ganjil} \\ \left\lceil\dfrac{10\left(\frac{i}{2}\right) - 3}{2}\right\rceil, & i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 6}{2}, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{5\left(\frac{i}{2}\right) + 5\left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil - 6}{2}, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = \frac{5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 5}{2}$$

Kasus II: n genap

$$f: V(A(Q_n)) \rightarrow \left\{0, 1, 2, \cdots, 5\left(\frac{n-2}{2}\right) + 4\right\}$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 5, i \text{ ganjil} \\ 5\left(\frac{i}{2}\right) - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 3, i \text{ ganjil} \\ 5\left(\frac{i}{2}\right) - 2, i \text{ genap} \end{cases}$$

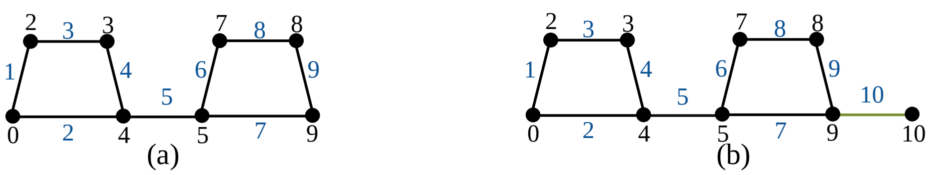
$$f^*: E(A(Q_n)) \rightarrow \left\{0, 1, 2, \cdots, 5\left(\frac{n-2}{2}\right) + 4\right\}$$

$$f^*(u_i, v_j) = \begin{cases} \dfrac{10\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil - 8}{2}, i \text{ ganjil} \\ \left\lceil \dfrac{10\left(\frac{i}{2}\right) - 3}{2} \right\rceil, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(u_i, u_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 6}{2}, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{5\left(\frac{i}{2}\right) + 5\left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil - 6}{2}, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$f^*(v_i, v_{i+1}) = \frac{5\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 5\left(\frac{i+1}{2}\right) - 5}{2}$$

Diberikan contoh pelabelan rata-rata pada graf $A(Q_4)$ dan $A(Q_n)$ pada Gambar 4.



Gambar 4. (a) Graf $A(Q_4)$ dan (b) Graf $A(Q_n)$

PENUTUP

Pelabelan rata-rata pada suatu graf G dapat dilakukan dengan memetakan bilangan-bilangan $\{0, 1\ 2, \cdots, |V(G)|\}$ ke setiap titik dari graf G sedemikian sehingga memenuhi sifat injektif titik ke sisi dan $f^*(e) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ genap dan $f^*(e) = \frac{f(u)+f(v)+1}{2}$ jika $f(u) + f(v)$ ganjil menghasilkan setiap label yang berbeda. Suatu graf dikatakan sebagai suatu graf rata-rata jika dapat dilabelkan dengan pelabelan rata-rata. Pada artikel ini dapat disimpulkan pelabelan rata-rata pada graf ular segitiga bergantian $A(T_n)$ dan graf ular segiempat bergantian $A(Q_n)$. Jadi, graf $A(T_n)$ dan $A(Q_n)$ adalah graf rata-rata.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Wallis WD, Edy T, Miller, Salamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics*. 2000; 22: 177-190.

[2]. Somasundaram S, Ponraj R. Mean Labelings of Graphs. *National Academic.* 2003; 26(7-8): 210-213.

[3]. Ramya D, Jayenti P. Mean Labeling of Some Graphs. *SUT Journal of Mathematics.* 2011; 47(2), 129-141.

[4]. Kaneria VJ, Meghpara M. Mean Labeling for Some Cycle Graphs. *International Jounal of Mathematics and Engineering Application.* 2015; 9(2):267-274.

[5]. Ponraj R, Narayanan SS. Mean Cordiality of Some Snake Graph. *Palestine Journal of Mathematics.* 2015; 4(2): 439-445.

[6]. Jadav I, Ghodasara GV. Snake Related Strongly Graphs. *International Journal of Advanced Engineering Research and Science.* 2016; 2:240-245.

[7]. Munir R. *Matematika Diskrit Edisi Ke-5*. Bandung: Informatika; 2014.

[8]. Harris J, Hirst JL, Mossinghoff M. *Combinatorics and Graph Theory*. San Francisco: Springer; 2000.

[9]. Fournier JC. *Graphs Theory and Applications: With Exercise and Problems*. London: Wiley-ISTE; 2009.asd

[10]. Chartrand G, Zhang P. *A First Course In Graph Theory*. Boston McGraw-Hill Higher Education; 2012.

EVI NOPITASARI : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
nopitasarievi@student.untan.ac.id

FRANSISKUS FRAN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
fransiskusfran@math.untan.ac.id

MELIANA PASARIBU : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
meliana.pasaribu@math.untan.ac.id