

DEKOMPOSISI GRAF PRISMA

Muhlisin

INTISARI

Dekomposisi graf adalah kumpulan subgraf tak kosong $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ dari graf G sedemikian sehingga H_i adalah subgraf yang dibangun oleh himpunan bagian sisi ($H_i = \langle E_i \rangle$ untuk suatu E_i himpunan bagian dari $E(G)$) dan $\{E_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ pada dekomposisi graf G tidak memuat simpul terpecil. Jika $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ adalah sebuah dekomposisi dari graf G , maka G dapat dinotasikan dengan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus \dots \oplus H_t$. Jika $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ merupakan dekomposisi dari graf G sehingga $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ isomorfis dengan graf H , maka graf G dikatakan H -dekomposisi. Pada penelitian ini dikaji dekomposisi pada graf prisma. Graf prisma merupakan graf yang diperoleh dari hasil kali Kartesius antara graf sikel dengan graf lintasan. Berdasarkan penelitian, diperoleh bentuk dekomposisi graf prisma $D_{m,2}$ dengan $m \geq 3$ antara lain $3K_2$ -dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari 3 graf lengkap K_2 dan P_4 -dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf lintasan P_4 . Lebih khusus ketika m adalah bilangan genap, maka berlaku $2P_4$ -dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari 2 graf lintasan P_4 .

Kata kunci: Partisi, subgraf, graf lengkap, graf lintasan.

PENDAHULUAN

Teori graf adalah salah satu bagian dari ilmu matematika yang dapat digunakan untuk memudahkan penyelesaian suatu permasalahan. Pokok bahasan tentang teori graf pertama kali muncul pada tahun 1736, yaitu ketika Leonard Euler berusaha untuk memecahkan suatu permasalahan yang sangat terkenal yakni Jembatan Konigsberg. Teori tentang graf ini telah mengalami perkembangan dalam teori ataupun terapannya. Beberapa masalah kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep teori graf, misalnya permasalahan jaringan dalam bidang ilmu komputer, komunikasi dan berbagai masalah lainnya. Beberapa bentuk graf yang banyak diketahui misalnya graf lengkap, graf lingkaran, graf lintasan, dan lain-lain [1].

Pada perkembangan teori ini, sangat banyak bermunculan kajian-kajian tentang teori graf, salah satunya tentang dekomposisi graf. Dekomposisi graf dapat diterapkan untuk menyelesaikan berbagai masalah misalnya pengaturan jaringan listrik, dimana dalam suatu daerah dapat dibagi dalam beberapa gardu listrik yang berfungsi sebagai pengatur dan pembagi daya listrik yang di alirkan ke rumah-rumah dan fasilitas lainnya [2]. Kajian tentang dekomposisi graf telah banyak dibahas oleh para matematikawan. Salah satunya adalah artikel yang membahas tentang dekomposisi pada graf sikel, graf roda, graf gir dan graf persahabatan [3]. Selain dekomposisi graf tersebut masih banyak dekomposisi graf lain yang menarik untuk dibahas salah satunya dekomposisi graf prisma. Graf prisma adalah graf yang diperoleh dari hasil kali Kartesius antara graf sikel dan graf lintasan [4]. Oleh karena itu penelitian ini membahas cara menentukan dekomposisi graf dan bentuk-bentuk dekomposisi yang berlaku pada graf prisma. $D_{m,n}$ dengan $m \geq 3$ dan $n = 2$.

Penelitian ini dimulai dengan menentukan bentuk graf dengan jumlah simpul dan sisi tertentu membentuk graf prisma, tahap selanjutnya adalah melakukan partisi terhadap graf prisma tersebut menjadi himpunan sisi graf. Setelah itu, himpunan sisi graf tersebut dikelompokkan menjadi subgraf-subgraf yang saling isomorfis. Bentuk pengelompokkan subgraf yang diperoleh menentukan bentuk dekomposisi yang berlaku pada graf graf prisma. Langkah selanjutnya adalah menentukan pola aturan pengurutan simpul-simpul pada setiap himpunan sisi pembangun subgraf. Langkah terakhir adalah menentukan teorema-teorema yang berlaku pada dekomposisi graf prisma tersebut dan membuktikannya.

DEKOMPOSISI GRAF

Sebuah graf G merupakan pasangan terurut dari dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong yang dinotasikan dengan $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut simpul dan himpunan berhingga yang mungkin kosong dinotasikan dengan $E(G)$ yang elemen-elemennya disebut sisi sehingga setiap elemen dalam $E(G)$ adalah pasangan tak berurutan dari simpul di $V(G)$ [1].

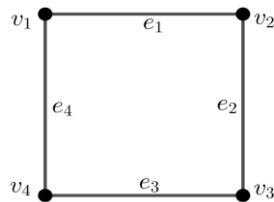
Definisi 1 [5] Sebuah graf H didefinisikan sebagai subgraf atau graf bagian dari graf G ($H \subseteq G$) jika dan hanya jika setiap simpul di $V(H)$ adalah anggota himpunan $V(G)$ dan setiap sisi di $E(H)$ adalah anggota himpunan $E(G)$. Graf H dikatakan subgraf terinduksi (dibangun) sisi dari graf G jika graf H dibangun dari subhimpunan sisi dari G dan himpunan simpulnya beranggotakan simpul yang terhubung langsung dengan subhimpunan sisi dari G . Subgraf terinduksi sisi dinotasikan $\langle E_i \rangle$.

Definisi 2 [5] Gabungan dua graf G_1 dengan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan simpul $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Gabungan dua graf G yang sama $G \cup G$ dinotasikan dengan $2G$.

Definisi 3 [6] Dekomposisi graf G adalah kumpulan subgraf G tak kosong $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ dari graf sedemikian hingga $H_i = \langle E_i \rangle$ untuk suatu E_i himpunan bagian dari $E(G)$ dan $\{E_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ adalah partisi dari $E(G)$. Subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ pada dekomposisi graf G tidak memuat simpul terpercil. Jika $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ adalah sebuah dekomposisi dari graf G , maka dapat dinotasikan $G = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$ dengan $t = |\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}|$.

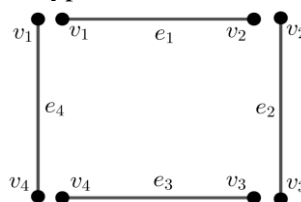
Definisi 4 [6] Jika $\{H_i | i = 1, 2, 3, \dots, t\}$ merupakan dekomposisi graf G sedemikian hingga $H_i \cong H$, maka graf G dikatakan H -dekomposisi.

Contoh 5 Diberikan graf sikel C_4 pada Gambar 1.



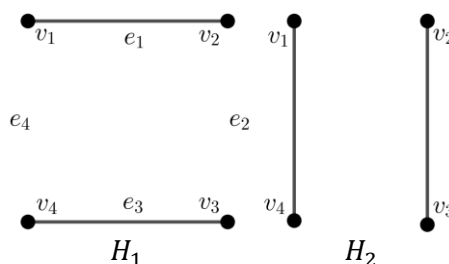
Gambar 1 Graf Sikel C_4

Simpul-simpul dan sisi-sisi dari graf sikel C_4 yaitu $V(C_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(C_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Partisi sisi dari graf sikel C_4 pada Gambar 1 ditunjukkan seperti pada Gambar 2.



Gambar 2 Partisi Sisi dari Graf Sikel C_4

Berdasarkan Gambar 2 diperoleh 4 partisi sisi dari $E(C_4)$, yaitu $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $e_3 = (v_3, v_4)$, $e_4 = (v_4, v_1)$. Partisi sisi dari graf sikel C_4 tersebut dapat dikelompokkan menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2$ seperti pada Gambar 3.



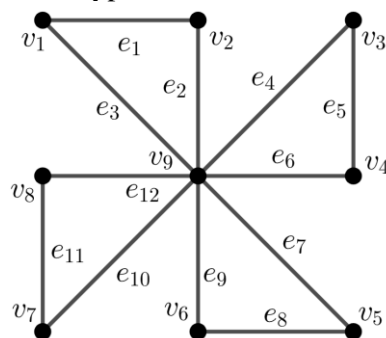
Gambar 3 Subgraf dari Graf Sikel C_4 dalam bentuk $2K_2$

Berdasarkan Gambar 3 terlihat bahwa diperoleh 2 partisi subgraf H_i untuk $i = 1,2$ dari $E(C_4)$, dengan $H_1 = \{(v_1, v_2), (v_3, v_4)\}$ dan $H_2 = \{(v_2, v_3), (v_4, v_1)\}$. Pada masing-masing subgraf terdapat partisi yang terdiri dari 2 sisi berupa graf K_2 . Formula pengelompokkan partisi subgraf yang diperoleh adalah $H_i = \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+2}, v_{i+3})\}$, dimana setiap $i + 3 > n$ maka $i + 3$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1,2,3, \dots, t(mod n)$.

Pada $H_2, i + 3 > n$ maka untuk simpul v_5 yaitu bilangan 5 di ambil sebagai $1(mod 4)$. Partisi graf $C_4 = H_1 \oplus H_2$ dan $H_i \cong 2K_2$ untuk setiap i , maka graf sikel C_4 disebut sebagai $2K_2$ -dekomposisi [7].

Untuk lebih jelas memahami teori dekomposisi graf berikut diberikan contoh dekomposisi graf dalam bentuk yang berbeda.

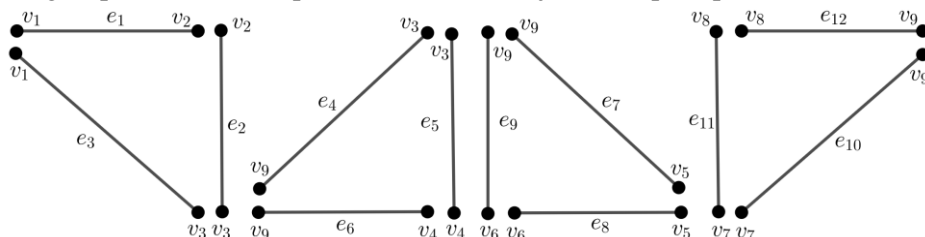
Contoh 6 Diberikan graf persahabatan F_4 pada Gambar 4.



Gambar 4 Graf Persahabatan F_4

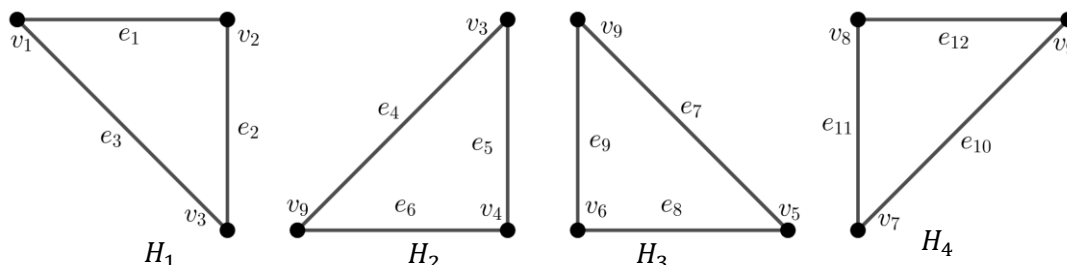
Simpul-simpul dan sisi-sisi graf persahabatan F_4 yaitu $V(F_4) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, \}$ dan $E(F_4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

Partisi sisi dari graf persahabatan F_4 pada Gambar 4 ditunjukkan seperti pada Gambar 5 berikut.



Gambar 5 Partisi Sisi dari Graf Persahabatan F_4

Berdasarkan Gambar 5 diperoleh 12 partisi sisi dari $E(F_4)$, yaitu $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_9)$, $e_3 = (v_1, v_9)$, $e_4 = (v_3, v_9)$, $e_5 = (v_3, v_4)$, $e_6 = (v_4, v_9)$, $e_7 = (v_5, v_9)$, $e_8 = (v_5, v_6)$, $e_9 = (v_6, v_9)$, $e_{10} = (v_7, v_9)$, $e_{11} = (v_7, v_8)$, dan $e_{12} = (v_8, v_9)$. Partisi sisi dari graf persahabatan F_4 tersebut dapat dikelompokkan menjadi subgraf H_i untuk $i = 1,2,3,4$ seperti pada Gambar 6 berikut.



Gambar 6 Subgraf dari Graf Persahabatan F_4 dalam bentuk C_3

Berdasarkan Gambar 6 terlihat bahwa diperoleh 4 subgraf H_i untuk $i = 1,2,3,4$ dari $E(F_4)$, yaitu:

- $H_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_9), (v_2, v_9)\}$,
- $H_2 = \{(v_3, v_4), (v_3, v_9), (v_4, v_9)\}$,
- $H_3 = \{(v_5, v_6), (v_5, v_9), (v_6, v_9)\}$, dan
- $H_4 = \{(v_7, v_8), (v_7, v_9), (v_8, v_9)\}$.

Pada masing-masing subgraf terdiri dari 3 sisi membentuk graf siklus C_3 . Formula pengelompokkan subgraf yang diperoleh adalah $H_i = \{(v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{2n+1}), (v_{i+1}, v_{2n+1})\}$, dimana setiap $i = 1, 2, 3, 4$.

Partisi graf $F_4 = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ dan $H_i \cong C_3$ untuk setiap i , maka graf persahabatan F_4 dikatakan sebagai C_3 -dekomposisi.

Dekomposisi Graf Prisma

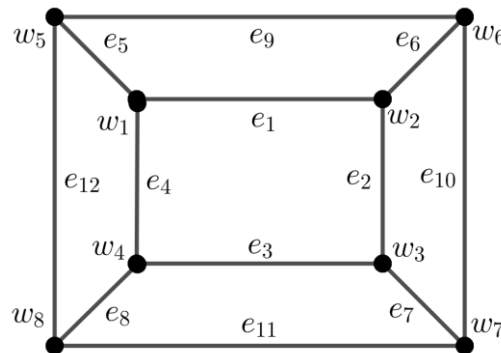
Graf prisma memiliki bentuk seperti prisma bangun ruang, yang di gambarkan menjadi bangun datar. Dalam teori geometri, prisma adalah bangun ruang tiga dimensi yang dibatasi oleh alas dan tutup berbentuk segi- n dan sisi-sisi tegak berbentuk persegi atau persegi panjang. Graf prisma dalam penelitian ini merupakan perluasan dari prisma yang memiliki bentuk seperti prisma bangun ruang yang bertingkat.

Definisi 7 [4] Graf prisma $D_{m,n}$ adalah graf hasil kali Kartesius $C_m \times P_n$ dari sebuah graf siklus C_m dengan m simpul dan sebuah graf lintasan P_n dengan n simpul.

Graf prisma $D_{m,2}$ dengan $m \geq 3$, banyak simpulnya adalah $2m$ sedangkan banyak sisinya adalah $3m$ yaitu $V(D_{m,2}) = \{w_1, w_2, \dots, w_{2m}\}$ dan $E(D_{m,2}) = \{(w_k, w_{k+1}), (w_{k+1}, w_{k+2}), \dots, (w_m, w_1)\} \cup \{(w_k, w_{k+m}), (w_{k+1}, w_{k+1+m}), \dots, (w_m, w_{2m})\} \cup \{(w_{k+m}, w_{k+1+m}), (w_{k+1+m}, w_{k+2+m}), (w_{k+1+m}, w_{k+2+m}), \dots, (w_{2m}, w_{1+m})\}$ dengan $k = 1$.

Sebagai contoh diambil graf prisma $D_{m,n}$ dengan $m \geq 3$ untuk C_m dan $n = 2$ untuk P_n , kemudian graf prisma $D_{m,2}$ dipartisi menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$. Berikut akan di uraikan bentuk dekomposisi yang berlaku pada graf prisma $D_{m,2}$.

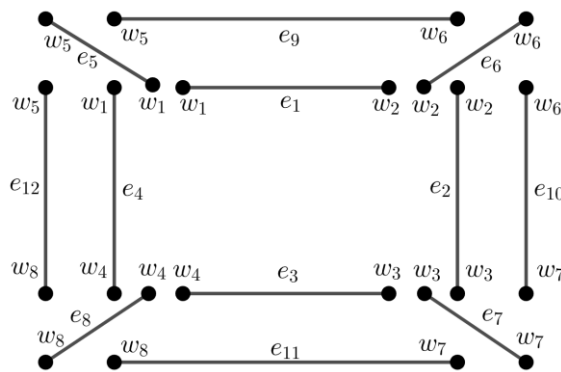
Contoh 8 Diberikan graf prisma $D_{4,2}$ seperti pada Gambar 7.



Gambar 7 Graf Prisma $D_{4,2}$

Simpul-simpul dan sisi-sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ yaitu $V(D_{4,2}) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$ dan $E(D_{4,2}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$.

Partisi sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ seperti pada Gambar 8.

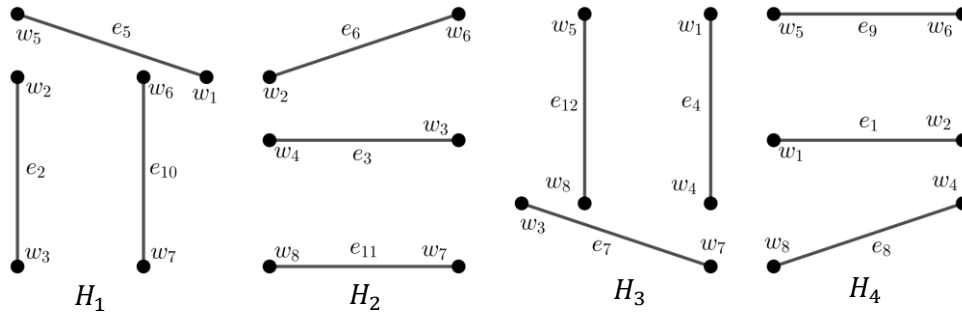


Gambar 8 Partisi Sisi dari Graf Prisma $D_{4,2}$

Berdasarkan Gambar 8 terlihat bahwa diperoleh 12 partisi sisi dari $E(D_{4,2})$, yaitu $e_1 = (w_1, w_2)$, $e_2 = (w_2, w_3)$, $e_3 = (w_3, w_4)$, $e_4 = (w_4, w_1)$, $e_5 = (w_1, w_5)$, $e_6 = (w_2, w_6)$, $e_7 = (w_3, w_7)$, $e_8 = (w_4, w_8)$, $e_9 = (w_5, w_6)$, $e_{10} = (w_6, w_7)$, $e_{11} = (w_7, w_8)$, dan $e_{12} = (w_5, w_8)$. Partisi sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ tersebut dapat dikelompokkan menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ sebagai berikut.

Graf prisma $D_{4,2}$ dipartisi menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ berbentuk $3K_2$.

Graf prisma $D_{4,2}$ dipartisi menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ berbentuk $3K_2$. Pengelompokan partisi sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ pada Gambar 8 ditunjukkan seperti pada Gambar 9.



Gambar 7 Subgraf dari Graf Prisma $D_{4,2}$ dalam bentuk $3K_2$

Berdasarkan Gambar 9 diperoleh 4 subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dari $E(D_{4,2})$, yaitu sebagai berikut.

$$H_1 = \{(w_1, w_5), (w_2, w_3), (w_6, w_7)\},$$

$$H_2 = \{(w_2, w_6), (w_3, w_4), (w_7, w_8)\},$$

$$H_3 = \{(w_3, w_7), (w_4, w_1), (w_8, w_5)\}, \text{ dan}$$

$$H_4 = \{(w_4, w_8), (w_1, w_2), (w_5, w_6)\}.$$

Pada masing-masing subgraf terdiri dari 3 sisi berbentuk graf lengkap K_2 . Formula pengelompokan subgraf adalah $H_i = \{(w_i, w_{i+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$, dimana untuk setiap $i + 1, i + 2 > m$ maka $i + 1$ dan $i + 2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, t \pmod m$.

Pada H_3 karena $i + 2 > m$, maka untuk simpul w_5 dan w_9 yaitu bilangan 5 dan 9 di ambil sebagai $1 \pmod 4$ dan $5 \pmod 4$. Sedangkan untuk H_4 karena $i + 1 > m$ pada simpul w_5 dan w_9 dan $i + 2 > m$ pada simpul w_6 dan w_{10} , maka untuk simpul w_5, w_6, w_9 dan w_{10} yaitu bilangan 5, 6, 9 dan 10 di ambil sebagai $1 \pmod 4, 2 \pmod 4, 5 \pmod 4$ dan $6 \pmod 4$.

Partisi graf $D_{4,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ dan $H_i \cong 3K_2$ untuk setiap i , maka graf prisma $D_{4,2}$ dikatakan sebagai $3K_2$ -dekomposisi [7]. Dengan menggunakan formula yang sama maka dapat menentukan dekomposisi graf dengan jumlah simpul m yang berbeda sehingga diperoleh dekomposisi graf yang disajikan pada tabel 1.

Tabel 1 Dekomposisi dari Graf Prisma $D_{m,2}$ dalam bentuk $3K_2$

Graf Prisma	Dekomposisi	H –dekomposisi	Banyak simpul dan sisi
$D_{3,2}$	$D_{3,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 3$
$D_{4,2}$	$D_{4,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = 3$
$D_{5,2}$	$D_{5,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = 3$

Graf Prisma	Dekomposisi	H –dekomposisi	Banyak simpul dan sisi
$D_{6,2}$	$D_{6,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = V(H_6) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = E(H_6) = 3$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$D_{m,2}$	$D_{m,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus \dots \oplus H_m$	$H_i = 3K_2$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = \dots = V(H_m) = 6$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = \dots = E(H_m) = 3$

Dari Tabel 1 berlaku teorema berikut.

Teorema 9 Graf prisma $D_{m,2}$, dengan $m \geq 3$ merupakan $3K_2$ –dekomposisi.

Bukti

Diambil sebarang graf prisma $D_{m,2}$, dengan $m \geq 3$ yaitu $V(D_{m,2}) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{2m}\}$ dan $E(D_{m,2}) = \{(w_k, w_{k+1}), (w_{k+1}, w_{k+2}), \dots, (w_m, w_1)\} \cup \{(w_k, w_{k+m}), (w_{k+1}, w_{k+1+m}), \dots, (w_m, w_{2m})\} \cup \{(w_{k+m}, w_{k+1+m}), (w_{k+1+m}, w_{k+2+m}), \dots, (w_{2m}, w_{1+m})\}$ dengan $k = 1$.

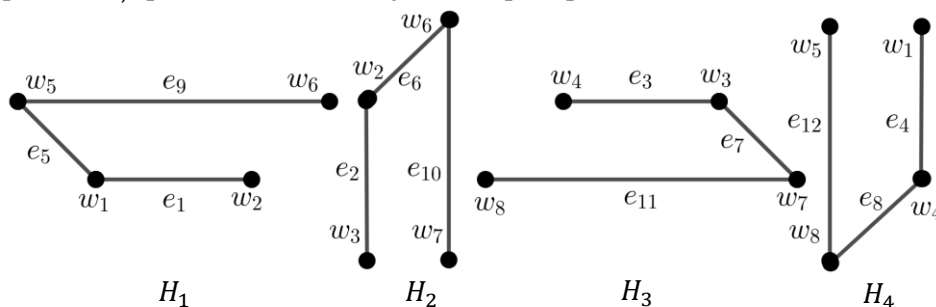
Partisi graf prisma $D_{m,2}$ menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berbentuk K_2 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$, dan $H_i \cong H_j$. Partisi graf prisma $D_{m,2}$ sebagai berikut.

$H_i = \{(w_i, w_{i+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$, dimana setiap $i + 1, i + 2 > m$ maka $i + 1$ dan $i + 2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(mod m)$.

Untuk menunjukkan bahwa pada setiap subgraf H_i saling lepas dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Diandaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka $\exists e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini mengartikan bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (w_i, w_{i+m})$ atau (w_{i+1}, w_{i+2}) atau (w_{i+1+m}, w_{i+2+m}) dan $e_k \in H_j$ maka $e_k = (w_j, w_{j+m})$ atau (w_{j+1}, w_{j+2}) atau (w_{j+1+m}, w_{j+2+m}) . Akibatnya $(w_i, w_{i+m}) = (w_j, w_{j+m})$, $(w_{i+1}, w_{i+2}) = (w_{j+1}, w_{j+2})$ dan $(w_{i+1+m}, w_{i+2+m}) = (w_{j+1+m}, w_{j+2+m})$, sehingga $i = j$. Jika $i = j$, maka untuk $i + 1, i + 2 > m$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1, 2, 3, \dots, t(mod m)$, sehingga pada setiap subgraf tidak terdapat sisi yang sama. Dikarenakan sebab itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$ kontradiksi dengan pengandaian. Sedemikian hingga $D_{m,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t, E|H_i| = 3$ maka $D_{m,2}$ merupakan $3K_2$ –dekomposisi.

Graf prisma $D_{4,2}$ dipartisi menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ berbentuk P_4

Graf prisma $D_{4,2}$ akan dipartisi menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ berbentuk P_4 . Pengelompokkan partisi sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ pada Gambar 8 ditunjukkan seperti pada Gambar 10.



Gambar 10 Subgraf dari Graf Prisma $D_{4,2}$ dalam Bentuk P_4

Berdasarkan Gambar 10 terlihat bahwa diperoleh 4 subgraf H_i untuk $i = 1,2,3,4$ dari $E(D_{4,2})$, yaitu sebagai berikut.

$$H_1 = \{(w_1, w_2), (w_1, w_5), (w_5, w_6)\},$$

$$H_2 = \{(w_2, w_3), (w_2, w_6), (w_6, w_7)\},$$

$$H_3 = \{(w_3, w_4), (w_3, w_7), (w_7, w_8)\}, \text{ dan}$$

$$H_4 = \{(w_4, w_1), (w_4, w_8), (w_8, w_5)\}.$$

Pada masing-masing subgraf terdiri dari 3 sisi membentuk graf lintasan P_4 . Formula pengelompokkan subgraf yang diperoleh adalah $H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m})\}$, dimana setiap $i + 1 > m$ maka $i + 1$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $1,2,3, \dots, t(mod m)$.

Pada H_4 , $i + 1 > m$ maka untuk simpul w_5 dan w_9 yaitu bilangan 5 dan 9 di ambil sebagai $1(mod 4)$ dan $5(mod 4)$.

Partisi graf $D_{4,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$ dan $H_i \cong P_4$ untuk setiap i , maka graf prisma $D_{4,2}$ dikatakan sebagai P_4 -dekomposisi. Dengan menggunakan formula yang sama maka dapat menentukan dekomposisi graf dengan jumlah simpul m yang berbeda-beda yang disajikan dalam tabel 2.

Tabel 2 Dekomposisi dari Graf Prisma $D_{m,2}$ dalam bentuk P_4

Graf Prisma	Dekomposisi	H –dekomposisi	Banyak simpul dan sisi
$D_{3,2}$	$D_{3,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$ (3 partisi)	$H_i = P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 3$
$D_{4,2}$	$D_{4,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$	$H_i = P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = 3$
$D_{5,2}$	$D_{5,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5$	$H_i = P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = 3$
$D_{6,2}$	$D_{6,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$	$H_i = P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = V(H_6) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = E(H_6) = 3$
⋮	⋮	⋮	⋮
$D_{m,2}$	$D_{m,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus \dots \oplus H_m$	$H_i = P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = \dots = V(H_m) = 4$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = \dots = E(H_m) = 3$

Dari Tabel 2 berlaku teorema berikut.

Teorema 10 Graf prisma $D_{m,2}$, dengan $m \geq 3$ merupakan P_4 -dekomposisi.

Bukti

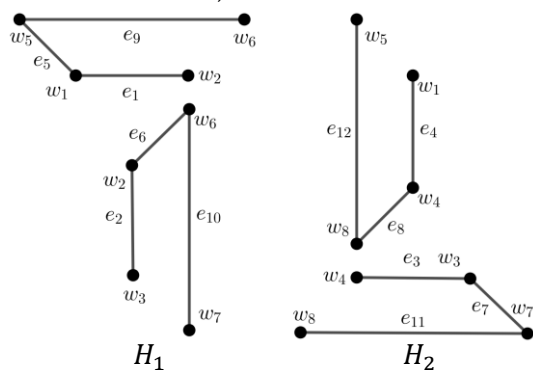
Diambil sebarang graf prisma $D_{m,2}$, dengan $m \geq 3$ yaitu $V(D_{m,2}) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{2m}\}$ dan $E(D_{m,2}) = \{(w_k, w_{k+1}), (w_{k+1}, w_{k+2}), \dots, (w_m, w_1)\} \cup \{(w_k, w_{k+m}), (w_{k+1}, w_{k+1+m}), \dots, (w_m, w_{2m})\} \cup \{(w_{k+m}, w_{k+1+m}), (w_{k+1+m}, w_{k+2+m}), \dots, (w_{2m}, w_{1+m})\}$ dengan $k = 1$.

Partisi graf prisma $D_{m,2}$ menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berbentuk P_4 , dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$, dan $H_i \cong H_j$. Partisi graf prisma $D_{m,2}$ sebagai berikut.

$$H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m})\}, \text{ dimana setiap } i + 1 > m \text{ maka } i + 1 \text{ disebut sebagai bilangan bulat } i = 1,2,3, \dots, t(mod m).$$

Untuk menunjukkan bahwa pada setiap subgraf H_i saling lepas dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Diandaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka terdapat $e_k \in H_i \cap H_j, k \in \mathbb{N}$. Hal ini mengartikan bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (w_i, w_{i+1})$ atau (w_i, w_{i+m}) atau (w_{i+m}, w_{i+1+m}) dan $e_k \in H_j$ maka $e_k = (w_j, w_{j+1})$ atau (w_j, w_{j+m}) atau (w_{j+m}, w_{j+1+m}) . Akibatnya $(w_i, w_{i+1}) = (w_j, w_{j+1}), (w_i, w_{i+m}) = (w_j, w_{j+m})$ dan $(w_{i+m}, w_{i+1+m}) = (w_{j+m}, w_{j+1+m})$, sehingga $i = j$. Jika $i = j$ maka setiap $i + 1 > m$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(\text{mod } m)$, sehingga pada setiap subgraf tidak terdapat sisi yang sama. Dikarenakan sebab itu diperoleh $i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$ kontradiksi dengan pengandaian. Sedemikian hingga $D_{m,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t, E|H_i| = 3$ maka $D_{m,2}$ merupakan P_4 –dekomposisi.

Pada graf prisma $D_{4,2}$ yang dipartisi menjadi subgraf H_i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, t$ berbentuk P_4 juga dapat dikelompokkan menjadi subgraf berbentuk $2P_4$, namun hanya berlaku ketika m adalah bilangan genap. Pengelompokan partisi sisi dari graf prisma $D_{4,2}$ pada Gambar 8 ditunjukkan seperti pada Gambar 11.



Gambar 11 Subgraf dari Graf Prisma $D_{4,2}$ dalam bentuk $2P_4$

Berdasarkan Gambar 11 diperoleh 2 subgraf H_i untuk $i = 1, 2$ dari $E(D_{4,2})$, yaitu sebagai berikut.

$$H_1 = \{(w_1, w_2), (w_1, w_5), (w_5, w_6), (w_2, w_3), (w_2, w_6), (w_6, w_7)\}.$$

$$H_2 = \{(w_3, w_4), (w_3, w_7), (w_7, w_8), (w_4, w_1), (w_4, w_8), (w_8, w_5)\}.$$

Pada masing-masing subgraf terdiri dari 6 sisi membentuk sebanyak 2 graf lintasan P_4 . Formula pengelompokan partisi subgraf yang diperoleh adalah sebagai berikut.

$$H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1}, w_{i+1+m}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$$

dimana setiap $i + 2 > m$ maka $i + 2$ disebut sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(\text{mod } m)$.

Pada H_2 karena $i + 2 > m$, maka untuk simpul w_5 dan w_9 yaitu bilangan 5 dan 9 di ambil sebagai $1(\text{mod } 4)$ dan $5(\text{mod } 4)$.

Partisi graf $D_{4,2} = H_1 \oplus H_2$ dan $H_i \cong 2P_4$ untuk setiap i , maka graf prisma $D_{4,2}$ dikatakan sebagai $2P_4$ –dekomposisi. Dengan menggunakan formula yang sama maka dapat menentukan dekomposisi graf dengan jumlah simpul m yang berbeda yang disajikan dalam tabel 3.

Tabel 1 Dekomposisi dari Graf Prisma $D_{m,2}$ dalam Bentuk $2P_4$

Graf Prisma	Dekomposisi	H –dekomposisi	Banyak simpul dan sisi
$D_{4,2}$	$D_{4,2} = H_1 \oplus H_2$ (3 partisi)	$H_i = 2P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = 6$
$D_{6,2}$	$D_{6,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3$	$H_i = 2P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = 6$
$D_{8,2}$	$D_{8,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4$	$H_i = 2P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = 6$

Graf Prisma	Dekomposisi	H –dekomposisi	Banyak simpul dan sisi
$D_{10,2}$	$D_{10,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6$	$H_i = 2P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = V(H_4) = V(H_5) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = E(H_4) = E(H_5) = 6$
⋮	⋮	⋮	⋮
$D_{\frac{m}{2},2}$	$D_{\frac{m}{2},2} = H_1 \oplus H_2 \oplus H_3 \oplus H_4 \oplus H_5 \oplus H_6 \oplus \dots \oplus H_{\frac{m}{2}}$	$H_i = 2P_4$	$ V(H_1) = V(H_2) = V(H_3) = \dots = V(H_{\frac{m}{2}}) = 8$ $ E(H_1) = E(H_2) = E(H_3) = \dots = E(H_{\frac{m}{2}}) = 6$

Berdasarkan Tabel 3 diperoleh teorema berikut:

Teorema 11 Graf prisma $D_{m,2}$ dengan $m \geq 3$, m bilangan genap merupakan $2P_4$ –dekomposisi.

Bukti

Diambil sebarang graf prisma $D_{m,2}$, dengan $m \geq 3$ yaitu $V(D_{m,2}) = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{2m}\}$ dan $E(D_{m,2}) = \{(w_k, w_{k+1}), (w_{k+1}, w_{k+2}), \dots, (w_m, w_1)\} \cup \{(w_k, w_{k+m}), (w_{k+1}, w_{k+1+m}), \dots, (w_m, w_{2m})\} \cup \{(w_{k+m}, w_{k+1+m}), (w_{k+1+m}, w_{k+2+m}), \dots, (w_{2m}, w_{1+m})\}$ dengan $k = 1$.

Partisi graf prisma $D_{m,2}$ menjadi subgraf $H_i = \langle E_i \rangle$ yang berbentuk $2P_4$, dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$, dan $H_i \cong H_j$. Partisi graf prisma $D_{m,2}$ sebagai berikut.

$H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1}, w_{i+1+m}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$ dimana setiap $i + 2 > m$ maka $i + 2$ disebut sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(mod m)$.

Untuk menunjukkan bahwa pada setiap subgraf H_i saling lepas dimana $i \neq j$ maka $H_i \cap H_j = \emptyset$. Diandaikan $H_i \cap H_j \neq \emptyset$ maka terdapat $e_k \in H_i \cap H_j$, $k \in \mathbb{N}$. Hal ini mengartikan bahwa $e_k \in H_i$ dan $e_k \in H_j$. Jika $e_k \in H_i$ maka $e_k = (w_i, w_{i+1})$ atau (w_i, w_{i+m}) atau (w_{i+m}, w_{i+1+m}) atau (w_{i+1}, w_{i+2}) atau (w_{i+1}, w_{i+1+m}) atau (w_{i+1+m}, w_{i+2+m}) dan $e_k \in H_j$ maka $e_k = (w_j, w_{j+1})$ atau (w_j, w_{j+m}) atau (w_{j+m}, w_{j+1+m}) atau (w_{j+1}, w_{j+2}) atau (w_{j+1}, w_{j+1+m}) atau (w_{j+1+m}, w_{j+2+m}) . Akibatnya $(w_i, w_{i+1}) = (w_j, w_{j+1})$, $(w_i, w_{i+m}) = (w_j, w_{j+m})$, $(w_{i+m}, w_{i+1+m}) = (w_{j+m}, w_{j+1+m})$, $(w_{i+1}, w_{i+2}) = (w_{j+1}, w_{j+2})$, $(w_{i+1}, w_{i+1+m}) = (w_{j+1}, w_{j+1+m})$, $(w_{i+1+m}, w_{i+2+m}) = (w_{j+1+m}, w_{j+2+m})$, maka $i = j$. Jika $i = j$ maka setiap $i + 2 > m$ disebut sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(mod m)$ sehingga pada setiap subgraf tidak terdapat sisi yang sama. Dikarenakan sebab itu diperoleh $i \neq j$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ kontradiksi dengan pengandaian. Sedemikian hingga $D_{m,2} = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_t$, $E|H_i| = 6$ maka $D_{m,2}$ merupakan $2P_4$ –dekomposisi.

KESIMPULAN

Berdasarkan pada hasil dan pembahasan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

- Graf prisma $D_{m,2}$ dengan $m \geq 3$ merupakan $3K_2$ –dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf lengkap K_2 dan merupakan P_4 –dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari graf lintasan P_4 . Lebih khusus ketika m adalah bilangan genap maka berlaku $2P_4$ –dekomposisi yaitu partisi graf berbentuk subgraf yang terdiri dari 2 graf lintasan P_4 .
- Graf prisma $D_{m,2}$ dimana $m \geq 3$ dengan pengelompokkan subgrafnya $H_i = \{(w_i, w_{i+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$, dimana setiap $i + 1$, $i + 2 > m$ maka $i + 1$

dan $i + 2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(\text{mod } m)$ maka berlaku $3K_2$ –dekomposisi. Sedangkan Graf prisma $D_{m,2}$ dimana $m \geq 3$ dengan pengelompokkan subgraf $H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m})\}$, dimana setiap $i + 1 > m$ maka $i + 1$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(\text{mod } m)$ maka berlaku P_4 –dekomposisi. Lebih khusus ketika m bilangan genap dengan pengelompokkan subgraf $H_i = \{(w_i, w_{i+1}), (w_i, w_{i+m}), (w_{i+m}, w_{i+1+m}), (w_{i+1}, w_{i+2}), (w_{i+1}, w_{i+1+m}), (w_{i+1+m}, w_{i+2+m})\}$ dimana setiap $i + 2 > m$ maka $i + 2$ dinyatakan sebagai bilangan bulat $i = 1, 2, 3, \dots, t(\text{mod } m)$ maka berlaku $2P_4$ –dekomposisi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Mustofa, Putri Rizqi dan Kuswardi, Yemi., 2018, Dekomposisi Graf Matahari, *Jurnal Matematika UNS.*, 8:20-30.
- [2]. Nugroho, Agung., 2006, metode pengaturan penggunaan tenaga listrik dalam upaya penghematan bahan bakar pembangkit dan energi, *Jurnal UNDIP.*, 11: 45-51.
- [3]. Rahmawati, Nur dan Rahajeng, Budi., 2014, Dekomposisi Graf Sikel, Graf Roda, Graf Gir, dan Graf Persahabatan, *Jurnal UNESA.*, 3: 64-71.
- [4]. Baca, M. and Miller, M., 2008, *Super Edge-Antimagic Graphs: A Wealth of Problem and Some Solution*, Florida: Brown Walker Press.
- [5]. Na'imah, This'atun. 2020. *Dekomposisi Graf Kincir W_2^m* . Malang : UIN Malang Press.
- [6]. Rahayu, Risti Dwi dan Kuswardi, Yemi., 2018, Dekomposisi Graf Helm, *Jurnal Matematika UNS.*, 8:31-45
- [7]. Natasia, Merlynda Marcellina dan Rahajeng, Budi., 2022, Dekomposisi Graf Bintang, Graf Bintang Ganda dan Graf Sapu, *Jurnal Matematika UNESA.*, 10:218-225

MUHLISIN : Jurusan Matematika FMIPA UNTAN, Pontianak
 muhlisin020696@student.untan.ac.id