

Análisis numérico 3D de una rotura de presa utilizando el método VOF y el modelo de turbulencia LES

3D numerical analysis of a dam - break using VOF method and LES turbulence model

Sánchez-Cordero, E.^{a,b}, Boix, J.^{b1}, Gómez, M.^{b2}, Bladé, E.^{b3}

^aDepartamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Cuenca, Av. 12 de Abril s/n., 10150, Cuenca, Ecuador.
E-mail: esteban.sanchezc@ucuenca.edu.ec

^bInstitut Flumen. Universitat Politècnica de Catalunya. C/ Jordi Girona 1-3, 08034, Barcelona, España.
E-mail: ^{b1} jboliva95@hotmail.com, ^{b2} manuel.gomez@upc.edu, ^{b3} ernest.blade@upc.edu

Recibido: 28/01/2018

Aceptado: 17/05/2018

Publicado: 31/07/2018

Citar como: Sánchez-Cordero, E., Boix, J., Gómez, M., Bladé, E. 2018. 3D numerical analysis of a dam - break using VOF method and LES turbulence model. *Ingeniería del agua*, 22(3), 167-176. <https://doi.org/10.4995/la.2018.9374>

RESUMEN

El presente trabajo muestra un análisis numérico 3D del comportamiento del flujo de agua en una rotura de presa a escala de laboratorio. La simulación se realizó utilizando el software de dinámica de fluidos computacional (CFD) basado en el método de volúmenes finitos (FVM) – OpenFOAM. En el modelo numérico la turbulencia es tratada con la metodología LES (*Large Eddy Simulation*) y el método VOF (*Volume of Fluid*) es usado para la captura de la superficie libre del agua. Los resultados numéricos obtenidos se comparan con datos experimentales publicados haciendo uso de las variables de calado y presión. Los resultados muestran que la configuración del código numérico 3D es capaz de reproducir satisfactoriamente la variación temporal de las variables en estudio, con tendencias correctas y una alta correlación con los valores experimentales.

Palabras clave | rotura de presa; 3D; VOF; LES; OpenFOAM.

ABSTRACT

In this paper, three-dimensional numerical analysis of dam-break flow pattern in a laboratory-scale is reported. The simulation was performed using the open source computational fluid dynamics (CFD) solver based on finite volume method (FVM) – OpenFOAM. Turbulence is treated using large eddy simulation (LES) approach. The free surface is tracked using the Volume of Fluid method (VOF). The numerical results are assessed against published experimental data. Water depth and pressure measures are used to validate the numerical model. The results demonstrate that the 3D numerical configuration satisfactorily reproduces the temporal variation of these variables with correct trends and high correlation with the experimental values.

Key words | dam-break; three-dimensional; VOF; LES; OpenFOAM.

INTRODUCCIÓN

Una presa es una obra que se lleva a cabo para contener o regular el curso del agua en un cauce fluvial. La onda generada por la falla o rotura repentina de una presa puede ocasionar un importante impacto sobre la población, incluyendo la pérdida de vidas humanas, y un severo impacto al medio ambiente. De esta manera, el comportamiento del flujo de agua en una rotura de presa ha sido un tema de trabajo durante estos últimos años debido tanto a su interés práctico como académico. Numerosos modelos numéricos para la resolución de roturas de presa basados en las ecuaciones de Saint-Venant en 1D y 2D han sido utilizados. A causa del avance tanto en poder computacional como en la capacidad de memoria disponible de los computadores, los modelos numéricos 3D basados en las ecuaciones de Navier-Stokes se han convertido en una alternativa de análisis en este tiempo.

Soluciones teóricas para la propagación de ondas de flujo fueron propuestas por (Stoker, 1957; Wu *et al.*, 1999). Simulaciones numéricas con ecuaciones 2D conocidas como shallow water equations (SWE) fueron realizadas por (Fraccarollo y Toro, 1995; Frazão y Zech, 2002). Otros ejemplos en los cuales también se obtuvo una representación adecuada usando modelos 2D fueron presentados por Aricò *et al.* (2007) y Ancy *et al.* (2008). Los modelos numéricos tratados hasta el momento suponen velocidades y aceleraciones verticales despreciables lo que da lugar a una distribución hidrostática de presiones. Sin embargo, cuando se produce una rotura abrupta de una presa, toda el agua almacenada en el embalse es liberada bruscamente y el flujo es influenciado principalmente por la aceleración vertical debida a la gravedad, haciendo que la hipótesis de la distribución de presión hidrostática no sea válida. El uso de enfoques numéricos 3D puede aportar información de importancia en el comportamiento del flujo en situaciones como las expuestas anteriormente. Así, diferentes modelos numéricos 3D han sido utilizados con bastante éxito en la captura del comportamiento dinámico del fenómeno en mención (Biscarini *et al.*, 2010; Liang *et al.*, 2007)

El presente artículo presenta un análisis numérico 3D de las características del flujo en una rotura de presa a escala de laboratorio mediante el uso del código OpenFOAM. Los resultados numéricos obtenidos son evaluados al compararlos con los datos experimentales de laboratorio presentados por Kleefsman *et al.* (2005). De esta manera, la configuración del modelo numérico 3D se utiliza para analizar la evolución en el tiempo de las variables de calado y presión en diferentes puntos del dominio del problema.

DESCRIPCIÓN DEL MODELO EXPERIMENTAL

En la Figura 1 se muestra el esquema del experimento de laboratorio realizado por Kleefsman *et al.* (2005). Las dimensiones del tanque de ensayo fueron de $3.22 \times 1 \times 1$ m. Al inicio, la parte derecha del tanque se cierra usando una compuerta y se llena con agua hasta una altura de 0.55 m. Luego la compuerta se abre bruscamente y el agua del tanque se vacía. En el experimento se realizaron medidas de calado y presión. Se utilizaron cuatro sensores para la medición de calado y ocho sensores para la medición de los valores de presión. Se colocaron tres sensores de medición de calado fuera del estanque inicial del experimento y uno dentro del mismo; mientras que, los valores de presión fueron tomados en el obstáculo del experimento.

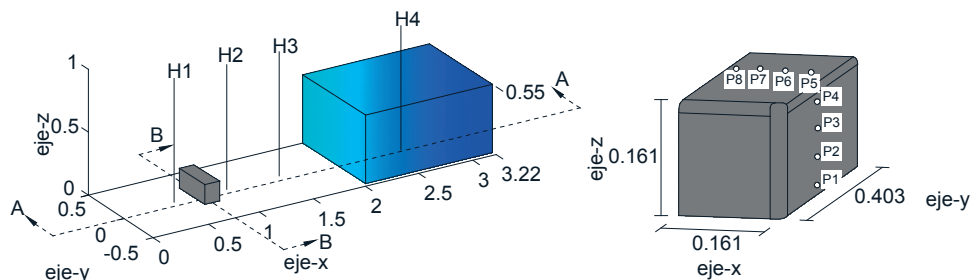


Figura 1 | Esquema del modelo experimental – posiciones de las medidas de calado y presión (“Adaptado de Kleefsman *et al.* (2005)”).

DESCRIPCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

En el presente trabajo se utiliza la plataforma de código abierto y libre acceso para la simulación de dinámica de fluidos computacional (CFD) basado en el método de volúmenes finitos (FVM) - OpenFOAM. Al tratarse de un modelo CFD, es necesario discretizar el dominio geométrico mediante un mallado el cual crea los denominados volúmenes o elementos.

Ecuaciones de Gobierno

Modelo de Flujo

En este apartado se presenta la ecuación de conservación de masa y la ecuación de conservación de momento (Liu and García, 2008):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot ((\mu + \mu_t) \mathbf{S}) = -\nabla p + \rho g + \sigma K \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|} \quad (2)$$

En donde, ρ es la densidad, \mathbf{u} es la velocidad, p es la presión, μ_t es el coeficiente de viscosidad turbulenta (*eddy viscosity*), μ es la viscosidad dinámica, \mathbf{S} es el tensor de deformaciones ($\mathbf{S} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$), σ es la tensión superficial, K es la curvatura superficial, y α es la fracción de volumen de fase (valor entre 0-1).

Modelo de la superficie libre

Para la captura de la superficie libre de agua se utiliza el modelo denominado Volumen del fluido VOF por sus siglas en inglés (*Volume of Fluid*). El modelo introduce el concepto de fracción de volumen de fase (α), marcada por una función de seguimiento continua en el espacio y tiempo. Para calcular α se introduce una ecuación de convección pura de conservación de las especies

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla(\alpha \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\alpha(1 - \alpha) \mathbf{u}_r) = 0 \quad (3)$$

OpenFOAM implanta el tercer término de la expresión (3) denominado compresión de fase; en donde, $\mathbf{u}_r = \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_g$. La densidad ρ y viscosidad dinámica μ son definidas como:

$$\rho = \alpha \rho_l + (1 - \alpha) \rho_g \quad (4)$$

$$\mu = \alpha \mu_l + (1 - \alpha) \mu_g \quad (5)$$

en donde el subíndice l indica la parte de agua y g la parte de aire.

La suma total de las fracciones en un elemento determinado para todo tiempo debe ser igual a uno. De esta manera, cada celda computacional se encuentra con valores de α entre 0 y 1. Si $\alpha=0$ implica que la celda está vacía, mientras que si el valor de $\alpha=1$ la celda está llena de agua. Por el contrario, si el valor de α en una celda se encuentra entre 0 y 1, dicha celda contiene la interfaz entre las dos fases.

Modelo de Turbulencia

En este estudio se aplica el modelo de simulación de grandes remolinos LES por sus siglas en inglés (*Large Eddy Simulation*). El modelo LES se basa en un filtrado espacial de las ecuaciones de gobierno del fluido (1) y (2), cuya idea es resolver las grandes escalas de turbulencia y aproximar el efecto de las escalas pequeñas. En este proceso aparecen los términos denominados submalla que son función solamente de la parte submalla de la variable. Para el análisis de este caso, se utiliza el modelo de submalla propuesto por Smagorinsky (1963). Este modelo está basado en la aproximación de Boussinesq, que considera que los efectos de las pequeñas escalas sobre las grandes estarán dados por una viscosidad turbulenta y el tensor de deformación filtrado (Salinas-Vázquez *et al.*, 2007).

Así, la viscosidad turbulenta (*eddy viscosity*) es modelada como:

$$\mu_t = C_s^2 \rho \Delta^2 |\mathbf{S}| \quad (6)$$

en donde, C_s es un parámetro constante del modelo, el cual varía en un rango de 0.065-0.25 (Jones y Wille, 1996; Moin y Kim, 1982). van Balen *et al.* (2010), realizó un análisis de los resultados numéricos obtenidos al variar los valores de la constante C_s , sin encontrar una discrepancia significativa en los resultados con un valor de 0.1; este valor será adoptado en este estudio. ρ representa la densidad del fluido. Δ es la longitud del filtro; el cual, está relacionado con el tamaño de la celda de malla local, $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$. \mathbf{S} es la escala mayor del tensor de deformaciones del campo resuelto de velocidades.

Condiciones de contorno y condiciones iniciales

En la configuración numérica del modelo, los lados que rodean al experimento y el fondo se definen con la condición wall. Esto significa, una condición de no-deslizamiento, $\mathbf{u} = 0$, impuesta con una condición de Dirichlet; mientras que, para la presión, se impone una condición de Neuman con un valor de gradiente normal igual a cero.

En la parte superior de la caja experimental se impone una condición de contorno atmosférica. Esto se logra mediante la asignación del valor cero a la variable denominada presión total; por el contrario, para la velocidad se asigna una condición de Neuman con un valor de gradiente normal igual a cero.

Finalmente, al comienzo de la simulación se establece una altura inicial de agua, la misma que representa el volumen inicial del experimento.

Configuración del mallado del dominio

En el presente estudio, las características de turbulencia a pequeña escala en la capa límite atmosférica no es de interés primario; razón por la cual, se hace uso de una malla relativamente gruesa (Stoll and Porte-Agel, 2006). El dominio se discretiza utilizando elementos cartesianos hexaédricos con una densificación hacia las paredes, el fondo y el obstáculo del experimento. Así, cerca de las mismas se emplea un total de 10 celdas con una dimensión de 1 mm. En el resto del dominio, se utiliza un aumento progresivo del tamaño de malla. Con el fin de encontrar una configuración adecuada del mallado del dominio, se presenta un análisis de sensibilidad con tres diferentes tamaños empleados como valores máximos (20 mm, 15 mm y 10 mm). En la Figura 2, se puede observar la distribución del tamaño de malla utilizado para el análisis en los cortes A-A y B-B (Figura 1)

La variable de calado se escoge como variable de análisis de este apartado, debido a la fiabilidad que presenta la medición de sus valores. Para cuantificar el ajuste entre los valores calculados con el modelo numérico y los valores experimentales se emplea el Coeficiente de determinación (R^2). La Figura 3 muestra como el valor estadístico R^2 incrementa cuando el tamaño máximo de malla decrece en los cuatro puntos de medición de la variable de calado. Además, se puede observar una tendencia creciente del valor estadístico al refinar la malla. Cabe indicar que los valores estadísticos son bastante altos en todos los puntos analizados. Por las razones expuestas, el tamaño máximo de malla escogido para el análisis del presente trabajo será de 1 cm.

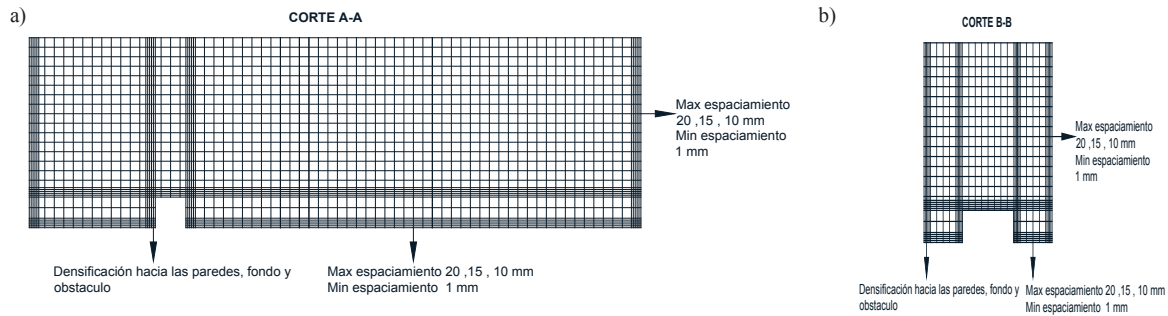


Figura 2 | Esquema de la configuración del mallado del dominio, detalle en los cortes: a) A-A, b) B-B.

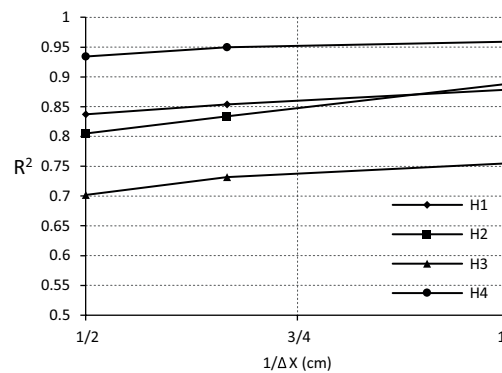


Figura 3 | Análisis de sensibilidad de malla usando la variable calado.

Configuración numérica

El dominio se discretiza utilizando elementos cartesianos hexaédricos de tamaño máximo de 1 cm con una densificación hacia las paredes, el fondo y el obstáculo del experimento. El algoritmo PIMPLE se emplea para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. Se aplica tres bucles para la corrección del valor de presión. Los términos de gradiente son tratados con esquemas Gaussianos de segundo orden y un esquema lineal de interpolación. Para los términos convectivos de velocidad, se impone un esquema lineal de segundo orden. Mientras que, para los términos transitorios se aplica un esquema de primer orden de Euler. Se simuló 7 s continuos con un paso de tiempo adaptado automáticamente a un número de Courant máximo de 0.50. Este valor es impuesto debido a que provee estabilidad numérica con un tiempo de cálculo adecuado. Para este modelo se paraleliza el proceso. El tiempo total de simulación del experimento fue de 146 horas en un computador Intel Core i7-6700K con una capacidad de memoria RAM 32 GB.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para analizar las capacidades del modelo numérico en reproducir las variables de flujo en una rotura de presa, los resultados numéricos obtenidos con OpenFOAM son valorados con los datos experimentales descritos en el apartado denominado Descripción del modelo experimental. Los datos proporcionados en el experimento se encuentran a una escala temporal de 0.001 s; por otro lado, los resultados numéricos se obtuvieron con un espaciamiento temporal de 0.05 s. El Coeficiente de determinación (R^2) se utiliza para cuantificar el ajuste de las variables de calado y presión en los diferentes puntos en estudio.

Calados

La Figura 4 muestra la evolución en el tiempo de la variable de calado. Una evaluación cualitativa de los resultados muestra que la configuración del modelo 3D es capaz de reproducir adecuadamente la variabilidad en el tiempo de la altura de agua en los cuatro puntos de estudio. Se puede observar que el modelo numérico 3D reproduce de una manera bastante precisa la variable en estudio durante los 2 primeros segundos de la simulación, tiempo que necesita la onda de agua para alcanzar la pared contraria del experimento. Una vez que la onda de agua golpea dicha pared, se produce un rebote en el cual la onda regresa en dirección al lugar de partida del experimento. El punto de medición H4 se encuentra ubicado en el interior del tanque de agua. Se puede observar en la Figura 4-d, que la onda de agua alcanza este punto a los 4 s, destacando la precisión del modelo numérico 3D en capturar lo descrito. En lo referente al punto H3 (Figura 4-c), punto de medición situado aguas arriba del obstáculo, el modelo numérico muestra un pequeño tiempo de retraso de 0.2 s en la captura del valor de la altura de agua en el $t=2.35$ s, situación en la cual la onda de agua está regresando a la posición inicial del experimento por primera vez luego de chocar en la pared contraria.

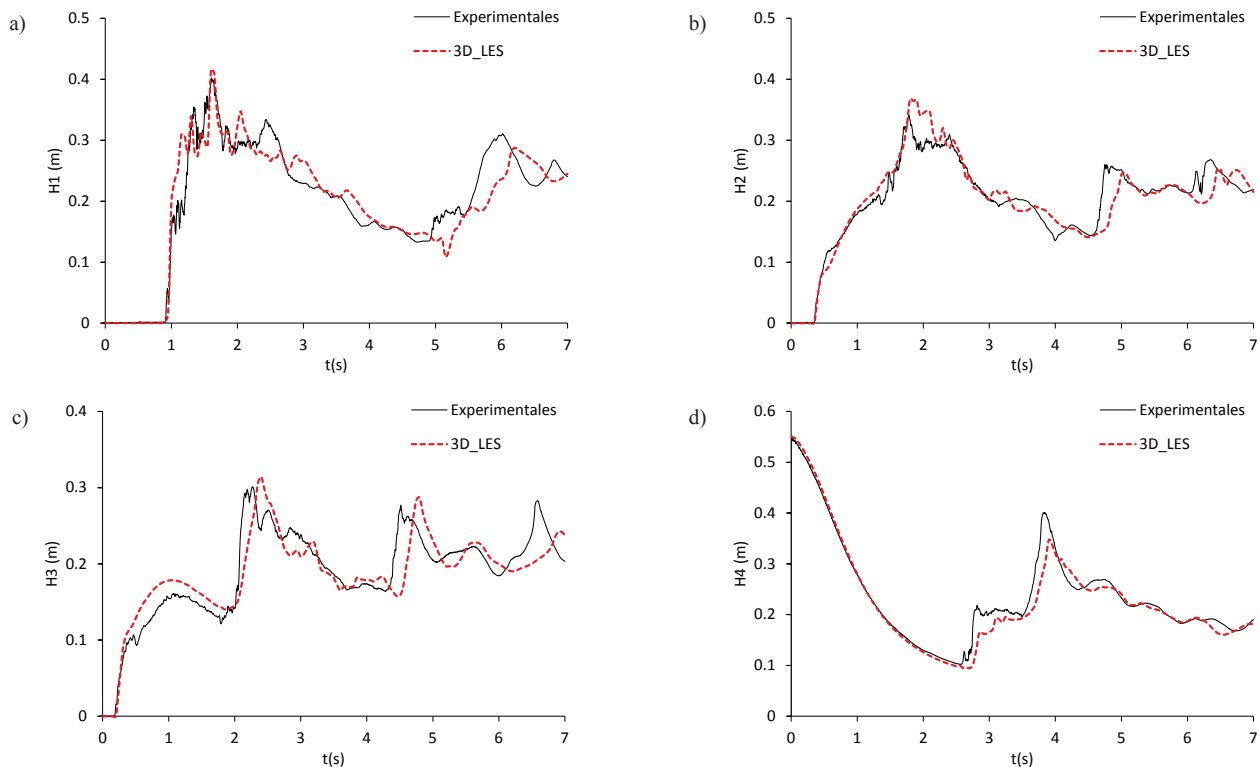


Figura 4 | Comparación de valores de calado en función del tiempo entre los datos numéricos 3D y los datos experimentales en: a) H1, b) H2, c) H3 y d) H4.

Para poder cuantificar los resultados se presentan en la Figura 5 los gráficos de dispersión de los datos medidos con los datos simulados junto con el valor estadístico R^2 . El mejor ajuste de datos se da en el punto denominado H4 (Figura 5-d), como ya se hizo mención, dicho punto se encuentra en el interior del tanque de agua formado al inicio del experimento. Cabe indicar que aquí no se producen variaciones muy abruptas de la altura de agua permitiendo que el modelo numérico capture la variabilidad sin una variación significativa. Por otro lado, el punto con menor ajuste numérico se produce en H3 (Figura 5-c). Sin embargo, es importante destacar que el ajuste numérico en general es bastante satisfactorio en todos los puntos analizados.

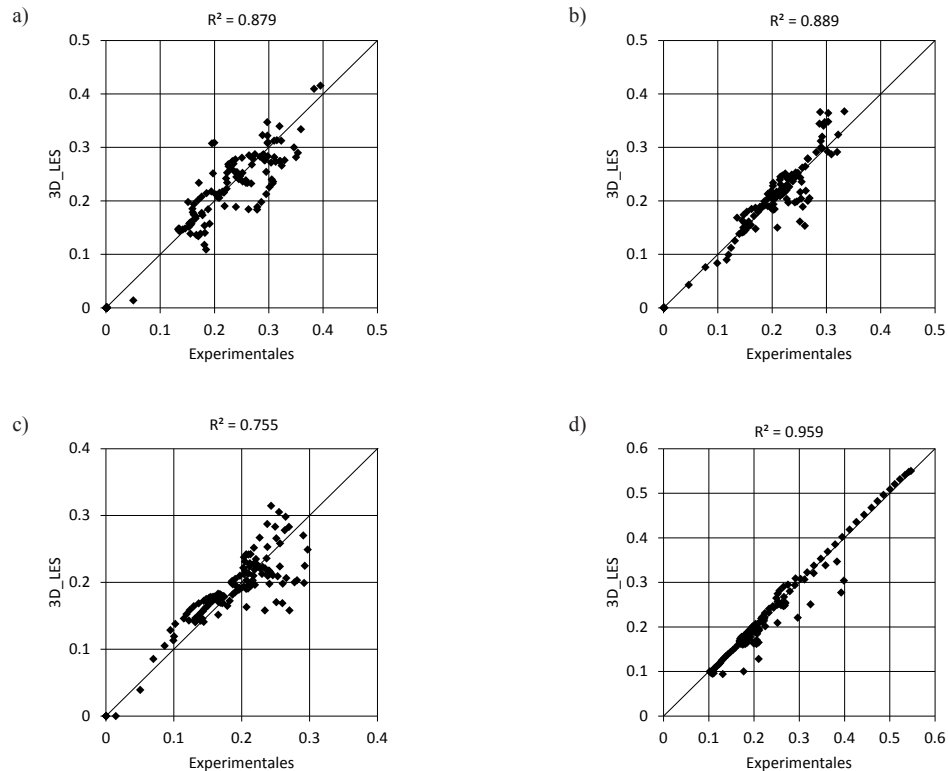


Figura 5 | Comparación de valores de calado entre los datos numéricos 3D y los datos experimentales en: a) H1, b) H2, c) H3 y d) H4.

Presión

Un análisis similar al apartado anterior es presentado en este ítem. La Figura 6 muestra la variación en el tiempo de la variable de presión medida en diferentes puntos del obstáculo. Por optimización de espacio en este apartado, no se presenta el análisis de todos los puntos de medición; así, se presenta solo el de los puntos P1, P3, P5 y P7. Es importante destacar que los puntos cercanos a los de análisis siguen un patrón similar de comportamiento. Una evaluación cualitativa muestra una mejor captura de la variación temporal de los puntos que se encuentra en la cara frontal del obstáculo (P1 y P3) que los que se encuentran en la parte superior del mismo (P5 y P7), en estos últimos se pueden observar diferencias mayores entre los valores simulados y los medidos. El modelo reproduce de una manera acertada el instante en el cual la onda golpea la parte frontal del obstáculo por primera vez. Lo que ocurre en $t=0.45$ s; sin embargo, en ambos puntos de medición se produce una subestimación del valor pico (Figura 6-a y Figura 6-b). Cabe destacar que de manera general durante todo el tiempo de simulación en estos dos puntos de análisis (P1 y P3), los datos de presión obtenidos del modelo numérico empatan adecuadamente con los datos experimentales. En los puntos P5 y P7, el modelo numérico no reproduce de una manera tan acertada los datos en el tiempo al compararlos con los datos experimentales (Figura 6-c y Figura 6-d).

Para cuantificar lo descrito se presenta en la Figura 7 los gráficos de dispersión de los datos medidos con los datos simulados junto con el valor estadístico. El mejor valor de ajuste de la serie se produce en el punto P3 (Figura 7-b), mientras que el más bajo da el análisis de la serie en el punto P7 (Figura 7-d). En la Figura 7-a y Figura 7-b que corresponden a los puntos P1 y P3, se observa que en términos generales el modelo subestima los valores experimentales, pero el ajuste en general es de una precisión adecuada. El análisis cuantitativo realizado en este apartado permite corroborar lo expuesto de una forma cualitativa, los puntos P5 y P7 que se encuentran colocados en la parte superior del obstáculo poseen menores rendimientos numéricos como se pueden observar en la Figura 7-c y Figura 7-d. Un dato a mencionar es que en el punto P5 (Figura 7-c), todos los valores experimentales superiores a 1000 Pa son subestimados por el modelo 3D.

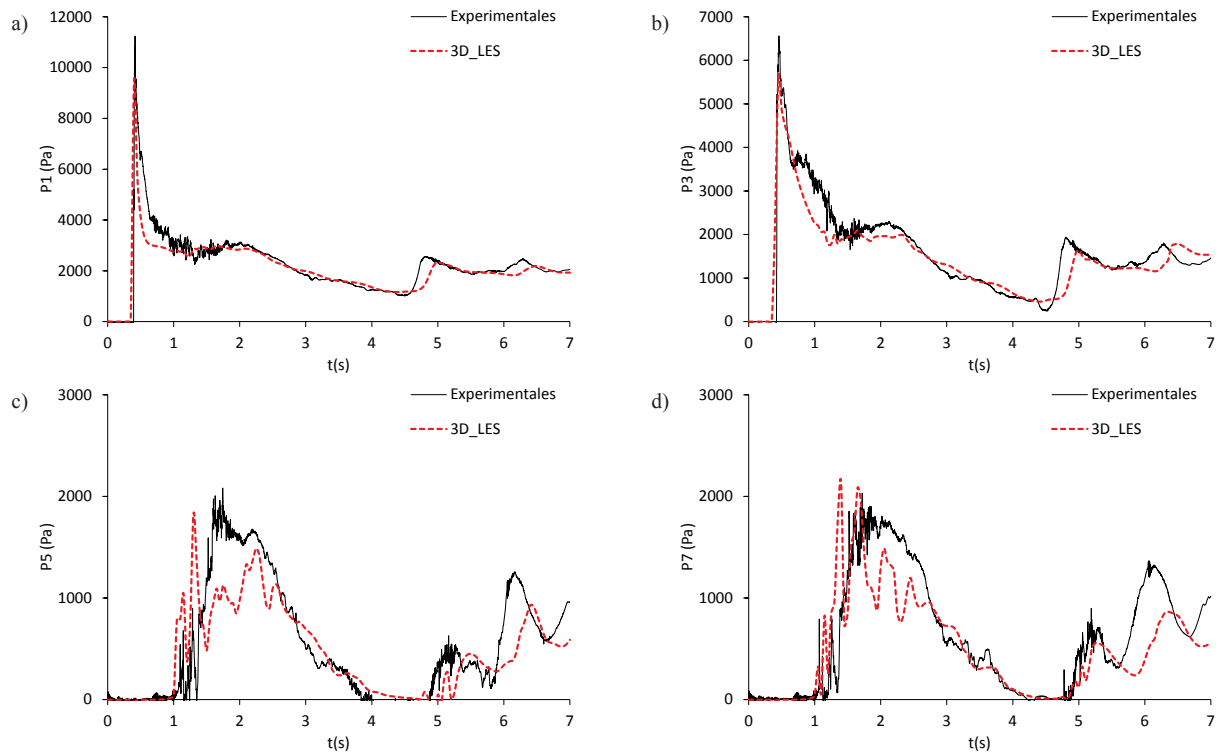


Figura 6 | Comparación de valores de presión en función del tiempo entre los datos numéricos 3D y los datos experimentales en: a) P1, b) P3, c) P5 y d) P7.

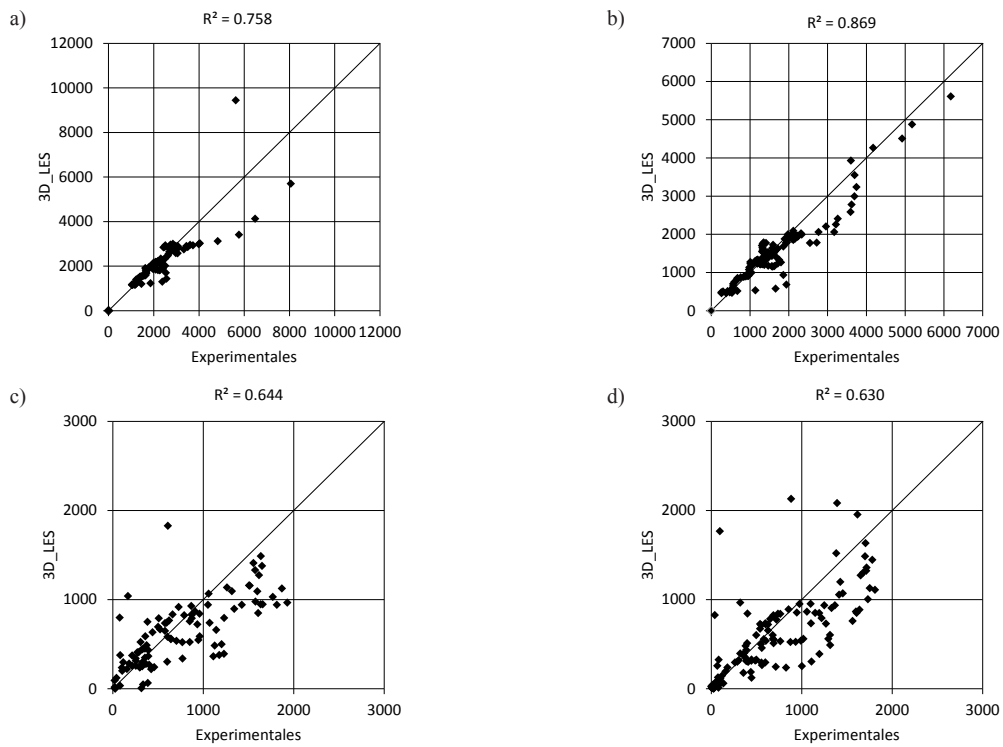


Figura 7 | Comparación de valores de presión entre los datos numéricos 3D y los datos experimentales en: a) P1, b) P3, c) P5 y d) P7.

CONCLUSIONES

Este estudio investiga la aplicabilidad del código numérico 3D OpenFOAM para el estudio de variables de flujo en una simulación de rotura de presa a escala de laboratorio. El análisis de resultados demuestra que la captura de valores de calado y presión en el tiempo llevada a cabo por la configuración del modelo numérico 3D es bastante precisa tanto cualitativamente como cuantitativamente. El modelo numérico es capaz de reproducir la dinámica involucrada en el fenómeno en estudio. Cabe anotar, que los valores de calado son reproducidos de mejor manera por el modelo 3D que los valores de presión. Aunque el ajuste entre la solución numérica y los datos del experimento físico es bastante prometedora, la aplicación del modelo numérico 3D para la simulación a una escala real sería computacionalmente demandante en tiempo y recursos.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue posible gracias al apoyo financiero otorgado por la Secretaría Nacional de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT) del Gobierno de la República del Ecuador a través de la beca doctoral del primer autor.

REFERENCIAS

- Ancey, C., Iverson, R. M., Rentschler, M., Denlinger, R. P. (2008). An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes. *Water Resources Research*, 44(1), 567-568. <https://doi.org/10.1029/2007WR006353>
- Aricò, C., Nasello, C., Tucciarelli, T. (2007). A marching in space and time (MAST) solver of the shallow water equations. Part II: The 2D model. *Advances in Water Resources*, 30(5), 1253-1271. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2006.11.004>
- van Balen, W., Blanckaert, K., Uijtewaal, W. S. J. (2010). Analysis of the role of turbulence in curved open-channel flow at different water depths by means of experiments, LES and RANS. *Journal of Turbulence*, 11(12), 1-34. <https://doi.org/10.1080/14685241003789404>
- Biscarini, C., Di Francesco, S., Manciola, P. (2010). CFD modelling approach for dam break flow studies. *Hydrology and Earth System Sciences*, 14, 705-718. <https://doi.org/10.5194/hess-14-705-2010>
- Fracarollo, L., Toro, E. F. (1995). Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems. *Journal of Hydraulic Research*, 33(6), 843-864. <https://doi.org/10.1080/00221689509498555>
- Frazão, S. S., Zech, Y. (2002). Dam Break in Channels with 90° Bend. *Journal of Hydraulic Engineering*, 128(11), 956-968. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2002\)128:11\(956\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:11(956))
- Jones, W. P., Wille, M. (1996). Large-eddy simulation of a plane jet in a cross-flow. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 17(3), 296-306. [https://doi.org/10.1016/0142-727X\(96\)00045-8](https://doi.org/10.1016/0142-727X(96)00045-8)
- Kleefsman, K. M. T., Fekken, G., Veldman, A. E. P., Iwanowski, B., Buchner, B. (2005). A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*, 206(1), 363-393. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2004.12.007>
- Liang, D., Lin, B., Falconer, R. A. (2007). Simulation of rapidly varying flow using an efficient TVD–MacCormack scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(5), 811-826. <https://doi.org/10.1002/flid.1305>
- Liu, X., García, M. H. (2008). Three-Dimensional Numerical Model with Free Water Surface and Mesh Deformation for Local Sediment Scour. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 134(4), 203-217. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(2008\)134:4\(203\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(2008)134:4(203))
- Moin, P., Kim, J. (1982). Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 118, 341-377. <https://doi.org/10.1017/S0022112082001116>

Salinas-Vázquez, M., Vicente-Rodríguez, W., Chol-Orea, E., Leyva García, V. (2007). Simulación de la turbulencia de un flujo que pasa alrededor de un cilindro de sección cuadrada a partir de la utilización de la simulación de grandes escalas y de fronteras inmersas. *Revista Mexicana de Física*, 53(6), 461-469.

Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91, 99-164. [https://doi.org/10.1175/1520-0493\(1963\)091%3C0099:GCEWTP%3E2.3.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0493(1963)091%3C0099:GCEWTP%3E2.3.CO;2)

Stoker, J. J. (James J. (1957). *Water waves: the mathematical theory with applications*. Wiley.

Stoll, R., Porte-Agel, F. (2006). Dynamic subgrid-scale models for momentum and scalar fluxes in large-eddy simulations of neutrally stratified atmospheric boundary layers over heterogeneous terrain. *Water Resources Research*, 42, 1-18. <https://doi.org/10.1029/2005WR003989>

Wu, C., Huang, G., Zheng, Y. (1999). Theoretical Solution of Dam-Break Shock Wave. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(11), 1210-1215. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1999\)125:11\(1210\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1999)125:11(1210))