

# El Porismo de Poncelet

## Parte I

Juan Salvador Garza Ledesma<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, UNAM

\* Correo electrónico: [juan.garza@ciencias.unam.mx](mailto:juan.garza@ciencias.unam.mx)

### Resumen

En esta primer parte de una serie de artículos sobre el Porismo de Poncelet, se presentan algunas pruebas elementales de casos particulares del resultado y se propone el problema de hallar cuadriláteros bicéntricos racionales. El material está dirigido a estudiantes de geometría y cálculo elementales. Se construyó un sitio web de libre acceso:

<https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet>

para ilustrar algunos ejemplos interesantes.

*Palabras clave:* Porismo de Poncelet; Problema de Fuss; Polígonos Bicéntricos.

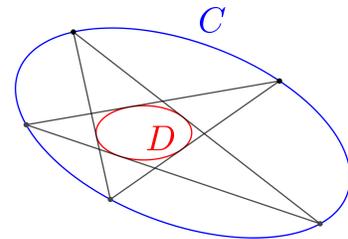
## Introducción

El *Porismo de Poncelet* o *Gran Teorema de Poncelet*, fue descubierto por el ingeniero y matemático francés Jean-Victor Poncelet durante sus años de encarcelamiento en la prisión de Saratoff (1813-1814). Poncelet estuvo bajo el mando de Napoleón en su campaña contra Rusia.

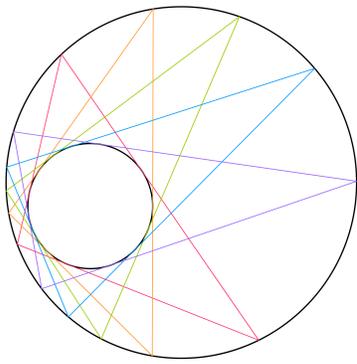
Para enunciar el resultado es conveniente introducir la siguiente definición (véase Figura 1):

**Definición 1.** Sean  $C, D$  dos cónicas no singulares en  $\mathbb{R}^2$ . Un  $n$ -ágono de Poncelet respecto al par ordenado  $(C, D)$  es un polígono (de  $n$  lados/vértices,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ ) cuyos vértices son puntos de  $C$  y cuyos lados son segmentos de rectas tangentes a  $D$ . De existir, decimos que  $(C, D)$  admite un  $n$ -ágono de Poncelet.

En su versión más sencilla, el Porismo de Poncelet dice lo siguiente (ver la Figura 2):



**Figura 1:** Un pentágono de Poncelet respecto a  $(C, D)$ .



**Figura 2:** El Porismo de Poncelet para  $n = 3$ .

**Teorema 1.1.** *Sea  $(C_1, C_2)$  un par de circunferencias en  $\mathbb{R}^2$ . Si existe un  $n$ -ágono de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ , entonces existe una infinidad. Más todavía, si  $C_2$  está en el interior del disco definido por  $C_1$ , entonces todo punto en  $C_1$  es vértice de un  $n$ -ágono de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ <sup>1</sup>.*

## El Porismo de Poncelet para circunferencias en $\mathbb{R}^2$

Comenzaré dando una prueba del Teorema 1.1 en el caso en que tenemos un par de circunferencias  $(C_1, C_2)$  en  $\mathbb{R}^2$ , con  $C_2$  estrictamente contenida en el interior del disco cuya frontera es  $C_1$ . La geometría de la configuración que nos interesa estudiar está completamente determinada por los radios de las circunferencias y la distancia entre sus centros. Por lo tanto no hay pérdida de generalidad si suponemos que las ecuaciones de  $C_1$  y  $C_2$  son las siguientes:

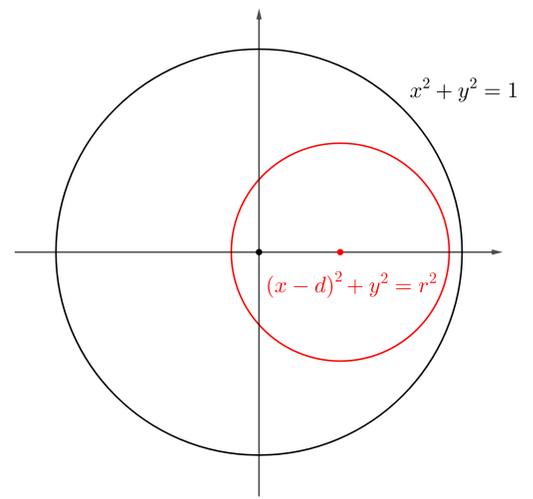
$$C_1 : x^2 + y^2 = 1, \quad (1a)$$

$$C_2 : (x - d)^2 + y^2 = r^2, \quad (1b)$$

donde  $d \geq 0$  y  $r > 0$  son un par de números reales que satisfacen además  $d + r < 1$  (ver Figura 3).

Los pasos de la prueba son los siguientes:

<sup>1</sup>Dualmente, toda tangente a  $C_2$  contiene un lado de un  $n$ -ágono de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ .



**Figura 3:** El par de circunferencias  $(C_1, C_2)$

1. Se asociará una función  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  al par de circunferencias  $(C_1, C_2)$  que medirá qué tan rápido recorreremos la circunferencia  $C_1$  en sentido positivo (esto es, en sentido contrario de las manecillas del reloj) al trazar tangentes a  $C_2$ .
2. Se impondrán condiciones a la  $n$ -ésima iteración de  $f$  para garantizar la existencia de un  $n$ -ágono de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ .
3. Se mostrará que si un punto satisface las condiciones del inciso anterior, entonces lo mismo es válido para cualquier punto de  $C_1$ .

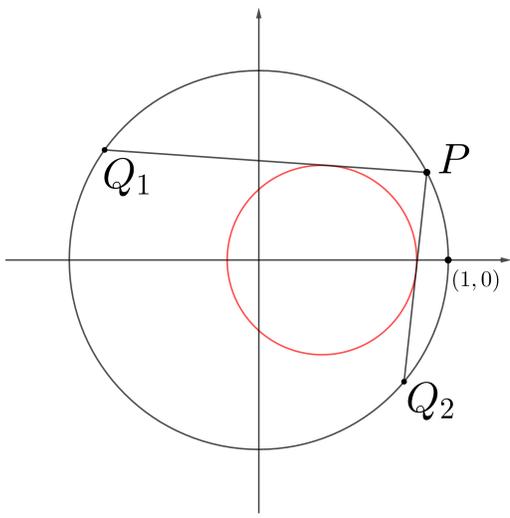
### Paso 1: La función $f$

Pensemos en los puntos  $P \in C_1$  como imágenes del mapeo  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$\varphi(t) := (\cos t, \sin t), \quad (2)$$

es decir, estamos recorriendo la circunferencia  $C_1$  en sentido opuesto a las manecillas del reloj comenzando en el punto  $(0, 1) = \varphi(0)$ . Por cualquier punto  $P = \varphi(t)$  pasan dos cuerdas tangentes a  $C_2$  (ver segmentos  $PQ_1$  y  $PQ_2$  en la Figura 4).

Sea  $Q_1$  el punto más cercano a  $P$  recorriendo  $C_1$  en el sentido antes mencionado. Definimos



**Figura 4:** Construyendo la función  $f$ .

$f(t)$  como el número mínimo que satisface:

$$\varphi(f(t)) = Q_1. \quad (3)$$

Obsérvese que cualquier número de la forma  $f(t) + 2m\pi$  con  $m \in \mathbb{N}$  es mapeado bajo  $\varphi$  en  $Q_1$ , de aquí el requerimiento de minimalidad para la definición de  $f(t)$ .

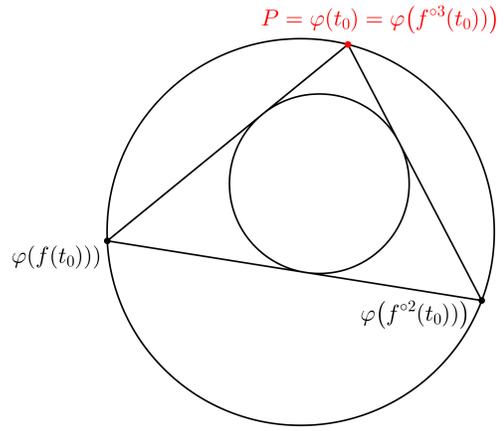
## Paso 2: Construyendo $n$ -ágonos de Poncelet

Por construcción, la existencia de un  $n$ -ágono ( $n \geq 3$ ) de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$  es equivalente a que exista un  $t_0 \geq 0$  tal que

$$f^{\circ n}(t_0) = t_0 + 2\pi m, \quad (4)$$

para algún  $m \in \mathbb{N}$ . Geométricamente, la ecuación (4) dice que después de trazar  $n$  tangentes manteniendo la orientación, volvemos al punto inicial  $P = \varphi(t_0)$  (ver Figura 5).

Determinar explícitamente la regla de correspondencia que define a la función  $f$  es complicado. Como veremos enseguida, resulta más conveniente trabajar con su derivada  $\frac{df}{dt}$ . El hecho de que  $f$  sea derivable se sigue de que las circunferencias son curvas no singulares. Calcularemos



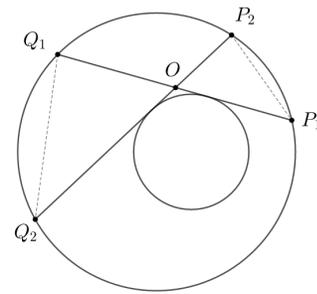
**Figura 5:** Un caso en que  $f^{\circ 3}(t_0) = t_0 + 2\pi$ .

$\frac{df}{dt}$  directamente, tomando el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}. \quad (5)$$

Sean  $P_1 := \varphi(t)$ ,  $P_2 := \varphi(t+h)$ ;  $Q_1 := \varphi(f(t))$ ,  $Q_2 := \varphi(f(t+h))$ . Por construcción, los números  $f(t+h) - f(t)$  y  $h$  son las medidas de los arcos de circunferencia comprendidos entre los puntos  $Q_1, Q_2$  y  $P_1, P_2$  respectivamente. Denotaré tales medidas con  $\overline{Q_1Q_2}$  y  $\overline{P_1P_2}$ .

Sea  $O := \overline{P_1Q_1} \cap \overline{P_2Q_2}$ . Para calcular el límite (5), observemos que los triángulos  $\Delta P_1P_2O$  y  $\Delta Q_2Q_1O$  son semejantes (ver Figura 6).

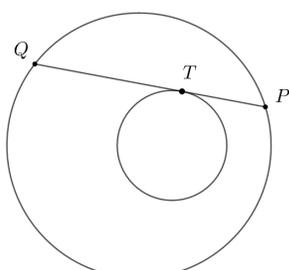


**Figura 6:**  $\Delta P_1P_2O \sim \Delta Q_2Q_1O$ .

Por lo tanto

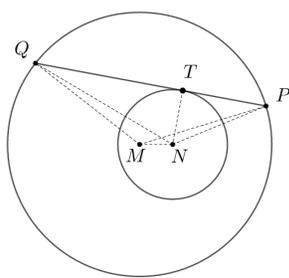
$$\frac{|\overline{Q_1Q_2}|}{|\overline{P_1P_2}|} = \frac{|\overline{Q_1O}|}{|\overline{OP_2}|}, \quad (6)$$

donde  $|\cdot, \cdot|$  denota la longitud del segmento correspondiente. Cuando  $h$  tiende a 0, o equivalentemente  $P_2$  tiende a  $P_1$ , el cociente  $\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1P_2}}$  tiende a (6), ambas cuerdas tangentes se sobrepone y el punto  $O$  tiende al punto de tangencia con  $C_2$ . Por lo tanto si tomamos una cuerda tangente  $\overline{PQ}$  con punto de tangencia  $T$ , tenemos  $\frac{df}{dt} = \frac{|TQ|}{|PT|}$  (ver Figura 7).



**Figura 7:** El límite  $h \rightarrow 0$ .

Las longitudes  $|PT|$  y  $|TQ|$  pueden calcularse en función de los radios de la circunferencias, 1 y  $r$  y la distancia entre sus centros,  $d$  de la siguiente manera (ver Figura 8):



**Figura 8:** Construcciones auxiliares.

Denotaré con  $M$  y  $N$  los centros de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Por construcción  $|MQ| = 1$ ,  $|MN| = d$  y si  $P = \varphi(t)$ , el ángulo  $\angle QMN$  mide  $f(t)$ . Por la ley de cosenos tenemos:

$$|NQ|^2 = 1 + d^2 - 2d \cos(f(t)) \quad (7)$$

y por el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo  $\Delta TQN$  tenemos:

$$|TQ| = \sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(f(t))}. \quad (8)$$

Análogamente uno calcula:

$$|PT| = \sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(t)}. \quad (9)$$

Por lo tanto:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(f(t))}}{\sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(t)}}, \quad (10)$$

o bien:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(f(t))}} \frac{df}{dt} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(t)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Consideremos la función

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{1 + d^2 - r^2 - 2d \cos(x)}}. \quad (12)$$

Por construcción  $g$  es estrictamente positiva y continua. Por lo tanto existe una función inyectiva  $G$  tal que

$$\frac{dG}{dx} = g(x). \quad (13)$$

Afirmo que existe una constante  $\omega$  tal que para todo  $t \geq 0$ :

$$G(f(t)) - G(t) = \omega. \quad (14)$$

En efecto, por (13) y la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt} (G(f(t))) = g(f(t)) \frac{df}{dt} \quad (15)$$

combinando esta última ecuación con (13) y (11) tenemos:

$$\frac{d}{dt} (G(f(t)) - G(t)) = 0. \quad (16)$$

De aquí se sigue (14).

Aplicando (14) para  $t = f^{\circ j}(t)$  con  $j$  desde 1 hasta  $n - 1$  y sumando las  $n$  ecuaciones resultantes, tenemos:

$$G(f^{\circ n}(t)) - G(t) = n\omega. \quad (17)$$

Por lo tanto la existencia de un  $n$ -ágono de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$  equivale a la existencia de un  $t_0 \geq 0$  y un natural  $m$  tales que:

$$G(t_0 + 2\pi m) - G(t_0) = n\omega. \quad (18)$$

### Paso 3: Independencia respecto al vértice inicial

El paso final de la prueba consiste en observar que la condición impuesta por la ecuación (18) no depende de  $t_0$ . Esto es consecuencia de que  $G$  es una antiderivada de una función  $2\pi$ -periódica. La condición impuesta por (18) para la existencia de un  $n$ -ágono de Poncelet consiste precisamente en que la integral en un intervalo formado por  $m$  periodos concatenados de una función periódica sea igual a  $n\omega$ . Es bien sabido que el valor de dicha integral no depende de la elección de los  $m$  periodos concatenados. En otras palabras, si (18) se cumple para  $t_0$ , entonces se cumple para todo  $t \geq 0$ . Esto demuestra el resultado de Poncelet.

### ¿Por qué *porismo*?

El resultado de Poncelet es llamado *porismo* porque no resuelve el problema de hallar polígonos de Poncelet respecto a un par de circunferencias. Poncelet dedujo la existencia de una infinidad de polígonos interinscritos siempre que exista al menos uno.

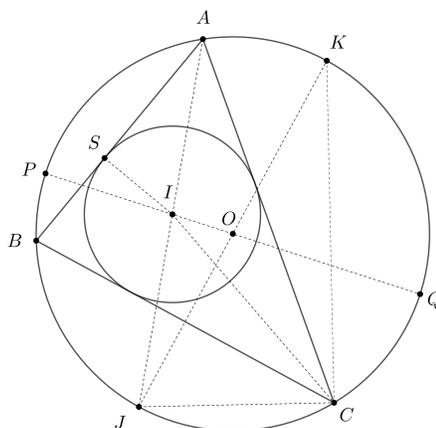
### El Problema de Fuss para triángulos

El problema de Fuss consiste en dar una solución explícita al Porismo de Poncelet para circunferencias en un plano. Como veremos a continuación, tal solución está dada por una ecuación

algebraica en los parámetros que determinan la posición relativa de las circunferencias: sus radios y la distancia entre sus centros. La complejidad de estas ecuaciones crece considerablemente junto con el número  $n$  de lados de los polígonos buscados. En esta primera parte, estudiaremos los casos  $n = 3, 4$  de forma elemental.

**Proposición 1.** *Consideremos un par de circunferencias coplanares  $C_1, C_2$  de radios  $R$  y  $r$  respectivamente tales que la distancia entre sus centros  $d$  satisface  $d < R - r$  (en otras palabras,  $C_2$  está contenida en el interior del disco cuya frontera es  $C_1$ ). Supongamos que existe un triángulo  $\Delta ABC$  de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ . Entonces:*

$$R^2 - d^2 = 2Rr. \quad (19)$$



**Figura 9:** Probando la Proposición 1.

**Prueba:** En la Figura 9,  $O$  e  $I$  son los centros de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Prolongamos  $\overline{AI}$  hasta intersecar de nuevo  $C_1$  en  $J$ .  $\overline{PQ}$  y  $\overline{JK}$  son los diámetros de  $C_1$  que contienen a los segmentos  $\overline{IO}$  y  $\overline{JO}$  respectivamente.  $S$  es el punto de tangencia de  $C_2$  con  $\overline{AB}$ .

Es claro que los triángulos  $\Delta API$  y  $\Delta IJQ$  son semejantes. Luego  $|AI| \cdot |IJ| = |PI| \cdot |IQ|$ . Es decir:

$$|AI| \cdot |IJ| = (R - d)(R + d). \quad (20)$$

Falta probar que  $|AI| \cdot |IJ| = 2Rr$ . Para ello observamos que los triángulos  $\Delta ASI$  y  $\Delta KJC$  son

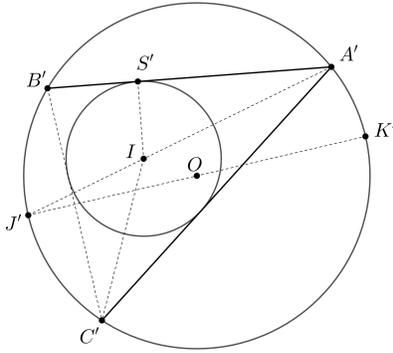
semejantes:  $\angle ASI$  es recto porque su vértice es la intersección de un radio y una tangente de  $C_2$ .  $\angle JCK$  es recto por subtender un diámetro de  $C_1$ . Por otro lado  $\angle IAS = \angle CAJ$  porque  $\overline{AJ}$  es bisectriz de  $\angle CAB$  y  $\angle CAJ = \angle CKJ$  por subtender la misma cuerda. De aquí se sigue que:

$$|AI| \cdot |JC| = |KJ| \cdot |SI| = 2Rr. \quad (21)$$

Finalmente  $|JC| = |IJ|$ , pues  $\angle CIJ = \angle JCI$  (ambos ángulos son iguales a  $\frac{1}{2}(\angle CAB + \angle BCA)$ ). De aquí y (20) obtenemos el resultado. *Q.E.D.*

El recíproco de la Proposición 1 también es válido:

**Proposición 2.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias coplanares de radios  $R$  y  $r$  respectivamente. Sea  $d$  la distancia entre sus centros. Supongamos que  $R^2 - d^2 = 2Rr$ . Entonces existe un triángulo de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$  (y por el Porismo de Poncelet, una infinidad).



**Figura 10:** Recuperando un triángulo de Poncelet.

**Prueba:** Tomemos un punto  $A'$  en  $C_1$ . Sean  $\overline{A'B'}$  y  $\overline{A'C'}$  las cuerdas tangentes a  $C_2$ . Prolonguemos  $\overline{A'I}$  hasta intersectar a  $C_1$  de nuevo en  $J'$ . Prolonguemos también  $\overline{J'O}$  hasta obtener el diámetro  $\overline{J'K'}$ . Sea  $S'$  el punto de tangencia de  $\overline{A'B'}$  con  $C_2$ . Al igual que en la prueba de la Proposición 1, tenemos

$$|A'I| \cdot |IJ'| = R^2 - d^2 \quad (22)$$

pero  $R^2 - d^2 = 2Rr$ . Por lo tanto

$$|A'I| \cdot |IJ'| = 2Rr. \quad (23)$$

Como los triángulos  $\Delta A'S'I$  y  $\Delta K'J'C'$  son semejantes, tenemos

$$|A'I| \cdot |J'C'| = 2Rr. \quad (24)$$

De (23) y (24) se sigue que  $|IJ'| = |J'C'|$ . Por lo tanto

$$\angle C'IJ' = \angle J'C'I. \quad (25)$$

Ahora  $\angle C'IJ' = \angle IC'A' + \angle C'A'I$  y  $\angle J'C'I = \angle B'C'I + \angle J'C'B'$ . Pero  $\angle J'C'B' = \angle J'A'B'$  por subtender la misma cuerda y  $\angle J'A'B' = \angle C'A'I$  por ser  $\overline{A'I}$  bisectriz del ángulo en  $A'$ . Por lo tanto

$$\angle IC'A' = \angle B'C'I. \quad (26)$$

De aquí se sigue que  $I$  es incentro de  $\Delta A'B'C'$ . En particular  $\overline{B'C'}$  es tangente a  $C_2$ . *Q.E.D.*

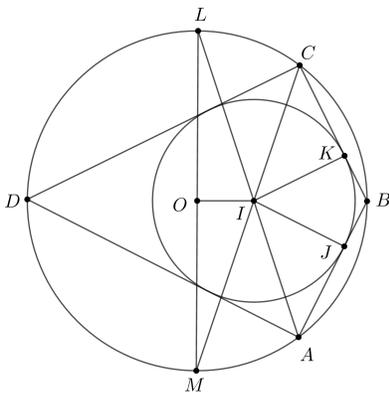
## Cuadriláteros bicéntricos

Recordemos que un cuadrilátero es llamado **bicéntrico** si es de Poncelet respecto a un par de circunferencias  $(C_1, C_2)$ . A continuación encontraremos una condición necesaria para la existencia de cuadriláteros bicéntricos análoga a la obtenida en la Proposición 1.

**Proposición 3.** Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos circunferencias coplanares de radios  $R$  y  $r$  respectivamente tales que la distancia entre sus centros  $d$  satisfice  $d < R - r$ . Supongamos que existe un cuadrilátero  $ABCD$  de Poncelet respecto a  $(C_1, C_2)$ . Entonces:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2). \quad (27)$$

**Prueba:** Sean  $O, I$  los centros de  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente. Prolonguemos  $\overline{AI}$  y  $\overline{CI}$  hasta intersectar a  $C_1$  en los puntos  $L$  y  $M$ . Sean  $J$  y  $K$  los puntos de tangencia de  $C_2$  con los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente (ver Figura 11).



**Figura 11:** Problema de Fuss para cuadriláteros.

Como  $ABCD$  es cíclico,  $\angle DAB + \angle BCD = \pi$ . De aquí se sigue que

$$\angle IAB + \angle BCI = \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

y como  $|IK| = |IJ| = r$ , existe un triángulo rectángulo con catetos de longitudes  $|CI|$  y  $|IA|$  e hipotenusa de longitud  $|AJ| + |KC|$ . El doble del área de este triángulo puede calcularse de dos maneras obvias, dando lugar a la siguiente igualdad:

$$|CI| \cdot |IA| = r(|AJ| + |KC|). \quad (29)$$

Por el Teorema de Pitágoras:

$$(|AJ| + |KC|)^2 = |CI|^2 + |IA|^2. \quad (30)$$

De (29) y (30) se sigue que:

$$|CI|^2 \cdot |IA|^2 = r^2 (|CI|^2 + |IA|^2), \quad (31)$$

o equivalentemente:

$$\frac{1}{|IA|^2} + \frac{1}{|CI|^2} = \frac{1}{r^2}. \quad (32)$$

Observemos ahora que los puntos  $L$ ,  $O$  y  $M$  son colineales, porque  $\angle MOD = 2\angle MCD$ ,  $\angle DOL = 2\angle DAL$  y  $\angle MCD + \angle DAL = \frac{\pi}{2}$ . De aquí se sigue que  $\overline{OI}$  es mediana del triángulo  $\triangle ILM$ . Por lo tanto:

$$|LI|^2 + |IM|^2 = 2|OI|^2 + \frac{|LM|^2}{2} = 2(R^2 + d^2). \quad (33)$$

$\overline{AL}$ ,  $\overline{CM}$  y el diámetro de  $C_1$  que contiene a  $\overline{OI}$  son cuerdas con un punto en común. Entonces:

$$|LI| \cdot |IA| = |CI| \cdot |IM| = R^2 - d^2. \quad (34)$$

Usando (33) y (34) tenemos:

$$\frac{1}{|IA|^2} + \frac{1}{|CI|^2} = \frac{2(R^2 + d^2)}{(R^2 - d^2)^2}. \quad (35)$$

De (32) y (35) concluimos que:

$$(R^2 - d^2)^2 = 2r^2(R^2 + d^2). \quad (36)$$

*Q.E.D.*

El lector interesado puede probar como ejercicio que la ecuación (36) es también una condición suficiente para la existencia de cuadriláteros bicéntricos.

## Proyecto numérico

En esta sección se propone un proyecto con dos objetivos: que el lector interesado reafirme el material expuesto e introducir algunas de las ideas que se utilizarán en las siguientes partes de este trabajo.

Un problema numérico interesante es encontrar configuraciones de circunferencias para las cuales se cumpla el Porismo de Poncelet y tales que los parámetros que las definen (los radios y la distancia entre sus centros) sean números racionales. El problema no es trivial incluso para un número de lados relativamente chico de los polígonos. Por ejemplo, si uno considera cuadrados regulares, digamos de lado de longitud 2, tendremos que el radio del circuncírculo  $R$  será  $R = \sqrt{2}$ .

Una solución en el caso de cuadriláteros, es la siguiente:

1. Considere un triángulo rectángulo  $\triangle ABC$  con catetos de longitudes  $\ell_1 := |AB|$  y  $\ell_2$

$:= |BC|$ . Supongamos  $\ell_1 < \ell_2$ . Sea  $D$  la reflexión de  $B$  respecto a la hipotenusa  $\overline{CA}$ . Es fácil probar que  $ABCD$  es bicéntrico. Uno calcula los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita,  $R$  y  $r$  respectivamente, así como la distancia  $d$  entre sus centros en términos de  $\ell_1$  y  $\ell_2$ :

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}, \quad r = \frac{\ell_1\ell_2}{\ell_1 + \ell_2},$$

$$d = R - \frac{\sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2}}{1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}} \quad (37)$$

2. Del punto anterior, se sigue que si  $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{N}$ , entonces  $R, r, d \in \mathbb{Q}$ . Por lo tanto, basta resolver el problema numérico clásico de encontrar todas las ternas pitagóricas enteras.
3. Muestra que, realizando los pasos anteriores, uno obtiene una infinidad de configuraciones esencialmente distintas de pares de circunferencias que cumplen el Porismo de Poncelet para  $n = 4$  (observa que podría pasar que todos los parámetros obtenidos de esta manera fueran proporcionales entre sí respectivamente, de forma que uno obtuviera una sola configuración y copias homotéticas de la misma).

En la Parte II de esta serie, explicaré la relación entre el proyecto anterior y un famoso teorema de Faltings, (anteriormente conjetura de Mordell).

## Agradecimientos

Le agradezco al Profesor Pablo Barrera Sánchez por haberme dado a conocer el Porismo de Poncelet durante mi tiempo como estudiante de licenciatura en la UNAM y por sus comentarios y sugerencias para mejorar este trabajo. Muchas gracias también al grupo de trabajo del Laboratorio de Cómputo Científico del Departamento de Matemáticas de la UNAM por brindarme todas las facilidades para la elaboración de este material.

## Referencias

- [1] Garza Ledesma, J. S., *Curvas de Poncelet*. Tesis de Licenciatura, UNAM. 2011.
- [2] Garza Ledesma, J. S., Sitio web: <https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet>
- [3] IGI, GeoGebra. Software interactivo disponible en: <http://www.geogebra.org>