

El Porismo de Poncelet

Parte II

Juan Salvador Garza Ledesma^{1*}

¹Facultad de Ciencias, UNAM

* Correo electrónico: juan.garza@ciencias.unam.mx

Resumen

En esta segunda parte de una serie de artículos sobre el Porismo de Poncelet se discute una prueba general del resultado utilizando herramientas de geometría algebraica. Se construyó un sitio web de libre acceso:

<https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet>

para complementar el material. Se busca mostrar cómo las herramientas computacionales pueden motivar el estudio de muchas áreas de investigación de gran actualidad en matemáticas que a primera vista podrían aparentar no tener relación entre sí.

Palabras clave: Porismo de Poncelet; Espacio Proyectivo; Curvas Racionales; Funciones y Curvas Elípticas.

Hacia una versión general del Porismo de Poncelet

La experimentación computacional permite conjeturar que los resultados discutidos en [2] son consecuencia de un teorema más general. Utilizando programas como **GeoGebra** (disponible en [7]) podemos construir configuraciones que involucren cónicas en \mathbb{R}^2 que no sean circunferencias y para las cuales sin embargo, se cumpla el Porismo de Poncelet. La Figura 1 ilustra un ejemplo, con pentágonos no convexos, una hipérbola y una elipse. Este y más ejemplos interactivos pueden verse en el sitio web:

<https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet>

Ejemplos como los mencionados, sugieren que el Porismo de Poncelet depende de propiedades de las cónicas que difícilmente son intuitibles li-

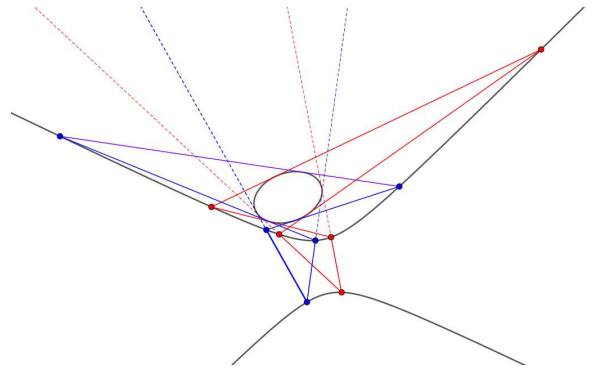


Figura 1: Una elipse y una hipérbola de Poncelet.

mitándonos a estudiarlas en \mathbb{R}^2 .

A lo largo de la historia, varios matemáticos descubrieron que las cónicas no singulares en \mathbb{R}^2 son distintas visualizaciones de un mismo objeto: una **cónica proyectiva** no singular. También se descubrieron razones técnicas por las que era mucho más sencillo estudiar objetos definidos sobre \mathbb{C} y no sobre \mathbb{R} . Una vez entendido este par de puntos

fue posible dar una prueba de una versión general del Porismo de Poncelet, que nos lleva a estudiar muchos temas de suma importancia en geometría y que discutiremos en este trabajo.

En resumen, los pasos de la prueba general que mencionamos son los siguientes:

1. Se construye el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^2 y se muestra que las figuras (cónicas, polígonos, etc.) que hemos estudiado hasta ahora en \mathbb{R}^2 , son visualizaciones de ciertos subconjuntos de puntos de objetos en \mathbb{P}^2 que resultan técnicamente mucho más sencillos de manipular.
2. Dadas dos cónicas $C, D \subset \mathbb{P}^2$, se prueba que los pares punto-recta (p, ℓ) con $p \in C$ y ℓ tangente a D con $p \in \ell$ (esto es, los objetos con los que construimos los posibles polígonos de Poncelet respecto (C, D)), están en correspondencia uno-a-uno con los puntos de una **curva elíptica** E . Las curvas elípticas son **variedades abelianas**. Esto quiere decir que dada una curva elíptica E , existe una operación binaria $+ : E \times E \rightarrow E$ de modo que $(E, +)$ es un grupo abeliano.
3. Sean (p_i, ℓ_i) , $i = 1, 2$ dos pares tales que $p_i \in C$, ℓ_i es tangente a D , $p_1 \in \ell_1$ y $p_2 = \ell_1 \cap \ell_2$. Sean P_i , $i = 1, 2$ los puntos en E que corresponden a los pares (p_i, ℓ_i) respectivamente. Se prueba que la función definida mediante $(p_1, \ell_1) \mapsto (p_2, \ell_2)$ corresponde a la función algebraica $f(P_1) = P_1 + P_0$ para cierto $P_0 \in E$ fijo, donde $+$ es la operación binaria que da estructura de grupo a E . En otras palabras, existe $P_0 \in E$ tal que $P_2 = P_1 + P_0$.
4. Se observa que la existencia de un n -ágono de Poncelet equivale a que exista un P_1 tal que $f^{on}(P_1) = P_1$, esto es, a que f^{on} tenga un punto fijo. Pero esto equivale a su vez a:

$$P_1 = P_1 + nP_0, \quad (1)$$

lo cual implica que nP_0 es el elemento neutro de $(E, +)$. Es decir, $f^{on} = id_E$. De aquí

uno concluye que la existencia de un n -ágono de Poncelet implica la existencia de una infinidad.

En las siguientes secciones, discutiremos algunos aspectos geométricos y computacionales de los pasos descritos anteriormente. Al final se incluye una serie de ejercicios que ayudarán al lector interesado a profundizar en las ideas que expon-dremos.

El espacio proyectivo

Notación: Dado un espacio vectorial V , escribiré V^\times para denotar a $V \setminus \{0\}$.

La recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ puede definirse de las siguientes maneras equivalentes:

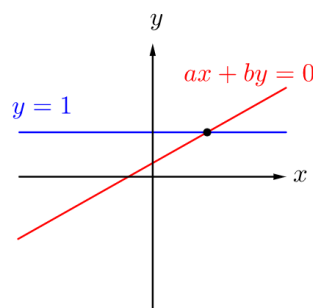


Figura 2: Construyendo la recta proyectiva.

1. La recta afín compactificada con un punto al infinito, esto es: $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
2. El conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de un espacio de dimensión 2. Geométricamente, el conjunto de rectas en el plano que pasan por su origen.
3. Las órbitas de la acción de \mathbb{C}^\times en $(\mathbb{C}^2)^\times$ dada por:

$$\lambda \cdot (a, b) := (\lambda a, \lambda b).$$

La motivación geométrica de estas 3 definiciones viene de la construcción para el caso real (ver la Figura 2). Dentro del plano \mathbb{R}^2 con coordenadas (x, y) , tomemos una copia de la recta afín \mathbb{R} , digamos la recta con ecuación $y = 1$. Los subespacios de \mathbb{R}^2 de dimensión 1 son las rectas que pasan por el origen, que son los ceros de polinomios de la forma $ax + by$ para algún par $(a, b) \in (\mathbb{R}^2)^\times$. Estas rectas están determinadas precisamente por las órbitas de la acción del inciso 3 anterior; el par (a, b) define la misma recta que el par (c, d) si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tal que $(a, b) = \lambda \cdot (c, d)$. De aquí se sigue que $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ contiene una copia de la recta afín, pues cada una de las rectas $ax + by = 0$, a excepción de $y = 0$, interseca a $y = 1$ precisamente en un punto y viceversa, por cada punto de $y = 1$ pasa exactamente una recta que contiene al origen. La recta $y = 0$, o bien la órbita de los pares de la forma $(a, 0)$ con $a \in \mathbb{R}^\times$, es asociada al punto al infinito ∞ . Si tomamos un punto en la recta afín $y = 1$ y nos alejamos indefinidamente hacia alguna de las direcciones, por ejemplo hacia la derecha, la recta correspondiente que pasa por el origen se aproximará tanto como se desee a la recta horizontal $y = 0$. Si bien alcanzar el hipotético punto en la recta $y = 1$ es imposible, desde el punto de vista de las rectas por el origen simplemente estamos rotando en el sentido de las manecillas del reloj y no solo es posible hacerlo hasta alcanzar la horizontal, sino que uno puede visualizar fácilmente cómo dicha rotación puede continuar y la intersección de la recta correspondiente con $y = 1$ *vuelve súbitamente desde el infinito* pero esta vez desde el lado izquierdo. Es natural por lo tanto, anexar un solo punto al infinito para obtener la recta $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

El lector puede pensar de manera análoga en las construcciones de los espacios proyectivos \mathbb{P}^n para $n = 2, 3$, etc. Como es usual, denotaré con $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ al punto de \mathbb{P}^n correspondiente a la órbita de $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{C}^n)^\times$ bajo la

¹Si escribo un espacio proyectivo sin un subíndice que indique el campo sobre el que se realiza la construcción, supondré que dicho campo es \mathbb{C} .

\mathbb{C}^\times –acción dada por

$$\lambda(a_0, \dots, a_n) := (\lambda a_0, \dots, \lambda a_n).$$

Los números de la $(n + 1)$ –ada $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$ o bien cualesquiera en la misma órbita son llamados **coordenadas homogéneas** del punto correspondiente. Es fácil ver que un objeto geométrico en \mathbb{P}^n puede definirse en términos de coordenadas homogéneas como los ceros de un conjunto de polinomios si y sólo si dichos polinomios son homogéneos.

Utilizando coordenadas homogéneas uno puede pensar a \mathbb{P}^n como una variedad topológica, tomando como cartas, copias del espacio afín de la dimensión correspondiente. Por ejemplo, en \mathbb{P}^2 con coordenadas $(x : y : z)$ podemos considerar la carta dada por

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid z \neq 0\}. \quad (2)$$

Los puntos de la forma (2) son, por definición, exactamente los puntos con coordenadas $(a : b : 1)$ con $a, b \in \mathbb{C}$. Evidentemente estos puntos forman una copia del plano afín \mathbb{C}^2 . Podemos definir cartas similares utilizando la primer o segunda coordenadas, obteniendo una cubierta del plano proyectivo con *parches afines*.

Pensaré en las cónicas, rectas, etc. usuales como restricciones a puntos reales de imágenes en parches afines de un objeto geométrico en un espacio proyectivo. Por ejemplo, la circunferencia

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (3)$$

es la restricción a puntos reales de la cónica en \mathbb{P}^2 dada por:

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \quad (4)$$

en el parche afín definido por (2).

En este contexto, una cónica no singular es un objeto muy sencillo; se trata simplemente de una copia de \mathbb{P}^1 encajada en \mathbb{P}^2 mediante:

$$(s : t) \mapsto (s^2 : st : t^2). \quad (5)$$

El mapeo $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definido por (5) es llamado **segundo encaje de Veronese** de la recta proyectiva. Si tomamos coordenadas $(x : y : z)$ en el plano \mathbb{P}^2 , los puntos de la forma $(s^2 : st : t^2)$ son ceros del siguiente polinomio homogéneo de grado 2:

$$xz - y^2. \quad (6)$$

Uno puede verificar que toda cónica no singular en \mathbb{R}^2 es la restricción real de la imagen en un parche afín de una cónica en \mathbb{P}^2 cuya ecuación puede llevarse a la forma (6) mediante un automorfismo del plano proyectivo, esto es, mediante una función definida en coordenadas multiplicando por una matriz no singular $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$.

Por ejemplo, la cónica (4) puede llevarse a la forma (6) utilizando la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & i & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

esto es, mediante la transformación

$$(x : y : z) \mapsto \left(\frac{x+z}{2} : iy : \frac{z-x}{2} \right).$$

El plano dual

Una recta en \mathbb{P}^2 es el conjunto de puntos cuyas coordenadas homogéneas son los ceros de un polinomio homogéneo de grado 1:

$$\{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid ax + by + cz = 0\} \quad (7)$$

donde $(a, b, c) \in (\mathbb{C}^3)^\times$. Es claro que las rectas en \mathbb{R}^2 son restricciones reales en parches afines de una recta de la forma (7). Más aún, también de (7) se sigue que dos tripletas (a, b, c) y (a', b', c') determinan una misma recta si y sólo si existe un $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tal que $(a, b, c) = \lambda \cdot (a', b', c')$. Es decir, el conjunto de rectas en el plano proyectivo tiene estructura a la vez de plano proyectivo, mismo que suele denotarse con \mathbb{P}^{2^\vee} .

Sea C una cónica en \mathbb{P}^2 :

$$C := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid xz - y^2 = 0\}. \quad (8)$$

La condición para que una recta en \mathbb{P}^2 sea tangente a C puede calcularse utilizando el jacobiano de la función $(x, y, z) \mapsto xz - y^2$:

$$(z, -2y, x). \quad (9)$$

Así, las rectas en \mathbb{P}^2 , o equivalentemente los puntos en \mathbb{P}^{2^\vee} tangentes a C son:

$$C^\vee := \{(z : -2y : x) \in \mathbb{P}^{2^\vee} \mid xz - y^2 = 0\}. \quad (10)$$

Claramente (10) es también una cónica y por lo tanto una recta proyectiva encajada en el plano dual. Esta cónica es llamada la **cónica dual** de C .

La curva elíptica de Poncelet

² Los ejemplos que estudiamos en [2] involucraron un par de circunferencias ajenas en \mathbb{R}^2 . Si pensamos en dichas circunferencias como restricciones afines y reales del siguiente par de cónicas en \mathbb{P}^2 :

$$C_1 := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}, \quad (11)$$

$$C_2 := \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid x^2 - 2dxz + y^2 + (d^2 - r^2)z^2 = 0\}. \quad (12)$$

uno puede ver que:

$$C_1 \cap C_2 = \{(\pm 1 : i : 0), (1 + d^2 - r^2 : \pm \sqrt{4d^2 - (1 + d^2 - r^2)^2} : 2d)\}. \quad (13)$$

Cuando ocurre, como en este caso, que dos cónicas en \mathbb{P}^2 se intersectan en 4 puntos distintos, se dice que están en **posición general**. Como veremos enseguida, la posición general tiene una consecuencia geométrica muy importante para el problema de hallar n -ágonos de Poncelet. Abusando de la notación, dados $p \in \mathbb{P}^2$ y $t \in \mathbb{P}^{2^\vee}$ escribiré $p \in t$ para indicar que el punto p está en la recta en \mathbb{P}^2 definida por t .

²Esta sección supone conocimientos básicos sobre curvas algebraicas. El capítulo IV de [5] cubre todo lo que requerimos.

Proposición 1 Sean $C, D \subset \mathbb{P}^2$ un par de cónicas en posición general. Entonces

$$E := \{(p, t) \in C \times D^\vee \mid p \in t\} \quad (14)$$

es una **curva elíptica**.³

Prueba: Como se discutió previamente, tanto C como D^\vee son copias de \mathbb{P}^1 . Por lo tanto podemos pensar en los puntos de E como puntos en la superficie $S := \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Uno verifica que la restricción $p \in t$ de (14) define una curva no singular en S (es decir, E es una curva algebraica no singular). Tenemos un par de mapeos $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ inducidos por las proyecciones a la primer y segunda coordenadas. Consideremos el mapeo $\pi_1 : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ inducido al proyectar sobre C .

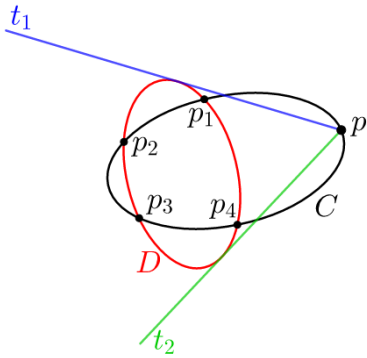


Figura 3: Una cubierta doble de \mathbb{P}^1 ramificada en 4 puntos.

Sean p_1, \dots, p_4 los puntos de intersección de C y D y denotemos con \mathcal{R} al conjunto que los contiene. Entonces π_1 es 2-a-1 en $C \setminus \mathcal{R}$. Esto es consecuencia del hecho de que estos puntos son los únicos puntos de C desde donde no es posible trazar dos tangentes a D , sino una sola. Por abuso de notación para el mapeo π_1 , tenemos que

³La definición formal de curva elíptica puede consultarse en [5], Capítulo IV, §4. Para nuestros propósitos la caracterización dada en la prueba de la Proposición 1 es suficiente.

para un punto $p \in C \setminus \mathcal{R}$ existen $t_1, t_2 \in D^\vee$ tales que $\pi_1(p, t_1) = \pi_1(p, t_2) = p$ (ver Figura 3). Los puntos p_1, p_2, p_3, p_4 son pues, los **puntos de ramificación** de π_1 . E es entonces, una curva no singular que admite un mapeo 2-a-1 a \mathbb{P}^1 con cuatro puntos de ramificación. Por un resultado de Hurwitz (ver Corolario 2.4 en el capítulo IV de [5]) se sigue de inmediato que E es una curva de género 1. Q.E.D.

Dado que estamos considerando curvas algebraicas proyectivas sobre \mathbb{C} , podemos interpretar el género como el número de agujeros de la superficie de Riemann compacta correspondiente. Topológicamente pues, E es un toro.

El modelo de Weierstrass

Puede probarse (ver por ejemplo, la versión extendida de este trabajo en [4]) que toda curva elíptica E es de la forma:

$$E \cong \text{Proj } \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]/(x_2^3 + ax_1^2x_2 + bx_1^3 - x_1x_3^2). \quad (15)$$

Esto es, una cúbica no singular en \mathbb{P}^2 ,⁴ El modelo dado por (15) suele llamarse **modelo de Weierstrass** de una curva elíptica. En el parche afín $\mathbb{P}^2 \setminus (x_1 = 0)$, podemos tomar coordenadas $x := x_2/x_1$, $y := x_3/x_1$ y la ecuación que define a E , $x_1x_3^2 = x_2^3 + ax_1^2x_2 + bx_1^3$ se convierte en:

$$y^2 = x^3 + ax + b. \quad (16)$$

El lector familiarizado con la teoría de funciones elípticas notará su relación con el Porismo de Poncelet a partir de la ecuación (16). Una buena introducción a dicha teoría está dada en el primer capítulo de [9]. Es bien sabido que la función elíptica de Weierstrass denotada por \wp y su derivada \wp' satisfacen una ecuación diferencial de la forma:

$$[\wp']^2 = 4[\wp]^3 - g_2\wp - g_3, \quad g_2, g_3 \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

⁴La no singularidad, implica en particular que las constantes a, b no pueden ser simultáneamente 0, pues de ser así, $(1 : 0 : 0)$ sería un punto singular.

De aquí se sigue que el mapeo $t \mapsto (1 : \wp(t) : \wp'(t))$ define una parametrización⁵ de una curva elíptica y viceversa, a partir de (16) es claro que toda curva elíptica admite una parametrización de este tipo.

La prueba del Porismo

Utilizaré la notación de la Proposición 1. Dado un par de cónicas en \mathbb{P}^2 en posición general, consideremos la curva elíptica dada por

$$E := \{(p, t) \in C \times D^\vee \mid p \in t\}. \quad (18)$$

C y D se intersecan en 4 puntos, p_1, \dots, p_4 y dualmente, existen 4 tangentes comunes a ambas cónicas, ℓ_1, \dots, ℓ_4 . Definamos un par de funciones, $\eta, \iota : E \rightarrow E$, como sigue:

$$\eta(p, t) = (p', t), \quad (19)$$

donde $\{p, p'\} = C \cap t$.

$$\iota(p, t) = (p, t'), \quad (20)$$

donde $\{t, t'\} = D^\vee \cap p$.

Tenemos $\eta(p, t) = (p, t)$ si y sólo si $t \in \{\ell_1, \dots, \ell_4\}$. $\iota(p, t) = (p, t)$ si y sólo si $p \in \{p_1, \dots, p_4\}$. Es claro además que $\eta \circ \eta = \iota \circ \iota = Id_E$. La conclusión es que η y ι son automorfismos respecto a la estructura de grupo de E , mismos que por las observaciones anteriores, tienen exactamente 4 puntos fijos y son involuciones. También por construcción, si definimos $f : E \rightarrow E$ como

$$f = \iota \circ \eta. \quad (21)$$

Entonces (C, D) admite un n -ágono interinscrito si y sólo si $f^{on}(p_0, t_0) = (p_0, t_0)$ para algún $(p_0, t_0) \in E$, es decir, si y sólo si f^{on} tiene un punto fijo.

⁵En principio, esta parametrización es local, pero puede extenderse a una parametrización global si consideramos como dominio de \wp y \wp' la superficie de Riemann \mathbb{C}/Λ , donde Λ es la latiz de periodos de \wp y \wp' .

Ahora bien, dada una latiz generada por dos puntos no colineales del plano complejo, v_1, v_2 :

$$\Lambda := \{av_1 + bv_2 \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad (22)$$

denotaré por \bar{z} a la clase de equivalencia del número $z \in \mathbb{C}$ en el toro cociente \mathbb{C}/Λ . Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha\Lambda = \Lambda$. Es sabido que los automorfismos del grupo \mathbb{C}/Λ son de la forma

$$\bar{z} \mapsto \overline{\alpha z} + \bar{\beta}, \quad \text{para algún } \beta \in \mathbb{C} \text{ fijo.} \quad (23)$$

Como ejercicio, el lector puede probar que un automorfismo dado por (23) es una involución con al menos un punto fijo si y sólo si $\alpha = -1$. Se sigue que, bajo la parametrización de E dada por las funciones elípticas \wp y \wp' , la función $f = \iota \circ \eta$ corresponde a un automorfismo de \mathbb{C}/Λ de la forma

$$\bar{f}(\bar{z}) = \bar{z} + \bar{\gamma}, \quad \text{para algún } \gamma \in \mathbb{C} \text{ fijo.} \quad (24)$$

Por lo tanto f^{on} tiene un punto fijo si y sólo si existe algún $\bar{z}_0 \in \mathbb{C}/\Lambda$ tal que

$$\bar{z}_0 = \bar{z}_0 + n\bar{\gamma}. \quad (25)$$

Lo cual ocurre si y sólo si $\bar{\gamma} = \bar{0}$. Es decir, si y sólo si f^{on} es el mapeo identidad. De aquí se sigue el Porismo de Poncelet.

Sobre el problema de Fuss

Explotando aún más la teoría de funciones elípticas, es posible dar una solución definitiva al problema de Fuss para circunferencias discutido en [2]. Tal solución fue publicada por D. Hulin en 2007 en su artículo [6]. Puede probarse que la relación necesaria y suficiente entre los radios de dos circunferencias en el plano afín, R y r y la distancia entre sus centros d para que satisfagan el Porismo de Poncelet para polígonos de n lados, es una ecuación polinomial homogénea en (R, r, d) con coeficientes enteros que puede calcularse recursivamente respecto a n . En particular, el lugar geométrico de soluciones al problema de Fuss es una curva proyectiva plana. Con ayuda

de un programa de álgebra computacional, puede probarse que a partir de polígonos de 6 lados estas curvas tienen género mayor a 1. La geometría de estas curvas, así como los problemas aritméticos relacionados no están del todo resueltos. Sería interesante investigar, por ejemplo, la existencia de circunferencias de Poncelet con radios y distancia entre sus centros racionales que admitan polígonos interinscritos de 6 o más lados (ver el proyecto numérico sugerido en [2], §3).

Ejercicios

El objetivo de estos ejercicios es auxiliar al lector interesado para profundizar en los conceptos discutidos en las secciones anteriores.

Considera el triángulo Δ con vértices en $P_1 := (0, 0)$, $P_2 := (4, 0)$ y $P_3 := (0, 2)$.

1. Calcula la ecuación de la circunferencia \mathcal{C} circunscrita a Δ .
2. Calcula la ecuación de la elipse \mathcal{E} inscrita en Δ que pasa por los puntos medios de sus lados,⁶ siguiendo alguna de estas estrategias:

- a) **Utilizando el Teorema de Marden:** Puedes consultar este resultado en [8]. Piensa en los vértices de Δ como puntos en \mathbb{C} . Considera el polinomio de tercer grado $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ cuyas raíces son P_1 , P_2 y P_3 :

$$p(z) = z(z - 4)(z - 2i).$$

El Teorema de Marden establece que los focos de la elipse de Steiner son los ceros de $p'(z)$. Calculando dichos ceros, puedes calcular la ecuación de la elipse.

- b) **Utilizando cónicas duales:** Conocemos 3 rectas tangentes a \mathcal{E} (las rectas determinadas por los lados de

Δ). Dos de ellas son los ejes horizontal y vertical del plano, que son tangentes a \mathcal{E} en los puntos $M_1 := (2, 0)$ y $M_2 := (0, 1)$ respectivamente. Es fácil probar que el baricentro de Δ , denotado con O , es precisamente el centro de \mathcal{E} . Sean M'_i , $i = 1, 2$, las reflexiones de los puntos M_i respecto a O . Por simetría, la recta paralela al eje horizontal que pasa por M'_1 y la recta paralela al eje vertical que pasa por M'_2 son tangentes a \mathcal{E} . Conociendo 5 rectas tangentes a \mathcal{E} , puedes calcular su ecuación utilizando el principio de dualidad. Puedes encontrar más detalles al respecto y un código computacional para realizar el cálculo automáticamente en [3].

3. Escribe las ecuaciones de las completaciones proyectivas complejas de \mathcal{C} y \mathcal{E} y encuentra $\mathcal{C} \cap \mathcal{E} := \{R_i\}_{i=1}^4$.
4. Sea $F(x, y, z)$ el polinomio de grado 2 que obtuviste homogeneizando la ecuación de \mathcal{C} en el inciso anterior. Calcula la matriz $A \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{C})$ que transforma a $F(x, y, z)$ en el polinomio $xz - y^2$ (consulta como guía, el ejemplo al final de la sección §2). Recuerda que la transformación definida por A es conocida como **proyectividad**; denotemos dicha proyectividad con $\varphi_A : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.
5. Calcula una biyección entre los puntos de la cónica $xz - y^2 = 0$ y los puntos de la recta proyectiva \mathbb{P}^1 . Recuerda que esta cónica es exactamente la imagen de \mathbb{P}^1 bajo el segundo encaje de Veronese $V_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, definido mediante $V_2(s : t) = (s^2 : st : t^2)$. En otras palabras, debes calcular una inversa para V_2 . Denotemos con ψ a dicha inversa.
6. Calcula $B_i := \psi \circ \varphi_A(R_i)$, las imágenes en la recta proyectiva de los puntos de intersección $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}$ que obtuviste en el inciso 3. Revisa la Proposición 1 y explica por qué la curva elíptica de Poncelet asociada al par

⁶Esta elipse es conocida como **inelipse de Steiner** de Δ .

de cónicas $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ está determinada por los puntos B_i .

Referencias

- [1] W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput., 24, 235–265, 1997. Calculator en línea de libre acceso: <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>
- [2] Garza Ledesma, J. S., *El Porismo de Poncelet Parte I*. Por aparecer en el Boletín de la Sociedad Matemática de Computación Científica y sus Aplicaciones. 2019.
- [3] Garza Ledesma, J. S., *La cónica dual*. 2019. Material de libre acceso disponible en: <https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet/dualidad>
- [4] Garza Ledesma, J. S., Sitio web: <https://sites.google.com/view/juan-garza/nigromante/poncelet>
- [5] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 52, Springer-Verlag, New York. 1977.
- [6] Hulin, D., *Factorisation des polynômes de Poncelet*, Geom. Dedicata 130, pp. 109-136. 2007.
- [7] IGI, GeoGebra. Software interactivo disponible en: <http://www.geogebra.org>
- [8] Kalman, D., *An Elementary Proof of Marden's Theorem*. The Mathematical Association of America. Monthly 115. pp. 330-338. 2008. Disponible en línea en la liga: <http://dankalman.net/AUhome/pdf/files/mardenAMM.pdf>
- [9] Lang, S., *Elliptic Functions*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 112, Springer-Verlag, New York. 1987.