

Resolución de la Ecuación Unidimensional Homogénea de Aguas Someras por el Esquema de Lax-Wendroff

J. Alavez-Ramírez^{1*}, E.A. Ovando-Gerónimo¹

¹División Académica de Ciencias Básicas, UJAT

* Autor por correspondencia: justino.alavez@ujat.mx

Resumen

Se discute la discretización de las ecuaciones de Saint-Venant en una dimensión espacial, usando un esquema de Lax-Wendroff explícito para discretizar con respecto al tiempo t y un esquema de diferencia central de segundo orden para discretizar con respecto a la variable espacial x . Asimismo, se discute la implementación del esquema resultante en MATLAB para simular el desplazamiento de una joroba de agua.

Palabras clave: Ecuaciones de Saint-Venant; Discretización; Esquema de Lax-Wendroff explícito; Diferencia central de segundo orden; Simulación computacional.

Introducción

Las ecuaciones de Saint-Venant modelan el comportamiento del agua en ríos, canales, lagos, zonas costeras, y en general, en regiones poco profundas. Por tanto, constituyen una herramienta importante para el estudio de una gran variedad de problemas relacionados con la ingeniería costera, la oceanografía y los estudios medio ambientales, entre muchos otros, Vázquez-Cendón [8]. Las ecuaciones de Saint-Venant, también se conocen en la literatura como las ecuaciones de las aguas someras, [1], y en la literatura inglesa como *shallow water equations*, [5]. En dinámica de fluidos, el flujo de un fluido está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, [9]. Las ecuaciones de las aguas someras se pueden deducir de las ecuaciones de Navier-Stokes, y resultan ser una buena aproximación a las ecuaciones de movimiento del fluido cuando la densi-

dad del fluido es homogénea y la profundidad es pequeña en comparación con las distancias horizontales ([1], [2]).

Las ecuaciones homogéneas de las aguas someras en 1D están dadas por el sistema de ecuaciones ([3], [10]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h + \frac{1}{2}gh^2)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $h = h(x, t)$ es la profundidad del agua (tirante o calado) en cada punto x en el dominio espacial al tiempo $t \geq 0$, la variable $u = u(x, t)$ representa el valor promedio turbulento temporal y promediada en profundidad de la velocidad horizontal del agua en cada punto x en el dominio espacial al tiempo $t \geq 0$, y g es la aceleración de la gravedad.

Definiendo

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ uh \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

el sistema (1) se puede escribir como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Discretización de (2)

Se discretizará el sistema (2) usando el esquema de Lax-Wendroff ([7], Strikwerda [6]), que está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} + O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (3)$$

De (2) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{U}(x, t)}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial t} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{J}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{pmatrix} \quad (5)$$

es la matriz Jacobiana de \mathbf{F} con respecto a \mathbf{U} . Sustituyendo (2) y (4) en (3) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) - \Delta t \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} \\ &+ \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{J}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} \right) \\ &+ O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora se discretizarán las derivadas espaciales que aparecen en (6) con un esquema de diferencia central de segundo orden, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2). \quad (7)$$

Tomando

$$\mathbf{H}(x, t) = \mathbf{J}(\mathbf{U}(x, t)) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))}{\partial x},$$

resulta al usar los nodos $x - \Delta x/2$, x y $x + \Delta x/2$, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}(x, t)}{\partial x} &= \frac{\mathbf{H}(x + \frac{\Delta x}{2}, t) - \mathbf{H}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)}{\Delta x} \\ &+ O((\Delta x)^2) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{ \mathbf{J}(\mathbf{U}(x + \frac{\Delta x}{2}, t)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} &[\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))] \\ &- \mathbf{J}(\mathbf{U}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)) [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] \} + O(\Delta x). \end{aligned}$$

Sustituyendo (7) y (8) en (6), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(x, t + \Delta t) &= \mathbf{U}(x, t) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] + \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \{ \mathbf{J}(\mathbf{U}(x + \frac{\Delta x}{2}, t)) \\ &[\mathbf{F}(\mathbf{U}(x + \Delta x, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))] \\ &- \mathbf{J}(\mathbf{U}(x - \frac{\Delta x}{2}, t)) [\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t)) \\ &- \mathbf{F}(\mathbf{U}(x - \Delta x, t))] \} \\ &+ O((\Delta x)^2 \Delta t) + O((\Delta t)^2 \Delta x) \\ &+ O((\Delta t)^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Denotando por

$$x_i = i\Delta x, \quad t^j = j\Delta t,$$

$$\mathbf{U}_i^j = \mathbf{U}(x_i, t^j),$$

$$\mathbf{F}_i^j = \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^j), \quad i \geq 0, \quad j \geq 0,$$

$$\mathbf{U}_{i \pm \frac{1}{2}}^j = \mathbf{U}(x_i \pm \frac{\Delta x}{2}, t^j),$$

$$\mathbf{J}_{i \pm \frac{1}{2}}^j = \mathbf{J}(\mathbf{U}_{i \pm \frac{1}{2}}^j), \quad i \geq 1, \quad j \geq 0,$$

resulta de (9) que el esquema de Lax-Wendroff explícito y de segundo orden para la ecuación unidimensional homogénea de aguas someras es:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{j+1} = & \mathbf{U}_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left(\mathbf{J}_{i+\frac{1}{2}}^j \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_i^j \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{J}_{i-\frac{1}{2}}^j \left[\mathbf{F}_i^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \right) \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $i \geq 1$ y para todo $j \geq 0$; donde las matrices Jacobianas $\mathbf{J}_{i\pm\frac{1}{2}}^j$ se aproximan por

$$\mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i\pm 1}^j) \right), \quad i \geq 1 \text{ y } j \geq 1,$$

para evitar evaluaciones en los puntos intermedios, [4].

Implementación computacional

Se resolverá numéricamente (2) sujeta a las condiciones iniciales:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{(1+d)\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{d})^2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde $0 \leq x \leq 4$, $d = \sqrt{0.05}$, $m = 2$, y a las condiciones de frontera:

$$\mathbf{U}(0, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{U}(4, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Discretizando los intervalos $[0, a]$ y $[0, b]$ por $N + 1$ y $M + 1$ puntos, respectivamente, dados por

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)\Delta x \quad \text{y} \quad t^j = (j-1)\Delta t, \\ i &= 1 : N + 1, \quad j = 1 : M + 1, \end{aligned}$$

donde $\Delta x = a/N$ y $\Delta t = b/M$, se obtiene un mallado rectangular de $[0, a] \times [0, b]$ con nodos (x_i, t^j) , $i = 1 : N + 1$ y $j = 1 : M + 1$.

El esquema de Lax-Wendroff explícito (10), se escribe ahora como:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{j+1} = & \mathbf{U}_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left\{ \mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i+1}^j) \right) \left[\mathbf{F}_{i+1}^j - \mathbf{F}_i^j \right] \right. \\ & \left. - \mathbf{J} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^j + \mathbf{U}_{i-1}^j) \right) \left[\mathbf{F}_i^j - \mathbf{F}_{i-1}^j \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

para todo $i = 2 : N$ y para todo $j = 1 : M + 1$.

Para facilitar la programación del esquema (11) en MATLAB/OCTAVE, es conveniente escribirlo para cada componente de \mathbf{U} . Para ello, si se escribe $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ y $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ dadas por (1) y (5), respectivamente, se convierten en

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ \frac{V^2}{U} + \frac{1}{2}gU^2 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gU - \frac{V^2}{U^2} & \frac{2V}{U} \end{pmatrix}.$$

Así, el esquema para la componente U será:

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} = & U_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[V_{i+1}^j - V_{i-1}^j \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - 2S(U_i^j, V_i^j) \right. \\ & \left. + S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right], \end{aligned}$$

para $i = 2 : N$ y $j = 1 : M + 1$; y el esquema para la componente V será:

$$\begin{aligned} V_i^{j+1} = & V_i^j - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right] \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left\{ C \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i+1}^j, V_i^j + V_{i+1}^j) \right) \left[V_{i+1}^j - V_i^j \right] \right. \\ & \quad + D \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i+1}^j, V_i^j + V_{i+1}^j) \right) \\ & \quad \left[S(U_{i+1}^j, V_{i+1}^j) - S(U_i^j, V_i^j) \right] \\ & \quad - C \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i-1}^j, V_i^j + V_{i-1}^j) \right) \left[V_i^j - V_{i-1}^j \right] \\ & \quad \left. - D \left(\frac{1}{2} (U_i^j + U_{i-1}^j, V_i^j + V_{i-1}^j) \right) \right. \\ & \quad \left. \left[S(U_i^j, V_i^j) - S(U_{i-1}^j, V_{i-1}^j) \right] \right\}, \end{aligned}$$

para $i = 2 : N$ y $j = 1 : M + 1$.

Resultados y conclusiones

La condición inicial del líquido bajo estudio, agua por ejemplo, simula una joroba centrada a la mitad del dominio como se muestra en la figura 1a. La altura inicial que describe la joroba está dada por

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{(1+d)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{d}\right)^2\right),$$

donde $0 \leq x \leq 4$, $d = \sqrt{0.05}$ y $m = 2$.

La velocidad inicial es idénticamente 0. Las condiciones de frontera corresponden a un tirante de 1 y velocidad 0 en ambos extremos del dominio espacial. La serie de imágenes que se muestran en la figura 1, representan la altura del agua en diferentes tiempos una vez iniciada la simulación. Es importante notar que la joroba comienza a disminuir su altura, se divide en dos y cada una de las partes avanza hacia los extremos del dominio espacial correspondiente (figuras 1b, 1c, 1d y 1e). Cada una de las jorobas se estrella con las fronteras del dominio (figura 1f), luego se regresan (figura 1g) hasta volverse a encontrar por el centro del dominio aproximadamente (figura 1h). El movimiento continúa pero las alturas de las olas generadas son cada vez más pequeñas (figura 1i), hasta alcanzar el estado estacionario a partir de los 2 s aproximadamente (figura 1j).

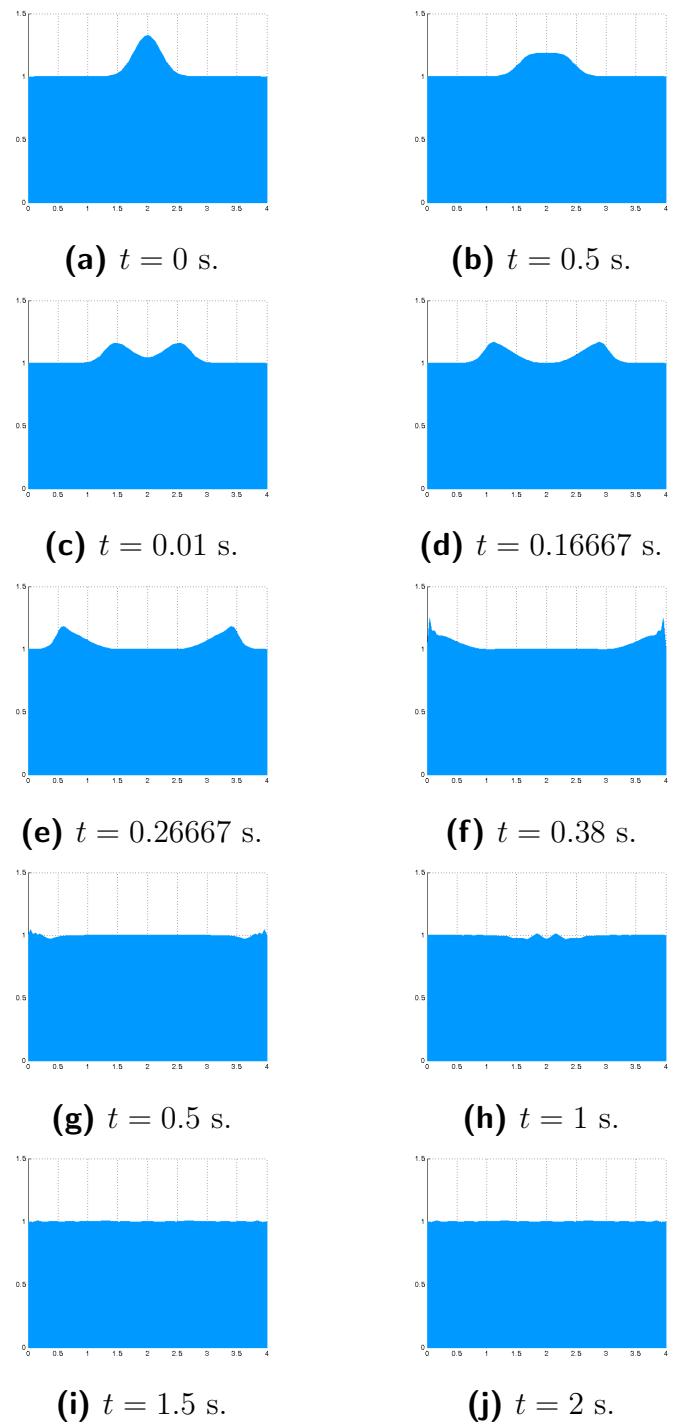


Figura 1: Serie de imágenes que muestran la altura del agua en diferentes tiempos una vez iniciada la simulación. Es importante notar que aproximadamente a los 2 s se alcanza el estado estacionario.

Referencias

- [1] J. Alavez-Ramírez, J. López-López, J.L. Hernández-López, and D. De la Fuente-Vicente. *Modelación Matemática y Computacional de una Inundación*. Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, 2013. ISBN 978-607-606-122-0.
- [2] J.M. Fe-Marqués. *Aplicación del Método de Volúmenes Finitos a la Resolución Numérica de las Ecuaciones de Aguas Someras con Incorporación de los Esfuerzos Debidos a la Turbulencia*. PhD thesis, Universidade da Coruña, 2005.
- [3] P. García-Navarro, P. Brufau, J. Burguete, and J. Murillo. The Shallow Water Equations: An Example of Hyperbolic System. *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 31:89–119, 2008.
- [4] S.G. Roberts. Numerical Solution of Conservation Laws Applied to the Shallow Water Wave Equations. AMSI Summer School 2013, Australian National University, 2013. URL https://maths-people.anu.edu.au/~steve/main_article-20130114.pdf.
- [5] Md. Saiduzzaman and S.K. Ray. Comparison of Numerical Schemes for Shallow Water. *Global Journal of Science Frontier Research*, 13(4):28–46, 2013. ISSN 0975-5896.
- [6] J.C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, second edition, 2004. ISBN 0-89871-567-9.
- [7] J.A. Trangenstein. *Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-87727-5.
- [8] M.E. Vázquez-Cendón. *Estudios de Esquemas Descentrados para su Aplicación a las Leyes de Conservación Hiperbólicas con* *Término Fuente*. PhD thesis, Universidad de Santiago de Compostela, 1994.
- [9] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Pearson Education Limited, second edition, 2007. ISBN 978-0-13-127498-3.
- [10] N.T. Vo-Thi. One Dimensional Saint-Venant System. Analysis of PDEs [math.AP], University of Orleans, 2008. URL <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-00597434>.