

Modelado de islas de calor urbanas usando diferencias finitas generalizadas en mallas estructuradas

G. Sánchez,^{1*} D. Santana,¹ F.J. Domínguez,¹ M.L. Ruiz,¹

¹Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

* saphira3000@hotmail.es

Resumen

En este trabajo planteamos un esquema en diferencias finitas generalizadas en mallas estructuradas no rectangulares con dominios con secciones transversales planas, para calcular la solución numérica de la ecuación de difusión-advección en 2 dimensiones, el cual modela la concentración de contaminantes en capas horizontales adyacentes al nivel del suelo. Mostramos el desempeño del método con un breve estudio de la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas en la ciudad de Morelia, asumiendo que los contaminantes son emitidos del suelo en zonas definidas a una tasa constante.

Palabras clave: Diferencias finitas generalizadas; Isla de calor urbana; Ecuación de difusión-advección; Mallas estructuradas no rectangulares.

1 Introducción

Con el paso del tiempo, el hombre ha modificado y adaptado el medio ambiente a sus necesidades; el desarrollo industrial, el crecimiento demográfico, entre otros, han tenido un efecto profundamente negativo sobre el ambiente, lo que ha llevado a que en la actualidad la contaminación sea un problema de gran impacto.

Por esto es necesario estudiar los fenómenos que contribuyen a agravar el problema, de manera que se puedan plantear acciones para disminuir los efectos negativos que éstos tienen.

2 Descripción del problema

En los últimos años, en la zona metropolitana del valle de Morelia, la mancha urbana ha ido en aumento lo que ha traído consigo consecuencias

para el ambiente, principalmente la contaminación del aire por el uso excesivo de vehículos.

Una vez que son emitidos, los contaminantes se transportan a causa de diversos procesos, lo que ocasiona que incremente la zona afectada. Es por eso que es importante estudiar la dispersión de los mismos.

En el presente trabajo se estudia la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas.

3 Modelo matemático

La ecuación de difusión-advección estacionaria, que modela la concentración de contaminantes, está dada por

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + R, \quad (1)$$

donde C representa la concentración del contaminante, u, v y w son las componentes de la velocidad del viento en los ejes x, y, z respectivamente; K_x, K_y y K_z los correspondientes coeficientes de difusividad; y R es un término de creación, destrucción, remoción o eliminación.

Asumiendo homogeneidad del terreno, la concentración es considerada constante a lo largo del eje y . Más aún, asumiendo que la difusión es muy pequeña comparada con la advección en el eje x , la ecuación (1) resulta en

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) + R. \quad (2)$$

Tomando en cuenta mecanismos de remoción y dado que el viento mesoescala es elegido para representar el viento local ocasionado por la isla de calor, reescribimos la ecuación (2) en la forma

$$(u + u_e) \frac{\partial C}{\partial x} + w_e \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) - \lambda C,$$

donde u_e y w_e son las componentes del viento mesoescala en la dirección x y z respectivamente, λ es un parámetro que define la pérdida de un contaminante por unidad de tiempo y K_z está dada por una ley de potencias, de modo que la ecuación anterior se transforma en

$$K_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - (u + u_e) \frac{\partial C}{\partial x} + \left(\frac{\partial K_z}{\partial z} - w_e \right) \frac{\partial C}{\partial z} - \lambda C = 0. \quad (3)$$

4 Metodología de solución

Consideremos el operador lineal de segundo orden

$$Lu = Cu_{zz} + Du_x + Eu_z + Fu,$$

donde C, D, E y F son funciones. El problema de interés es la construcción de esquemas en diferencias finitas para una malla no rectangular, sobre el dominio de L .

El esquema en diferencias finitas [3] se obtiene considerando un conjunto finito de nodos

p_0, p_1, \dots, p_q para el cual necesitamos encontrar los coeficientes $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q$, de modo que

$$\hat{L}(p_0) = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q).$$

El esquema es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - \hat{L}(p_0) \rightarrow 0$$

mientras $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$.

La expansión de la expresión anterior, usando $q = 8$ puntos, alrededor de p_0 está dada por

$$\begin{aligned} [Lu]_{p_0} - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i u(p_i) = & \left(F(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \right) u(p_0) + \\ & \left(D(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \Delta x_i \right) u_x(p_0) + \\ & \left(E(p_0) - \sum_{i=0}^8 \Gamma_i \Delta z_i \right) u_z(p_0) + \\ & \left(C(p_0) - \sum_{i=0}^8 \frac{\Gamma_i (\Delta z_i)^2}{2} \right) u_{zz}(p_0) + \\ & \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta z_i\})^3. \end{aligned}$$

Esto define de manera natural un sistema de 6 ecuaciones y 9 incógnitas

$$M\Gamma = \beta \quad (4)$$

donde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ 0 & \Delta z_1 & \dots & \Delta z_8 \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta z_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta z_8 \\ 0 & (\Delta z_1)^2 & \dots & (\Delta z_8)^2 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_8 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}.$$

Encontramos una solución para el sistema reducido

$$\tilde{M}\tilde{\Gamma} = \tilde{\beta} \quad (5)$$

donde

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_8 \\ \Delta z_1 & \dots & \Delta z_8 \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_8)^2 \\ \Delta x_1 \Delta z_1 & \dots & \Delta x_8 \Delta z_8 \\ (\Delta z_1)^2 & \dots & (\Delta z_8)^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \vdots \\ \Gamma_8 \end{pmatrix}, \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2C(p_0) \end{pmatrix},$$

y usamos la primera ecuación del sistema definido por (4) para determinar Γ_0 :

$$\Gamma_0 = F(p_0) - \Gamma_1 - \dots - \Gamma_8.$$

5 Experimentación computacional

Se utilizan las funciones u , K_z propuestas por [4] y u_e , w_e por [2].

$$\begin{aligned} u &= u_r \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ u_e &= ax \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ w_e &= \frac{az}{\alpha + 1} \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \\ K_z &= K_r \left(\frac{z}{z_r} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

donde a , α , λ , u_r , z_r y K_r son constantes.

Con los coeficientes de la ecuación (3) en los nodos interiores de una submalla estructurada de 3×3 , el lado derecho de (5) está dado por

$$\tilde{\beta} = \begin{pmatrix} -(u + u_e)(p_0) \\ \frac{\partial K_z}{\partial z} - w_e(p_0) \\ 0 \\ 0 \\ 2K_z(p_0) \end{pmatrix}.$$

A la altura de la capa de mezcla y al nivel del suelo, el valor de $K_z \frac{\partial C}{\partial z}$ está dado por

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad z = H, x > 0,$$

$$K_z \frac{\partial C}{\partial z} = \begin{cases} v_d C - Q & z = 0, 0 \leq x \leq l_1 \\ v_d C & z = 0, l_1 < x \leq L \end{cases},$$

donde v_d es la velocidad de deposición.

Las condiciones de Neuman se discretizan considerando 5 nodos vecinos a un nodo de frontera de manera análoga a lo descrito anteriormente.

En las fronteras verticales tenemos

$$C(0, z) = C_0, \quad C(L, z) = 0.$$

Los parámetros usados en la modelación son

$$\alpha = \begin{cases} 0.17 & (\text{inestable}) \\ 0.27 & (\text{neutral}) \\ 0.61 & (\text{estable}) \end{cases},$$

$$a = 0.002s^{-1},$$

$$\lambda = 4 \times 10^{-5}s^{-1},$$

$$u_r = 2.1m/s,$$

$$z_r = 10m,$$

$$K_r = 0.84m/s,$$

$$Q = 1\mu m^{-2}s^{-1},$$

$$v_d = 0.006m/s,$$

los cuales fueron tomados del artículo [1], debido a la semejanza que existe entre la región de estudio y la discutida en dicho trabajo.

La discretización propuesta se aplicó en una malla estructurada para la zona de prueba, de 101 puntos por lado; la cual fue generada usando el generador elíptico de Winslow [5], considerando un rectángulo escalado de 1000 metros en el eje horizontal (x) y 200 metros en el eje vertical (z).

La distribución de nodos al nivel del suelo es cuadrática, de manera que sea más densa en el área de emisión, tal como se muestra en la figura 1. La dispersión de contaminantes estimada, correspondiente a las distintas condiciones atmosféricas, se muestra en las figuras 2-4.

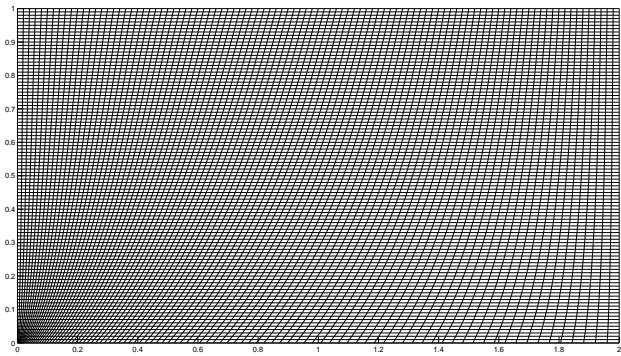


Figura 1: Malla usada.

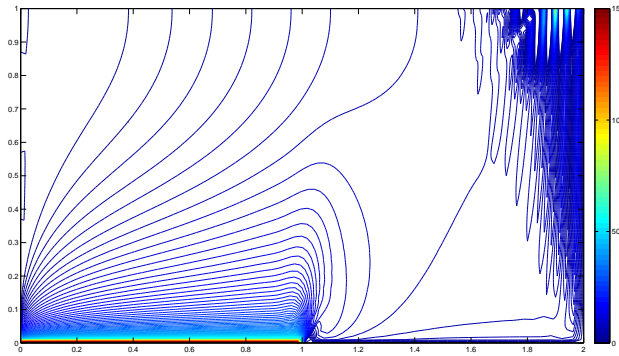


Figura 4: $\alpha = 0.61$.

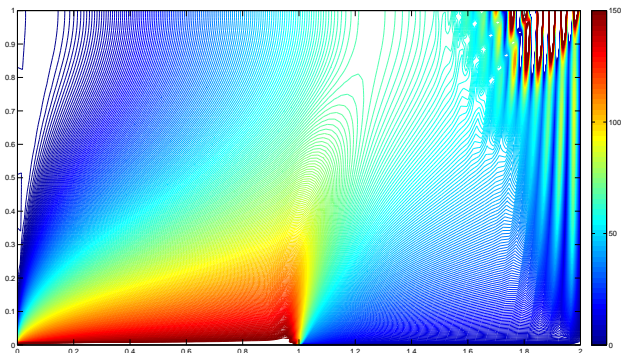


Figura 2: $\alpha = 0.17$.

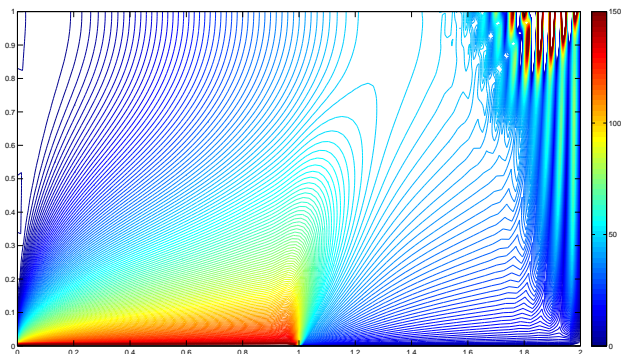


Figura 3: $\alpha = 0.27$.

6 Conclusiones

Presentamos una aproximación a la solución de la ecuación de difusión-advección estacionaria en 2 dimensiones, la cual modela la dispersión de contaminantes bajo el efecto de islas de calor urbanas, sujeto a tres condiciones atmosféricas (inestable, neutral y estable). Podemos concluir que el sistema planteado describe de manera satisfactoria la dinámica de interés.

Los resultados sugieren que el efecto de las islas de calor favorecen el ascenso de contaminantes, haciendo más densa la capa de mezcla, agravando el problema.

Para obtener mejores resultados, es necesario adaptar las mallas a nuestras condiciones locales y aplicar valores más aproximados en los datos y parámetros requeridos; así como trabajar en un modelo no estacionario.

Referencias

- [1] M. Agarwal and A. Tandon. Modeling of the urban heat island in the form of mesoscale wind and of its effect on air pollution dispersal. *Applied Mathematical Modelling*, 34:2520–2530, 2010.
- [2] J.F. Dillely and K.T. Yen. Effect of a mesoscale type wind on the pollutant distribution from a line source. *Atmos. Environ.*, 6:843–851, 1971.
- [3] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. SIAM, 2007.
- [4] J.S. Lin and L.M. Hildemann. Analytical solutions of the atmospheric diffusion equation with multiple sources and height dependent wind speed and eddy diffusivities. *Atmos. Environ.*, 30:239–254, 1996.
- [5] Joe. F. Thompson, B. K. Soni, and N. P. Weatherill. *Handbook of Grid Generation*. CRC Press, 1998.