

Modulación no-ortogonal mediante los modelos Legendre-Fourier y Taylor-Fourier

V. A. Trejo Rocha,^{1*} J. A. de la O Serna¹

¹ Posgrado en Ingeniería Eléctrica, FIME UANL

* vidal.trejorc@gmail.com

Resumen

Las bases de expansion ortogonales son ampliamente utilizadas tanto en los algoritmos de procesamiento digital de señales (DSP) como en el MODulador-DEMODulador (MODEM) de los sistemas de comunicaciones digitales. En el presente trabajo se explora desempeño de un par de esquemas de modulación no-ortogonal Legendre-Fourier (LF) y Taylor Fourier (TF) y se evalúa su razón de error binaria (BER) en un canal de ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN).

Palabras clave: Bases no-ortogonales; Legendre-Fourier; Modulación no-ortogonal.

1 Introducción

El objetivo fundamental de los sistemas de comunicaciones es transmitir y recibir información de un lugar a otro a travez de un medio analógico llamado *canal*. Para esto, el *modulador* sustituye la información binaria por un conjunto finito de señales que son propagadas en el canal, el cual las distorsiona y les agrega interferencia y ruido. El *demodulador* realiza la operación inversa estimando la información binaria de la señal recibida.

Los formatos de *modulación digitales lineales*, como los esquemas QAM y PSK utilizan un conjunto de señales ortonormales $\phi_j(t)$ para el mapeo entre la cadena binaria I y las señales $s(t)$, como se ilustra en la fig. 1. La síntesis de señales se realiza mediante la combinación lineal

$$s(t) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(t) \quad t \in I; \quad (1)$$

donde cada α_j pertenece a un conjunto finito de amplitudes. El mapeo entre los bits y las amplitudes se realiza con un *codificador*. En caso de

una distorsión nula i.e $r(t) = s(t)$, la estimación de los coeficientes se realiza en el demodulador con el producto punto

$$\alpha_j = \langle r(t), \phi_j(t) \rangle \quad 1 \leq j \leq N; \quad (2)$$

El esquema de Multiplexación por División de Frecuencias Ortogonales (OFDM) es un ejemplo notable del anterior patrón de diseño. OFDM usa la base de Fourier de la forma $\phi_m(t) = e^{j2\pi m f_1 t}$ ortogonal en el intervalo $T = \frac{1}{f_1}$, lo que permite utilizar métodos de Transformada Digital de Fourier (DFT) para implementar su modem [1].

De manera similar, en muchos algoritmos DSP las bases de descomposición ortogonales son preferidas sobre las no-ortogonales por la facilidad del cálculo de los coeficientes de expansión con productos punto. Ejemplos pueden ser encontrados en las bases de las transformadas DFT, DWT y en el proceso de ortogonalización Gram-Schmidt.

Sin embargo, desde el punto de vista algebraico la independencia lineal es la condición necesaria para una representación unívoca en un espacio vectorial. En el caso no ortogonal y linealmente

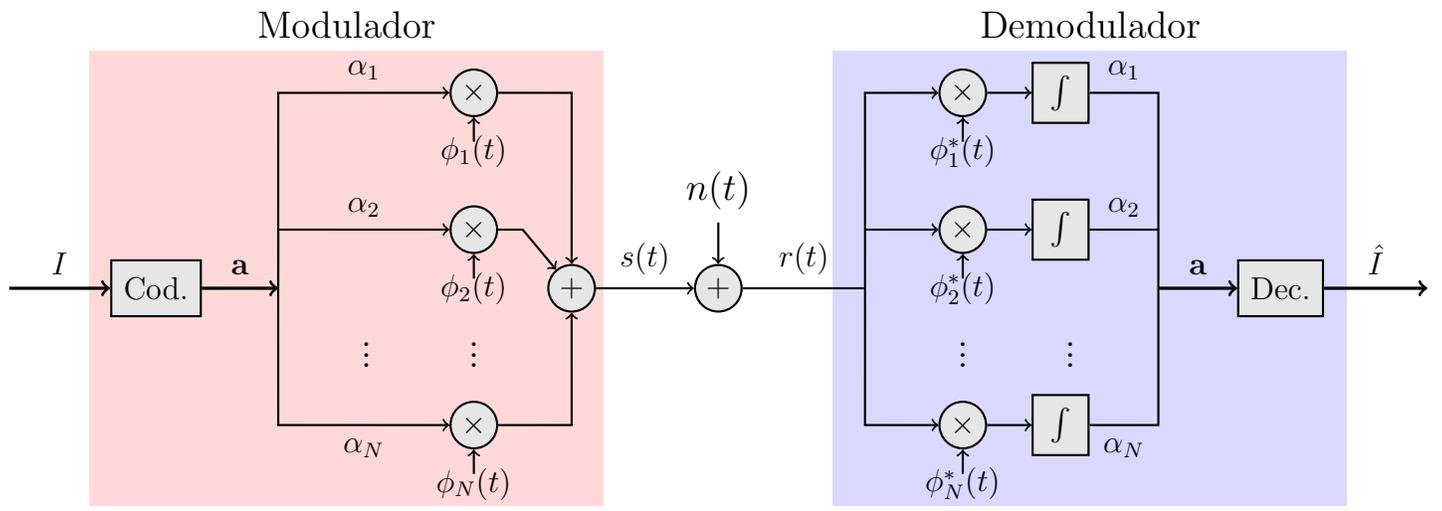


Figura 1: Diagrama Modem digital lineal.

independiente (LI), los coeficientes son estimados mediante el uso de conjunto *biortogonal* [2] al conjunto LI. Tal conjunto es obtenido de manera numérica mediante mínimos cuadrados tomando los renglones de la matriz pseudoinversa [3], y en casos matemáticamente tratables con el cálculo analítico de su forma cerrada [4].

En el contexto de los sistemas de comunicaciones han sido propuestas alternativas no-ortogonales de OFDM para reducir el efecto de la distorsión en canales de 2 rayos [5] y doblemente dispersivos [6].

2 Modelos de señal LF y TF

2.1. Tiempo continuo

Basado en el modelo de señal en [7], la señal *equivalente bandabase compleja* [8] es generada mediante la suma del producto cartesiano de M funciones de armónicas y K polinomios y se expresa como

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_{m,k} \phi_{m,k}(t) \quad -1 \leq t < 1. \quad (3)$$

donde $\alpha_{m,k} \in \mathbb{C}$ es la amplitud compleja de la armónica m y el polinomio k y $\phi_{m,k}(t)$ es el elemento base tomado del modelo LF ó TF. Los elementos ambos modelos son mostrados en la tabla 1.

TF	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} t^k e^{j2\pi m f_1 t} \quad -1 \leq t < 1$
LF	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} l_k(t) e^{j2\pi m f_1 t} \quad -1 \leq t < 1$

Tabla 1: Elementos de la base de expansión $\phi_{m,k}$ en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

El par de bases difieren sólo por el termino multiplicativo Taylor ó Legendre. En ambos casos ε_k es un factor de normalización y la primera frecuencia armónica es elegida como un múltiplo entero del recíproco del intervalo temporal $[-1, 1]$ como $f_1 = P \frac{1}{2}$. De esta manera se tienen tres variables de diseño M , K y P . Las señales base LF, mostradas en la fig. 2, se caracterizan por que los términos Legendre definen una envolvente para el grupo de armónicas. Lo anterior ocurre también con la base LF.

Las bases TF y LF son no-ortogonales dado que el producto punto entre un par de sus elementos

$$\langle \phi_{m_1, k_1}, \phi_{m_2, k_2} \rangle = \int_{-1}^1 p_{k_1}(t) p_{k_2}(t) e^{-j2\pi f_1 (\Delta m) t} dt, \quad (4)$$

donde $p_k(t)$ corresponde al término Taylor o Polinomio de Legendre de orden k y $\Delta m = m_2 - m_1$ la diferencia armónica, es distinto a cero cuando $m_1 \neq m_2$ y $k_1 \neq k_2$ si el número de polinomios incluidos es mayor a uno ($K > 1$).

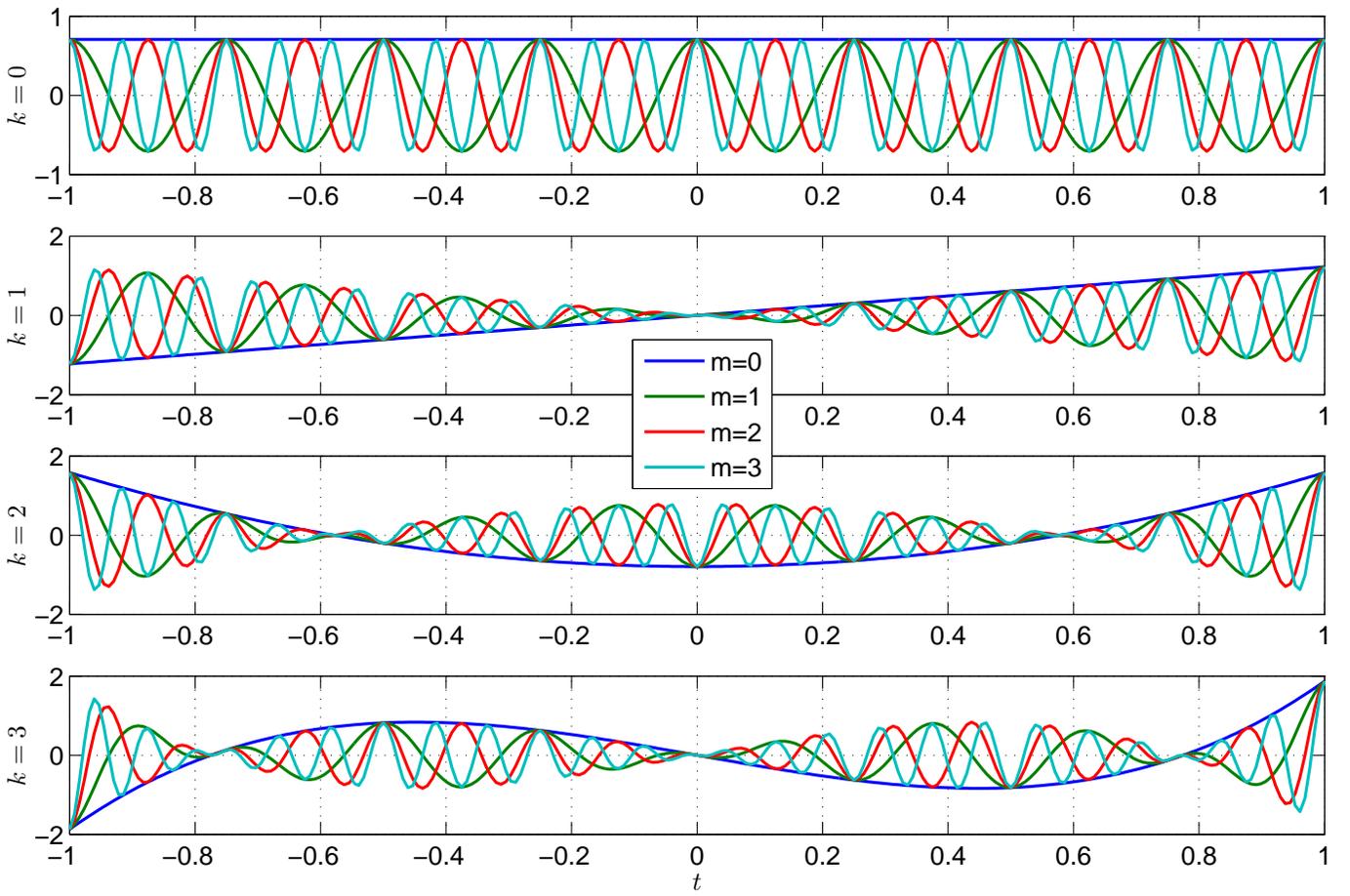


Figura 2: Señales base (parte real) del modelo LF. $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$

2.2. Tiempo discreto e implementación matricial

Aplicando una frecuencia de muestreo como múltiplo entero Q de la primera portadora $f_s = Qf_1$, las bases discretizadas se expresan como en la tabla 2 con $N = PQ$ muestras. El factor $\frac{2}{N}$ cumple la función de normalización en tiempo discreto.

TF	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N}} \left(\frac{2}{N}n\right)^k e^{j\frac{2\pi}{Q}mn}$
LF	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N}} l_k \left(\frac{2}{N}n\right) e^{j\frac{2\pi}{Q}mn}$

Tabla 2: Elementos de la base de expansión $\phi_{m,k}$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Organizando las muestras de los elementos base en las columnas de una matriz $\Phi \in \mathcal{M}^{N \times MK}$ y de manera similar las amplitudes $\alpha_{m,k}$ en el vector columna $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{MK}$ la ec. 1 es expresada como

$$\mathbf{s} = \Phi \mathbf{a} \quad (5)$$

donde $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^N$ son las muestras de la señal generada. La estimación de los coeficientes de ponderación bajo el criterio de mínimos cuadrados puede ser calculado

$$\hat{\mathbf{a}} = \Phi^\dagger \mathbf{s} \quad (6)$$

donde $\Phi^\dagger = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H$ es la matriz pseudo-inversa izquierda. Las columnas de Φ son ortogonales a los renglones de Φ^\dagger i.e $\mathbf{I} = \Phi^\dagger \Phi$, por lo que los elementos en ambas matrices puede ser asociados a un par de bases *biortogonales*.

3 Simulación computacional

Los esquemas LF y TF fueron evaluados considerando un modelo de canal AWGN, el cuál agrega muestras de un proceso de ruido blanco de media nula y varianza σ^2 , con respuesta a la frecuencia ideal plana y no limitada en banda, además de sincronía entre transmisor y receptor. No son consideradas las distorsiones lineales y no

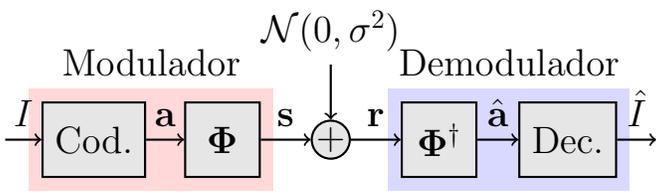


Figura 3: Diagrama de simulación de los esquemas propuestos en condiciones de canal AWGN.

lineales ocasionadas por las etapas de filtrado, translación frecuencial y amplificación.

Tomando como referencia la fig.3, son utilizados codificadores BPSK, que utilizan la correspondencia -1 si el bit entante es 0 y 1 si es un 1. Para emular la salida del codificador a una secuencia binaria equiprobable, son generados vectores columna \mathbf{a} cuyos elementos α_j son variables aleatorias que toman los valores $\{-1, 1\}$ de manera equiprobable. De manera similar, para estimar la secuencia binaria \hat{I} el decodificador decide por un bit 0 si $\hat{\alpha}_j \leq 0$ y por 1 si $\hat{\alpha}_j > 0$.

Las señales transmitidas son generadas con la multiplicación matricial $\Phi\mathbf{a}$ donde Φ contiene las muestras de la base vectorial seleccionada. Para las pruebas se usaron las bases TF y LF con $M = 4$ armónicas y $K = 4$ polinomios. De manera similar la recepción se realiza con la multiplicación con la pseudoinversa $\Phi^\dagger\mathbf{r}$, donde \mathbf{r} son las muestras de las señales recibidas afectadas por el canal.

4 Resultados

La secuencia recibida \hat{I} contiene una cantidad promedio de bits erróneos dependiente de la energía del ruido y el esquema de modulación utilizado.

La gráfica BER, en la fig. 4, muestra la razón entre el número de bits transmitidos y el número de bits erróneos como función de la relación de la energía de bit E_b y de ruido $N_0 = 2\sigma^2$. En ella puede ser observado que en el esquema TF se producen más errores que LF para la misma intensidad de ruido y la misma distancia interarmónica $P = 4$ y $P = 8$. También, en

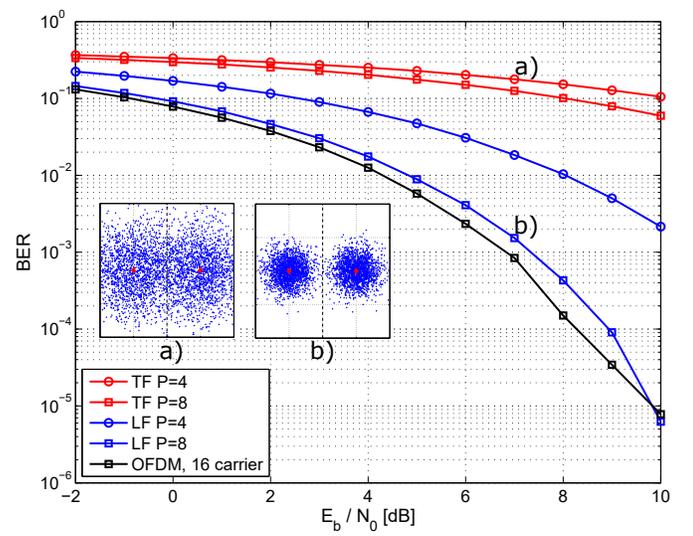


Figura 4: Desempeño BER y diagramas de dispersión de $\hat{\alpha}_{2,2}$ con varianza $\sigma^2 = 0,1$ a) TF, $P = 4$ y b) LF, $P = 8$.

ambos esquemas el incremento de la distancia interarmónica reduce la cantidad de errores.

Este comportamiento puede ser explicado de la siguiente manera. Dado que el operador pseudoinversa es lineal, el vector recibido puede ser descompuesto como $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a} + \mathbf{n}$ donde \mathbf{n} es la contribución del ruido. La matriz de covarianzas se relaciona con la relación la base de expansión por medio de la matriz gramiana $\mathbf{C}_n = \sigma^2\mathbf{G}^{-1}$ [9] definida como $\mathbf{G} = \Phi^H\Phi$ para señales discretas. En el caso ortogonal se reduce a la matriz diagonal $\mathbf{C}_n = \sigma^2\mathbf{I}$. Las varianzas para cada dimensión se encuentran en la diagonal de \mathbf{C}_n .

Se observa en la fig 5 que las varianzas 1) aumentan por la inclusión de polinomios $K > 1$, lo que era esperado pues son los polinomios lo que producen la no ortogonalidad de la base. 2) decrecen con el incremento de la distancia interarmónica P , lo que indica una ortogonalización por separación frecuencial y un acercamiento al desempeño de OFDM ortogonal. 3) Existen casos de muy alta varianza en $P = 1$, caracterizados por un número de condición elevado en la gramiana. Estos últimos constituyen casos de combinaciones no recomendables.

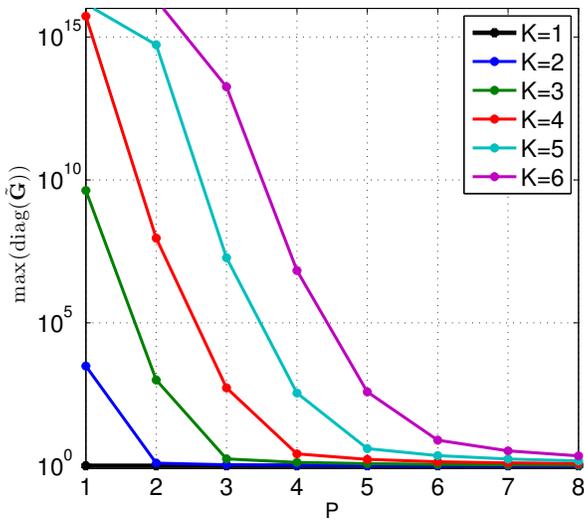


Figura 5: Máximo elemento de \mathbf{C}_n con $\sigma^2 = 1$ como funci3n variables de diseño K, P . Base LF con $M = 4$.

5 Conclusiones

Fueron propuestos un par de esquemas de modulaci3n no-ortogonal utilizando los modelos TF y LF y simulados mediante técnicas matriciales. Fue evaluado su desempeño en un canal AWGN y fue observado que ciertas combinaciones de parámetros de diseño producen más errores en el receptor.

Para las modulaciones no-ortogonales cuya no-ortogonalidad es producida por la selecci3n de la base, el desempeño AWGN está directamente ligado al contenido de la inversa de la matriz gramiana. Lo que brinda un procedimiento analitico para evaluar dicho desempeño para futuros diseños no ortogonales en los modems de los sistemas de comunicaciones.

Referencias

- [1] S. B. Weinstein, P. M. Ebert, "Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-19, no. 5, pp. 628-634, 1971
- [2] M. Vetterli, *et al.* *Foundations of Signal Processing*, 1ra ed. Cambridge: Cambridge University Press, pp. 86-90, 2014.
- [3] T. Ebrahimi, *et al.*, "Video Coding Using a Pyramidal Gabor Expansion" *SPIE Visual Communications and Image Processing*, Vol. 1360, pp. 489-505, 1990.
- [4] M. J. Bastiaans "Gabor's expansions of a signal into gaussian elementary signals" *Proceedings of the IEEE*, Vol. 68, pp. 538-539, 1980.
- [5] Z. Cvetkovic. "OFDM with biorthogonal demultiplexing," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Digital Signal Processing, ICASSP*, Vol. 5, pp. 2517-2520, 2000.
- [6] W. Kozek, A. Molisch. "Nonorthogonal Pulshapes for Multicarrier Communications in Doubly Dispersive Channels," *IEEE J. on Selected Areas in Commun.*, Vol. 16 No. 8, pp. 1579-1589, 1998.
- [7] M. A. Platas-Graza, J. A. de la O Serna "Dynamic harmonic analysis through Taylor-Fourier Transform," *IEEE Transactions on instrumentation and measurement*, vol. 60, No.3, pp. 804-813, 2011.
- [8] J. G. Proakis, M. Salehi. *Digital communications*, 5ta ed. NY: McGraw-Hill Education, pp. 22, 2007.
- [9] S. M. Kay "Fundamentals of Statistical Signal Processing, Vol I: Estimation Theory", Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, pp. 85-86, 1993.