Disponibile anche in inglese

Il ruolo della comprensione del testo nel processo di matematizzazione e modellizzazione

The role of text comprehension in the process of mathematization and modeling

Elena Franchini*, Alice Lemmo° e Silvia Sbaragli*
*Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI Locarno
°Università degli Studi di Palermo

Sunto / In questo articolo vengono analizzate le risposte fornite a un interessante item relativo alla *Prova standardizzata di matematica* somministrata nel maggio 2015 a tutti gli allievi di quinta elementare del Canton Ticino. A partire dai risultati statistici emersi da un campione di 508 protocolli selezionati, viene presentata un'analisi qualitativa effettuata su un campione più ristretto di 174 studenti di prima media, allo scopo di rintracciare le cause delle difficoltà emerse nella risoluzione. Da questa analisi si rileva come le risposte sbagliate di diversi studenti siano legate a difficoltà nella comprensione del testo dell'item, in particolare a difficoltà di interpretazione linguistica. Le considerazioni effettuate possono fornire strumenti all'insegnante per la diagnosi di specifiche difficoltà e per suggerire "zone d'intervento".

Parole chiave: comprensione del testo; problemi verbali; matematizzare; modellizzare; difficoltà linguistiche.

Abstract / This article analyzes the answers given to an item related to the *standardized Mathematics test* administered in May 2015 to all fifth grade primary students in Canton Ticino. Starting from the statistical results emerged from a sample of 508 selected protocols, a qualitative analysis on a smaller sample of 174 students of first year of secondary school has been performed, to trace the causes of the difficulties emerged in the resolution. From this analysis we found that many wrong answers are related to difficulties in understanding the item text, in particular to linguistic interpretation. Considerations made may provide teachers tools for diagnosing specific difficulties and suggesting "intervention areas".

Keyword: reading comprehension; verbal problems; mathematize; modelling; linguistic difficulties.

1 Introduzione

Nel maggio 2015 sono state somministrate in Canton Ticino le *Prove standardizzate di matematica* volte a valutare le competenze degli allievi di quinta elementare nei due ambiti: *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure* e nei tre aspetti di competenza: *Matematizzare e modellizzare*, *Eseguire e applicare* e *Sapere*, *riconoscere e descrivere*. Il progetto ha il duplice obiettivo di fornire delle informazioni di monitoraggio del sistema educativo e di dare a docenti, direttori e ispettori delle indicazioni relative all'andamento delle specifiche classi (Crescentini, 2016).

Successivamente, il Dipartimento dell'educazione, della cultura e dello sport ha richiesto al Centro competenze Didattica della matematica del Dipartimento formazione e apprendimento della SUPSI di effettuare un'analisi più puntuale e specifica dei risultati, adottando un'ottica interpretativa propria della didattica della matematica, in grado di mettere in evidenza punti di forza e debolezze nelle prestazioni degli allievi. Si è scelto di analizzare in modo approfondito il processo *Matematizzare e modellizzare*, che rappresenta una componente fondamentale della mobilitazione di competenze in matematica. In questo articolo viene presentata un'analisi puntuale delle risposte fornite dagli allievi di quinta elementare e inizio prima media su un particolare item delle prove standardizzate, dove si evidenziano difficoltà legate prevalentemente alla mancata comprensione linguistica del testo. Nel rapporto di ricerca del progetto (Sbaragli & Franchini, 2017) sono contenuti altri item dove si rintracciano analoghe difficoltà manifestate dagli allievi. Tale tipo di analisi può essere un utile strumento per l'insegnante per la diagnosi di specifiche difficoltà o abilità e per suggerire "zone d'intervento".

2 Quadro teorico

2.1 Il processo Matematizzare e modellizzare

Il processo di matematizzazione si riferisce all'attività di organizzazione e analisi di qualsiasi situazione di realtà attraverso strumenti matematici, cioè alla traduzione, riorganizzazione e (ri)costruzione di un problema all'interno del contesto reale nel mondo simbolico della matematica, e viceversa (Jupri & Drijvers, 2016).

La nozione di matematizzazione trae origine dalla teoria *Realistic Mathematics Education* (RME), sviluppata in Olanda nel 1968 a partire dalle idee di Freudenthal, il quale suggeriva di lavorare con gli allievi a partire da contesti reali e non puramente matematici astratti, considerando la realtà una componente cruciale per l'insegnamento della matematica, sia come fonte che come contesto in cui applicare le idee matematiche (Freudenthal, 1968; 1991; Treffers, 1987; 1991).

Secondo la teoria RME il termine *realtà* ha una connotazione molto ampia: si può riferire alla vita reale, a un mondo fantastico o a situazioni matematiche nella misura in cui esse siano significative e immaginabili dagli allievi, in modo che, ad esempio, gli elementi essenziali della situazione proposta siano stati precedentemente sperimentati e compresi dall'allievo (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000; Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2013). In generale, dunque, si considera l'ambito naturale, sociale e culturale nel quale l'individuo vive, oltre ad aspetti fantastici. Come ha sostenuto Freudenthal (1983, p. ix, citato in OECD, 2007), «i nostri concetti matematici, le nostre strutture e le nostre idee sono state inventate come strumenti per organizzare i fenomeni del mondo fisico, sociale e mentale».

Da un punto di vista didattico, sviluppare la capacità di applicare la matematica per comprendere e risolvere situazioni-problema reali è considerato attualmente in tutto il mondo uno dei principali obiettivi dell'educazione matematica (Eurydice, 2011; NCTM, 2000; OECD, 2006; 2010; 2013; 2016). Come afferma Wheeler (1982, tradotto dagli autori), «È più utile sapere come matematizzare piuttosto che conoscere tanta matematica».

Lo stesso *Piano di Studio della scuola dell'obbligo ticinese* (DECS, 2015) suggerisce il ricorso a situazioni di apprendimento significative, a partire anche da contesti esterni alla scuola, da esperienze di vita quotidiana che consentano di lavorare sulla capacità di utilizzare concetti, principi e metodi della matematica per comprendere, spiegare, esaminare e rappresentare la realtà, intervenire con consapevolezza su di essa, gestire e utilizzare diverse rappresentazioni e modelli, formalizzare e generalizzare i contenuti proposti e interpretare correttamente le informazioni ottenute.

Queste abilità rientrano nel processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, competenza chiave per la formazione del pensiero matematico dell'allievo che, come mostra la ricerca, sarebbe da sviluppare fin dalla scuola elementare (Jones, Langrall, Thornton, & Nisbet, 2002).

Per questo motivo nei quadri di riferimento per la matematica delle principali indagini internazionali PISA (OECD), TIMSS e INVALSI, nazionali (CDPE, 2011) e cantonali (Sbaragli & Franchini, 2014, 2017) si sottolinea come sia necessario valutare gli apprendimenti degli allievi su questo processo, non solo dunque misurare le conoscenze e le abilità in ambito matematico, ma anche la capacità di mettere in relazione questi saperi con dei contesti d'azione che devono essere affrontati.

In OECD (2004) viene delineato all'interno della matematizzazione un particolare ciclo, ripreso e sottolineato anche in OECD (2013; 2016), che possiamo riassumere nei seguenti aspetti:
1. Partire da un problema reale.
2. Strutturare il problema in base a concetti matematici.
3. Isolare progressivamente il problema ritagliandolo dalla realtà attraverso processi quali il fare supposizioni sulle caratteristiche essenziali del problema stesso, il generalizzare e il formalizzare (mettendo così in evidenza gli aspetti matematici della situazione e trasformando il problema reale in un problema matematico che rappresenti fedelmente la situazione).
4. Risolvere il problema matematico.
5. Infine, tradurre la soluzione matematica nei termini della situazione reale.

Nella terminologia proposta da PISA tale ciclo viene descritto attraverso l'identificazione di alcuni processi che sono ritenuti chiave per la gestione del problema: *formulare* il problema, ovvero trasporlo dal linguaggio naturale al linguaggio formalizzato della disciplina, *utilizzare* i propri saperi per dare una risposta al problema che si è identificato, *interpretare* e *valutare* la pertinenza della soluzione ipotizzata in rapporto al contesto di realtà da cui si è partiti.

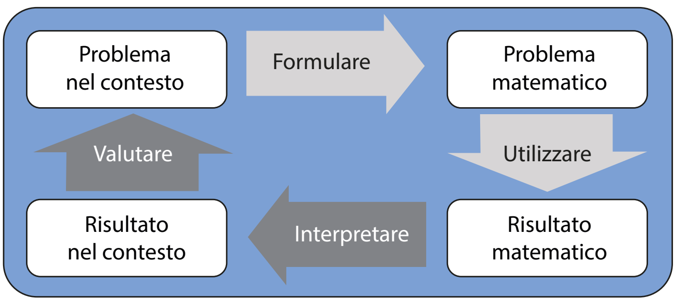


Figura 1
Il ciclo della matematizzazione tratto da PISA (OECD, 2013).

Il ciclo ideale illustrato in Figura 1 parte da un "problema nel contesto". Chi risolve un problema di questo tipo cerca di individuare gli aspetti matematici rilevanti della situazione, depurandola da tutto ciò che è ininfluente ai fini della risoluzione, trovando dunque una struttura, un modello astratto e ideale della situazione (ad esempio una formula, un'espressione o equazione algebrica, uno schema) basato sulle ipotesi elaborate, sui concetti e sulle relazioni individuate. In questo modo trasforma il "problema nel contesto" in un "problema matematico", cioè gestibile attraverso strumenti, concetti e procedure proprie della matematica.

Un modello può essere definito come un «sistema di strutture concettuali usate per costruire, interpretare e descrivere matematicamente una situazione» (Richardson, 2004, p. viii, tradotto dagli autori). La modellizzazione prevede dunque da parte dell'allievo l'individuazione della struttura matematica all'interno del problema posto (English & Watters, 2004a).

Il primo processo di *formulazione* richiede la capacità di estrapolare le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema. Dunque è necessaria a priori una comprensione profonda della situazione e una decodifica delle informazioni trasmesse dal testo (anche quelle sottintese) espresse in varie forme (linguistica, aritmetica, algebrica, grafica ecc.). Questo presuppone la capacità di saper estrapolare informazioni da varie rappresentazioni espresse in diversi registri semiotici (Duval, 1993).

Una volta ottenuto il "problema matematico" si procede poi con l'*utilizzare* strategie risolutive già note o elaborarne di nuove, applicando ad esempio fatti, regole, algoritmi; manipolando numeri, informazioni, dati grafici, espressioni o equazioni, costruzioni geometriche; utilizzando diverse rappresentazioni e passando dall'una all'altra
per arrivare alla soluzione.[1] Questo secondo processo avviene interamente nel mondo 1
della matematica e utilizza il suo linguaggio e i suoi metodi.

La determinazione di una (o più) soluzioni non conclude il ciclo; esso infatti prevede il passaggio attraverso due ulteriori processi, nonostante nella pratica didattica spesso si tenda a sottovalutare questa fase di analisi a posteriori. Il terzo processo del ciclo (*interpretare*) comporta la capacità degli studenti di riflettere su procedimenti, soluzioni o conclusioni matematiche e di interpretarle nel contesto del problema iniziale, richiedendo dunque una comprensione profonda del significato matematico di quanto ottenuto. In questo processo gli allievi sono particolarmente sollecitati a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni relative al problema di partenza, appartenente ad un contesto di realtà, riflettendo sia sul processo di modellizzazione sia sui
risultati ottenuti.[2] 2

Nel quarto processo (*valutare*) si richiede la capacità di valutare l'accettabilità o meno dei processi risolutivi e delle soluzioni trovate in base alle condizioni reali poste dal problema. Questo comporta una riflessione critica sugli eventuali limiti o punti di forza

1. Nei primi due processi del ciclo si può individuare anche il processo *Esplorare e provare* previsto dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015).
2. Questo processo del ciclo è particolarmente legato a due di quelli previsti dal Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015): *Interpretare e riflettere sui risultati* e *Comunicare e argomentare*.

del modello matematico utilizzato, sul perché è stata ottenuta una o più soluzioni, sul loro senso nel contesto specifico della situazione-problema, oltre a una considerazione più ampia di come il mondo reale influisca sul modello matematico scelto.

In questo ciclo è possibile evidenziare due forme di matematizzazione individuate da Treffers (1987) e in seguito da Freudenthal (1991): una *orizzontale* e una *verticale*. La seguente citazione spiega questa distinzione:

> «Così, attraverso un approccio empirico – osservazione, sperimentazione, ragionamento induttivo – il problema viene trasformato in modo tale che possa essere affrontato da strumenti prettamente matematici. Il tentativo di schematizzare matematicamente il problema è indicato dal termine matematizzazione "orizzontale". (…) Le attività che seguono e che sono legate al processo matematico, alla soluzione del problema, alla generalizzazione della soluzione e all'ulteriore formalizzazione, possono essere descritte come matematizzazione "verticale"»
> (Treffers, 1987, p. 71, tradotto dagli autori)

In tutte le fasi dell'attività matematica entrambe le matematizzazioni si completano a vicenda (De Lange, 1987). Nella definizione iniziale di matematizzazione orizzontale si pone l'accento sul passaggio dal mondo reale al mondo matematico, così come parlando di matematizzazione verticale si definisce il processo solo all'interno del mondo matematico. Tuttavia in Jupri & Drijvers (2016) viene fornita una lettura più ampia che può essere applicata al ciclo della matematizzazione proposta da PISA (OECD, 2013). La matematizzazione orizzontale può essere interpretata come il passaggio e la comunicazione tra i due mondi (reale e matematico), quella verticale invece come l'elaborazione di strategie e procedure all'interno dello stesso mondo (**Figura 2**).

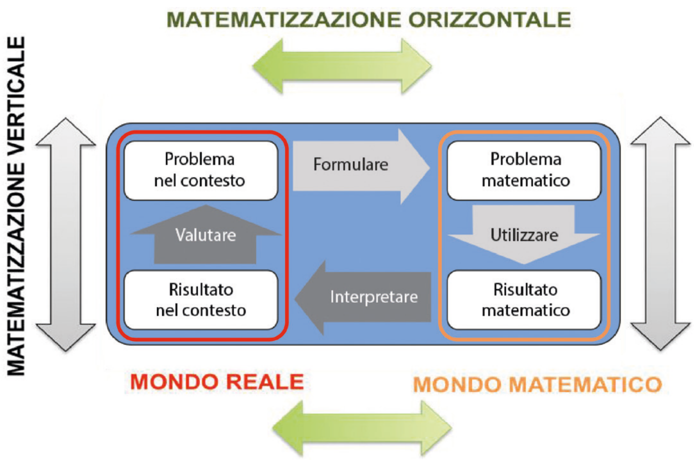


Figura 2
Matematizzazione orizzontale e verticale nel ciclo della matematizzazione.

La matematizzazione orizzontale richiede sia una traduzione in linguaggio matematico della situazione reale attraverso rappresentazioni semiotiche (*formulare*, dal mondo reale al mondo matematico), sia un'analisi e un'interpretazione dei risultati matematici ottenuti nel contesto della situazione reale (*interpretare*, dal mondo matematico al mondo reale).

La matematizzazione verticale richiede sia una riorganizzazione e ricostruzione del problema all'interno della matematica, attraverso la manipolazione di modelli matematici, l'utilizzo di procedure e concetti, riconoscendo schemi ricorrenti e strategie da usare con metodi noti o da esplorare (*utilizzare*, all'interno del mondo matematico), sia la verifica delle condizioni del problema, la generalizzazione delle procedure risolutive e il riconoscimento di una possibile applicazione di tali procedure in problemi simili (*valutare*, all'interno del mondo reale) (Jupri & Drijvers, 2016).

L'esplicitazione di queste fasi della matematizzazione permette di analizzare in modo più mirato e consapevole le competenze degli allievi e di prevedere eventuali azioni di intervento specifiche in caso di difficoltà.

2.2 Alcune difficoltà nel processo di Matematizzazione e modellizzazione

In letteratura sono diversi i lavori che si sono concentrati sull'analisi delle difficoltà degli allievi nel processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, focalizzandosi su una delle varie fasi sopra descritte e in livelli scolastici differenti (Jupri, Drijvers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014; Jupri & Drijvers, 2016; Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, Doorman & Robitzsch, 2014; English & Watters, 2004b; Zan, 2007a; 2016; D'Amore, 2014).

In analogia con quanto sviluppato da Newman (1977) per la risoluzione di problemi verbali (Newman Error Analysis), e ripreso da Clements (1980), possiamo inquadrare e categorizzare tali difficoltà nel seguente modo:

- *Significato delle parole*. In letteratura è ormai noto come molte difficoltà incontrate in ambito matematico derivino da carenze linguistiche legate in particolare al significato delle parole, il cosiddetto dizionario (Ferrari, 2003; Fornara & Sbaragli 2013; Zan, 2016).

- *Comprensione della situazione*. Difficoltà nel capire il significato del problema e rappresentarsi correttamente la situazione descritta nel testo. Secondo alcune ricerche (D'Amore, 1996a, 2014; Zan, 2007a, 2016) le difficoltà degli allievi derivano spesso da problematiche legate alla fase iniziale di comprensione. Gli insegnanti stessi evidenziano il fatto che spesso il bambino legge il testo ma non lo capisce a fondo, oppure non lo coglie in un tutto unico. Come afferma D'Amore:

  > «una carente o distorta rappresentazione mentale del problema è una delle più frequenti cause di fallimento ed è dunque qui che occorre intervenire con efficacia e con intelligenza. (…) Il bambino può manifestare difficoltà nella prima fase dei processi di simbolizzazione: dal testo all'immagine mentale evocata nel seguito del testo; [oppure] può immaginare situazioni che provocano conflitti tra l'immagine stessa e le abilità già possedute».
  >
  > (2014, p.172)

  Spesso sembra infatti mancare una effettiva ricostruzione della situazione problematica (Zan, 2011). Secondo l'autrice tale mancanza deriva generalmente da due fenomeni: la difficoltà di comprensione e la rinuncia alla comprensione.

– *Trasformazione del testo in un modello matematico*. Incapacità di tradurre la situazione reale in un problema matematico, difficoltà a stabilire collegamenti tra il linguaggio naturale e quelli specifici della matematica: verbale (dove si usano termini tratti dal linguaggio naturale, spesso con significati disciplinari diversi), grafico, algebrico, simbolico, logico, ecc. Tra le maggiori difficoltà che gli studenti incontrano nella risoluzione di problemi c'è proprio l'incapacità di gestire le diverse rappresentazioni e di passare dall'una all'altra nella fase di modellizzazione (Duval, 1993; D'Amore, 2006). Inoltre, nonostante la ricerca dimostri che anche i bambini di scuola elementare possono impegnarsi in complesse situazioni, con un adeguato sostegno e guida da parte degli insegnanti, tradizionalmente non vengono introdotti alla modellizzazione se non alla scuola media, impedendo loro di compiere i primi passi verso aspetti che coinvolgono questo processo (Diezmann, Watters, & English, 2002; Doerr & English, 2003).

– *Risoluzione matematica*. Difficoltà legate all'apprendimento algoritmico e concettuale (Fandiño Pinilla, 2008) all'interno delle procedure matematiche applicate. In questa categoria rientrano ad esempio errori di calcolo, di applicazione di algoritmi e di formule.

– *Interpretazione dei risultati*. Difficoltà di interpretare la soluzione matematica nel contesto reale e di rileggere criticamente i risultati ottenuti. Gli allievi spesso fraintendono il significato del problema contestualizzato e forniscono soluzioni matematiche che non sono coerenti o rilevanti per la situazione descritta nel compito (Palm, 2008).

Le ricerche di Clements, pubblicate nel 1980, illustrano come il fallimento degli allievi che non sanno risolvere problemi avvenga nei primi tre punti, precedenti all'applicazione delle procedure matematiche. Per questo è di estrema importanza focalizzare l'azione didattica in particolare nei primi passi della risoluzione di un problema.

2.3 Difficoltà linguistiche nella comprensione del testo

Gli item relativi al processo Matematizzare e modellizzare della prova standardizzata somministrata possono essere considerati *problemi verbali*.

Esistono diverse definizioni del termine *problema verbale* di matematica, in particolare scegliamo di fare riferimento a quella fornita da Gerofsky (1996), per cui un problema verbale di matematica è un compito presentato tramite un testo scritto in forma verbale, eventualmente integrato attraverso il simbolismo matematico. Molto spesso i problemi verbali coinvolgono anche aspetti narrativi, poiché descrivono situazioni verosimili con dei personaggi che svolgono determinate azioni; in questo caso vengono spesso chiamati anche *story problems* (Verschaffel, Greer & De Corte, 2000).

I problemi verbali proposti agli allievi sono solitamente eteroposti; ciò significa che il soggetto che li progetta e li somministra (generalmente il docente o lo sperimentatore) non è lo stesso soggetto che li deve risolvere (solitamente lo studente) e spesso anche le finalità delle persone coinvolte non sono le stesse. Ciò avviene in particolare nelle prove standardizzate, dove le intenzioni dei propositori e autori degli item possono essere molto diverse da quelle degli studenti che li devono risolvere. In questo caso gli item sono presentati attraverso una modalità di comunicazione comune: un testo. Con questo termine ci riferiamo a una qualunque produzione linguistica di lunghezza variabile (Ferrari, 2004). Studiare il testo di un compito significa considerare diversi aspetti; in particolare, in questo studio siamo interessati a quelli legati alla dimensione linguistica.

Non è possibile pensare che le scelte linguistiche che si fanno nella fase di formulazione del testo di un problema non abbiano conseguenze sull'interpretazione che il solutore si crea del compito. Come sostengono Bara e Bucciarelli (1992, p. 67): «La manipolazione di modelli mentali è un processo cognitivo di particolare rilievo nella comunicazione: la comprensione di un enunciato linguistico richiede la costruzione di un modello mentale a partire dall'enunciato stesso». Questo processo di interpretazione del testo è quindi cruciale quando si studia il comportamento di un solutore davanti ad un item di matematica, poiché tale comportamento dipende dalla rappresentazione mentale che quest'ultimo si è costruito del testo. Tale rappresentazione mentale è stata descritta in termini di *modello mentale* (Johnson-Laird, 1983) o *modello della situazione* (*situation model*, Kintsch, 1988). In riferimento alla teoria dei modelli mentali di Johnson-Laird (1983), Pancanti sostiene:

> «il processo di interpretazione di un testo avviene mediante il passaggio attraverso tre livelli di rappresentazione: il primo è il livello di rappresentazione grafema (il testo stesso); il secondo è il livello di rappresentazione proposizionale; infine il terzo livello è proprio la rappresentazione mediante un modello mentale. La rappresentazione proposizionale fornisce il significato del testo ottenuto come funzione dei significati delle singole parole e delle loro relazioni sintattiche. Il modello mentale permette di individuarne i referenti, le loro relazioni e quindi un mondo possibile rispetto a quanto descritto nel testo stesso».
>
> (2014, p. 109)

Un'altra prospettiva fornita da Marini & Carlomagno (2004), basata su una rielaborazione del modello descritto da Kintsch e Van Dijk (1978), afferma che la comprensione di un testo si basa su una preliminare astrazione dei significati delle singole parole, in seguito delle frasi (significati organizzati in proporzioni) e la loro successiva integrazione in reti concettuali che crescono in complessità fino a raggiungere il modello della situazione descritta dal testo in questione. «(…) La comprensione di un testo scritto o di un discorso o conversazione orale procede stabilendo delle connessioni tra le strutture linguistiche di base che vengono gradatamente processate e che queste connessioni forniscono a loro volta coerenza alle rappresentazioni mentali che gli ascoltatori/lettori si formano del testo» (Marini & Carlomagno, 2004, p. 9).

Risulta quindi evidente come il primo passo per la risoluzione di un compito sia strettamente legato all'interpretazione del testo allo scopo di farsi un modello della situazione. Come abbiamo già anticipato, le difficoltà in questo passaggio sono note da diversi anni; ad esempio Mayer (1982), De Corte & Verschaffel (1985), Laborde (1995), D'Amore (1996b, 1997a, 2014), Verschaffel et al. (2000), Ferrari (2004), Zan (2007b), Fornara & Sbaragli (2013) hanno mostrato come le difficoltà osservate in relazione al processo di risoluzione dei problemi verbali possono essere causate da un'inadeguata comprensione e interpretazione del testo con cui il compito è presentato, in particolare dall'influenza delle variabili redazionali del testo (lessicali, sintattiche, testuali) sul processo risolutivo di un problema da parte degli studenti. Come afferma D'Amore:

> «Spesso il testo non è espresso nella lingua che il bambino si aspetta o in una lingua sua (…) e quindi il bambino deve "tradurre" semanticamente da una lingua adulta a una lingua propria, capire il senso della richiesta, per farsi un'immagine di quel che la situazione problematica propone. È chiaro che occorre un'educazione linguistica di livello non banale (…)».
>
> (2014, p. 132)

In particolare lo studente deve conoscere il significato delle parole della lingua italiana (specialistiche o comuni) presenti nel testo, il cosiddetto *dizionario*; deve poi avere un'adeguata *enciclopedia*, ossia la conoscenza delle cose del mondo, che è necessario padroneggiare anche per cogliere i numerosi impliciti presenti nel testo (per approfondimenti rimandiamo a Zan, 2007b). Si tratta di una questione delicata poiché, come sostiene Zan:

> «(…) di fronte ad un testo scritto come problema, il fatto che i bambini non conoscano il significato corretto delle parole utilizzate non implica necessariamente che ne siano consapevoli, e che interrompano il processo di interpretazione in assenza di tali informazioni: di fronte a parole per loro sconosciute i bambini a volte riadattano quello che sentono in una costruzione per loro sensata».
>
> (2016, p. 50)

In un precedente lavoro, D'Amore (1997b) mette in evidenza lo stesso aspetto, tramite la richiesta di risolvere un problema nel quale vi era una parola inventata. A questa richiesta i bambini tendono a re-interpretare la parola sconosciuta, dandole connotati semantici attendibili rispetto alla realtà descritta dal testo.

> «È come se scattasse una clausola del contratto didattico secondo la quale non può accadere che l'insegnante inserisca nel testo una parola inesistente. Si tratta di una clausola appartenente al gruppo che amo definire "fiducia nell'insegnante". È piuttosto plausibile, per il bambino, che si tratti di una parola che lui non conosce, ma che certamente significa qualche cosa; il che sembra non impedire affatto la risoluzione.»
>
> (D'Amore, 1997b, p. 250)

Anche in una ricerca effettuata all'interno del progetto *Italmatica* da Fornara e Sbaragli (2013; 2016), si sono messe in evidenza le difficoltà di comprensione del testo da parte dei bambini di scuola elementare, derivanti da aspetti linguistici, e gli erronei atteggiamenti degli allievi assunti per risolvere problemi. La ricerca era volta a indagare le strategie attuate dai bambini per risolvere due problemi scolastici standard, molto semplici dal punto di vista della *struttura matematica* (processi risolutivi possibili, tipo di dati numerici ecc.), ma più complessi per quanto concerne la *struttura narrativa*, su cui si basa il processo di comprensione – o rappresentazione – del problema. In particolare, in tali testi la risoluzione era vincolata alla corretta interpretazione del significato di alcune parole: ossia, a una padronanza del dizionario, al quale si ricollegano le conoscenze enciclopediche. I dati raccolti hanno rilevato l'erroneo atteggiamento degli allievi di tentare di trovare una soluzione anche quando la comprensione del testo era lacunosa (verificata tramite la richiesta di scrivere il significato di alcune parole), dimostrando così che è più forte l'esigenza di fornire al docente un risultato, piuttosto che ammettere di non essere in possesso di tutte le conoscenze linguistico-enciclopediche per soddisfare la richiesta del problema. Infatti, vari allievi erano consapevoli di non conoscere il significato di alcune parole presenti nel testo, dal momento che lo hanno esplicitato (con frasi come "Non so il significato"), ma ciò non li ha spinti a interrompere il processo di risoluzione. Come sostiene Zan (2007b, p. 746), «Naturalmente se chi legge si rende conto di non conoscere il significato di una parola, può chiederlo o cercarlo, o sospendere l'interpretazione del testo. Ma non è detto che questo succeda».

In una successiva sperimentazione effettuata con allievi di scuola elementare (Fornara & Sbaragli, in stampa) si è voluta "rompere" questa abitudine stereotipata di risoluzione dei problemi di matematica, basata sulla convinzione che dopo la somministrazione di un testo di un problema debba seguire immediatamente la sua risoluzione, anche in mancanza di informazioni utili allo scopo. In particolare, si sono voluti sensibilizzare gli allievi sull'importanza di una riflessione sul significato delle parole presenti nel testo e dell'intera situazione, mostrando agli studenti la loro rilevanza per la risoluzione di un problema. Tale sperimentazione ha portato a significative considerazioni da parte degli allievi e a un miglioramento nella risoluzione dei problemi.

Oltre agli aspetti linguistici, tra le diverse difficoltà di comprensione da parte degli allievi, ve ne sono altri legati al senso stesso del problema, ossia riguardanti il tipo di situazione in cui il problema matematico è contestualizzato e il legame fra la situazione descritta e la domanda posta (Zan, 2016).

Secondo Zan (2012), la rappresentazione della situazione descritta nello stimolo spesso viene aggirata dagli studenti a favore di "comportamenti patologici" a lungo evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica, come la *lettura selettiva del testo* e cioè la lettura orientata alla ricerca di dati numerici da combinare e di parole chiave che suggeriscano il modo di combinarli, la trascrizione del risultato di un algoritmo a prescindere dal contesto di partenza, che testimoniano «una rinuncia a priori a comprendere, in quanto le strategie utilizzate sembrano prescindere dalla comprensione del testo» (Zan, 2011, p. 18). Come sostiene Zan:

> «L'interpretazione di questo fenomeno è complessa, e mette in gioco diversi fattori che interagiscono (per una sintesi si veda Verschaffel et al., 2000): gli stereotipi dei problemi verbali standard, le norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe (il cosiddetto contratto didattico), le convinzioni che i bambini costruiscono interpretando l'attività con i problemi».
>
> (2012, p. 437)

Come dimostrato da numerose ricerche nel campo della didattica della matematica, il linguaggio naturale può quindi diventare un "intralcio supplementare" (e inevitabile) nell'interpretazione di un testo di matematica e, se non adeguatamente padroneggiato, rischia di essere uno dei più pervasivi ostacoli alla sua risoluzione.

3 Metodologia

Prima somministrazione. Nel maggio 2015, verso la fine dell'anno scolastico, è stata somministrata una prova standardizzata di matematica a tutti i 3012 allievi di quinta elementare del Cantone Ticino. La prova era costituita da due fascicoli di 45 item ciascuno. Gli allievi avevano a disposizione un'ora di tempo per risolvere gli item di ciascun fascicolo. La finestra di tempo nella quale è avvenuta la prova è stata di due settimane.

Come già anticipato, nella valutazione didattica di tale prova si è scelto di analizzare il processo *Matematizzare e modellizzare*, costituito da 15 item legati all'ambito *Numeri e calcolo* e 15 all'ambito *Grandezze e misure* (Sbaragli & Franchini, 2017). Gli item appartenenti a questa categoria risultano essere di notevole interesse, poiché essi presentano uno stimolo in cui viene descritto un contesto realistico su cui lo studente deve operare, allo scopo di costruire un modello della situazione presentata.

Per effettuare la valutazione didattica puntuale delle risposte degli allievi, abbiamo analizzato i protocolli di un campione di 508 bambini estratto casualmente da tutti i fascicoli, in modo da garantire la validità statistica. Il campione è stato scelto in modo da bilanciare tutti i circondari scolastici del Canton Ticino e da essere equilibrato per genere; in questo modo sono state incluse quasi tutte le scuole.

Questo ha permesso di rilevare oltre alle percentuali di risposte corrette, errate e mancanti, anche le tipologie di errori più ricorrenti e individuare alcune ipotesi interpretative delle motivazioni che possono aver spinto gli allievi a fornire determinate risposte. Per confermare tali ipotesi è stata effettuata successivamente una seconda somministrazione di alcuni item seguita da alcune interviste.

Seconda somministrazione. Per validare le ipotesi formulate dalla prova standardizzata, all'inizio dell'anno scolastico 2016/2017 sono stati somministrati 15 item degli ambiti *Numeri e calcolo* e *Grandezze e misure*, scelti tra quelli precedenti, le cui risposte fornite non presentavano esplicitamente i processi coinvolti nella determinazione della soluzione, e si è proceduto ad effettuare interviste individuali per indagare con più profondità il processo risolutivo.[3] Per fare in modo di raccogliere dati il più possibile confrontabili con quelli raccolti in precedenza, era necessario individuare un campione che fosse il più possibile simile a quello a cui era stata somministrata la prova standardizzata. Trattandosi dell'inizio dell'anno scolastico, non era possibile selezionare una popolazione dello stesso livello scolare del campione, poiché gli argomenti trattati in classe e l'esperienza scolastica sarebbero stati inferiori. Per questo motivo, si è individuato un campione di studenti di prima media, per i quali è possibile ipotizzare un livello paragonabile con quello degli allievi dell'ultimo mese della classe quinta elementare. Sono state coinvolte otto classi di tre scuole medie: Locarno 1, Locarno 2 e Minusio per un totale di 174 studenti.[4]

3

4

3. Si ringraziano Romina Casamassa e Gemma Carotenuto per l'aiuto fornito nell'effettuare le interviste.
4. Si ringraziano per la disponibilità fornita i direttori delle scuole medie di Locarno 1, Locarno 2 e Minusio: Daniele Bianchetti, Carla Stockar e Paolo Iaquinta e gli insegnanti di matematica: Marco Banfi, Rocco Legato, Lara Caverzasio, Daniele Pezzi, Sara Cataldi e Daniele Zezza.

Il fascicolo composto dai 15 item selezionati è stato somministrato durante le ore scolastiche ed è stato fornito un limite di tempo per risolverli proporzionale al tempo dato all'intera prova standardizzata (20 minuti). A partire dall'analisi dei protocolli, sono stati selezionati e intervistati alcuni studenti. In **Tabella 1** presentiamo nel dettaglio le otto classi coinvolte nella somministrazione, specificando il numero di studenti ai quali è stato somministrato il fascicolo e il numero di studenti intervistati.

Scuola	Classe	Numero studenti a cui è stato somministrato il fascicolo	Numero studenti intervistati
Locarno 1	IA	20	9
	IC	19	10
Locarno 2	IA	24	12
	IB	20	8
	IC	21	14
Minusio	IA	22	7
	IB	23	12
	IC	23	13

Tabella 1
Numero di studenti coinvolti nell'indagine.

In questo articolo si è scelto di riportare l'analisi effettuata per il seguente item dell'ambito *Numeri e calcolo*:

Un appartamento aveva 7 locali.

Dal locale più grande sono state ricavate 2 camere.

Quanti locali ha ora l'appartamento?

Risposta: ....

Figura 3
Item somministrato.

Si tratta di un item che verte su un problema contestualizzato, il cui testo descrive un appartamento inizialmente composto da 7 locali a cui è stata apportata una modifica: il locale più grande è stato diviso in due ulteriori camere allo scopo di aggiungere un nuovo locale all'appartamento, portando così il numero di camere dell'appartamento da 7 a 8.

Trattandosi di un item presentato attraverso un testo scritto in forma verbale, è necessaria una decodifica delle informazioni del testo per una comprensione della situazione, anche dal punto di vista linguistico.

Analizzando l'item, il processo di *matematizzazione orizzontale*, cioè la traduzione del problema reale nel problema matematico, è possibile che generi difficoltà negli allievi poiché coinvolge il passaggio e la comunicazione tra i due mondi espressi attraverso registri differenti.

4 Analisi dei risultati

4.1 Analisi dei risultati della prima somministrazione

L'item somministrato risulta particolarmente interessante da essere analizzato. Riportiamo di seguito i risultati rilevati dall'analisi dei 508 protocolli relativi alla prova standardizzata:

N. STUDENTI E PERCENTUALI DEL CAMPIONE (MAGGIO 2015)		
	Numero studenti	Percentuale
Risposte corrette	180	35,4%
Risposte errate	268	52,8%
Risposte mancanti	50	9,8%
Studenti assenti	10	2%

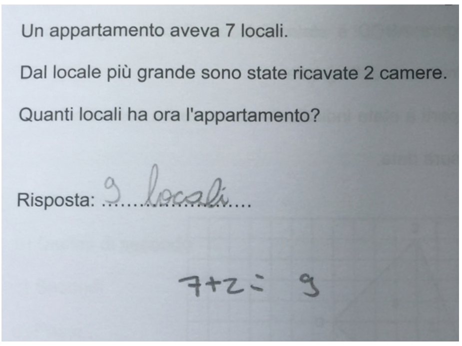
Tabella 2
Percentuale delle risposte del campione.

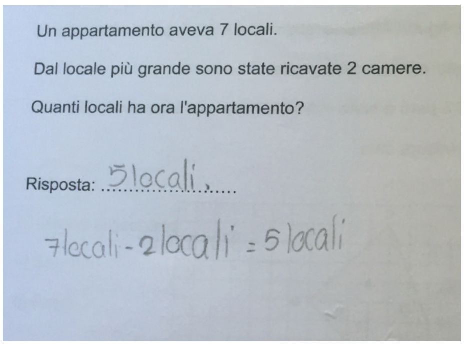
La percentuale di risposte errate di questo item supera il 50% delle risposte fornite. Si tratta dell'unico item tra quelli a risposta aperta che ha collezionato un numero così alto di fallimenti. Inoltre, va rilevato che la percentuale di risposte mancanti è bassa in riferimento al numero di risposte non corrette e paragonata a quelle di altri item dei fascicoli (Sbaragli & Franchini, 2017). Questo potrebbe indicare che il quesito non è stato percepito dagli allievi particolarmente difficile. Si riportano di seguito le risposte errate più frequenti fornite dagli allievi:

Categorie di risposte esatte	Numero studenti del campione (maggio 2015)	Percentuale del campione (maggio 2015)
9, 9 locali o 9 camere	124	24,4%
5, 5 locali o 5 camere	87	17,1%
6, 6 locali o 6 camere	28	5,5 %
7, 7 locali o 7 camere	12	2,4%
Altro	17	3,4%
Totale	268	52,8%

Tabella 3
Categorie di risposte errate fornite dagli studenti del campione.

Solo in pochi casi è stato possibile rilevare oltre al risultato, anche il processo risolutivo adottato dall'allievo per fornire la risposta, ossia il procedimento che ha permesso di individuare il valore numerico presentato nella risposta.





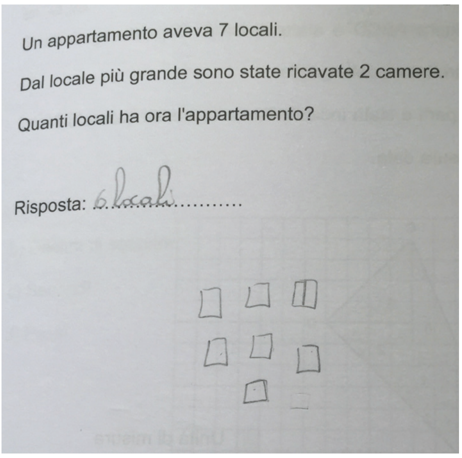


Figura 4, Figura 5, Figura 6
Esempi di risposte errate in cui è stato esplicitato il processo risolutivo adottato.

Come si può osservare in **Figura 4**, lo studente ha fornito la risposta 9 locali. Tale valore è stato individuato attraverso l'operazione 7+2. Questa scelta potrebbe suggerire che lo studente ha interpretato la situazione rappresentata dal testo dell'item come l'aggiunta di due ulteriori locali ai 7 già esistenti. In modo differente, lo studente che ha fornito la risposta presentata in **Figura 5**, potrebbe aver interpretato la situazione come se fossero stati eliminati due locali dall'appartamento, portando a 7-2=5 il numero di locali effettivamente rimasti. Ancora diversa la risposta mostrata in **Figura 6**, dove lo studente si è servito di una rappresentazione iconografica per modellizzare la situazione; tale modello è coerente con il testo presentato ma non lo è la risposta fornita.

Sulla base delle risposte date a questo item, si sono create alcune ipotesi interpretative che potrebbero aver condotto gli studenti alle risposte errate, legate prevalentemente ad aspetti linguistici del testo che condizionano la matematizzazione orizzontale. In particolare, esse sono legate al processo di *formulazione*, che richiede da parte degli allievi la capacità di estrapolare dal testo scritto le informazioni necessarie per analizzare, impostare e risolvere il problema.

Nell'item vi sono infatti alcuni aspetti linguistici che potrebbero avere avuto degli effetti sulle scelte risolutive degli studenti coinvolti nella somministrazione. In particolare, va osservato che, per evitare ripetizioni all'interno del testo, gli autori dell'item hanno scelto di fare uso di due termini, locali e camere, che devono essere interpretati dal solutore come sinonimi. In effetti, nel vocabolario dei sinonimi e contrari della lingua italiana, alla voce *locale* si legge:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sost. Dell'agg. local "locale"]. - 1. a. [ambiente o complesso di ambienti di costruzioni edilizie: la casa ha quattro l.] ≈ camera, stanza, vano.* (Treccani, 2003, *voce locale*).

Allo stesso modo, il termine *camera* viene definito:

> ***Càmera*** *s. f. [lat. camĕra, camăra «volta, soffitto a volta di una stanza», dal gr. μάρα]. – 1. a. In senso generico, qualunque ambiente interno di un edificio per abitazione, che non abbia, per particolarità di forma, dimensioni e impianti, una destinazione speciale. Più concretam., ciascuno dei locali che compongono un appartamento: c. da letto, c. da pranzo, c. da soggiorno; un appartamento di tre c. e cucina.* (Treccani, 2003, *voce camera*).

È possibile notare che nella definizione di locale si fa uso del termine camera indicato proprio come sinonimo e viceversa. In realtà, andando a cercare la definizione della parola locale in un dizionario della lingua italiana si può notare come con tale termine si possa fare riferimento ad un ambiente o a un complesso di ambienti più generico rispetto alla parola camera, infatti:

> ***Locale*** *s. m. [dal fr. local, uso sostantivato dell'agg. local «locale»]. – Ambiente o complesso di ambienti, anche in costruzioni non edilizie (come, per es., nelle navi), che per forma, disposizione, attrezzatura, e sim., è destinato a determinati usi: paese in cui scarseggiano l. scolastici; cercare un l. adatto per una conferenza, per una riunione; il l. è troppo ristretto per essere adibito a sala cinematografica; nelle navi, l. macchine, l. caldaie, ecc. Più genericam., stanza, ambiente, soprattutto di edifici pubblici o per collettività: caserma, collegio con l. ampî, ariosi, ecc.* (Treccani, 2003, *voce locale*).

Si tratta di una distinzione molto sottile che però potrebbe portare a interpretazioni del testo differenti rispetto agli intenti dall'autore dell'item: il locale è un ambiente in cui possono presentarsi più camere. In riferimento a questa interpretazione, la situazione presentata nell'item potrebbe essere intesa da alcuni studenti come una circostanza in cui il numero di camere dell'appartamento varia, in particolare aumenta, ma quello di locali rimane invariato, pari a 7.

Altri studenti potrebbero invece aver interpretato la situazione come la trasformazione di un locale in due camere. In questo modo, il locale più grande non rientra più nel conteggio dei locali e per questo i locali calano a 6 (coerentemente con la risposta presentata in Figura 6).

Un ulteriore termine che potrebbe non appartenere al dizionario degli studenti è il verbo ricavare. Negli intenti dell'autore, tale termine è presentato con il significato di *ottenere*. In effetti, sempre in un vocabolario della lingua italiana, il termine viene definito come:

> ***Ricavare*** *v. tr. [comp. di ri- e cavare]. 2. Cavare fuori, ottenere, trarre o estrarre, di solito attraverso una elaborazione o trasformazione più o meno profonda: r. una scala nella roccia; il gruppo statuario è ricavato da un unico blocco di marmo; acquavite ricavata dalla distillazione delle vinacce; un sottosuolo ricchissimo da cui si ricavano ferro e carbone. (Treccani, 2003, voce ricavare).*

Se tale termine non appartiene al dizionario degli studenti coinvolti nella risoluzione dell'item, è possibile che essi reagiscano non rispondendo alla domanda dell'item oppure che interpretino il significato del verbo in modo personale.

Analizzando i processi risolutivi degli allievi, è possibile che il termine ricavare possa essere stato interpretato come: aggiungere, togliere, unire. Coerentemente con ognuna di queste interpretazioni, lo studente potrebbe aver fornito una risposta all'item differente da quella corretta. Ad esempio, lo studente che interpreta il verbo come sinonimo di *aggiungere*, potrebbe fornire come risposta 9, facendo, 7+2=9 (**Figura 4**); oppure, colui che al termine ricavare associa il significato di *togliere*, potrebbe indicare come risposta 5 camere e dunque svolgere il calcolo: 7-2=5 (**Figura 5**). Infine, lo studente che interpreta l'azione di ricavare come sinonimo di *unire*, potrebbe fornire come risposta 6 poiché due locali sono diventati uno solo e quindi 7-1=6.

Inoltre, nella consegna dell'item si fa implicito riferimento a dei lavori edili attuati in un appartamento, contesto che potrebbe non rientrare nei fatti del mondo legati al vissuto degli allievi. Per dimostrare la veridicità di queste ipotesi e stabilire se tali risposte sono effettivamente collegabili all'interpretazione errata del testo o ad altre fasi del processo di *Matematizzazione e modellizzazione*, è stato necessario raffinare le nostre analisi tramite la seconda somministrazione.

4.2 Analisi dei risultati della seconda somministrazione

L'analisi delle risposte ottenute dalla seconda somministrazione di questo item, effettuata con 174 studenti di prima media nel mese di settembre 2016, mette in evidenza un'uniformità delle risposte rispetto a quelle raccolte nell'indagine cantonale con allievi di quinta elementare nel precedente mese di maggio (**Tabella 4**). Infatti, anche nel secondo caso possiamo notare che la percentuale degli studenti che hanno risposto in maniera corretta rimane intorno al 30%, anche se inferiore rispetto a quella precedente, e la percentuale di risposte errate è intorno al 55%. In questa somministrazione, però, a differenza del caso precedente, avevamo chiesto agli studenti di indicare il motivo di una eventuale mancanza di risposta. Come possiamo vedere dai dati raccolti, circa un 5% degli studenti esplicita di non aver risposto a causa di una mancata comprensione del testo dell'item.

	Percentuali prima somministrazione (maggio 2015)	Percentuali seconda somministrazione (settembre 2016)
Risposte corrette	35,4%	29,9%
Risposte errate	52,8%	55,2%
Risposte mancanti senza motivazione	9,8%	9,8%
Risposte mancanti con motivazione legata alla comprensione del testo	-	5,1%
Studenti assenti	2%	-

Tabella 4
Percentuali di risposta della seconda somministrazione paragonata con la prima.

Anche le risposte errate fornite dagli studenti in questa somministrazione possono essere identificate attraverso le stesse categorie osservate nell'indagine precedente (Tabella 5).

Categorie di risposta	Percentuali prima somministrazione (maggio 2015)	Percentuali seconda somministrazione (settembre 2016)	Numero studenti della seconda somministrazione	Numero studenti intervistati
9, 9 locali o 9 camere	24,4%	20,7%	36	9
5, 5 locali o 5 camere	17,1%	16,1%	28	8
6, 6 locali o 6 camere	5,5%	9,2%	16	7
7, 7 locali o 7 camere	2,4%	4%	7	3
Altro	3,4%	5,2%	9	5
Totale	52,8%	55,2%	96	32

Tabella 5
Percentuali per le categorie di risposte errate fornite dagli studenti nella seconda somministrazione a confronto con la prima.

Confrontando le percentuali relative alle diverse tipologie di risposte, possiamo osservare che in generale i risultati raccolti dalla seconda somministrazione non si distanziano molto da quelli raccolti nella prima. Inoltre, grazie alle interviste siamo risusciti a confermare o meno le ipotesi interpretative presentate nel paragrafo 4.1. In particolare, di seguito discuteremo ogni singola categoria di risposta fornendo un'interpretazione a posteriori sulla base delle interviste effettuate.

Studenti che rispondono 5

Gli studenti intervistati che hanno risposto 5 motivano le proprie scelte in vari modi che possono essere distinti nelle due seguenti categorie:
– alcuni esplicitano di attribuire al termine *ricavare* il significato di *demolire/togliere*;
– altri manifestano varie difficoltà di comprensione del testo dell'item, dichiarando di non riuscire a interpretare la situazione, senza esplicitare per il termine *ricavare* un significato alternativo.

Si rilevano quindi difficoltà nella matematizzazione orizzontale, ossia nel passaggio dalla situazione reale al modello matematico che la interpreta. In alcuni casi, la scelta dell'operazione matematica da applicare sembra totalmente sganciata dalla situazione descritta, ossia dall'azione svolta sulle camere dell'appartamento. Alcuni allievi effettuano una *lettura selettiva del testo* individuando i dati del testo e scegliendo l'operazione da effettuare, senza ricercare un collegamento tra i due mondi (reale e matematico) (Zan, 2011; D'Amore, 2014).

Di seguito sono presentate le trascrizioni di alcune parti delle interviste svolte in modo da chiarire le tipologie di motivazioni sopra descritte (Tabella 6), con I. viene indicato l'intervistatore.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Cosa si fa in questo appartamento?" L.: "Si ricavano altre due camere." I.: "Praticamente cosa si fa?" L.: (dopo qualche secondo di silenzio) "Non lo so." I.: "È il testo che non è chiaro?" L.: "Sì." I.: "Tu riesci ad immaginarti cosa devono fare degli operai che entrano in questo appartamento?" L.: "Devono demolire."	Allo studente L. viene chiesto di descrivere la situazione; inizialmente egli ripete la frase presentata dal testo. Dopo una richiesta più esplicita da parte dell'intervistatrice, egli dichiara di non aver capito. A seguito di una seconda richiesta di chiarimento, lo studente palesa la sua interpretazione del termine ricavare come *demolire*. In questo caso lo studente appartiene alla prima tipologia di motivazione fornita.
I.: "Ti ricordi la domanda dei locali? Mi fai vedere come hai fatto per rispondere?" M.: "Ho fatto 7-2." I.: "Hai fatto 7-2, ma cosa ti chiede questa domanda? Riesci a raccontarmela?" M.: "Mmm, dal locale più grande sono stati ricavati, sono stati tolti, mi sa, due camere." I.: "Quindi ricavati per te significa tolti?" M.: "Sì."	A seguito della domanda dell'intervistatrice, lo studente M. esplicita l'operazione effettuata per determinare la risposta fornita. Successivamente l'intervistatrice chiede allo studente di esplicitare la sua interpretazione della situazione, ed egli dichiara di aver interpretato il significato del verbo *ricavare* come sinonimo di *togliere*. Anche in questo caso lo studente rientra nella prima categoria di motivazioni per spiegare la scelta dell'operazione risolutiva adottata: 7-2=5.
I.: "Come ti sembrava questo qua?" (indica l'item). R.: "Non l'avevo capita bene. Allora sono 7 locali, dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "Che vuol dire?" R.: "Vuol dire che un locale ha due camere gli altri 1." I.: "Quindi da un locale si ricavano due camere, cosa vuol dire?" R.: "Eh, non lo so bene, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi si può andare a dormire in 2 e nelle altre in 1." I.: "Ma letti o camere?" R.: "Ah, ma camere nel senso stanze?" I.: "Sì." R.: "Ah, adesso capisco! Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?". R.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo."	Lo studente R. esplicita la mancata comprensione del testo, legata principalmente all'interpretazione della situazione reale. In questo caso lo studente non attribuisce al termine *ricavare* un significato alternativo, rientrando nella seconda categoria.

Tabella 6
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 5.

Studenti che rispondono 9

Molti degli studenti che rispondono 9 locali, esplicitano l'operazione effettuata: 7+2=9. Anche in questo caso, dalle interviste emergono due motivazioni differenti:

– coloro che attribuiscono al termine ricavare il significato di *aggiungere*;
– coloro che manifestano una difficoltà nella creazione di un modello matematico che permette di strutturare la realtà.

Come nel caso precedente emerge una difficoltà linguistica legata al significato del termine *ricavare*, interpretato in modo differente al caso precedente, e una legata alla modellizzazione della situazione. In quest'ultimo caso gli studenti mostrano di aver compreso il tipo di intervento edilizio fatto sull'appartamento, ma rispondono velocemente cercando un'operazione adatta a modellizzare tale intervento in riferimento ai dati numerici presentati, senza interpretare nella realtà se una camera era già conteggiata.

Nella **Tabella 7** sono presentati due casi esemplificativi delle due motivazioni riscontrate negli studenti intervistati.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Mi fai vedere come hai fatto a rispondere?" L.: "Ricavate? Eh, non mi ricordavo bene cosa significa ricavate." I.: "Secondo te cosa significa? Proviamo a rileggere." L. legge ad alta voce. I.: "Allora, tu hai risposto 9, mi spieghi come hai fatto a dire 9?" L.: "Forse ho fatto una cavolata ma ho pensato, aggiungendo due camere. Quindi si aggiungeva nell'appartamento." I.: "Quindi tu hai fatto?" L.: "Più 2!"	In questo caso lo studente L. si identifica nella prima categoria, in effetti, egli esplicita di non ricordare il significato del termine *ricavare*. Dopo una rilettura suggerita dall'intervistatrice, lo studente spiega che ha scelto di svolgere l'operazione 7+2 perché aveva interpretato il significato del verbo ricavare come *aggiungere*.
R.: "Il locale lo dividono in stanze." I.: "Lo dividono in quante stanze?" R.: "Due, tipo fanno una parete in mezzo." R.: "Prima ne aveva 7 e adesso ne ha 9!" I.: "Ne ha 9?" R.: "Perché se ne ha 7 e ne aggiungi 2." I.: "Quindi crei due stanze." R.: "No, parti da qualcosa che già avevi." I.: "Prima cosa avevi?" R.: "Una stanza." I.: "E adesso?" R.: "2." I.: "Quindi quante stanze avevi?" R.: "Ah, 8!"	In questo caso lo studente R. esplicita una corretta interpretazione del testo; nonostante ciò modellizza la situazione come se fossero state aggiunte due camere e non una. In questo caso lo studente può essere descritto attraverso la seconda categoria. Solo dopo che l'intervistatore indirizza il ragionamento, lo studente risponde correttamente alla domanda aggiungendo una sola camera alle 7 già esistenti.

Tabella 7
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 9.

Studenti che rispondono 6

Nel caso degli studenti che rispondono 6, si evidenziano due diverse difficoltà legate entrambe alla conoscenza del dizionario:

– coloro che interpretano il termine *ricavare* come *unire*, e dunque due dei 7 locali diventano uno unico e per questo il numero totale dei locali cala a 6;
– coloro che non riconoscono lo stesso significato ai termini *camere* e *locali*, interpretando lo stimolo come se uno dei 7 locali venisse trasformato in due camere. In questo modo, dopo la modifica all'appartamento rimangono 6 locali e 2 camere.

In **Tabella 8** sono presentate due interviste esemplificative di tali convinzioni.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Guardiamo questo qui; tu dici ne ha 6, come hai fatto a trovare questa risposta?" C.: "Allora, un appartamento ha 7 locali nel senso…" I.: "Cosa significa locali secondo te?" C.: "Come dire camere." I.: "Ah, ok, quindi sono la stessa cosa?" C.: "Sì, e poi, ehm, dal locale più grande sono state ricavate due camere quindi da sette locali ho unito due camere." I.: "Quindi ricavare cosa significa?" C.: "Unire, due diventano una!"	In questo caso lo studente C. ha interpretato correttamente il significato delle parole *camere* e locali ma non ha compreso il significato del verbo *ricavare*. Come si può intuire dalla trascrizione, infatti, per lo studente sono state *unite* due camere e dunque due delle 7 sono diventate una unica. In questo caso lo studente appartiene alla prima categoria di motivazione descritta in precedenza.

I.: "Come hai fatto a rispondere a questa domanda?" A.: "Qui diceva 7 locali e ho pensato visto che ne han tolto uno anche se era grande l'hanno tolto." I.: "Ah, che l'hanno tolto, dov'è che dice questa cosa?" A.: "Lo dice nella seconda, dal locale e non dai locali, sono state ricavate due camere." I: "Cosa vuol dire sono state ricavate due camere?" A: "Che un locale è stato diviso per fare due camere; quindi ne hanno tolto uno che sono diventate due camere e quindi rimangono 6 locali."	Nella prima parte dell'intervista potrebbe sembrare che lo studente abbia avuto delle difficoltà nell'interpretazione del termine *ricavare*. In realtà, attraverso le domande dell'intervistatrice si può notare che lo studente ha compreso il significato del termine ricavare, ma non ha colto che la scelta di utilizzare la parola *camere* è stata fatta solo per evitare la ripetizione della parola *locali*. In questo caso, infatti, lo studente esplicita di aver compreso che un locale è stato trasformato in due camere ma al momento del conteggio dei locali non ha conteggiato le due nuove camere, ma solo i locali rimasti che non hanno subito modifiche.

Tabella 8
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 6.

Studenti che rispondono 7

Dalle interviste emerge che tutti gli studenti che rispondono 7 non considerano come sinonimi i termini *camere* e *locali*. In questo caso quindi si riscontra un'unica difficoltà di interpretazione linguistica di ciò che l'item voleva veicolare, mentre viene considerato che il numero di locali rimane invariato e il numero di camere cambia. Si riportano in Tabella 9 alcuni esempi.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Questo te lo ricordi?" F.: "Sì, l'ho fatto a mente." I.: "Ok, ora fammi vedere come hai fatto a trovare quella risposta lì." F.: (Legge ad alta voce il testo) "Eh, ne ha comunque sette". I.: "Fammi vedere come hai fatto, puoi scrivere, dirlo a parole." F.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere, ma le camere vanno come per l'appartamento?" I.: "Quindi? C'è una questione di locali, camere e appartamenti". F.: "Io ho scritto 7 perché non capivo se i locali e le camere erano uguali. Cioè è come se il locale grande è stato diviso in due?" I.: "Sì, giusto!" F.: "Ah! io pensavo soltanto che fossero state ricavate due camere assieme". I.: "Secondo te con locali e camere si intende la stessa cosa o no?" F.: "Queste due dipende se si intende come camera da letto o locale o camera in senso grande da cui si ricava un locale cioè si mette la camera, la cucina e il bagno." I.: "Quindi locale e camera è la stessa cosa o no secondo te?" F.: "Forse qui è la stessa cosa ma pensavo di no".	In questa discussione lo studente F. esplicita chiaramente la sua difficoltà nell'interpretazione dei termini camere e locali, da considerare come sinonimi. La sua interpretazione del termine locale è più ampia, come del resto viene contemplata anche dal dizionario della lingua italiana. Solo alla conclusione del confronto con l'intervistatrice dichiara che nell'item forse i due termini sono stati utilizzati come sinonimi.

I.: "Come mai qua hai risposto 7 locali?" A.: "Perché se ci sono 7 locali e dal più grande ne ricavo 2, rimane sempre lo stesso". I.: "Ma che cos'è un locale?" A.: "Una stanza." I.: "E la camera?" A.: "È anche un locale." I.: "Quindi camere e locali sono la stessa cosa?" A.: "No, il locale è un appartamento."	Lo studente A. mostra che, indipendentemente dall'operazione fatta sulle camere, il numero di locali rimane invariato. Lo studente esplicita un po' di confusione nell'interpretazione del termine locale, di conseguenza una mancata comprensione dell'equivalenza di significato dei termini camere e locali nel testo del problema.

Tabella 9
Parte della trascrizione di interviste a studenti che hanno risposto 7.

Studenti che rispondono con altri valori

Tra le risposte ottenute differenti da quelle ipotizzate prima della somministrazione, va segnalata: 14 locali, fornita da 5 studenti su 9.

Come si può leggere dalle trascrizioni presentate di seguito (Tabella 10), gli studenti hanno interpretato la situazione come se da ogni locale fossero state ricavate 2 camere. Questo aspetto mostra che gli studenti non hanno prestato attenzione al fatto che si parlasse solo del locale più grande e dunque hanno interpretato il testo come se fosse: "un appartamento ha 7 locali; da ogni locale sono state ricavate due camere." Ciò mette in evidenza come spesso gli allievi leggono in modo superficiale il testo di un problema, senza dare importanza alle diverse parole, ma deducendo frettolosamente ciò che secondo loro il testo vuole veicolare.

Trascrizione dell'intervista	Interpretazione
I.: "Spiegami questo qua dell'appartamento," R.: "Ho calcolato che ci sono due camere e ogni camera ha 7 locali allora ho fatto 7+7 che fa 14."	Alla richiesta di spiegazioni la risoluzione, lo studente R. esplicita senza esitazioni la sua interpretazione: da ogni locale sono state ricavate due camere.
I.: "Raccontami qual è la situazione, cosa ti chiedevano." S.: "Che un appartamento ha 7 locali" I.: "Cosa significa?" S.: "Che ha 7 cam…ere." I.: "Che ha 7 camere e poi?" S.: "Dal locale più grande sono state ricavate due camere." I.: "E questo cosa significa?" S.: (silenzio) "Che nel locale più grande hanno aggiunto due camere." I.: "Come mai hai risposto 14?" S.: "7×2." I.: "Come mai hai fatto 7×2?" S.: "Perché prima aveva 7 locali e poi dice che ne aveva ricavate altre due". I.: "Da tutti i locali?" S.: "Sì".	In questo secondo esempio, invece, lo studente S. mostra una certa titubanza. In questo caso, egli ha chiaramente compreso che *locali* e *camere* sono termini che devono essere intesi come sinonimi, ma non ha prestato attenzione al fatto che sono state ricavate due camere solo da uno dei 7 locali e non da tutti.

Tabella 10
Parte della trascrizione dell'intervista a studenti che hanno risposto 14.

Anche questo atteggiamento è legato al frequente fenomeno di *lettura selettiva del testo*; infatti gli studenti hanno letto frettolosamente il testo soffermandosi solo sulle informazioni presentate attraverso i dati numerici:

– l'appartamento ha 7 locali;
– un locale è stato trasformato in 2 camere;

considerando superficialmente le altre informazioni che sono state proposte attraverso il linguaggio verbale e non numerico: "dal locale più grande".

Le risposte degli altri 4 studenti sono state: 8,5, 12 e in due casi 3,5. La motivazione di quest'ultima risposta verte sul fatto che un locale è stato diviso in due, quindi è stato diviso il numero 7 per due, ottenendo 3,5.

5 Conclusioni

Dai risultati ottenuti dalla somministrazione di questo item, si rileva come spesso le difficoltà di risoluzione di un problema siano legate al primo processo del ciclo della matematizzazione, ossia alla *formulazione*, che richiede un'interpretazione e una comprensione profonda della situazione e delle informazioni necessarie per risolvere il problema, individuando gli aspetti matematici rilevanti al fine di trovare un modello che interpreti la situazione. Le evidenze si rivelano quindi in linea con le considerazioni di Clements (1980). Infatti, il fallimento nella risoluzione dell'item proposto nell'articolo si è verificato nelle prime tre fasi del processo risolutivo, e deriva da difficoltà legate al significato delle parole, alla comprensione della situazione e alla trasformazione del testo in un modello matematico. In questo lavoro risulta interessante osservare come un aspetto già evidenziato dalla letteratura fin dagli anni ottanta, possa essere amplificato grazie alle prove standardizzate, che consentono di capire come molti comportamenti degli allievi non siano casuali o legati alle risposte del singolo, ma nascondano, invece, ostacoli di diversa natura, profondi e diffusi. Tali evidenze consentono al docente di mettere a fuoco aspetti dell'insegnamento/apprendimento che possono essere migliorati o che suggeriscono interventi mirati sugli apprendimenti degli allievi.

In questa prospettiva, gli item presentati nelle prove standardizzate relative all'aspetto di competenza *Matematizzare e modellizzare* (Sbaragli & Franchini, 2017) possono essere un punto di riferimento per i docenti per identificare eventuali difficoltà degli allievi nelle diverse fasi del processo risolutivo e per lo sviluppo di significativi percorsi didattici.

In particolare, dalle risposte fornite a questo item è emerso come la maggior parte delle difficoltà degli allievi fossero legate ad aspetti linguistici di conoscenza del dizionario, o più in generale dell'enciclopedia, ossia dei fatti del mondo che riguardano la situazione. Il testo, che poteva apparire a priori comprensibile dagli allievi di questa età, è risultato in realtà molto complesso, anche per gli impliciti linguistici in esso sottesi. Come afferma D'Amore (2014, p. 185):

> «Leggere il testo del problema, prima di risolverlo, sembra essere una ovvia condizione preliminare. Ma non è così facile. Abbiamo più volte visto (…) come ci siano ostacoli alla lettura e alla comprensione, come ci si formino subito immagini mentali che possono distogliere, come vi siano termini imbarazzanti, operazioni indotte semanticamente eccetera».

Inoltre, è emerso in diverse occasioni una lettura selettiva del testo da parte degli studenti, ossia una lettura orientata alla ricerca di strategie risolutive "alternative" alla comprensione. Riguardo a questo fenomeno, Sowder (1989) elenca una varietà di approcci, già menzionati in questo testo, che vengono spesso praticati dagli allievi nella risoluzione dei problemi: cercare di indovinare l'operazione; guardare i numeri, e da quelli risalire all'operazione "giusta"; provare tutte le operazioni e scegliere quella che dà la risposta più "ragionevole"; cercare "parole chiave" (*in tutto* vuol dire che bisogna sommare, *spende* invece è legata a sottrarre, ecc.) e altri ancora.

Risulta quindi molto importante dal punto di vista didattico combinare due discipline avvertite tradizionalmente molto distanti l'una dall'altra, l'italiano e la matematica, con il fine di sviluppare contemporaneamente competenze matematiche e linguistiche, e favorire negli allievi un produttivo atteggiamento di fronte alla risoluzione di problemi, che verte sull'esigenza di comprendere e interpretare la situazione data (Demartini, Fornara & Sbaragli, 2017; Demartini & Sbaragli, 2015a,b; Fornara & Sbaragli, 2013; 2016). L'analisi dei testi dei problemi verbali di matematica effettuata in classe con gli allievi, basata sull'approfondimento degli aspetti lessicali presenti e sull'interpretazione delle situazioni descritte in relazione anche al vissuto degli allievi, e un'attenzione particolare alla modellizzazione della situazione, sono elementi fondamentali sui quali, far leva con i propri allievi, allo scopo di sviluppare e rafforzare strategie risolutive cognitive e metacognitive, significative ed efficaci.

Bibliografia

Bara, B., & Bucciarelli, M. (1992). L'intenzionalità comunicativa nei modelli mentali. *Methodologia*, *10*, 67-82.

CDPE. (2011). *Competenze fondamentali per la matematica*. Disponibile in http://edudoc.ch/record/96785/files/grundkomp_math_i.pdf (consultato il 24.04.2017).

Clements, M. A. (1980). Analysing children's errors on written mathematical tasks. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 1-21.

Crescentini, A. (2016). *Prove standardizzate ticinesi. Matematica nella classe V Scuola Elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento, Centro innovazione e ricerca sui sistemi educativi.

D'Amore, B. (1996a). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino, 32*, 57-64.

D'Amore, B. (1996b). Immagini mentali, lingua comune e comportamenti attesi, nella risoluzione dei problemi. *La matematica e la sua didattica, 4*, 424-439.

D'Amore, B. (1997a). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. *Riforma e didattica, 1*, 29-36.

D'Amore, B. (1997b). Matite - Orettole - Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 20A*(3), 241-256.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 4*, 557-583.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Docet.

De Corte, E., & Verschaffel, L. (1985). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *4*, 3-21.

DECS. (2015). *Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese*. Disponibile in http://www.pianodistudio.ch/ (consultato il 17.04.2017).

De Lange, J. (1987). *Mathematics insight and meaning*. Utrecht: OW & OC [Dissertation].

Demartini, S., Fornara, S., & Sbaragli, S. (2017). *Italmatica. Percorsi di italiano e matematica per la scuola dell'infanzia*. Firenze: Giunti scuola.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015a). Geometria e narrazione alla scuola dell'infanzia: un "binomio fantastico". In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica, disciplina per l'apprendimento* (pp. 67-72). Bologna: Pitagora.

Demartini, S., & Sbaragli, S. (2015b). *Storie di figure. Scuola dell'infanzia. 16*(4), 17-18.

Diezmann, C., English, L. D., & Watters, J. J. (2002). Teacher behaviours that influence young children's reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 2* (pp. 289-296). Norwich: University of East Anglia.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for research in mathematics education, 34*(2), 110-136.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004a). Mathematical Modeling in the Early School Years. *Mathematics Education Research Journal, 16*(3), 59-80.

English, L. D., & Watters, J. J. (2004b). Mathematical modelling with young children. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International PME Conference* (pp. 335-342). Bergen University College.

Eurydice (2011). *Mathematics education in Europe: Common challenges and national policies*. Brussels: Education, Audiovisual and Culture Executive Agency.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.

Ferrari, P. L. (2003). Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 26*(4), 469-496.

Ferrari, P. L. (2004). *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2013). Italmatica. Riflessioni per un insegnamento/apprendimento combinato di italiano e matematica. In B. D'Amore & S. Sbaragli (A cura di), *La didattica della matematica come chiave di lettura delle situazioni d'aula* (pp. 33-38). Bologna: Pitagora.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (2016). Che problema, queste parole! *La vita scolastica, 2*, 16-18.

Fornara, S., & Sbaragli, S. (in stampa). Italmatica. L'importanza del dizionario nella risoluzione di problemi matematici. *Atti del XVIII Convegno Giscel*, Roma, 26-29 marzo.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3–8.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 16*(2), 36-45.

Gravemeijer, K. P. E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-B Press.

Johnson-Laird, P. N. (1983). *Mental models: Towards a cognitive science of language, inference, and consciousness (Vol. 6)*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Jones, G., Langrall, C., Thornton, C., & Nisbet, S. (2002). Elementary school children's access to powerful mathematical ideas. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 81-112). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Jupri, A., Drijvers, P., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Difficulties in initial algebra learning in Indonesia. *Mathematics Education Research Journal, 26*(4), 683-710.

Jupri, A., & Drijvers, P. H. M. (2016). Student difficulties in mathematizing word problems in algebra. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(9), 2481-2502.

Kintsch, W. (1988). The use of knowledge in discourse processing: A construction-integration model. *Psychological Review, 95*, 163-182.

Kintsch, W., & Van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of text comprehension and production. *Psychological review, 85*(5), 363.

Laborde, C. (1995). Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica, 2*, 121-135.

Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. L. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving. Issues in research* (pp. 1-13). Philadelphia: The Frank lin Institute Press.

Marini, A., & Carlomagno, S. (2004). *Analisi del discorso e patologia del linguaggio (Vol. 10)*. Milano: Springer.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical tasks. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31-43.

NCTM. (2000). *Principles and standard for school mathematics*. Reston: Author.

OECD. (2004). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD Publishing.

OECD. (2006). *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. Paris: OECD Publishing.

OECD. (2007). *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica: Quadro di riferimento di PISA 2006*. Roma: Armando Editore.

OECD. (2010). *PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science*. Paris: OECD Publishing.

OECD. (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. OEC Paris: OECD Publishing.

OECD. (2016). *PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy*. Paris: OECD Publishing.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics, 67*(1), 37-58.

Pancanti, S. (2014). *I test PISA e i test di ingresso di matematica con l'E-Learning: da momento di verifica a occasione didattica*. Tesi di dottorato, Università di degli Studi di Firenze, Italia. Disponibile in https://flore.unifi.it/retrieve/handle/2158/1010305/67764/pancanti_tesi_dottorato.pdf

Richardson, K. (2004). *A design of useful implementation principles for the development, diffusion, and appropriation of knowledge in mathematics classrooms*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2014). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quarta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sbaragli, S., & Franchini, E. (2017). *Valutazione didattica delle prove standardizzate di matematica di quinta elementare*. Locarno: SUPSI, Dipartimento formazione e apprendimento.

Sowder, L. (1989). Searching for Affect in the Solution of Story Problems. In D. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving. A New Perspective* (pp. 104-113). New York: Springer Verlag.

Treccani. (2003). *Il vocabolario treccani* (a cura di M. Cannella & B. Lazzarini). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, Utrecht: CD-b Press & Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2013). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Wheeler, D. (1982). Mathematization Matters. *For the Learning of Mathematics, 3*(1), 45-47.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Doorman, M., & Robitzsch, A. (2014). Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors. *The Mathematics Enthusiast, 11*(3), 555-584.

Zan, R. (2007a). *Difficoltà in matematica: osservare, interpretare, intervenire*. Milano: Springer.

Zan, R. (2007b). La comprensione del problema scolastico da parte degli allievi: alcune riflessioni. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 30 A-B (6), 741-762.

Zan, R. (2010). *L'errore in matematica: alcune riflessioni. Materiale del Piano Nazionale Qualità e merito (PQM). Firenze: INDIRE.*

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 35*(2), 437-467.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica: difficoltà di comprensione e formulazione del testo*. Roma: Carocci.

Autori / Elena Franchini*, Alice Lemmo° e Silvia Sbaragli*
*Dipartimento Formazione e Apprendimento - SUPSI Locarno
°Università degli Studi di Palermo
elena.franchini@supsi.ch, alice.lemmo@gmail.com, silvia.sbaragli@supsi.ch