DdM | **Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula**
Online www.rivistaddm.ch, 2022 (11), 95 - 120, DOI:10.33683/ddm.22.11.5

OPEN ACCESS

ESPERIENZE DIDATTICHE

Problemi con variazione ed equazione figurale: strumenti della didattica cinese trasposti in una scuola primaria italiana

Problems with variation and figural equation: Chinese didactics tools transposed into an Italian primary school

Mariarita Meli• e Eugenia Taranto°
• Istituto Comprensivo "Via Ricasoli", Torino – Italia
° Dipartimento di Scienze dell'Educazione, Università degli Studi di Catania – Italia

mariaritameli4@gmail.com, eugenia.taranto@unito.it

Sunto / In questo lavoro viene mostrata la possibilità di sviluppare un approccio al pensiero pre-algebrico con alunni della scuola primaria che presti maggiore attenzione alle caratteristiche strutturali dei problemi additivi rispetto a quelle numeriche. In particolare, illustrando una sperimentazione condotta con allievi di una classe seconda primaria, si mira a mostrare come può concretizzarsi una trasposizione di strumenti didattici propri della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale – nel contesto italiano della scuola primaria. Si rileva come, a partire dal testo di un problema e dalla rappresentazione grafica dei suoi dati, i bambini sono in grado di comprendere e, a loro volta, costruire variazioni del problema di partenza, esplorando le potenzialità legate alla struttura della variazione stessa. I bambini sono così portati a sviluppare competenze d'uso di strutture di risoluzione di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale.

Parole chiave: trasposizione culturale; scuola primaria; problemi con variazione; equazione figurale; pensiero pre-algebrico.

Abstract / This paper shows the possibility of developing an approach to pre-algebraic thinking with primary school pupils which pays more attention to the structural features of additive problems than to the numerical ones. In particular, by illustrating a teaching experiment carried out with primary school pupils (grade 2), the aim is to show how a transposition of didactic tools which are typical of Chinese didactics – problems with variation and figural equation – can be implemented in the Italian primary school context. It is shown how, starting from the text of a problem and the symbolic representation of its data, children are able to understand and, in turn, construct variations of the starting problem, by exploring the potentialities linked to the structure of the variation itself. Children are thus led to develop skills in the use of pre-algebraic resolution structures, shifting the attention from the procedural to the relational level.

Keywords: cultural transposition; primary school; variation problems; figural equation; pre-algebraic thinking.

1 Introduzione e quadro teorico

Uno dei fenomeni più vistosi che ha toccato la realtà della scuola italiana a partire dagli anni '90 in poi è stata la presenza di alunni stranieri. L'Italia presenta una certa peculiarità in termini di multiculturalismo trasformandosi, in breve tempo, da paese di emigrazione a paese di immigrazione, divenendo ambiente interculturale, multietnico e plurilingue. Con l'apertura del mondo orientale verso l'occidente, le tematiche relative allo studio dell'ambiente scolastico e delle strategie in uso si sono notevolmente diffuse, ampliando gli orizzonti delle ricerche.
In questa direzione la partecipazione di diversi paesi ai test internazionali di valutazione delle competenze degli studenti dà l'opportunità non solo di confrontare i risultati ottenuti, ma anche di riflettere sulle pratiche educative che hanno determinato queste prestazioni. In particolare, le indagini internazionali dell'OCSE-PISA 2009, 2012, 2015[1] e del TIMSS 2007, 2011, 2015[2] hanno messo in evidenza come l'Italia si collochi sempre in basso rispetto alla media degli altri Paesi; mentre nei primi posti di queste graduatorie troviamo nazioni dell'estremo oriente (con Singapore al vertice).
Iniziano a diffondersi ricerche di didattica interculturale che prendono in esame l'insegnamento-apprendimento della matematica (Barton & Frank, 2001; Bishop, 1988; Cai & Knuth, 2011; Sun, 2009). Con particolare attenzione alla Cina, nel panorama italiano sono di rilievo, tra gli altri, i lavori condotti dai gruppi di ricerca delle università di Palermo (Di Paola, 2016; Di Paola & Zanniello, 2017), di Napoli (Mellone et al., 2019, 2020) e di Modena-Reggio Emilia (Bartolini Bussi et al., 2013; Ramploud, 2015; Ramploud & Di Paola, 2013), che affrontano il problema dell'insegnamento-apprendimento della matematica attraverso una lente interculturale.
Bishop (1988) ha evidenziato l'importanza di riconoscere le pratiche di insegnamento della matematica come fenomeni sociali che sono incorporati in quelle culture e in quelle società che le hanno generate. Si è quindi ormai ben consapevoli del fatto che le diverse scelte formative e i diversi strumenti didattici discendono dalla storia, dalla cultura dei luoghi in cui sono nati e si sono sviluppati e dalla lingua in cui sono stati formulati. Diviene quindi fondamentale, quando si riflette su pratiche educative sviluppate in contesti culturali diversi dal proprio, essere anche consapevoli delle differenze che la diversità di contesti culturali porta con sé, al fine di evitare il rischio di fraintendere la logica di quel processo educativo.
Partendo dallo studio delle pratiche didattiche sviluppate nei paesi dell'area orientale, in Italia è stata sviluppata una ricerca che si basa sull'idea di *trasposizione culturale* (Ramploud, 2015). Con questo termine si intende il processo di cambiamento che si sviluppa quando vi è una messa in parallelo di pratiche didattiche di differenti culture che consentono il ripensamento delle proprie (Mellone & Ramploud, 2015). Non si tratta di "importare" metodologie didattiche da una cultura ed "imporle" ad un'altra, piuttosto si vogliono approfondire i processi di significato connessi ai diversi contesti culturali nei quali queste metodologie si sono sviluppate, al fine di rendere gli insegnanti più consapevoli del proprio contesto culturale e delle proprie pratiche didattiche. Il costrutto di trasposizione culturale definisce, quindi, una condizione di decentramento dalla pratica didattica del proprio contesto culturale, passando attraverso il contatto con pratiche didattiche di altri contesti culturali (Mellone et al., 2019).
In queste riflessioni emerse dalla letteratura si è inserito il lavoro di tesi di Laurea Magistrale in Scienze

1. Per visionare le tabelle sui risultati internazionali raggiunti dagli studenti dei Paesi che prendono parte all'indagine OCSE-PISA, è possibile consultare il sito: https://www.oecd.org/pisa/; dettagli sull'Italia sono disponibili al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2015.php?page=pisa2015_it_07
2. Per visionare le tabelle sui risultati internazionali raggiunti dagli studenti dei Paesi che prendono parte all'indagine TIMSS, è possibile consultare il sito: https://timssandpirls.bc.edu/timss-landing.html; dettagli sull'Italia sono disponibili al sito: https://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2015/index.php?page=timss2015_it_05

della Formazione Primaria condotto da Mariarita Meli (2019), di cui Eugenia Taranto è stata relatrice, presso la Facoltà di Studi Classici, Linguistici e della Formazione dell'Università degli Studi di Enna KORE. In questo articolo si presentano i risultati di una sperimentazione, condotta in una classe seconda primaria,[3] relativa ai processi di risoluzione di problemi additivi mediante strumenti della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale, che descriveremo nel paragrafo successivo – per verificare le loro potenzialità in un contesto diverso da quello originale.

1.1 Problemi con variazione ed equazione figurale

Nella risoluzione di problemi matematici, alcune ricerche (ad esempio, Branchetti & Viale, 2015; Zan, 2016) hanno messo in evidenza come molte difficoltà incontrate dagli alunni derivino dalla fase preliminare di comprensione del problema, che ostacolano la messa in atto di percorsi risolutivi sensati. Il bambino è portato, fin dalle prime presentazioni dei problemi, a individuare i dati numerici ed eseguire il calcolo che sembra più opportuno senza ragionare sulla reale richiesta del problema.
Applicare una certa "variazione del problema" può essere utile per evitare che gli studenti procedano alla risoluzione dei problemi affidandosi "ciecamente" alla ricerca di "parole-chiave" (Zan, 2016), e per favorire la capacità di individuare differenze e somiglianze tra il problema d'origine e le sue variazioni e stimolare la riflessione sulle strategie da utilizzare per affrontarli, in favore di uno sviluppo del pensiero astratto (Sun, 2009). Nella didattica matematica cinese questa procedura si riscontra nei cosiddetti "problemi con variazione", meglio noti nei curricula cinesi di matematica come 多題一解, *"Problemi multipli, una soluzione"*. Attraverso questa pratica, i bambini cinesi svolgono problemi che li aiutano a riflettere sulle relazioni fra le varie parti del problema e a verificare l'esattezza dei risultati ottenuti (Sun, 2011).
I problemi con variazione (**Figura 1**) sono costituiti da almeno una tripletta di problemi che si reggono su una struttura additiva, in cui le operazioni di addizione e sottrazione sono sempre compresenti (Bartolini Bussi et al., 2013). Tra i caratteri cinesi che compongono il testo, spiccano chiaramente i numeri arabi. Essi costituiscono i dati del problema, così come accade nei testi italiani. Gli studenti vengono aiutati nel processo di ragionamento attraverso la rappresentazione grafica dei dati, mediante la cosiddetta *equazione figurale*, che li aiuta a focalizzare l'attenzione sul dato mancante, ossia sull'incognita (Di Paola et al., 2015).

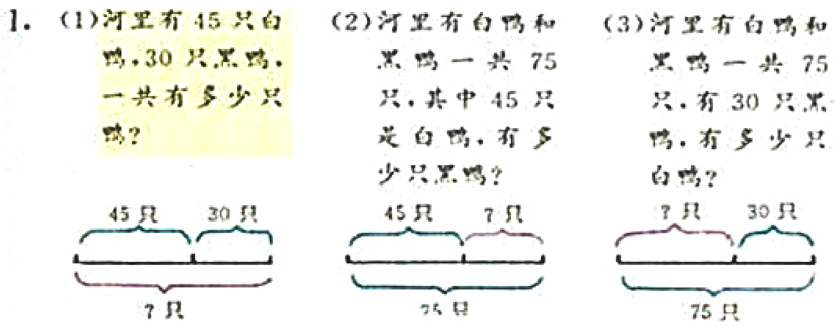

Figura 1. Esempio di problema con variazione (tratto da Mellone & Ramploud, 2015, p. 570).

L'equazione figurale è un segmento in cui vengono proporzionalmente rappresentate le quantità, note o incognite, e su cui poi si opera trattando le une e le altre nello stesso modo. Essa serve come supporto

3. La scuola primaria in Italia dura cinque anni e corrisponde alla scuola elementare nel Canton Ticino.

per riconoscere la struttura aritmetica comune sottesa ai differenti problemi. Lo stretto legame dell'equazione figurale con il testo-problema aiuta il discente ad analizzare i singoli dati attraverso la loro rappresentazione e la loro quantificazione grafica. Grazie all'equazione figurale il bambino pone attenzione al dato mancante e mette in atto strategie logico-matematiche utili per giungere alla risoluzione. Ciò che è essenziale è proprio lo spostamento dal campo aritmetico a quello relazionale (Cai & Knuth, 2011). Questo approccio didattico, meglio conosciuto con la denominazione *Early algebra*, è diffuso già dai primi ordini scolastici nelle scuole cinesi, ma viene praticato in Italia solo da una ristretta minoranza di insegnanti (Di Paola et al., 2015). L'early algebra, come si può leggere sul sito del progetto ArAl[4] (http://www.progettoaral.it/):

> «[...] promuove l'insegnamento dell'aritmetica in una prospettiva algebrica sin dai primi anni della scuola primaria, se non dalla scuola dell'infanzia. […] L'early algebra vuole dimostrare, a differenza di ciò che avviene nell'insegnamento tradizionale della matematica [italiana], in cui lo studente incontra l'algebra alla fine della scuola secondaria di primo grado, *come sia possibile ed efficace iniziare molto prima l'avvio al pensiero algebrico per favorire negli alunni la costruzione di solide basi per la comprensione del significato degli oggetti e dei processi algebrici*».

In questa ottica, i problemi con variazione possono diventare mediatori per un'introduzione all'algebra sin dai primi anni di scuola.
Acquisita la consapevolezza delle diversità che caratterizzano le pratiche di insegnamento connesse alla risoluzione dei problemi additivi in Italia e in Cina nei primi anni scolastici, il presente lavoro vuole mostrare come può avvenire la trasposizione dei problemi con variazione e dell'equazione figurale nel contesto italiano e quali risultati si possono osservare sui processi di apprendimento degli alunni coinvolti. L'intento è, infatti, quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale) per costruire un percorso di progressiva astrazione nelle rappresentazioni dei problemi, in funzione della loro comprensione e della loro risoluzione.

2 Contesto e metodologia

La sperimentazione è stata condotta in una classe seconda, di 17 alunni, della scuola primaria dell'Istituto Comprensivo Statale "A. D'Arrigo - G. Tomasi di Lampedusa" presso il plesso "G. Guazzelli" di Palma di Montechiaro (provincia di Agrigento).
La sperimentazione, la cui progettazione è stata supervisionata da Eugenia Taranto, è stata condotta da Mariarita Meli (in seguito denominata "sperimentatrice"). La durata della sperimentazione è stata di circa 4 mesi (da inizio ottobre 2018 a metà gennaio 2019), e le sono state dedicate circa 3 ore alla settimana (complessivamente 30 ore). L'intera sperimentazione si è affiancata alle attività curricolari proposte dall'insegnante di classe, la quale, alcuni mesi prima, aveva partecipato a un seminario in cui erano stati presentati i problemi con variazione e l'equazione figurale, ed era venuta a conoscenza di tutte le fasi e di tutte le attività di cui si componeva la sperimentazione. Durante lo svolgimento di quest'ultima, l'insegnante di classe ha ricoperto sia il ruolo di osservatrice, relativamente alle pratiche

4. Il progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero pre-algebrico (responsabile scientifico Nicolina Malara, già professore ordinario presso il Dipartimento FIM dell'Università di Modena e Reggio Emilia, co-responsabile scientifico e coordinatore nazionale Giancarlo Navarra, già professore a contratto presso la stessa Università) è impegnato da quasi vent'anni in attività di ricerca, sperimentazione e formazione nell'ambito dell'early algebra.

messe in atto dalla sperimentatrice, sia il ruolo di mediatrice fra le conoscenze e le competenze che gli allievi avevano costruito con lei in precedenza e quelle mobilitate dalla sperimentatrice.
La sperimentazione è stata video-registrata. Parti di dialogo tra sperimentatrice e allievi, estratte dalle videoregistrazioni, saranno riportate nelle analisi dei dati.

2.1 Prerequisiti

I prerequisiti che gli alunni devono possedere affinché possa essere avviata una simile sperimentazione sono i seguenti:
- saper contare correttamente fino a 100;
- saper raggruppare in base 10;
- saper leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale;
- saper eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo;
- saper eseguire le operazioni di addizione e sottrazione con gli algoritmi scritti usuali;
- essere capaci di leggere e comprendere il testo di un problema;
- essere capaci di identificare i dati e la domanda di un problema.

2.2 Le fasi della sperimentazione

La sperimentazione si è articolata in sei fasi, che rispettano il principio della complessità crescente (Bonazza, 2012). La Tabella 1 riporta brevemente le fasi della sperimentazione, precisandone obiettivi didattici, metodologie e materiali utilizzati.

	Fase	Obiettivo didattico	Metodologia/Materiali
1	Attività di ice-breaking.	Verificare la conoscenza di alcuni dei prerequisiti e risolvere semplici problemi sfruttando associazioni visive e raggruppamenti.	Allestimento di un mercato dove si vende/compra frutta, pagando con monete e banconote. Frutta e denaro sono realizzati con cartoncino.
2	Esplorazione dei problemi cinesi.	Dato il testo di un problema in cinese, individuare gli elementi di somiglianza con un generico problema italiano. Successivamente, nota la traduzione, risolverlo.	Consegna del testo di un problema in cinese. Consegna del medesimo testo in italiano.
3	Approccio all'equazione figurale.	Risolvere i problemi con variazione mediante l'equazione figurale.	Consegna del problema già dato nella fase 2 e di 8 sue varianti, da risolvere mediante l'equazione figurale.
4	Inserimento dei dati.	Riflettere sulla comprensione del testo di un problema e sulle sue variazioni.	Consegna di due schede, ciascuna con un testo-problema di partenza e tre diverse riformulazioni, in cui però mancano i dati numerici.
5	Formulazione della domanda.	Creare problemi con variazione a partire da una situazione data.	Consegna di una scheda con una situazione aperta (contesto e dati) e due sue variazioni.
6	Creazione di un problema.	A partire da un'immagine, inventare un problema. Riflettere collettivamente sulle sue possibili variazioni.	Divisione della classe in 4 gruppi eterogenei, consegna di 4 diverse immagini. Discussione collettiva.

Tabella 1. Fasi della sperimentazione.

3 Conduzione della sperimentazione

3.1 Fase 1: Attività di ice-breaking

In questa fase, l'obiettivo è stato quello di osservare se tutti gli alunni fossero in grado di contare fino a 100 e, dunque, di rispettare i principi di sequenza dei primi numerali, di svolgere semplici problemi con numeri superiori al 20 e di raggruppare in base 10. Un altro obiettivo a cui si mirava, necessario per i passi successivi, era anche quello di far prendere consapevolezza del fatto che si può risolvere un problema anche concretamente, manipolando oggetti, raggruppandoli per agevolare il conteggio. L'idea è stata incentivata dalle riflessioni di Gasca, secondo cui:

> «Non è necessario neppure avere un'idea chiara delle operazioni poiché i bambini fin dai primi anni di scuola, imparano a contare fino al 100, quindi anche contando riescono a risolvere la situazione problematica proposta senza rischio di sbagliare, in quanto l'importante è riuscire a pensare lo scenario proposto».
>
> (Gasca, 2016, p. 3)

È stato, dunque, inscenato un mercato. È stato scelto un alunno come fruttivendolo; tutti gli altri, a turno, hanno ricoperto il ruolo di clienti. Sono stati disposti sulla cattedra cinque barattoli, all'interno di ognuno dei quali erano presenti 200 immagini di frutta (50 erano di pere e altrettante di mele, di banane e di pesche) e un sacchettino, dal quale ogni alunno-cliente è stato poi chiamato a pescare un biglietto, contenente un quesito che doveva risolvere per comprendere il quantitativo di frutta da comprare/pagare (**Figura 2**).

Figura 2. Attività di ice-breaking.

Prima di iniziare l'attività, sono state consegnate ad ogni alunno 50 monete, con le quali avrebbe dovuto "comprare" quanto richiesto (ogni frutto costava 1 moneta), risolvendo la richiesta espressa nel biglietto (ad esempio: «Compra 25 banane, 18 pere e 2 mele. Quante monete spendi per comprare tutta questa frutta?» o «Regala 3 banane a tre maschietti dandone una ad ognuno di loro e 2 mele a due femminucce. Quanta frutta ti è rimasta?»). Pertanto, gli alunni, in un primo momento (durante l'acquisto della frutta), hanno operato il calcolo addizionale con numeri superiori al 20 e questo ha permesso di verificare il rispetto della corrispondenza biunivoca da parte dei bambini, poiché hanno associato ad ogni frutto una e una sola moneta. In un momento immediatamente successivo, i bambini hanno operato la sottrazione con i numeri fino al 50 (regalando frutti ai compagni). Successivamente, è stato chiesto ad ogni alunno di contare le monete rimaste, eventualmente raggruppandole su base 10 per facilitare il conteggio. Ad ogni mucchietto da 10 monete (una decina) è stata consegnata una banconota da dieci, in modo da semplificare il conteggio e riprendere l'idea di scomposizione di un numero in decine e unità.

Figura 3. Classificazione della frutta e raggruppamento delle monete.

3.2 Fase 2: Esplorazione dei problemi cinesi

Si sono distribuite agli alunni fotocopie di un problema cinese nel testo originale, con annessa equazione figurale (Figura 4).[5] Non si è specificato né che si trattava di un problema, né in che lingua fosse scritto. Si è chiesto ai bambini di osservare la fotocopia e dire se si individuavano elementi di somiglianza o di differenza rispetto a un testo in italiano.

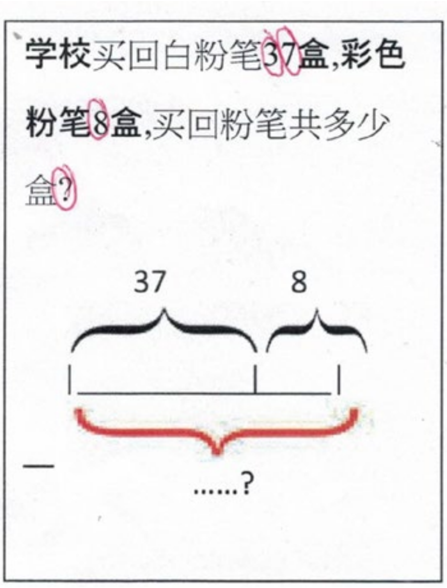

Figura 4. Testo di un problema cinese (con elementi cerchiati dalle autrici per agevolare il lettore).

Per avviare la discussione si è poi chiesto ai bambini:

- Di che scrittura si tratta?
- Avete riconosciuto qualcosa di familiare?
- Secondo voi, questi testi cosa sono?

5. La fotocopia consegnata agli alunni era priva dei cerchietti in rosso che sono invece presenti in Figura 4. La loro presenza è stata aggiunta solo per agevolare il lettore, come si osserverà in seguito.

Per i bambini non è stato difficile intuire che la lingua del testo fosse cinese (qualcuno ha anche ipotizzato fosse giapponese). Come osservato nel par. 1.1, i testi dei problemi cinesi presentano i dati numerici scritti usando numeri arabi; inoltre, nel testo si intercetta, tra i simboli, il punto interrogativo, tipico elemento associato alla domanda che pone il problema.[6] Gli elementi di somiglianza che si sperava venissero individuati dai bambini (cerchiati in Figura 4) sono stati facilmente individuati da tutti. Qualche bambino si è anche soffermato sull'equazione figurale, chiedendo:

L.: «Cosa è quello schema?»
E.: «Cosa sono le linee rosse e quelle blu?»

La sperimentatrice non si è sbilanciata nelle sue risposte:

> «Se avete osservato bene, avrete notato che questi numeri [indica il 37 e l'8 sull'equazione figurale] e anche il punto interrogativo [indica il punto interrogativo sull'equazione figurale] sono gli stessi presenti nel testo. Vedremo poi insieme che c'è un legame tra il testo e questo disegno».

Successivamente, è stata consegnata la fotocopia con la corrispondente traduzione in lingua italiana:

> La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti sono state acquistate?

Il testo in italiano è stato letto, per tutta la classe, dalla sperimentatrice.
Ricordiamo, per il lettore, che i problemi con variazione offrono un'unica situazione da cui è possibile generare problemi diversi. Questo aspetto si collega a un ulteriore elemento: la rappresentazione. Quest'ultima va vista in due direzioni prospettiche:

1. la rappresentazione unica per più problemi;
2. la costruzione di un processo di formalizzazione e astrazione che consente di modellizzare e tipizzare il problema stesso, conducendo successivamente all'elaborazione e all'utilizzo dell'equazione figurale.

Concordemente con la sperimentatrice, l'insegnante di classe, terminata la lettura del problema, ha chiesto ai bambini di rappresentare graficamente la situazione in modo che si potesse trovare il numero delle scatole di gessetti acquistate. La richiesta di procedere con una rappresentazione grafica dei dati del problema non era nuova per gli alunni, abituati, già durante la classe prima, ad affrontare i problemi a parole utilizzando proprio le rappresentazioni grafiche, per sopperire ai limiti legati alle competenze di lettura e scrittura.
Nell'analisi a priori si era prefigurato un possibile nodo problematico che avrebbe potuto/dovuto emergere: il problema della rappresentazione legato all'elevato numero di oggetti da rappresentare (45 scatole di gessetti), diversamente dalla fase precedente, in cui gli oggetti da contare si avevano già (frutta e monete di cartoncino).
Di seguito vengono presentati due esempi di rappresentazioni prodotte dai bambini (Figure 5a e 5b).

6. In questa sperimentazione, in linea con il problema cinese, il punto interrogativo viene utilizzato come simbolo sia per distinguere la domanda nel testo del problema, sia per indicare l'incognita nell'equazione figurale. Si tratta di una semplificazione per affrontare inizialmente il tema, con la consapevolezza che sarà in seguito fondamentale anche lavorare su problemi in cui la domanda può non essere indicata da un punto interrogativo ed è da ricavare tramite un'attenta lettura e comprensione del testo. Occorrerà distinguere bene, tramite opportune attività successive, il punto interrogativo come segno di punteggiatura e come simbolo proto-matematico per l'incognita.

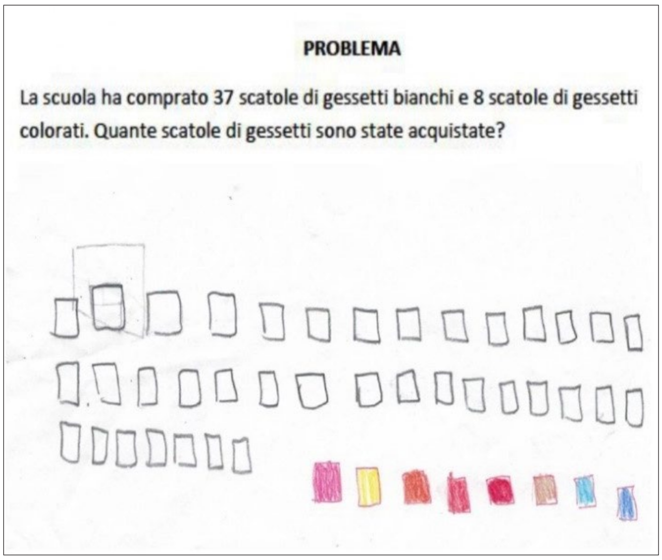

Figura 5a. Rappresentazione grafica del problema riportando i dati a uno a uno.

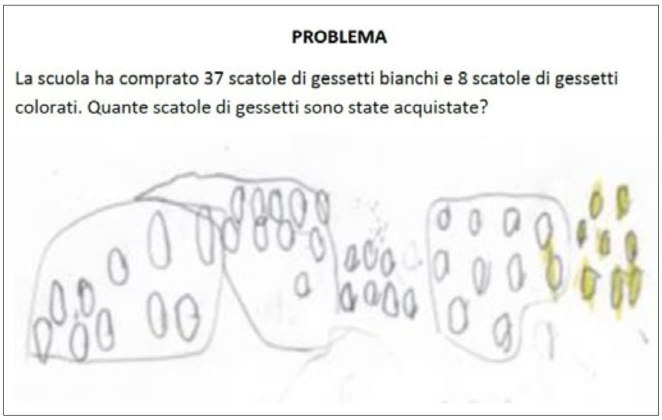

Figura 5b. Rappresentazione grafica del problema raggruppando i dati.

Analizzando le rappresentazioni grafiche proposte dai bambini, si è notato che ogni allievo ha proceduto disegnando tutti i dati del problema (ovvero le 37 scatole di gesso bianco e le 8 scatole di gesso colorato). Per rappresentare le scatole, alcuni hanno scelto dei quadrati (es. Figura 5a), altri dei cerchi (es. Figura 5b), e tutti hanno colorato quelle che rappresentavano le scatole di gesso colorato. Alcuni, memori del lavoro di raggruppamenti per 10 ripreso nella fase precedente, senza indicazioni né da parte della sperimentatrice né dell'insegnante di classe, hanno utilizzato il raggruppamento in base 10 per facilitare il conteggio delle scatole (es. Figura 5b).
La soluzione del problema si è ottenuta mediante conteggio: una ristretta minoranza di allievi ha contato a una a una tutte le scatole disegnate; molti hanno applicato la strategia del "contare da" (Fuson, 1982) partendo dalla numerosità delle scatole che hanno lasciato in bianco (37) e aggiungendo progressivamente le altre 8, ovvero «37, 38, 39, …, 45». Chi ha disegnato le scatole e ha poi cerchiato i raggruppamenti per 10 ha contato i tre raggruppamenti da dieci dicendo «10, 20, 30» e poi ha proseguito con la strategia del "contare da" (Fuson, 1982), aggiungendo a una a una le rimanenti unità, ovvero «30, 31, 32, …, 45».

3.3 Fase 3: Approccio all'equazione figurale

Dopo aver confrontato tutte le rappresentazioni prodotte dai bambini, si è discussa la possibilità di operare sulla rappresentazione per renderla uno strumento efficace per la risoluzione del problema. Infatti, era vero che le scatole erano state rappresentate con simboli grafici più semplici (quadrati o cerchi), ma era comunque laborioso disegnarle tutte. Gli stessi bambini lo avevano notato:

> L.: «Ci ho messo un po' a farle tutte».
> G.: «Mi è stancata la mano a fare tutte le scatole».
> M.: «Ma se compravano 1000 scatole, quanto tempo avremmo impiegato per farle?»

Certamente non ci si aspettava che l'equazione figurale emergesse come rappresentazione spontanea. Tuttavia, essa era apparsa agli occhi dei bambini nella prima fotocopia che era stata loro consegnata (Figura 4). La sperimentatrice ha chiesto ai bambini se ricordavano che c'era un disegno sotto il testo in cinese e cosa avevano immaginato che fosse. Ecco alcune delle risposte ricevute:

> S.: «Io ho pensato che era il modo in cui la loro maestra [dei bambini cinesi] gli diceva di scrivere i dati del problema».
> A.: «Per me significa che le scatole dei gessetti bianchi sono più grandi di quelle dei gessetti colorati. Guarda: 37 scatole tutte così [sullo schema in Figura 4 indica la lunghezza del segmento che si riferisce alle 37 scatole di gessetti bianchi] e 8 scatole grandi così [sullo schema in Figura 4 indica la lunghezza del segmento che si riferisce alle 8 scatole di gessetti colorati]».

La sperimentatrice ha chiarito subito che tutte le scatole hanno le stesse dimensioni. Poi, ha approfittato di questa osservazione per precisare che effettivamente quei due segmenti si riferivano proprio alle scatole di gessetti bianchi e dei gessetti colorati. «È un modo più schematico e immediato di rappresentare il numero delle scatole», ha aggiunto la sperimentatrice, discutendo poi con i bambini il fatto che i numeri riportati nello schema in Figura 4 fossero proprio quelli del testo del problema e che la lunghezza dei segmenti fosse diversa perché si riferivano a numerosità diverse. Si è introdotta così l'equazione figurale ai bambini. L'intento che si voleva perseguire era proprio quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale), per costruire un percorso di progressiva astrazione nella rappresentazione dei problemi, favorendone la comprensione e risoluzione.

In linea con quanto osservato nel quadro teorico a proposito della trasposizione culturale, sebbene questa strategia risolutiva sia tipicamente propria della didattica cinese, si può notare che il suo utilizzo sia coerente con i traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria, previsti dalle Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola d'infanzia e del primo ciclo[7] di istruzione (in seguito denominate "Indicazioni Nazionali"): l'alunno deve saper ricavare informazioni e saper utilizzare diverse rappresentazioni per costruire strategie risolutive efficaci nella risoluzione dei problemi (Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca [MIUR], 2012).

Si è poi consegnata ai bambini una fotocopia in cui c'era nuovamente il problema dei gessetti che avevano appena risolto e altre otto sue varianti, tutte in italiano (Tabella 2).

7. Il primo ciclo di istruzione in Italia dura otto anni: cinque anni di scuola primaria e tre anni di scuola secondaria di primo grado, che corrispondono alla scuola elementare e ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

1. La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti sono state acquistate?	**2.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Tra queste, le scatole di gessetti colorati sono 8. Quante scatole di gessetti bianchi ci sono?	**3.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Tra queste, le scatole di gessetti bianchi sono 37. Quante scatole di gessetti colorati ci sono?
4. La scuola ha comprato delle scatole di gessetti. 37 scatole di gessetti bianchi sono andate tutte perdute. Rimangono solo 8 scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti aveva comprato la scuola?	**5.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Se ne perdono alcune, ma ne restano 8. Quante scatole di gessetti si sono perse?	**6.** La scuola ha comprato 45 scatole di gessetti. Se ne perdono 37, quante scatole restano ancora?
7. La scuola ha comprato 8 scatole di gessetti colorati. Il numero delle scatole di gessetti bianchi è maggiore di 29 unità rispetto al numero delle scatole di gessetti colorati. Quante scatole di gessetti bianchi ha la scuola?	**8.** La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi e 8 scatole di gessetti colorati. Di quante unità il numero delle scatole di gessetti bianchi è maggiore rispetto al numero delle scatole di gessetti colorati?	**9.** La scuola ha comprato 37 scatole di gessetti bianchi. Il numero delle scatole di gessetti colorati è minore di 29 unità rispetto al numero delle scatole di gessetti bianchi. Quante scatole di gessetti colorati ci sono?

Tabella 2. Problemi con variazione consegnati ai bambini.[8]

Si è chiesto ai bambini di rappresentare le otto varianti utilizzando l'equazione figurale. L'obiettivo era di portare i bambini a riconoscere la possibilità di esprimere tutti e nove i problemi con un'unica rappresentazione che ne evidenziasse la struttura comune. Per tutti i bambini era chiaro che i dati andavano riportati tutti lungo una stessa linea, tuttavia, nonostante le riflessioni fatte precedentemente sul problema dei gessetti (problema 1, Tabella 2), non è stato semplice per i bambini staccarsi dai dati numerici e sostituirli con dei segmenti. L'insegnante di classe e la sperimentatrice hanno concordato sul fatto che era meglio non forzare verso una rappresentazione in segmenti continui. Così, la sperimentatrice ha disegnato alla lavagna un piccolo segmento indicandolo come 1 e altri 10 segmenti uniti indicando tale quantità con il 10. Ha poi fatto osservare come, piuttosto che fare 10 segmenti tutti attaccati, «per non farci stancare la mano» (riprendendo l'osservazione fatta prima da una bambina, G.), un unico segmento di lunghezza pari a 10 segmenti si sarebbe considerato ugualmente come 10. L'attenzione, a quel punto, è stata posta sulla lunghezza dei segmenti[9] e su questa nuova modalità, più pratica, con cui anche i grandi numeri potevano essere rappresentati. Quindi, se i bambini dovevano rappresentare 8 scatole, facevano 8 segmenti tutti della stessa lunghezza, mentre se dovevano rappresentare 10 scatole, ovvero una decina, facevano un segmento più lungo che aveva valore di 10 unità (Figure 6a, 6b, 6c). In questo modo, per i bambini è stato più chiaro comprendere il nesso tra la lunghezza del segmento e il suo valore.

8. Per maggiori informazioni sull'analisi strutturale della determinazione e del posizionamento dei testi dei problemi con variazione all'interno della tabella, consultare Ramploud (2015).
9. Si è anche riflettuto sul fatto che il segmento di valore 10 poteva anche essere non necessariamente lungo tanto quanto 10 segmenti, ma semplicemente "più lungo" del segmento a cui si attribuiva valore 1.

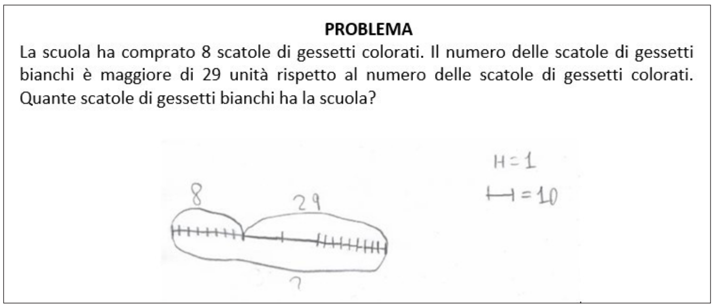

Figura 6a. Rappresentazione grafica del problema 7.

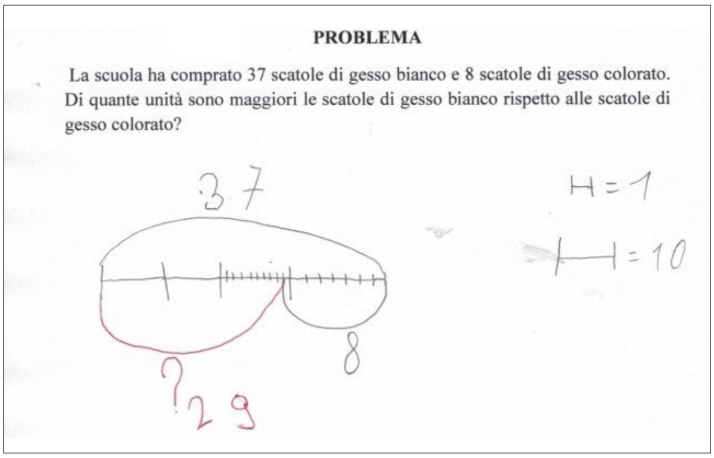

Figura 6b. Risoluzione grafica del problema 8.

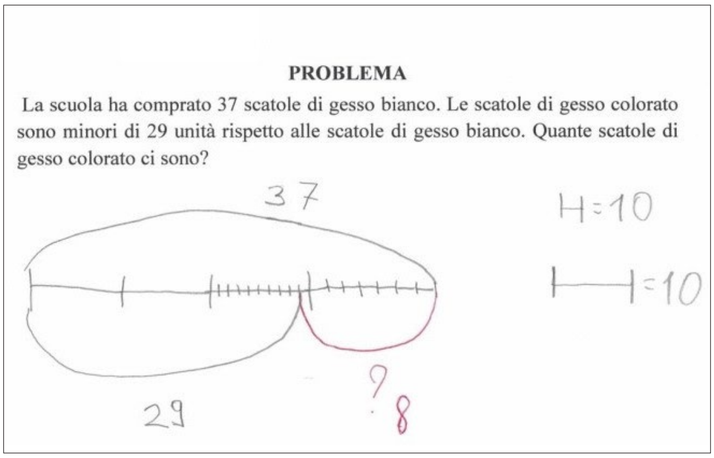

Figura 6c. Risoluzione grafica del problema 9.

Durante la rappresentazione mediante equazione figurale dei problemi con variazione, gli alunni hanno mostrato difficoltà nel problema 7 della Tabella 2 (Figura 6a) la cui complessità risultava più elevata poiché si presentava in maniera differente rispetto ai precedenti. Il blocco cognitivo dei bambini si è manifestato nel leggere «maggiore di 29 unità», perché fino a quel momento avevano lavorato solo con numeri dichiarati esplicitamente e non in relazione ad altri numeri.

Di seguito si riporta una breve conversazione avvenuta tra gli alunni e la sperimentatrice (Sper.):

> F.: «Ma dopo aver disegnato gli 8 segmenti, come devo farle le 29 unità?»
> S.: «Cosa sono 29 unità? Non potevano scrivere solo 29?»
> A.: «Devo disegnare i segmenti attaccati?»
> D.: «Devo cambiare colore per indicare quelli colorati rispetto ai gessetti bianchi?»
> F.: «*Maggiore di* vuol dire che devo aggiungere?»

La sperimentatrice ha riletto il problema per tutta la classe e, andando verso la lavagna, ha chiesto ai bambini di aiutarla a rappresentare i dati. Durante la rappresentazione il dubbio dei bambini si è focalizzato sull'uso del colore per distinguere le scatole. La sperimentatrice, allora, ha chiesto loro di riflettere:

> Sper.: «È realmente importante differenziare i gessetti colorati da quelli bianchi per poter arrivare alla soluzione del problema?»
> C.: «Non è importante, perché il grafico rimane uguale, anche se utilizziamo un altro colore!»

I bambini sono poi ritornati sulla perplessità di partenza, il «*maggiore di*». Dopo un'ulteriore rilettura del testo, viene chiesto ai bambini di riflettere:

> Sper.: «Riflettiamo insieme: cosa vuol dire che le scatole di gessetto bianco sono maggiori di 29 unità rispetto a quelle di gessetto colorato?»
> L.: «Che dobbiamo aggiungere».
> Sper.: «Che cosa dobbiamo aggiungere? A chi? Perché?»
> C.: «Perché se ci dice che le scatole dei gessetti bianchi sono maggiori, significa che alle scatole di gessetti colorati noi dobbiamo aggiungere altre 29 scatole».
> M.: «Maggiore vuol dire che è più grande. Cioè … ci sono 8 scatole di [gessetti] colorati. Poi ci sono le scatole dei [gessetti] bianchi che sono maggiori delle 8 [scatole di gessetti colorati] perché ce ne sono oltre a quelle lì [intende le 8 scatole dei gessetti colorati] altre 29 [scatole]».
> C.: «Infatti, io ho detto che agli 8 tu devi aggiungere i 29, così ce li hai tutti sulla stessa linea».

Dopo questo scambio tra C. e M., la situazione sembrava apparire più chiara anche agli occhi degli altri compagni.

> A.: «Maestra, ma è facile così, basta contare!»
> F.: «Quindi se le rappresentiamo bene e capiamo ciò che manca, basta solo che contiamo!»
> E.: «Maestra, io ho letto che le scatole di gessetti colorati sono 8, però il problema vuole sapere quante scatole sono di gessetti bianchi e quindi, se dice che sono in più di 29 unità, io ho disegnato accanto alle 8 unità altre 29 e poi ho contato tutto!»

Dalla risposta di E. si comprende come l'alunna abbia oltrepassato il limite legato solo alla lettura dei dati numerici presenti nel testo-problema: ha capito che al dato esplicito (8 scatole di gessetti colorati) si dovevano sommare 29 unità. Ha rappresentato la situazione correttamente e si è appoggiata ad essa per arrivare alla soluzione del problema. Infatti, dicendo «poi ho contato tutto», ha reso esplicito il fatto che ha applicato una procedura di conteggio sui segmenti che ha disegnato.
Anche con l'equazione figurale gli alunni hanno sfruttato processi di conteggio legati alla rappresen-

tazione che avevano fatto del problema. Come detto, i bambini non avevano prodotto l'equazione figurale canonica,[10] e la presenza dei segmenti che rendeva "visibili" le unità li induceva nel conteggio di queste ultime e nella successiva somma con le decine, applicando le strategie del "contare da" o del "contare fino a" (Fuson, 1982).
Rappresentati tutti e 9 i problemi, è seguita una discussione che ha coinvolto tutta la classe e nella quale si sono confrontate le varie rappresentazioni dei nove problemi. La sperimentatrice e gli allievi si sono soffermati sui dati numerici presenti (come esclamato da un bambino: «i numeri gira e rigira sono sempre gli stessi») e sulle operazioni utilizzate per risolvere i problemi (addizione e sottrazione). Sono così arrivati a notare che gli otto problemi assegnati erano proprio variazioni del primo, ovvero il contesto era sempre lo stesso, i dati numerici erano sempre gli stessi.
Nella rappresentazione dei dati mediante equazione figurale, i bambini si trovavano, di problema in problema, dinanzi a una parte del grafico priva di dato numerico, che indicavano, come nei testi cinesi, col punto interrogativo. In questo modo, si è incentivato lo sviluppo di un pensiero pre-algebrico già nei bambini di 7 anni, poiché il punto interrogativo dell'equazione figurale altro non è che l'incognita da determinare (la soluzione numerica è stata infatti scritta in un secondo momento, una volta trovata).
I problemi proposti hanno effettivamente dato luogo alla scrittura di un'equazione algebrica:
8 + 29 = ? (Figura 6a); 37 = ? + 8 (Figura 6b); 37 = 29 + ? (Figura 6c).
Questa scrittura, in Italia, diviene generalmente familiare agli allievi a partire dalla scuola secondaria di primo grado,[11] quando il dato sconosciuto viene indicato con x, e non più con il punto interrogativo. L'aspetto centrale di questa fase è stato far comprendere ai bambini che nella risoluzione dei problemi non è necessario conoscere a memoria delle procedure per giungere alla soluzione corretta, piuttosto è necessaria una corretta comprensione e rappresentazione grafica del testo.
Come anticipato, l'insegnante di classe e la sperimentatrice hanno deciso di non spingere verso una rappresentazione in segmenti continui, ma di mantenere le rappresentazioni dove unità e decine erano esplicite, perché con tali rappresentazioni i bambini si sentivano più a loro agio. È stata però discussa a lungo, con i bambini, la possibilità e l'utilità di utilizzare un'unica rappresentazione per tutti e nove i problemi.
Inoltre, ai bambini non si è proposto la denominazione "equazione figurale". Alcuni di loro lo hanno inizialmente chiamato "schema", poi qualcun altro ha iniziato a usare il termine "grafico", ripreso anche da insegnante di classe e sperimentatrice. Dunque, quest'ultimo termine, "grafico", è stato quello adottato dal gruppo classe.

3.4 Fase 4: Inserimento dei dati

In questa fase, ai bambini sono state consegnate due schede. In ognuna di esse c'era un testo-problema di partenza e, sotto questo, tre sue variazioni, nelle quali i dati erano stati volutamente "cancellati" (sostituiti da lineette). La rimozione dei dati dalle variazioni del problema è stata fatta al fine di stimolare la riflessione, da parte degli allievi, proprio sulla dimensione relazionale che i dati hanno in questo tipo di struttura. Fondamentale è stata la richiesta di comprendere un testo-problema di partenza e poi di inserire i dati numerici in maniera corretta nelle sue diverse riformulazioni successive, affinché si mantenesse inalterato il significato del testo.

10. Per "equazione figurale canonica" si intende quella proposta sotto il problema cinese (Figura 4) in cui i segmenti sono continui e non c'è riferimento diretto alla quantità che rappresentano (cosa che invece succedeva talvolta nelle rappresentazioni degli allievi, quando ad esempio per rappresentare 8 unità venivano usati 8 piccoli segmenti).
11. La scuola secondaria di primo grado in Italia dura tre anni e corrisponde ai primi tre anni di scuola media nel Canton Ticino.

I testi-problema proposti sono stati i due seguenti:

> Giulio ha 49 figurine. Ne regala 15 a Marco e 14 a Luca. Quante figurine gli rimangono?
> Laura ha ricevuto dalla nonna 38 monete. Per strada ne perde 17. Quante monete rimangono adesso a Laura?

Tutti i bambini si sono cimentanti con entrambi. Le **Figure 7a**, **7b** e **7c** mostrano anche esempi di risoluzione delle schede, che sono rappresentativi del modo in cui tutti i bambini hanno lavorato. Quello che è importante osservare è la riproduzione del "grafico" che prevede la presenza dei dati noti e ignoti e il riempimento degli spazi vuoti eseguito dai bambini abbastanza agevolmente, proprio perché si sono appoggiati al "grafico".[12]

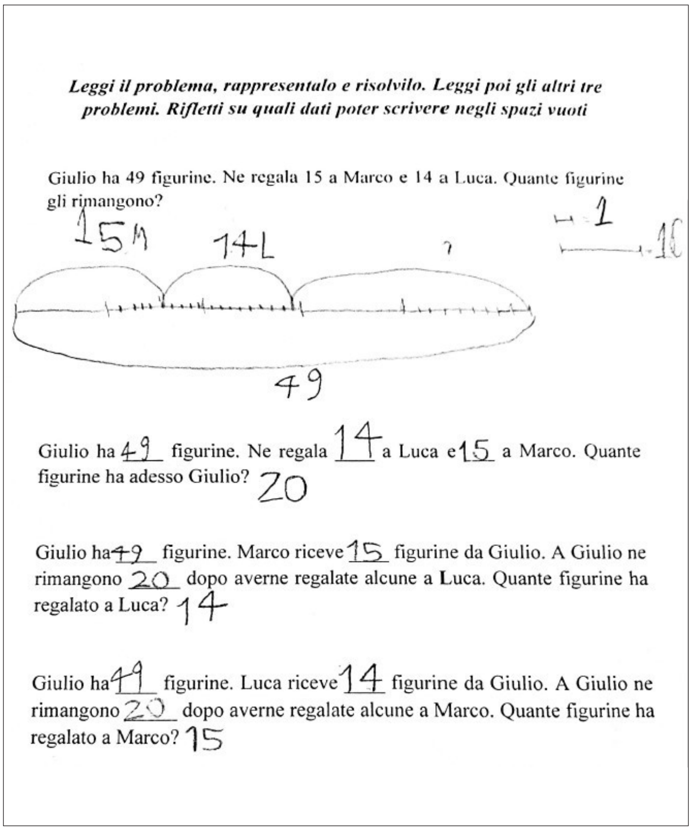

Figura 7a. Inserimento dei dati per il problema delle figurine.

12. Nelle rappresentazioni grafiche delle **Figure 7a** e **7b** sono comparse anche delle lettere riferite ad elementi diversi dell'ambiente del problema, ma si è preferito glissare su questo aspetto, dato che gli alunni non avevano le competenze per riflettere collettivamente su di esse.

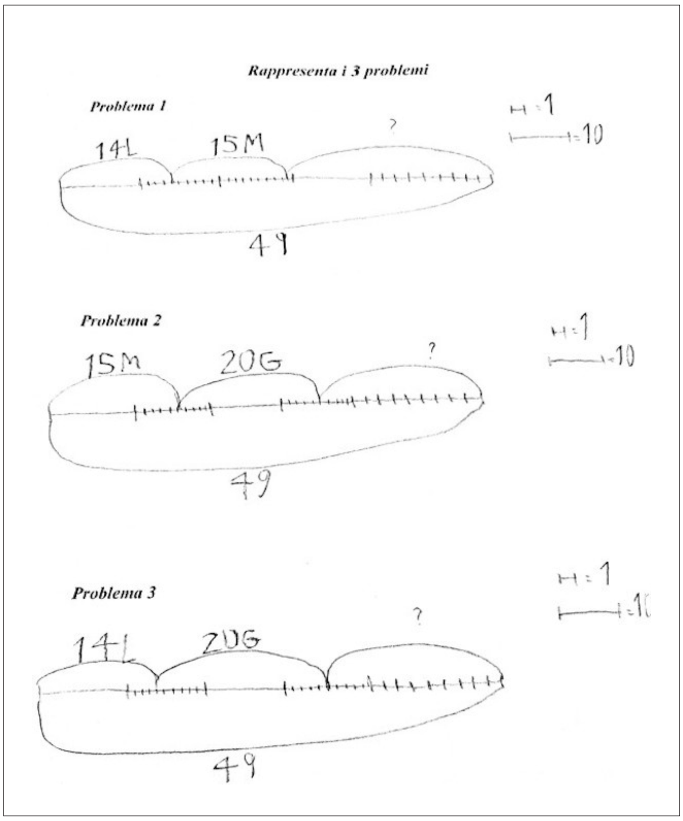

Figura 7b. Rappresentazione dei problemi delle figurine con variazione.

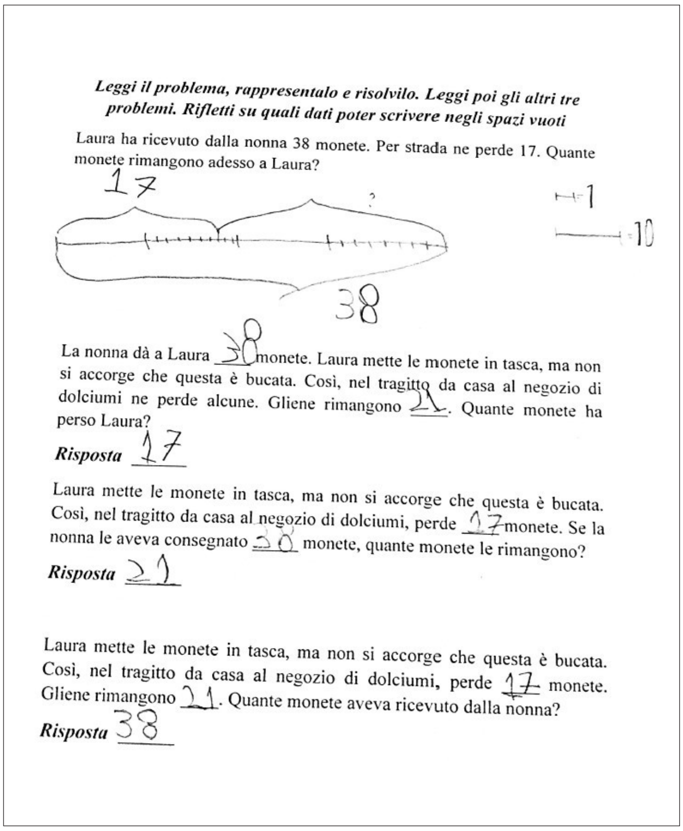

Figura 7c. Inserimento dei dati per il problema delle monete.

Si riportano anche due osservazioni espresse da due bambini durante lo svolgimento dell'attività:

> G.: «Maestra, ma la risposta è sempre il numero che manca nel testo».
> M.: «Ho capito! È come il problema dei gessetti, perché ad ogni problema c'era sempre lo stesso grafico, cambia solo la domanda, mentre i numeri con cui lavoriamo sono sempre gli stessi».

Dalle affermazioni degli allievi si desume che abbiano compreso che è possibile presentare il problema in modi diversi, invertendo i dati, ma che la rappresentazione grafica rimane la stessa. Dunque, da uno stesso grafico è possibile trarre variazioni dello stesso problema.

3.5 Fase 5: Formulazione della domanda

In questa fase è stato aumentato il livello di complessità, lasciando spazio anche alla fantasia degli allievi. È stata proposta una situazione aperta, ovvero non un problema già determinato, ma un contesto con dei dati, da cui poter generare interrogativi e due variazioni di tale situazione aperta, anch'esse presentate come situazioni aperte.
Ai bambini è stata, quindi, consegnata una scheda che riportava la seguente situazione:

> Luca ha 32 caramelle alla fragola e 14 caramelle all'arancia.

e le sue due variazioni:

> Luca ha 46 caramelle. Le caramelle all'arancia sono 14.
> Luca ha 46 caramelle. Le caramelle alla fragola sono 32.

È stato chiesto agli allievi di formulare una domanda per ciascuna delle tre situazioni, mantenendo inalterata la struttura e il significato della situazione iniziale; infine, di rappresentare e risolvere la tripletta creata. Si mirava a fortificare l'acquisizione raggiunta nella fase precedente, ovvero la comprensione che lavorando nello stesso contesto, ossia nella stessa situazione di partenza e con gli stessi dati, si possono ottenere formulazioni diverse relative a uno stesso problema.
Il lavoro è stato svolto individualmente e solo alla fine sono state lette tutte le domande formulate. Ogni domanda formulata in maniera diversa da altre precedentemente ascoltate è stata riportata alla lavagna, per fornire una panoramica complessiva di quelle che potevano essere le variazioni possibili associate a una stessa situazione di partenza. Di seguito (Figure 8a, 8b, 8c) si riportano esempi di alcune domande formulate dagli allievi.

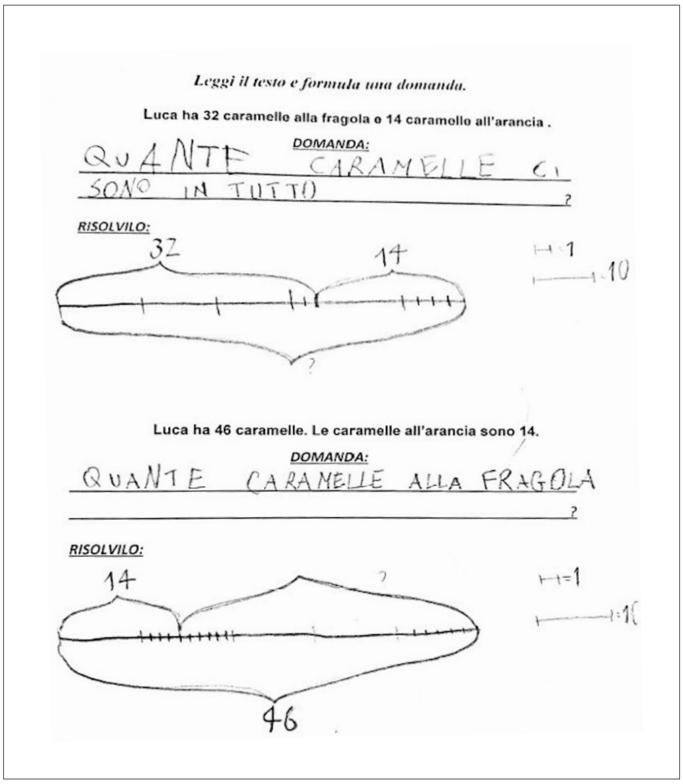

Figura 8a. Formulazione della domanda per le prime due situazioni da parte di un allievo.

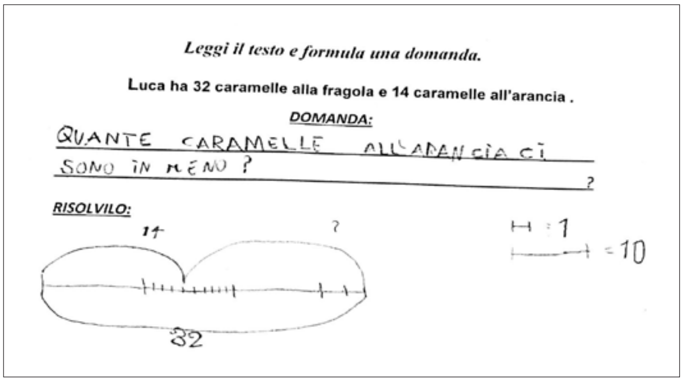

Figura 8b. Formulazione di una domanda diversa per la prima situazione proposta.

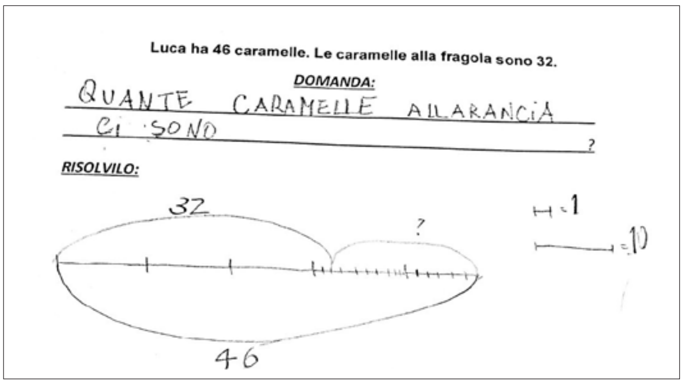

Figura 8c. Formulazione della domanda per la terza situazione proposta.

Dalla visione delle Figure 8a, 8b e 8c, è possibile notare le differenti domande proposte dagli allievi. Esse possono essere riassunte in quattro tipologie:

- Quante caramelle ci sono in tutto? (Figura 8a).
- Quante caramelle alla fragola ci sono? (Figura 8a).
- Quante caramelle all'arancia ci sono? (Figura 8c).
- Quante caramelle all'arancia ci sono in meno rispetto a quella alla fragola? (Figura 8b).

Questa attività ha permesso ai bambini di comprendere che i problemi non nascono in maniera standardizzata, bensì possono esistere molteplici riformulazioni e, nel caso specifico, che da uno stesso contesto possono emergere non solo domande formulate in maniera differente, ma anche prospettive diverse da cui vedere i dati.

3.6 Fase 6: Creazione di un problema

La sesta e ultima fase ha previsto una suddivisione della classe in quattro gruppi eterogenei, relativamente alle competenze individuali degli allievi. La suddivisione è stata fatta con l'aiuto dell'insegnante di classe, al fine di rendere i gruppi più equi possibile, bilanciando la presenza degli alunni che hanno mostrato competenze più avanzate con quelli che ancora mostravano qualche perplessità.[13]
Ogni gruppo ha ricevuto una scheda di lavoro (Figure 9a, 9b, 9c, 9d). Ogni scheda riportava un'immagine diversa, ma una medesima consegna, ovvero a partire dalla visione dell'immagine, inventare un problema. In ogni gruppo è stato individuato un capogruppo, attraverso un sorteggio, che aveva il compito di scrivere il problema ideato dal gruppo.
Si è trattato di un'attività di cooperative learning, dove i membri del gruppo erano chiamati a ricoprire diversi ruoli caratterizzati dalle seguenti attività:

- Scrivere il problema (era compito del capogruppo sorteggiato, ma tutti i membri del gruppo dovevano esprimersi per giungere alla sua formulazione).
- Rappresentare il problema mediante il grafico (l'equazione figurale).
- Risolvere il problema (un bambino scriveva, ma tutti i membri del gruppo collaboravano per ottenere la soluzione).
- Presentare il problema ideato al gruppo classe.

Una volta portate a termine queste consegne, ogni gruppo doveva poi cimentarsi nella rappresentazione e quindi nella risoluzione dei problemi creati dagli altri gruppi.
Si presentano di seguito alcuni protocolli.

13. Le perplessità, di cui si fa cenno, riguardano quelle di alcuni bambini che, una volta rappresentato il segmento "lungo" di valore 10, per svolgere i conteggi che portano alla soluzione del problema, sentivano la necessità di scomporlo in 10 parti.

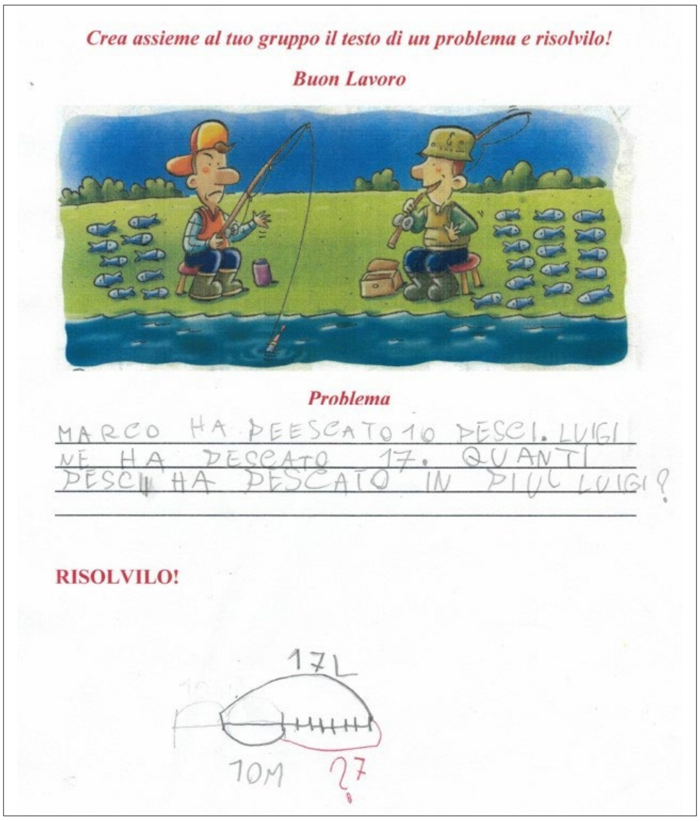

Figura 9a. Creazione di un problema.

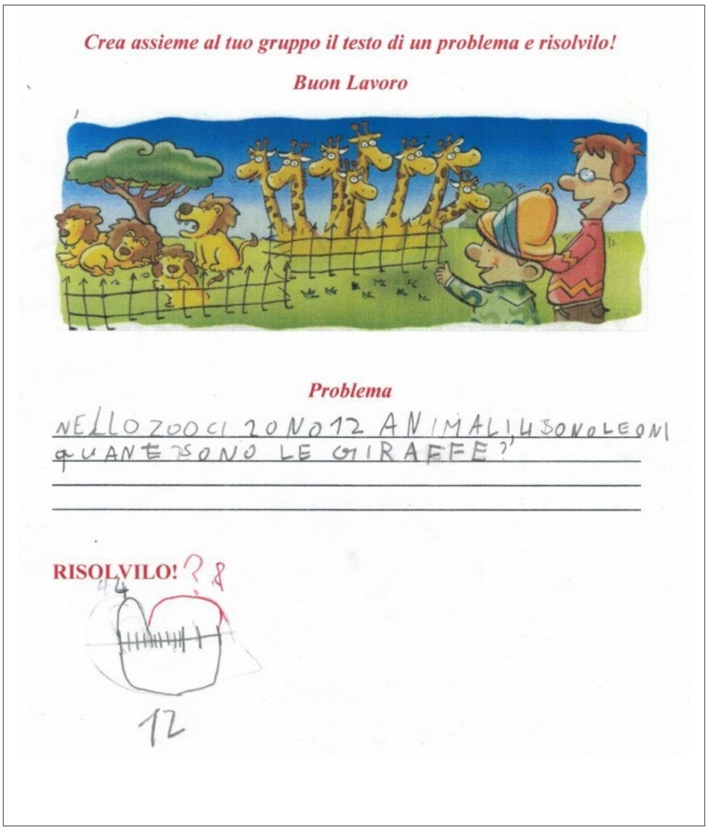

Figura 9b. Creazione di un problema.

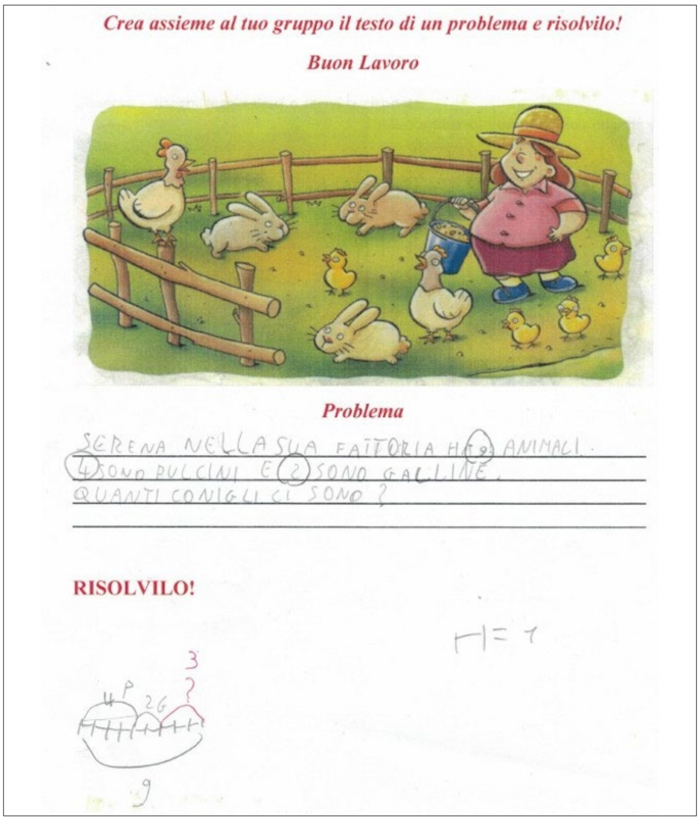

Figura 9c. Creazione di un problema.

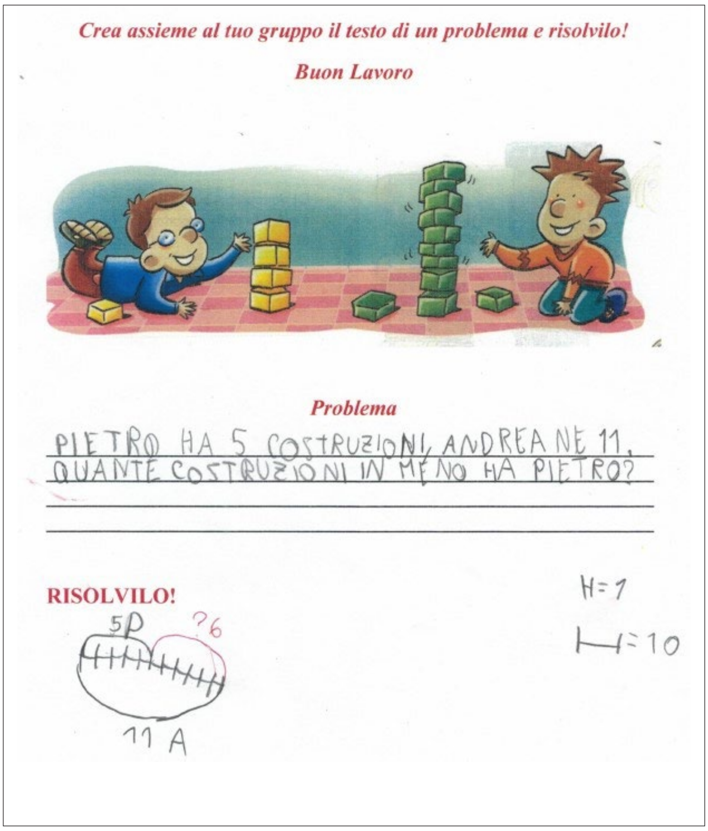

Figura 9d. Creazione di un problema.

Di seguito vengono riportati alcuni dialoghi dei bambini, durante lo svolgimento del lavoro di gruppo:

> **Gruppo 1** (Figura 9a):
> A.: «Possiamo creare un problema semplice chiedendo quanti pesci hanno pescato in tutto».
> L.: «Ma sarebbe troppo semplice per i nostri compagni risolvere il nostro problema».
> B.: «Secondo me, potremmo chiedere o quanti questo [indicando l'uomo a destra] ne ha pescati di più o quanti questo [indicando l'uomo a sinistra] ne ha pescati in meno».
> L.: «Sono d'accordo, possiamo fare una domanda come quelle che ci ha fatto fare la maestra!»
> **Gruppo 2** (Figura 9b):
> G.: «Che dite se chiediamo ai compagni di scoprire quante sono le giraffe o i leoni?»
> L., E., e R.: «Per noi va bene, però dobbiamo scriverlo bene [il problema]!»

Gli altri due gruppi hanno lavorato similmente ai due gruppi riportati sopra. Si può notare che il gruppo 3 (Figura 9c) ha formulato un problema simile al gruppo 2; mentre il gruppo 4, a differenza del gruppo 1, ha attuato la procedura inversa chiedendo «Quanti sono in meno…».
Tutti i gruppi si sono mostrati autonomi nella rappresentazione dei problemi. Il processo risolutivo è stato uguale a quello messo in atto nei problemi con variazione svolti nelle fasi precedenti, ovvero mediante conteggio dei segmenti rappresentati.
Dopo che tutti i gruppi avevano rappresentato e risolto i problemi degli altri gruppi, la sperimentatrice ha chiesto alla classe di formulare triplette di problemi sui 4 problemi ideati dai gruppi. Per ognuno dei 4 problemi, un volontario per gruppo è stato chiamato alla lavagna dalla sperimentatrice. Il bambino è stato invitato a disegnare il grafico del problema iniziale e poi la sperimentatrice chiedeva: «Al posto del punto interrogativo mettiamo il valore della soluzione che avete trovato. Facciamo prendere a un altro numero il posto del punto interrogativo. Come possiamo riformulare il problema?». Tutta la classe era invitata a intervenire.
Quest'ultima fase ha permesso di avviare una discussione matematica sulle diverse possibilità di formulazione dei testi nonostante si stesse lavorando sempre sugli stessi dati, richiamando fortemente le caratteristiche dei problemi con variazione utilizzati nelle fasi precedenti.
Riportiamo di seguito, a mo' di esempio, le variazioni ideate dai bambini per il problema della Figura 9a e della Figura 9b.

> **Problema di partenza** (Figura 9a):
> Marco ha pescato 10 pesci. Luigi ne ha pescati 17. Quanti pesci ha pescato in più Luigi?
> **Variazioni:**
> Marco ha pescato 10 pesci. Luigi ne ha pescati 17. Quanti pesci ha pescato in meno Marco?
> Marco e Luigi hanno pescato 27 pesci. Se Luigi ne ha pescati 10, quanti pesci ha pescato Marco?
> Marco e Luigi hanno pescato 27 pesci. Se Marco ne ha pescati 17, quanti pesci ha pescato Luigi?

> **Problema di partenza** (Figura 9b):
> Nello zoo ci sono 12 animali. 4 sono i leoni. Quante sono le giraffe?[14]
> **Variazioni:**
> Nello zoo ci sono 12 animali. 8 sono le giraffe. Quanti sono i leoni?
> Nello zoo ci sono 8 giraffe e 4 leoni. Quanti animali sono presenti?
> In uno zoo ci sono 12 animali. Se i leoni sono 4 e le giraffe sono maggiori di 4 rispetto a loro, quante sono?[15]

14. Nello zoo gli unici animali presenti sono leoni e giraffe (**Figura 9b**). Facciamo questa precisazione per evitare che il lettore possa immaginare soluzioni diverse per tale problema.
15. Non è stata affrontata la profonda differenza di significato tra le frasi «le giraffe sono maggiori» e «il numero delle giraffe è maggiore». Questo aspetto è stato delegato all'insegnante per un approfondimento successivo.

Osserviamo che, in questo caso, la proposta avanzata dal gruppo classe sembra richiamare i problemi svolti con la sperimentatrice in cui si presentava il numero delle scatole di gessetti bianchi (29) maggiore di quello delle scatole di gessetti colorati (8).

4 Discussione e conclusioni

In questo articolo è stata mostrata la possibilità di sviluppare un approccio al pensiero pre-algebrico con alunni della scuola primaria, che presti maggiore attenzione alle caratteristiche strutturali dei problemi additivi rispetto a quelle numeriche.
L'interesse perseguito in questo articolo è stato duplice. Da un lato si è mirato a mostrare come possa concretizzarsi una trasposizione di strumenti didattici propri della didattica cinese – i problemi con variazione e l'equazione figurale – nel contesto italiano della scuola primaria. Questo aspetto è stato mostrato mettendo in atto la sperimentazione condotta con la classe seconda primaria, descrivendo nel dettaglio tutte le fasi di cui si è composta. Dall'altro lato si volevano indagare i risultati di una simile esperienza di trasposizione culturale dal punto di vista dell'apprendimento degli allievi coinvolti.
Le attività proposte miravano a:

- stimolare la capacità di lettura e comprensione del testo;
- supportare la produzione di rappresentazioni grafiche e pre-algebriche, cogliendo i rapporti di queste rappresentazioni con il linguaggio verbale;
- individuare dati mancanti in un problema, ma desumibili dal testo e a indicare il dato mancante con il punto interrogativo come precursore dell'incognita;
- riflettere sulla comprensione del testo di un problema e delle sue variazioni per stimolare la riflessione sulla dimensione relazionale che hanno i dati in questo tipo di struttura (cioè nella variazione);
- sviluppare la capacità di risoluzione di un problema aritmetico;
- stimolare la creatività dei bambini nell'inventare variazioni di un problema.

Questi aspetti ripercorrono le fasi della sperimentazione svolta, le cui attività si sono succedute per gradi di complessità via via crescente, al fine di rendere gli allievi autonomi nella comprensione, rappresentazione, risoluzione e formulazione di problemi con variazione.
I risultati ottenuti, considerando il numero esiguo di bambini, non sono statisticamente significativi; tuttavia, possiamo mettere in evidenza i seguenti aspetti.
Nella fase 2, quando si è chiesto ai bambini di rappresentare graficamente il problema, tutti hanno proceduto disegnando i dati del problema. Nessuno ha disegnato effettivamente le scatole dei gessetti; tutti hanno fatto ricorso a una semplificazione del disegno: le scatole sono state rappresentate o con quadrati o con cerchi. Nella fase 3, si è discussa la possibilità di operare sulla rappresentazione per renderla uno strumento efficace per la risoluzione del problema. Gli stessi bambini avevano notato che era laborioso disegnare tutti gli oggetti, specialmente con numeri superiori al 10.
Tra gli intenti dichiarati nell'introduzione, rientrava anche quello di accompagnare il passaggio dalla rappresentazione grafica della quantità a quella simbolica del segmento (equazione figurale). A tal proposito, il passaggio all'equazione figurale canonica è stato avviato con gli allievi, rimanendo ancora in via di sviluppo alla fine della sperimentazione. La sperimentatrice e l'insegnante di classe hanno, infatti, preferito non forzare gli allievi e hanno scelto di adottare un modo "alternativo" di esplorare e utilizzare le potenzialità legate ai problemi con variazione e alle possibili rappresentazioni legate ad essi, ovvero quello che nel par. 3.3 è stato chiamato "grafico". Il fatto che non si sia arrivati a costruire con i bambini l'equazione figurale canonica indica un punto importante su cui vale la pena riflettere.

Infatti, è evidente che non si tratta di una rappresentazione spontanea. Sarà necessario riprendere e approfondire il passaggio all'equazione figurale canonica con attività future, che in particolare portino gli allievi ad abbandonare gradualmente l'uso dei segmenti unità. Tuttavia, è opportuno sottolineare come nella sperimentazione presentata si sia lavorato sullo sviluppo di competenze di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale. Nel lavoro con i problemi con variazione (fase 3 e successive), per i bambini era chiaro che si trovavano dinanzi a una stessa situazione vista da differenti punti di vista e anche che più il disegno è semplificato e con una struttura ordinata, più questo consente di vedere meglio la situazione. Soprattutto, è emersa la consapevolezza che è possibile operare in modo simbolico sulla rappresentazione, per renderla uno strumento utile alla risoluzione del problema. Osserviamo ancora che le strutture testuali delle variazioni proposte dalla sperimentatrice mantengono la coerenza con le strutture cinesi dei problemi con variazione. Infatti, la consegna prevede sempre che i bambini utilizzino combinazioni numeriche fisse, per prestare più attenzione all'aspetto relazionale del problema. Il testo e la struttura hanno effettivamente un ruolo estremamente importante nel guidare i bambini verso la soluzione e questo tipo di struttura modifica l'approccio dei bambini ai problemi a parole. Si evince, infatti, che la struttura relazionale sposta l'attenzione dalla dimensione aritmetica a quella pre-algebrica e l'attenzione si sposta su ciò che connette i vari elementi, piuttosto che sulla struttura individualizzante della scoperta della singola operazione. Gli stessi bambini, nelle fasi 5 e 6, mantenendo il contesto costante (ovvero senza alterare i dati), sono stati in grado di generare variazioni del problema di partenza. Si sono posti domande sensate, in cui le operazioni messe in gioco sono sia l'addizione sia la sottrazione.
Questa sperimentazione, dunque, ha mostrato come si possa costruire, a partire dal testo di un problema, una possibile esplorazione delle potenzialità legate alla struttura della variazione. Ciò può condurre i bambini a sviluppare competenze d'uso di strutture di risoluzione di tipo pre-algebrico, spostando l'attenzione dal piano procedurale a quello relazionale. Come precisato, non sono state compiutamente introdotte le strutture segmentali cinesi (le equazioni figurali), ma si pongono le basi, in chiave di trasposizione culturale, per uno sviluppo che andrà in quella direzione, proprio come rilancio di questa esperienza, e che si realizzerà negli anni successivi. Infatti, a fine sperimentazione, l'insegnante di classe è stata intervistata al fine di fare un bilancio della sperimentazione condotta, anche relativamente alle sue impressioni. Si riporta di seguito un breve estratto dell'intervista:

> Sper.: «Cosa pensi di questo approccio: i problemi con variazione e il grafico [equazione figurale] sono stati di qualche beneficio per i tuoi allievi?»
> Insegnante: «[…] potrei sfruttare questa esperienza anche negli anni successivi, perché continuerò a seguire questa classe. […] pensavo che effettivamente non sarebbe stato semplice fare usare ai bambini i segmenti continui. […] l'anno scorso ho lavorato molto con loro su decine e unità, sui raggruppamenti in base 10. Forse questo li ha ingabbiati in qualche modo […]. Però il legame tra un problema e gli altri [le variazioni] lo hanno colto perfettamente. Grazie all'osservazione del grafico, hanno compreso questo meccanismo, se così lo possiamo chiamare, in cui i numeri, a giro, possono "sparire" dal grafico ed essere sostituiti dal punto interrogativo [l'incognita], generando un altro problema [una variazione del problema di partenza]. Ritengo che abbia senso lavorare così già dalle prime classi e il lavoro merita di proseguire negli anni successivi. Richiamando questa esperienza, l'anno prossimo potrà essere, forse, fattibile provare a passare ai segmenti continui. Ci proverò!»

L'insegnante di classe pensava fosse stato un problema il fatto che non fossimo riusciti a lavorare con l'equazione figurale canonica, ma come precisato nelle osservazioni esposte sopra, così non è stato. Ha colto le potenzialità di questo approccio, dichiarando il proprio interesse nel proseguire e mantenere questa tipologia di lavoro. In un'ottica di verticalità e di continuità nell'insegnamento della disciplina, infatti, questo approccio potrebbe favorire fin dai primi anni di scuola primaria l'acquisizione di competenze algebrico-relazionali, competenze inizialmente sottese che via via, nel corso degli studi successivi, possono diventare sempre più esplicite e formalizzate. Come sottolineato nelle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012), la costruzione del pensiero matematico è un processo progressivo di lungo termine nel quale le competenze degli studenti si intrecciano, consolidano e sviluppano a più riprese. In questo processo è fondamentale l'attività di problem-solving in cui l'alunno può riconoscere schemi ricorrenti e utilizzare diverse rappresentazioni per costruire strategie risolutive efficaci. Nei traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria si parla proprio di saper risolvere problemi e di ricavare informazioni e riconoscere e utilizzare rappresentazioni diverse. Se il ruolo del ricercatore può essere individuato nel continuo tentativo di favorire processi di ripensamento dell'impianto didattico, contemporaneamente l'insegnante procede a una reinterpretazione delle proprie metodologie didattiche della matematica, rendendole prassi quotidiana di lavoro (Di Paola et al., 2015). In quest'ottica, si rivela interessante e stimolante sia per il ricercatore sia per l'insegnante studiare approcci sviluppati in diversi contesti culturali, al fine di riflettere sulle proprie pratiche didattiche e progettare nuove sperimentazioni nelle classi. Questo non significa importare brutalmente metodologie didattiche da una cultura all'altra ma piuttosto, come fatto per mettere in atto questa sperimentazione, approfondire i processi di significato connessi ai diversi contesti culturali nei quali queste metodologie si sono sviluppate e progettare modi per trasporle nella propria pratica didattica con analisi degli effetti sugli apprendimenti degli allievi, al fine di diventare più consapevoli del proprio contesto culturale e delle proprie pratiche didattiche.

Bibliografia

Bartolini Bussi, M. G., Ramploud, A., & Baccaglini-Frank, A. (2013). *Aritmetica in pratica. Strumenti e strategie dalla tradizione cinese per l'inizio della scuola primaria*. Erickson.

Barton, B., & Frank, R. (2001). Mathematical ideas and indigenous languages. In B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural research on mathematics education: An international perspective* (pp. 135–150). Lawrence Erlbaum Associates.

Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation. A cultural perspective on mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

Bonazza, V. (2012). *Programmare e valutare l'intervento didattico. Fondamenti epistemologici.* Guida Editori.

Branchetti, L., & Viale, M. (2015). Tra italiano e matematica: il ruolo della formulazione sintattica nella comprensione del testo matematico. In M. Ostinelli (A cura di), *Didattica dell'italiano. Problemi e prospettive* (pp. 138–148). Dipartimento formazione e apprendimento, Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana (SUPSI).

Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Springer.

Di Paola, B. (2016). Why Asian children outperform students from other countries? Linguistic and parental influences comparing Chinese and Italian children in Preschool Education. *IEJME-Mathematics Education*, *11*(9), 3351–3359.

Di Paola, B., Mellone, M., Martignone, F., & Ramploud, A. (2015). Esperienza educativa di trasposizione culturale nella scuola primaria. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *38*(3), 363–387.

Di Paola, B., & Zanniello, G. (2017). Research in multicultural educational context with Chinese students: the Chinese written language as a bridge to an informal beginning of the algebraic-relational thought. *Italian Journal of Educational Research*, *19*, 121–138.

Fuson, K. C. (1982). An analysis of the counting-on solution procedure in addition. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 67–81). Erlbaum.

Gasca, A. M. (2016). *Numeri e forme. Didattica della Matematica con i bambini.* Zanichelli.

Meli, M. (2019). *Cultura italiana e cinese a confronto per un primo approccio al pensiero algebrico*. Tesi di Laurea Magistrale, Università degli Studi di Enna KORE.

Mellone, M., & Ramploud, A. (2015). Additive structure: an educational experience of cultural transposition. In X. H. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Proceeding of ICMI STUDY 23: primary mathematics study on whole number* (pp. 567–574). University of Macau.

Mellone, M., Ramploud, A., & Carotenuto, G. (2020). An experience of cultural transposition of the El'konin-Davydov curriculum. *Educational Studies in Mathematics*, *103*(2), 1–18.

Mellone, M., Ramploud, A., Di Paola, B., & Martignone, F. (2019). Cultural transposition: Italian didactic experiences inspired by Chinese and Russian perspectives on whole number arithmetic. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *51*(1), 199–212.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. (2012). Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. *Annali della Pubblica Istruzione, Numero Speciale*. Le Monnier. http://www.indicazioninazionali.it/wp-content/uploads/2018/08/Indicazioni_Annali_Definitivo.pdf

Ramploud, A. (2015). *数学 [shùxué] matematica, sguardi (d)alla Cina [...] ogni pensiero, nel farsi incontro all'altro si interroga sul proprio impensato.* Tesi di Dottorato di Ricerca in Didattica della Matematica, Scuola di dottorato in Scienze Umanistiche, Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia.

Ramploud, A., & Di Paola, B. (2013). The Chinese perspective of variation to rethink the Italian approach to word-problems from a pre-algebraic point of view. In C. Fazio (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 65* (pp. 525–535). Università di Torino.

Sun, X. (2009). "Problem variations" in the Chinese text: comparing the variation in American and Chinese Mathematics textbooks. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 193–200). University of Thessaloniki.

Sun, X. (2011). An insider's perspective: "variation problems" and their cultural grounds in Chinese curriculum practice. *Journal of Mathematics Education*, *4*(1), 101–114.

Zan, R. (2016). *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo.* Carocci Faber.