HIMPUNAN DOMINASI TERKENDALI GRAF HASIL OPERASI AMALGAMASI TITIK DAN SISI PADA GRAF SIKLUS BERORDE SAMA

Landerius Maro
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Tribuana Kalabahi, Indonesia
E-mail: landeriusmaro@gmail.com

ABSTRAK

Graph theory is one of the applied mathematics that continues to be developed. One of the concepts studied in graph theory is the controlled dominance set. The set $D_r \subseteq V(G)$ is called a controlled dominance set if every vertex in $V(G) - D_r$ is neighbor to at least one vertex in D_r as well as another vertex in $V(G) - D_r$. The purpose of this research is to determine the controlled domination number of the graph resulting from the amalgamation operation of nodes and edges in cycle graphs of the same degree, or $(amal(C_n, C_n, x_1, y_1))$ and $(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2))$. This research uses the proof method by utilizing the existing theorems, namely the controlled domination number theorem on cycle graphs and the upper and lower bound theorems of controlled domination numbers. The results obtained are: $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ for $n \geq 3$, and $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$,, for $n \geq 3,\ n = 3k$,, where $k \geq 1$, and $\gamma_r\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$,, for $n \geq 3,\ n \neq 3k$,, where $k \geq 1$.

Keyword:* *Restrained Domination Sets and Numbers, Point and Side Amalgamation, Cycle Graph.

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu ilmu terapan matematika yang hingga kini terus dikembangkan. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek – objek diskrit dan hubungan antara objek – objek tersebut [1]. Pada tahun 1736 seorang ahli matematikawan dari Swiss yang bernama Leonard Euler pertama kalinya memperkenalkan teori graf. Euler berhasil memecahkan masalah jembatan Konigsberg (kota Konigsberg, sebelah timur Prussia, Jerman sekarang) di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa. Ia kemudian memecahkan masalah ini ke dalam graf [2]. Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul – simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul [3].

Teori Graf memiliki beberapa konsep, dimana salah satunya adalah himpunan dominasi. Konsep himpunan dominasi pada graf memiliki akar sejarah sejak tahun 1850 ketika penggemar catur Eropa mempelajari masalah "dominasi ratu". Para penggemar ini bekerja untuk menentukan jumlah minimum ratu yang diperlukan sehingga setiap persegi pada papan catur standar 8×8 dapat diduduki oleh sebuah ratu atau dapat langsung diserang oleh ratu, dengan kata lain kotak tersebut didominasi oleh sebuah ratu. Situasi tersebut dapat di modelkan dengan teori graf. Pada papan catur, kotak adalah titik (V) dan dua titik terhubung disebut sisi (E).Jika setiap kotak dapat dicapai oleh ratu pada kotak lain dengan satu langkah. Jumlah minimum ratu yang memungkinkan untuk tidak bertabrakan dengan ratu lainnya dengan satu langkah adalah bilangan dominasi dari sebuah himpunan dominasi di G.

Himpunan dominasi adalah suatu himpunan bagian D dari himpunan simpul $V(G)$ dengan simpul – simpul yang tidak berada di D bertetangga sedikitnya dengan satu simpul di D. Kardinalitas D minimum disebut bilangan dominasi graf G dan dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Pengkajian tentang himpunan dominasi dari graf khusus dan graf hasil operasinya telah dilakukan dan memperoleh beberapa hasil, diantaranya bilangan dominasi pada graf lintasan (P_n), graf siklus (C_n) dan graf lengkap (K_n), penjumlahan graf $K_3 + C_n$ dan $K_3 + P_n$, perkalian graf $C_n \times P_n$, korona graf $C_n \odot K_n$, dan shackle graf K_n, n [4].

Himpunan dominasi memiliki beberapa jenis, diantaranya *signed dominating set*, *restrained dominating set, dan roman dominating set*. Jenis himpunan dominasi yang dibahas pada penelitian ini adalah himpunan dominasi terkendali (*restrained dominating set*). Himpunan $D_r \subseteq V(G)$ adalah himpunan dominasi terkendali, apabila setiap titik dalam $V(G) - D_r$ bertetangga dengan satu titik di dalam D_r begitu juga suatu titik lain di dalam $V(G) - D_r$, sedangkan kardinalitas D_r minimum disebut bilangan dominasi terkendali graf G ($\gamma_r(G)$). Penelitian tentang himpunan dominasi terkendali juga telah banyak dikaji, diantaranya "*Restrained Domination in Graphs"* yang memperoleh hasil bilangan dominasi terkendali pada graf lengkap ($\gamma_r(K_n)$), graf lintasan ($\gamma_r(P_n)$), dan graf siklus ($\gamma_r(C_n)$) [5]. Sedangkan *"On equality in an upper bound for the restrained and total domination numbers of a graph"* [6] dan *"Restrained Domination in Unicyclic Graphs"* [7] masing – masing memperoleh hasil batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dari suatu graf. Selain itu, penelitian tentang himpunan dominasi terkendali yang melibatkan operasi graf dari beberapa graf khusus juga telah banyak dikaji, diantaranya *"Restrained Domination in Graphs Under Some Binary Operations*" [8], "*The Product of the Restrained Domination Numbers of A Graph and Its Complement"* [9], "*Secure Restrained Domination in the Join and Corona of Graphs*" [10], "Penentuan Bilangan Dominasi Terkendali pada $P_n \odot P_n$ dan $K_n \odot K_n$" [11], dan "*Determination of the Restrained Domination Number on Vertex Amalgamation and Edge Amalgamation of the Path Graph With the Same Order*" [12].

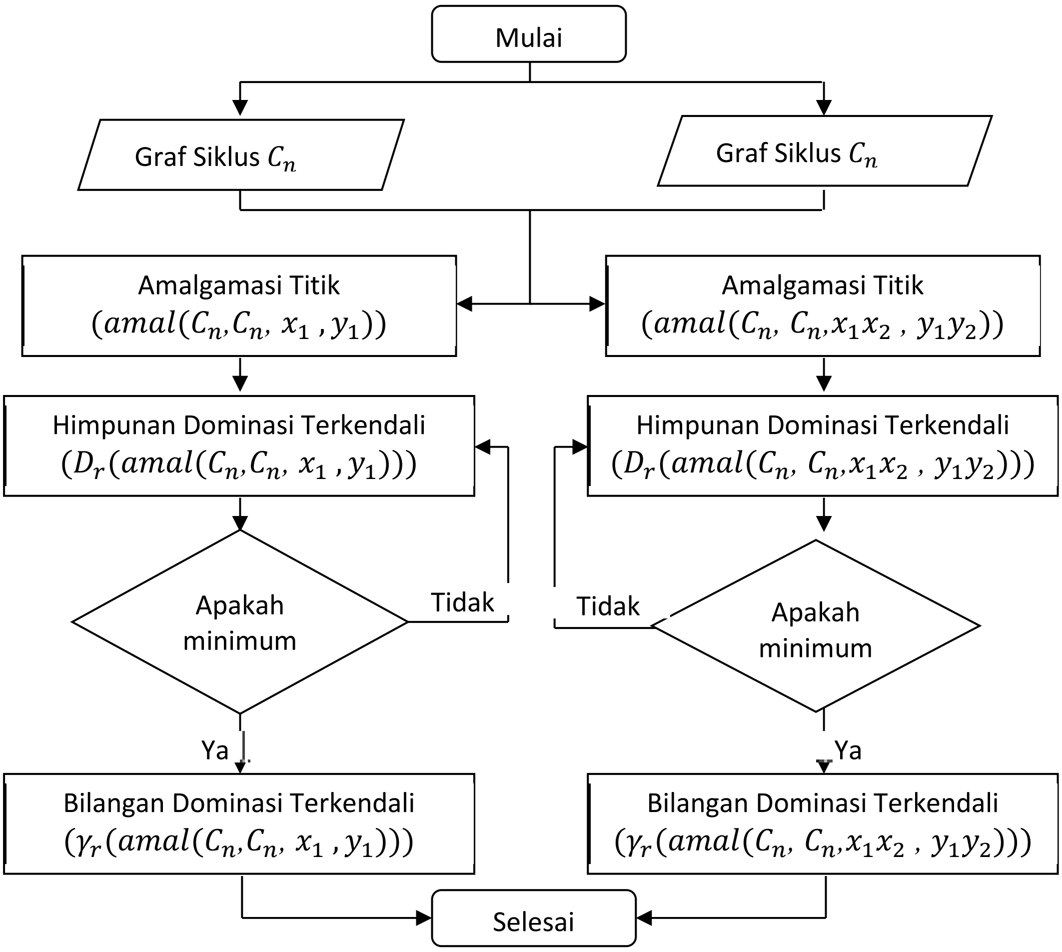
Kendati telah banyak penelitian yang dilakukan terkait himpunan dominasi terkendali terhadap graf hasil operasi pada beberapa graf khusus, namun tidak sedikit pula yang belum pernah dikaji, salah satunya adalah operasi amalgamasi titik dan sisi pada graf siklus (C_n), dimana operasi amalgamasi graf merupakan penggabungan dua atau lebih graf dengan menyatukan masing – masing satu titik atau sisi dari setiap graf yang diamalgamasikan. Selain itu, sulitnya menentukan bilangan dominasi terkendali pada graf hasil operasi amalgamasi titik dan sisi graf siklus jika berorder banyak atau mendekati takterhingga, memicu perlu adanya penelitian yang bertujuan untuk menentukan bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dan sisi pada graf siklus berorde sama, dimana graf siklus berorde sama adalah dua buah graf siklus yang masing – masing memiliki jumlah titik yang sama.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan prinsip – prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan teorema yang telah ada untuk menghasilkan teorema baru yang akan dibuktikan kebenarannya secara deduktif. Adapun teorema yang akan digunakan untuk pembuktian hasil penelitian ini adalah: $\gamma_r(C_n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$, untuk $n \geq 3$ [5] dan pembuktian batas

atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dengan masing – masing menggunakan teorema $\gamma_r(G) \leq n - \Delta$, dengan $\delta \geq 2$ [6] dan $\gamma_r(G) \geq n - \frac{2m}{3}$, untuk order n dan size m (7).

Adapun langkah – langkah dalam penelitian ini dapat dilihat pada *flowchart* berikut:



Berdasarkan flowchart di atas, dapat diuraikan langkah – langkah peneltian ini sebagai berikut : 1) Menerapkan graf siklus berorder sama ke dalam operasi amalgamasi titik dan sisi dengan titik terminal masing – masing x_1 dan y_1 $(amal(C_n, C_n, x_1, y_1))$ dan sisi terminal masing – masing x_1x_2 dan y_1y_2 $(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2))$, 2) Menentukan himpunan dominasi terkendali $D_r(amal(C_n, C_n, x_1, y_1))$ dan $D_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2))$, kemudian memeriksa apakah himpunan dominasi terkendali tersebut adalah minimum, 3) Secara deduktif, diperoleh teorema baru terkait $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1, y_1))$ dan $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2))$ yang selanjutnya dibuktikan dengan menggunakan teorema lama $\gamma_r(C_n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, untuk $n \geq 3$ dan pengujian batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dari suatu graf.

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Hasil

1. Himpunan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik graf siklus berorder sama.

Defenisi 1

($amal(C_n,C_n,\ x_1\ ,y_1)$) atau graf hasil Amalgamasi titik graf siklus berorde sama dengan masing – masing memiliki titik terminal x_1 dan y_1 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)) = \{x_i|1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j|2 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = \{x_i x_{i+1}|1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \cup \{y_j y_{j+1}|2 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1 y_n, x_1 y_2\}$, dimana C_n adalah graf siklus berorde n.

Berdasarkan definisi 1, diperoleh observasi sebagai berikut:

Observasi 1.

$|V(amal(C_n, C_n, x_1, y_1))| = 2n - 1\ , untuk\ n \geq 3$

$\big|E\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big)\big| = 2n\ \ , untuk\ n \geq 3$

$\Delta\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = 4$

$\delta\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = 2$

Hasil observasi ini diperlukan untuk pembuktian teorema baru terkait bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik graf siklus beorder sama.

Teorema 1.

Untuk $n \geq 3$ bilangan dominasi terkendali dari $\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$

Bukti:

Graf hasil operasi amalgamasi titik graf siklus berorde sama merupakan gabungan dari dua buah graf siklus berorde sama dengan masing – masing graf siklus tersebut menggunakan satu titik secara bersama atau disebut titik terminal yang dalam hal ini adalah titik x_1 untuk graf siklus pertama, dan titik y_1 untuk graf siklus kedua. Penentuan titik dominasi terkendali dimulai pada titik dengan derajat terbesar, sehingga titik terminal selalu menjadi titik dominasi terkendali karena titik terminal merupakan satu – satunya titik dengan derajat terbesar. Selanjutnya, penentuan titik dominasi terkendali untuk titik yang lain (selain titik terminal) dilakukan sama seperti penentuan titik dominasi terkendali untuk masing –masing graf siklus. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa bilangan dominasi terkendali untuk amalgamasi graf siklus berorde sama merupakan penjumlahan bilangan dominasi terkendali dari kedua graf siklus tersebut $(2\big(\gamma_r\,(C_n)\big)$. Namun karena salah satu titik dominasi selalu merupakan titik terminal yang digunakan secara bersama (2 titik dijadikan 1), maka jumlah titik bilangan dominasi terkendali untuk amalgamasi graf siklus berorde sama mengalami pengurangan satu titik dominasi terkendali, yaitu; $(2\big(\gamma_r\,(C_n)\big) - 1$. Maka berdasarkan Teorema $\gamma_r(C_n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, diperoleh :

$$\begin{aligned}\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) &= 2\big(\gamma_r\,(C_n)\big) - 1 \\ &= 2n - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - 1 \\ &= (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dari suatu graf.

Berdasarkan Teorema batas atas dan batas bawah, yaitu $n - \Delta \geq \gamma_r(G) \geq n - \frac{2m}{3}$ dengan m adalah jumlah sisi dan n adalah jumlah titik, dan observasi 1, diperoleh :

- Batas Atas
  $(2n-1)-4 \geq \gamma_r\left(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\right)$
  $(2n-1)-4 \geq (2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$
  Karena $n \geq 3$, maka 4 akan selalu lebih kecil atau sama dengan $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. Hal ini mengakibatkan $(2n-1)-4$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, sehingga terbukti bahwa $(2n-1)-4 \geq (2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$.
- Batas Bawah
  $\gamma_r\left(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\right) \geq (2n-1)-\frac{2(2n)}{3}$
  $(2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-1)-4(\frac{n}{3})$
  Karena $n \geq 3$, maka $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ akan selalu lebih kecil atau sama dengan $4(\frac{n}{3})$. Hal ini mengakibatkan $(2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-1)-4(\frac{n}{3})$, sehigga terbukti bahwa $(2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-1)-4(\frac{n}{3})$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\gamma_r\left(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\right) = (2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali. ■

2. Himpunan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi sisi graf siklus berorder sama.

Defenisi 2
$\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right)$ atau graf hasil amalgamasi sisi graf siklus berorder sama dengan masing – masing memiliki sisi terminal x_1x_2 dan y_1y_2 adalah graf yang memiliki himpunan titik $V\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_j | 3 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = \{x_ix_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_1x_n\} \cup \{y_jy_{j+1} | 3 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1y_n, x_2y_3\}$, dimana C_n adalah graf siklus berorder *n*.

Berdasarkan definisi 2, diperoleh observasi sebagai berikut:
Observasi 2.
$\left|V\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right)\right| = 2n-2$, $untuk\ n \geq 3$
$\left|E\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right)\right| = 2n-1$, $untuk\ n \geq 3$
$\Delta\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = 3$
$\delta\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = 2$
Hasil observasi ini diperlukan untuk pembuktian teorema baru terkait bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi sisi graf siklus beorder sama.

Teorema 2.
Untuk $n \geq 3$ bilangan dominasi terkendali dari amalgamasi sisi graf siklus berorde sama adalah:
1. $\gamma_r\left(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\right) = (2n-1)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n = 3k$, dimana $k \geq 1$

2. $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)) = (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$

Bukti:

- $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n = 3k$, dimana $k \geq 1$

Graf hasil operasi amalgamasi sisi graf siklus berorde sama merupakan gabungan dari dua buah graf siklus berorde sama dengan masing – masing graf siklus tersebut menggunakan satu sisi secara bersama (sisi terminal) yang mengakibatkan dua titik bersisian dengan sisi terminal tersebut juga digunakan secara bersama oleh kedua graf siklus tersebut. Penentuan titik dominasi terkendali dimulai pada titik dengan derajat terbesar, sehingga terdapat kemungkinan kedua atau salah satu titik tersebut dijadikan sebagai titik dominasi terkendali. Selanjutnya, penentuan titik dominasi terkendali untuk titik yang lain (selain kedua titik tersebut) dilakukan sama seperti penentuan titik dominasi terkendali untuk masing – masing graf siklus. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa bilangan dominasi terkendali untuk amalgamasi sisi graf siklus berorde sama merupakan penjumlahan bilangan dominasi terkendali dari kedua graf siklus tersebut $(2(\gamma_r\ (C_n))$. Namun karena dalam penentuan titik dominasi terkendali graf hasil amalgamasi sisi graf siklus berorder sama dan kelipatan 3 hanya pada salah satu titik dari dua titik dengan derajat terbesar, maka jumlah titik bilangan dominasi terkendali untuk graf hasil amalgamasi sisi graf siklus berorde sama dan kelipatan 3 mengalami pengurangan satu titik dominasi terkendali, yaitu; $(2(\gamma_r\ (C_n)) - 1$.

Maka berdasarkan Teorema $\gamma_r(C_n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, diperoleh :

$$\begin{aligned}\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)) &= 2(\gamma_r\ (C_n)) - 1\\ &= 2n - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - 1\\ &= (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dari suatu graf.

Berdasarkan teorema batas atas dan batas bawah, yaitu $n - \Delta \geq \gamma_r(G) \geq n - \frac{2m}{3}$ dan observasi 2, diperoleh :

- Batas Atas

  $(2n-2) - 3 \geq \gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2))$

  $(2n-1) - 4 \geq (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$

  Karena $n \geq 3$ dan $n = 3k$, dimana $k \geq 1$, maka 4 akan selalu lebih kecil atau sama dengan $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. Hal ini mengakibatkan $(2n-1) - 4$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, sehingga terbukti bahwa $(2n-1) - 4 \geq (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$.

- Batas Bawah

  $\gamma_r(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)) \geq (2n-2) - \frac{2(2n-1)}{3}$

  $(2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-1) - (1 + \left(\frac{4n-2}{3}\right))$

Karena $n \geq 3$ dan $n = 3k$, dimana $k \geq 1$, maka $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ akan selalu lebih kecil atau sama dengan $(1 + \left(\frac{4n-2}{3}\right))$. Hal ini mengakibatkan $(2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-1) - (1 + \left(\frac{4n-2}{3}\right))$, sehigga terbukti bahwa

$(2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-1) - (1 + \left(\frac{4n-2}{3}\right))$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n-1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ untuk $n \geq 3$ dan $n = 3k$, dimana $k \geq 1$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali. ■

➢ $\gamma_{\mathrm{r}}\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$

Graf hasil operasi amalgamasi sisi graf siklus berorde sama merupakan gabungan dari dua buah graf siklus berorde sama dengan masing – masing graf siklus tersebut menggunakan satu sisi secara bersama (sisi terminal) yang mengakibatkan dua titik bersisian dengan sisi terminal tersebut juga digunakan secara bersama oleh kedua graf siklus tersebut. Penentuan titik dominasi terkendali dimulai pada titik dengan derajat terbesar, sehingga terdapat kemungkinan kedua atau salah satu titik tersebut dijadikan sebagai titik dominasi terkendali. Selanjutnya, penentuan titik dominasi terkendali untuk titik yang lain (selain kedua titik tersebut) dilakukan sama seperti penentuan titik dominasi terkendali untuk masing – masing graf siklus. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa bilangan dominasi terkendali untuk amalgamasi sisi graf siklus berorde sama merupakan penjumlahan bilangan dominasi terkendali dari kedua graf siklus tersebut $(2\big(\gamma_r\ (C_n)\big)$. Namun karena dalam penentuan titik dominasi terkendali graf hasil amalgamasi sisi graf siklus berorder sama dan bukan kelipatan 3 harus pada kedua titik dengan derajat terbesar, maka jumlah titik bilangan dominasi terkendali untuk graf hasil amalgamasi sisi graf siklus berorde sama dan bukan kelipatan 3 mengalami pengurangan dua titik dominasi terkendali, yaitu; $(2\big(\gamma_r\ (C_n)\big) - 2$.

Maka berdasarkan Teorema $\gamma_r(C_n) = n - 2\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, diperoleh :

$$\begin{aligned}\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) &= 2\big(\gamma_r\ (C_n)\big) - 2\\ &= 2n - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor - 2\\ &= (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali dari suatu graf.

Berdasarkan teorema batas atas dan batas bawah, yaitu $n - \Delta \geq \gamma_r(G) \geq n - \frac{2m}{3}$ dan observasi 2, diperoleh:

- Batas Atas

  $(2n-2) - 3 \geq \gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big)$

  $(2n-2) - 3 \geq (2n-2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$

  Karena $n \geq 3$ dan $n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$, maka 3 akan selalu lebih kecil atau sama dengan $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$. Hal ini mengakibatkan $(2n-2) - 3$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$, sehingga terbukti bahwa $(2n-2)-3 \geq (2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$.

- Batas Bawah

  $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) \geq (2n-2) - \frac{2(2n-1)}{3}$

  $(2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-2)-4\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{3}\right)$

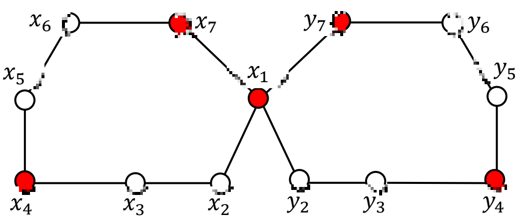
  Karena $n \geq 3$ dan $n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$, maka $4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ akan selalu lebih kecil atau sama dengan $4\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{3}\right)$. Hal ini mengakibatkan $(2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ pasti akan selalu lebih besar atau sama dengan $(2n-2)-4\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{3}\right)$, sehigga terbukti bahwa $(2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor \geq (2n-2)-4\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{3}\right)$.

Dengan demikian terbukti bahwa $\gamma_r\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n-2)-4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ untuk $n \geq 3$ dan $n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$ berada pada selang batas atas dan batas bawah bilangan dominasi terkendali. ■

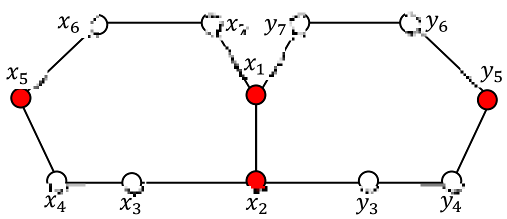
B. Pembahasan

Implementasi himpunan dominasi terkendali dari hasil penelitian ini adalah mempermudah dalam menentukan kardinalitas minimum dari himpunan dominasi terkendali pada suatu graf yang biasa disebut sebagai bilangan dominasi terkendali (γ_r). Hasil penelitian yang diperoleh berupa teorema baru terkait bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dan sisi dari dua buah graf siklus berorder sama.

Agar lebih mudah memahami penerapan teorema yang telah diperoleh, perhatikan gambar 1a dan 1b berikut dimana masing – masing merupakan hasil penentuan bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dan amalgamasi sisi dari graf siklus dengan graf siklus berorder 7, dengan titik berwarna merah merupakan titik dominasi terkendali sedemikian sehingga jumlah titik tersebut minimum.



Gambar 1a. $D_r\big(amal(C_7, C_7, x_1, y_1)\big)$



Gambar 1b. $D_r\big(amal(C_7, C_7, x_1x_2, y_1y_2)\big)$

Berdasarkan gambar 1a dan 1b di atas, dapat dengan mudah mengetahui bilangan dominasi terkendali (γ_r), yaitu masing – masing 5 dan 4. Kendati demikian, hal tersebut akan menjadi sulit jika nilai n semakin banyak bahkan mendekati tak hingga. Hal ini mendorong pentingnya penggunaan teorema yang dihasilkan dalam penelitian ini, sehingga akan diperiksa kebenaran teorema tersebut dengan menggunakan graf yang sama pada gambar 1a dan 1b.

1. Bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dari graf siklus dengan graf siklus berorder 7.

Berdasarkan teorema 1 dengan $n = 7$, maka diperoleh $\gamma_r\big(amal(C_7, C_7, x_1, y_1)\big) = (2(7) - 1) - 4\left\lfloor\frac{7}{3}\right\rfloor = 13 - 4(2) = 5$.

2. Bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi sisi dari graf siklus dengan graf siklus berorder 7.
   Berdasarkan teorema 2 dengan $n = 7$, maka diperoleh $\gamma_{\mathrm{r}}\big(amal(C_7, C_7, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2(7) - 2) - 4\left\lfloor\frac{7}{3}\right\rfloor = 12 - 4(2) = 4$.

Dengan demikian teorema tersebut dapat digunakan untuk menentukan bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dan amalgamasi sisi dari graf siklus dengan graf siklus berorder sama.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh dari penelitian ini, maka dapat disimpulkan bahwa teorema 1 dan 2 dapat digunakan untuk menentukan bilangan dominasi terkendali graf hasil operasi amalgamasi titik dan amalgamasi sisi dari graf siklus dengan graf siklus berorder sama. Adapun teorema yang diperoleh yaitu sebagai berikut :

1. **Teorema 1.** Untuk $n \geq 3$ bilangan dominasi terkendali dari $\big(amal(C_n, C_n, x_1, y_1)\big) = (2n - 1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$.
2. **Teorema 2.** Untuk $n \geq 3$ bilangan dominasi terkendali dari amalgamasi sisi graf siklus berorde sama adalah:
   a. $\gamma_{\mathrm{r}}\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n - 1) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n = 3k$, dimana $k \geq 1$
   b. $\gamma_{\mathrm{r}}\big(amal(C_n, C_n, x_1x_2, y_1y_2)\big) = (2n - 2) - 4\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor, n \geq 3,\ n \neq 3k$, dimana $k \geq 1$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir R. (2012). *Matematika Diskrit,* edisi kelima. Bandung: Informatika Bandung.
[2] Daniel, F. & Taneo P. N. L. (2019). *Teori Graf.* Yogyakarta: Deepublish.
[3] Maro L. (2017). *Himpunan Dominasi Terkendali pada Korona Graf Lintasan dengan Lintasan, Graf Siklus dengan Graf Siklus, dan Graf Lengkap dengan Graf Lengkap*. Universitas Hasanuddin.
[4] Dafik, Roifah M. (2014). *Kajian Himpunan Dominasi pada Graf Khusus dan Operasinya*. In: Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Jember. Hal. 191 – 196.
[5] Domke, G. S., Hattingh, J. H., Hedetniemi, S. T., Laskar, R. C., Markus L. R. (1999). Restrained domination in graphs. *Discrete Mathematics*, *203*, 61 – 69.
[6] Dankelmann, P., Day, D., Hattingh, J. H., Henning, M. A., Markus, L. R., Swart, H. C. (2007). On equality in an upper bound for the restrained and total domination numbers of a graph. *Discrete Mathematics*, *307*(22), 2845 – 2852.
[7] Hattingh, J. H., Joubert, E. J., Loizeaux, M., Plummer, A. R., Hattingh, J. H., Joubert, E. J. (2009). Restrained Domination in Unicyclic Graphs. In: *Discussiones Mathematicae Graph Theory,* 29.
[8] Canoy, S. R. (2014). Restrained domination in graphs under some binary operations. *Applied Mathematical Sciences*, *8*(121–124), 6025 – 6031.

[9] Hattingh, J. H., Joubert, E. J. (2014). The product of the restrained domination numbers of a graph and its complement. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *30*(3), 445 – 452.

[10] Enriquez, E. L. (2016). Secure Restrained Domination in the Join and Corona of Graphs. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics,12*(1).

[11] Maro, L., Hasmawati, Nurdin. (2017). *Penentuan Bilangan Dominasi Terkendali Pada* $P_n \odot P_n$ *dan* $K_n \odot K_n$. Universitas Hasanuddin Makassar. 2017.

[12] Maro, L., Sanga, A., Tuaty, M. E. (2022). Determination of the Restrained Domination Number on Vertex Amalgamation and Edge Amalgamation of the Path Graph With the Same Order. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *16*(2), 421 – 426.