Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux

anciennement Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux

Gérald TENENBAUM

Sur le biais d'une loi de probabilité relative aux entiers friables

Tome 35, nº 2 (2023), p. 481-493.

https://doi.org/10.5802/jtnb.1253

Le Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux *est membre du Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte*
http://www.centre-mersenne.org/
e-ISSN : 2118-8572

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **35** (2023), 481–493

Sur le biais d'une loi de probabilité relative aux entiers friables

par Gérald TENENBAUM

Résumé. La loi de probabilité standard sur l'ensemble $S(x,y)$ des entiers y-friables n'excédant pas x assigne à chaque entier friable n un poids proportionnel à $1/n^\alpha$, où $\alpha = \alpha(x,y)$ est le point-selle de l'intégrale de Laplace inverse pour $\Psi(x,y) := |S(x,y)|$. Cette loi présente un biais structurel dans la mesure où elle charge des entiers $> x$. Nous proposons une mesure quantitative de ce biais et mettons en évidence une répartition gaussienne associée.

Abstract. The standard probability law on the set $S(x,y)$ of y-friable integers not exceeding x assigns to each friable integer n a weight proportional to $1/n^\alpha$, where $\alpha = \alpha(x,y)$ is the saddle-point of the inverse Laplace integral for $\Psi(x,y) := |S(x,y)|$. This law presents a structural bias inasmuch it weights integers $> x$. We propose a quantitative measure of this bias and exhibit a related Gaussian distribution.

1. Introduction

On dit qu'un entier naturel n est y-friable si son plus grand facteur premier $P^+(n)$, avec la convention $P^+(1) = 1$, n'excède pas y. Désignons par $S(x,y)$ l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x et par $\Psi(x,y)$ son cardinal. Posons

$$\left.\begin{aligned} \zeta(s,y) &:= \prod_{p\le y}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}, \\ \varphi_y(s) &:= -\frac{\zeta'(s,y)}{\zeta(s,y)} = \sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^s-1} \end{aligned}\right.\qquad \big(y\geqslant 2,\ \Re\mathrm{e}\, s>0\big),$$

où, ici et dans la suite, la lettre p désigne un nombre premier. Le point-selle $\alpha = \alpha(x,y)$ apparaissant dans la formule asymptotique de Hildebrand–Tenenbaum [10]

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi|\varphi_y'(\alpha)|}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\log y}{y}\Big)\Big\}\qquad (x=y^u\geqslant y\geqslant 2) \tag{1.1}$$

Manuscrit reçu le 11 février 2022, révisé le 4 mai 2022, accepté le 21 mai 2022.

Classification Mathématique (2020). 11N25, 11N37.

Mots-clefs. Entiers friables, entiers sans grand facteur premier, méthode du col, équations différentielles aux différences, modèles probabilistes; friable integers, integers without small prime factors, smooth numbers, saddle-point method, delay-differential equations, probabilistic models.

est l'unique solution réelle positive de l'équation $\varphi_y(\alpha) = \log x$. Nous avons [10, (2.4)]

$$\alpha \log y = \Big\{1 + O\Big(\frac{\log_2 2y}{\log y}\Big)\Big\} \log\Big(1 + \frac{y}{\log x}\Big) \quad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{1.2}$$

Ici et dans la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.

La loi de probabilité définie par

$$\mathbb{P}_{x,y}(\{n\}) := 1/\{n^\alpha \zeta(\alpha, y)\} \qquad (P^+(n) \leqslant y) \tag{1.3}$$

apparaît naturellement dans la théorie des entiers friables, notamment dans la modélisation des fonctions additives sur $S(x, y)$: voir [2, 3, 4, 12]. La nature multiplicative de la dépendance en n de (1.3) est particulièrement utile en pratique, mais implique que la probabilité $\mathbb{P}_{x,y}$ charge des entiers y-friables excédant x (un biais génériquement compensé par la décroissance rapide de $\mathbb{P}_{x,y}(\{n > t\})$ lorsque $t/x \to \infty$). Une description de certaines conséquences de ce biais et une proposition de redressement partiel apparaissent dans [5]. Posant

$$D(x, y, z) := \sum_{n \in S(z,y)} \frac{1}{n^{\alpha(x,y)}} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2,\ z \geqslant 2),$$

nous avons ainsi

$$P(x, y, z) := \mathbb{P}_{x,y}(\{n \leqslant z\}) = D(x, y, z)/\zeta(\alpha, y) < 1,$$

de sorte que le comportement asymptotique de cette quantité, notamment lorsque z est, en un sens à préciser, voisin de x, fournit une mesure quantitative du biais.

Notre premier résultat consiste en une évaluation de $P(x, y, z)$ qui fournit une formule asymptotique lorsque $\log(z/x)$ est convenablement dominé. L'énoncé nécessite quelques notations supplémentaires. Désignons par

$$\Phi(h) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{h} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t$$

la fonction de répartition de la loi normale, notons traditionnellement

$$u := (\log x)/\log y, \quad \bar{u} := \min(y, \log x)/\log y,$$

et posons, pour $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \Theta^2 = \Theta(x, y)^2 &:= \frac{|\varphi_y'(\alpha)|}{(\log y)^2} \\ &= u\Big(1 + \frac{\log x}{y}\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log(u + 1)} + \frac{1}{\log y}\Big)\Big\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

où l'estimation provient de [10, (2.5)]. Désignons ensuite par $\xi(t)$ la solution réelle positive de l'équation $\mathrm{e}^{\xi} = 1 + t\xi$ lorsque $t > 1$ et convenons que $\xi(1) := 0$. La fonction ξ vérifie classiquement, lorsque $t \to \infty$,[1]

$$\xi(t) = \log t + \log_2 t + O\Big(\frac{\log_2 t}{\log t}\Big), \quad \xi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t\log t} + O\Big(\frac{1}{t(\log t)^2}\Big).$$

Notons que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, nous avons d'après (1.4) et [10, (7.19)]

$$\begin{aligned} &\Theta \asymp \frac{u}{\sqrt{\bar{u}}} \quad (x \geqslant y \geqslant 2), \\ &\Theta = \frac{1 + O(1/\log y)}{\sqrt{\xi'(u)}} \quad ((\log x)^{1+\varepsilon} < y \leqslant x). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Théorème 1.1. *Pour $x \geqslant y \geqslant 2$, nous avons*

$$P(x,y,z) \asymp 1 - P(x,y,z) \asymp 1 \quad \big(\log z \gg \log x,\ \log(z/x) \ll \sqrt{\bar{u}}\log y\big), \tag{1.6}$$

$$P(x,y,z) = \Phi(h) + O\big(1/\bar{u}^{1/3}\big) \quad (z = xy^{\Theta h}), \tag{1.7}$$

En particulier, $P(x,y,x) = \frac{1}{2} + O\big(1/\bar{u}^{1/3}\big) \quad (x \geqslant y \geqslant 2)$.

Nous verrons que ces résultats découlent assez facilement des renseignements spécifiques issus de la méthode du col pour le comportement local de $\Psi(x,y)$. Nous n'avons pas cherché à affiner le terme d'erreur de (1.7).[2] Cependant, la relation $\lim P(x,y,x) = \frac{1}{2}$ nécessite bien $\bar{u} \to \infty$. En effet, les estimations

$$\begin{aligned} \alpha(x,x) &= 1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^2}\Big), & \alpha(x,2) &= \frac{1}{\log x} + O\Big(\frac{1}{(\log x)^2}\Big), \\ \zeta(\alpha,x) &= \mathrm{e}^{\gamma}\log x + O(1), & \zeta(\alpha,2) &= \frac{\log x}{\log 2} + O(1), \\ D(x,x,x) &= \log x + O(1), & D(x,2,x) &= \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\Big)\frac{\log x}{\log 2} + O(1), \end{aligned}$$

où γ désigne la constante d'Euler, impliquent, lorsque $x \to \infty$,

$$P(x,x,x) = \mathrm{e}^{-\gamma} + o(1), \quad P(x,2,x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}} + o(1).$$

Les évaluations du Théorème 1.1 permettent une mesure en moyenne de la pertinence de l'approximation

$$\frac{\Psi(x/d,y)}{\Psi(x,y)} \approx \frac{1}{d^{\alpha}} = \mathbb{P}_{x,y}(\{n \equiv 0 \bmod d\}) \qquad (P^+(d) \leqslant y),$$

qui s'est révélée cruciale dans nombre de problèmes, comme l'estimation de la constante de Turán–Kubilius friable (voir notamment [2, 4, 8, 12]) ou

[1] Voir par exemple [14, lem. III.5.11] et la remarque qui suit l'énoncé de [14, th. III.5.13].

[2] La démonstration fournit d'ailleurs une estimation légèrement plus précise et l'on pourrait, au prix de quelques complications techniques, obtenir une décroissance en e^{-ch^2} du terme d'erreur.

encore l'évaluation asymptotique des valeurs moyennes friables de certaines fonctions arithmétiques (cf., entre autres, [9, 15, 16, 17]).

Posons

$$R_d(x,y) := \frac{\Psi(x,y)}{d^\alpha} - \Psi\Big(\frac{x}{d},y\Big),$$

$$\sum_{d\in S(x,y)} R_d(x,y) =: \Psi(x,y)D(x,y,x)\Big\{1-\Delta(x,y)\Big\}.$$

Notant $\tau(n)$ le nombre total des diviseurs d'un entier n, nous avons alors

$$\Psi_\tau(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} \tau(n) = \sum_{d\in S(x,y)} \Psi\Big(\frac{x}{d},y\Big), \quad \Delta(x,y) = \frac{\Psi_\tau(x,y)}{\Psi(x,y)D(x,y,x)}.$$

Les estimations de Drappeau [6] pour $\Psi_\tau(x,y)$, elles-mêmes obtenues par la méthode du col, permettent une estimation de $\Delta(x,y)$ valable uniformément pour $x \geqslant y \geqslant 2$.

Nous considérons le domaine

$$(H_\varepsilon) \qquad x \geqslant 3, \quad \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x,$$

notons ϱ la fonction de Dickman (cf. [14, ch. III.5]) et ϱ_2 son carré de convolution.

Le comportement asymptotique de $\varrho(t)$ est intimement lié à celui de la fonction $\xi(t)$ définie précédemment. Notant $I(s) := \int_0^s (\mathrm{e}^v - 1)\,\mathrm{d}v/v$, de sorte que (cf. [14, th. III.5.10])

$$\widehat{\varrho}(-s) := \int_0^\infty \varrho(v)\mathrm{e}^{vs}\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{\gamma+I(s)},$$

nous avons (cf. [14, th. III.5.13])

$$(1.8) \qquad \begin{aligned} \varrho(t) &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\sqrt{\frac{\xi'(t)}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t\xi(t)}\widehat{\varrho}(-\xi(t)) \\ &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\sqrt{\frac{\xi'(t)}{2\pi}}\exp\Big\{\gamma - \int_1^t \xi(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \end{aligned} \qquad (t\to\infty),$$

une formule due à Alladi [1], et, d'après [13, th.1 & (3.10)] ou [11, th. 2][3],

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} \varrho_2(t) &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\sqrt{\frac{\xi'(t/2)}{4\pi}}\exp\Big\{2\gamma - 2\int_1^{t/2} \xi(s)\,\mathrm{d}s\Big\} \\ &= \varrho(t)2^{t+O(t/\log t)} \quad (t\to\infty). \end{aligned}$$

[3]En observant que ϱ_2 est solution de l'équation différentielle aux différences

$$t\varrho_2'(t) - \varrho_2(t) + 2\varrho_2(t-1) = 0 \quad (t>1)$$

avec la condition initiale $\varrho_2(t) = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Définissons

$$\lambda(s,t) := \int_0^s \varrho(v)e^{v\xi(t)}\,\mathrm{d}v \qquad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 1).$$

Nous verrons au paragraphe 3 que

$$\lambda(s,t) = \Big\{\Phi\Big(\sqrt{\xi'(t)}(s-t)\Big) + O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\widehat{\varrho}(-\xi(t)) \quad (s \geqslant 0,\ t \to \infty). \tag{1.10}$$

Posons encore

$$g(v) := v\log 4 - (1+2v)\log\Big(\frac{1+2v}{1+v}\Big) \qquad (v \geqslant 0),$$

$$\vartheta(x,y) := \begin{cases} 2\displaystyle\int_{u/2}^{u}\{\xi(u)-\xi(t)\}\,\mathrm{d}t & \text{si } (x,y)\in(H_\varepsilon),\\ ug\Big(\dfrac{y}{\log x}\Big) & \text{dans le cas contraire,}\end{cases}$$

et notons que

$$\begin{aligned} &\vartheta(x,y) \asymp \overline{u} && (x \geqslant y \geqslant 2),\\ &\vartheta(x,y) = (1-\log 2)u + O(u/\log u) && (u\to\infty,\ y/\log x \to \infty),\\ &\vartheta(x,y) \sim (\log 4 - 1)\overline{u} + O(\overline{u}^2/u) && (y/\log x \to 0).\end{aligned}$$

Enfin, définissons

$$\nu(t) := \frac{\varrho_2(t)}{\varrho(t)\lambda(t,t)} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big\}\sqrt{\frac{2\xi'(t/2)}{\xi'(t)}}\,\mathrm{e}^{-\int_{t/2}^{t}\xi'(s)(2s-t)\,\mathrm{d}s} \qquad (t \geqslant 1),$$

où la formule asymptotique résulte de (1.8), (1.9) et (1.10).

Théorème 1.2. *Posons $\varepsilon_y := 1/\sqrt{\log y}$. Nous avons uniformément*

$$\Delta(x,y) \asymp \mathrm{e}^{-\vartheta(x,y)+O(\varepsilon_y\overline{u})} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{1.11}$$

De plus, dans le domaine (H_ε)*, le terme* $O(\varepsilon_y\overline{u})$ *dans* (1.11) *peut être omis et nous avons*

$$\Delta(x,y) = \nu(u)\Big\{1+O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{1.12}$$

La technique du présent travail pourrait être adaptée à l'étude de moyennes pondérées des restes $R_d(x,y)$.

2. Preuve du Théorème 1.1

Lorsque $\bar{u}$ est borné, la relation (1.7) est triviale. Lorsque u est borné, (1.6) découle de l'estimation[4] $\alpha(x,y) = 1 + O(1/\log x)$ et du fait que $\Psi(x,y) \asymp x$, qui découle par exemple de (3.2) *infra.* Lorsque y est borné, nous avons $\alpha \sim \pi(y)/\log x$ et, posant

$$\nu_p := 1 + \lfloor (\log z)/\log p \rfloor, \quad \mu_p := 1 + \lfloor (\log z)/(\pi(y)\log p) \rfloor,$$

nous avons l'encadrement

$$\prod_{p\leqslant y} \frac{1-p^{-\mu_p\alpha}}{1-p^{-\alpha}} \leqslant D(x,y,z) \leqslant \prod_{p\leqslant y} \frac{1-p^{-\nu_p\alpha}}{1-p^{-\alpha}} \qquad (\log(z/x) \ll 1),$$

ce qui implique bien (1.6).

Nous pouvons donc nous placer dans la circonstance où la quantité $\bar{u}$ est arbitrairement grande.

Notant $(\log z)/\log y = u + \Theta h$, l'hypothèse relative à (1.6) est $\Theta h \ll \sqrt{\bar{u}}$. Puisque $\Theta \asymp u/\sqrt{\bar{u}}$ par (1.4), on voit que (1.6) est une conséquence de (1.7).

Prouvons à présent (1.7).

Posons $f(\sigma) := \sigma \log x + \log \zeta(\sigma, y)$, $\sigma_j := (-1)^j f^{(j)}(\alpha)$. Nous avons alors $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = (\Theta \log y)^2$, et (voir [10]), pour chaque $j \geqslant 2$ fixé,

$$\sigma_j \asymp \bar{u}^{1-j}(\log x)^j. \tag{2.1}$$

Notons $\alpha_v := \alpha(y^v, y)$ et $\sigma_{j,v} = (-1)^j f^{(j)}(\alpha_v)$. La dérivée de α_v en fonction de v vérifie (voir par exemple [10, (6.6)])

$$-\alpha'_v = \frac{\log y}{\sigma_{2,v}} \asymp \frac{\bar{v}}{v^2 \log y}. \tag{2.2}$$

Compte tenu de cette estimation, nous déduisons de [14, cor. III.5.23] et [4, th. 2.4] que

$$\Psi(t,y)/t^\alpha \ll \Psi(x,y)/x^\alpha \qquad (t \geqslant x), \tag{2.3}$$

$$\Psi(t,y)/t^\alpha \asymp \Psi(x,y)/x^\alpha \qquad \big(x^{1-1/\sqrt{\bar{u}}} \leqslant t \leqslant x^{1+1/\sqrt{\bar{u}}}\big), \tag{2.4}$$

$$\frac{\Psi(t,y)}{t^\alpha} \ll \frac{\Psi(x,y)}{x^\alpha} \mathrm{e}^{-b(1-v)^2\bar{u}} \qquad \big(1 \leqslant t = x^v \leqslant x^{1-1/\sqrt{\bar{u}}}\big), \tag{2.5}$$

où b est une constante absolue positive.

Nous pouvons clairement supposer $|h|\Theta \leqslant u/\bar{u}^{1/3}$. Il découle de (2.3), (2.4), (2.5) et (1.1) que

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= \int_{1-}^{z} \frac{\mathrm{d}\Psi(t,y)}{t^\alpha} = \frac{\Psi(z,y)}{z^\alpha} + \alpha \int_1^z \frac{\Psi(t,y)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_{x^{1-1/\bar{u}^{1/3}}}^{z} \frac{\Psi(t,y)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t + R, \end{aligned}$$

[4]Voir (3.1) *infra.*

avec

$$R \ll \frac{\Psi(x,y)}{x^\alpha} + \frac{\alpha\Psi(x,y)\log x}{x^\alpha}\int_0^{1-1/\bar{u}^{1/3}} \mathrm{e}^{-b(1-v)^2\bar{u}}\,\mathrm{d}v \ll \frac{\zeta(\alpha,y)}{\sqrt{\bar{u}}},$$

où nous avons fait usage de l'estimation $\alpha \gg \bar{u}/(u\log y)$, qui équivaut à $\alpha\sqrt{\sigma_2} \gg \sqrt{\bar{u}}$.

Par (1.1), il suit

$$D(x,y,z) = \frac{\zeta(\alpha_u,y)\log y}{\sqrt{2\pi\sigma_{2,u}}}\int_{u-u/\bar{u}^{1/3}}^{u+\Theta h} \mathrm{e}^{r(u,v)}\,\mathrm{d}v + O\Big(\frac{\zeta(\alpha,y)}{\sqrt{\bar{u}}}\Big), \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{aligned} r(u,v) &:= \log\Big(\frac{\zeta(\alpha_v,y)}{\zeta(\alpha_u,y)}\Big) + v(\alpha_v-\alpha_u)\log y - \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\Big) + \log\Big(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha_u-\alpha_v)^2\sigma_{2,t} + (v-u)(\alpha_v-\alpha_u)\log y + \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\Big) + \log\Big(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha_u-\alpha_v)^2\sigma_{2,t} - (\alpha_u-\alpha_v)^2\sigma_{2,\tau} + \tfrac{1}{2}\log\Big(\frac{\sigma_{2,v}}{\sigma_{2,u}}\Big) + \log\Big(\frac{\alpha_u}{\alpha_v}\Big), \end{aligned}$$

où t et τ sont convenablement choisis sur le segment

$$\mathfrak{S}(u,v) := \{\vartheta u + (1-\vartheta)v : 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1\}.$$

Comme nous avons également

$$\begin{aligned} \max_{t\in\mathfrak{S}(u,v)} |\sigma_{2,t}-\sigma_{2,u}| &\ll \frac{(u-v)\bar{u}\sigma_{3,u}}{u^2\log y} \ll \frac{(u-v)\sigma_{2,u}}{u}, \\ \alpha_v-\alpha_u = \frac{(u-v)\log y}{\sigma_{2,s}} &= \frac{(u-v)\log y}{\sigma_{2,u}}\Big\{1+O\Big(\frac{u-v}{u}\Big)\Big\}, \end{aligned}$$

pour une valeur adéquate $s\in\mathfrak{S}(u,v)$, il vient

$$\begin{aligned} r(u,v) &= -\frac{(u-v)^2(\log y)^2}{2\sigma_{2,u}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big) \\ &= -\frac{(u-v)^2}{2\Theta^2}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big)\Big\} + O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big), \end{aligned}$$

où nous avons à nouveau utilisé la minoration $\alpha_u \gg \bar{u}/(u\log y)$. En reportant dans (2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big)\Big\}\zeta(\alpha_u,y)\Phi(h) + O\Big(\frac{\zeta(\alpha,y)}{\sqrt{\bar{u}}}\Big) \\ &= \zeta(\alpha_u,y)\Big\{\Phi(h)+O\Big(\frac{1}{\bar{u}^{1/3}}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

3. Précisions pour les grandes valeurs de y

La formule (1.7) peut être affinée lorsque le paramètre y est assez grand en fonction de x.

Soit $\varepsilon > 0$. Dans le domaine (H_ε), nous avons

$$\alpha = 1 - \xi(u)/\log y + O\big(1/(\log x \log y)\big), \tag{3.1}$$

Posons

$$r_{v,y} := \frac{\log(v+1)}{\log y} \quad (v \geqslant 1,\ y \geqslant 2).$$

Compte tenu de l'évaluation de Hildebrand (cf. [14, cor. III.5.19])

$$\Psi(y^v, y) = y^v \varrho(v)\{1 + O(r_{v,y})\} \quad ((y^v, y) \in (H_\varepsilon)), \tag{3.2}$$

et de [14, lem. III.5.16][5], il suit, dans le domaine (H_ε) et sous la condition $\log(z/x) \ll (\log x)/u^{1/3}$,

$$\begin{aligned} D(x,y,z) &= \alpha \int_1^z \frac{\Psi(t,y)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t + O\Big(\frac{\Psi(x,y)}{x^\alpha}\Big) \\ &= \{1+O(r_{u,y})\}(\log y)\int_0^w \mathrm{e}^{(1-\alpha)v\log y}\varrho(v)\,\mathrm{d}v + O\Big(\frac{\zeta(\alpha,y)}{\sqrt{u}\log y}\Big) \\ &= \kappa(u,w)(\log y)\widehat{\varrho}(-\xi(u)) + O(\zeta(\alpha,y)r_{u,y}) \\ &= \zeta(\alpha,y)\{\kappa(u,w) + O(r_{u,y})\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

avec toujours $w = (\log z)/\log y$ et

$$\kappa(u,w) := \frac{1}{\widehat{\varrho}(-\xi(u))}\int_0^w \mathrm{e}^{v\xi(u)}\varrho(v)\,\mathrm{d}v. \tag{3.4}$$

Pour $u = w = 1$, on retrouve bien $\kappa(1,1) = \mathrm{e}^{-\gamma}$ puisque $\xi(1) = 0$.

Nous pouvons également montrer que

$$\kappa\Big(u, u + \frac{s}{\sqrt{\xi'(u)}}\Big) = \Phi(s) + O\Big(\frac{1}{u}\Big) \qquad \big(u \geqslant 1,\ u + s/\sqrt{\xi'(u)} \geqslant 0\big). \tag{3.5}$$

Comme le terme d'erreur de (3.3) est plus précis que celui de (1.7) dès que $y > \mathrm{e}^{(\log x)^{1/4}(\log_2 x)^{3/4}}$, nous obtenons dans ce domaine un renforcement de (1.7) : nous verrons que, sous cette condition, la relation (3.5) implique en effet

$$\kappa(u, u+\Theta h) = \Phi(h) + O\Big(\frac{|h|\mathrm{e}^{-h^2/2}}{\log y} + \frac{1}{u}\Big). \tag{3.6}$$

[5] Sous la forme $\widehat{\varrho}(-\xi(u)) \ll \zeta(\alpha,y)/\log y$.

Pour établir (3.5), on peut supposer $s \ll \sqrt{\log 2u}$. La première étape consiste à majorer

$$\begin{aligned}E(u) := \int_0^{u-u^{2/3}} \mathrm{e}^{v\xi(u)} \varrho(v)\,\mathrm{d}v = \int_{u^{2/3}}^{u} \varrho(u-v)\mathrm{e}^{(u-v)\xi(u)}\,\mathrm{d}v \\ \ll \int_{u^{2/3}}^{u} \frac{\mathrm{e}^{I(\xi(u))-H(u,v)}}{\sqrt{u-v+1}}\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}H(u,v) &:= I(\xi(u)) - I(\xi(u-v)) - (u-v)\{\xi(u)-\xi(u-v)\} \\ &= \int_{u-v}^{u} (t-u+v)\xi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \tfrac12 v\log\Big(\frac{1}{1-v/2u}\Big) \geqslant \frac{v^2}{4u},\end{aligned}$$

puisque $I(\xi(t))' = t\xi'(t) \geqslant 1$. Il suit

$$E(u) \ll \mathrm{e}^{I(\xi(u))}\int_{u^{2/3}}^{u} \mathrm{e}^{-v^2/4u}\,\mathrm{d}v \ll \widehat{\varrho}(-\xi(u))\mathrm{e}^{-\frac15 u^{1/3}}.$$

Pour compléter la preuve de (3.5), il reste à évaluer

$$\begin{aligned}F(u,s) &:= \int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} \mathrm{e}^{(u-v)\xi(u)}\varrho(u-v)\,\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{e}^{\gamma+I(\xi(u))}\sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}}\int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} \mathrm{e}^{-H(u,v)}\Big\{1+O\Big(\frac{|v|+1}{u}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

puisque $\xi''(t) \ll 1/t^2$. Or

$$H(u,v) = \int_0^v w\xi'(w+u-v)\,\mathrm{d}w = \tfrac12 v^2\xi'(u) + O(v^2/u^2).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}F(u,s) &= \mathrm{e}^{\gamma+I(\xi(u))}\sqrt{\frac{\xi'(u)}{2\pi}}\int_{-s/\sqrt{\xi'(u)}}^{u^{2/3}} \mathrm{e}^{-\frac12 v^2\xi'(u)}\Big\{1+O\Big(\frac{|v|+1}{u}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{e}^{\gamma+I(\xi(u))}\Big\{1-\Phi(-s)+O\Big(\frac1u\Big)\Big\} = \widehat{\varrho}(-\xi(u))\Big\{\Phi(s)+O\Big(\frac1u\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Cela achève la preuve de (3.5).

La relation (3.6) résulte alors de (1.5). On notera que, dans le domaine considéré, nous avons $\log y \gg u^{1/3}\log(2u)$ et que nous pouvons supposer $h \ll \sqrt{\log 2u}$.

4. Preuve du Théorème 1.2

D'après [6, th.1], nous avons

$$\Psi_\tau(x,y)=\beta\sqrt{\pi\mathfrak{s}_2}\Psi\big(\sqrt{x},y\big)^2\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\}\quad(x\geqslant y\geqslant 2),$$

où l'on a posé $\beta:=\alpha\big(\sqrt{x},y\big)$, $\mathfrak{s}_2:=|\varphi_y'(\beta)|$. Compte tenu de (1.1) et (1.6), il suit

$$\Delta(x,y)\asymp\frac{x^{\beta-\alpha}\zeta(\beta,y)^2}{\zeta(\alpha,y)^2},$$

où nous avons utilisé l'estimation $\alpha\sqrt{\sigma_2}\asymp\beta\sqrt{\mathfrak{s}_2}$, qui découle de [10, th. 2].

Posons

$$\vartheta_1(x,y):=\begin{cases}\xi(u)-\xi(u/2), & \text{si } (x,y)\in(H_\varepsilon),\\ \log\Big(1+\dfrac{y}{y+\log x}\Big), & \text{dans le cas contraire,}\end{cases}$$

$$\vartheta_2(x,y):=\begin{cases}2\displaystyle\int_{u/2}^{u}t\xi'(t)\,\mathrm{d}t, & \text{si } x\geqslant y>(\log x)(\log_2 2x)^3,\\ \dfrac{2y}{\log y}\log\Big(1+\dfrac{\log x}{2y+\log x}\Big), & \text{dans le cas contraire,}\end{cases}$$

$$\vartheta_0(x,y):=\vartheta_2(x,y)-u\vartheta_1(x,y).$$

Nous avons alors, avec la notation ε_y de l'énoncé,

$$\vartheta_0(x,y)=\begin{cases}\vartheta(x,y) & \text{si } (x,y)\in(H_\varepsilon)\text{ ou } y\leqslant(\log x)(\log_2 x)^3,\\ \vartheta(x,y)+O(u\varepsilon_y) & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

La première étape de la preuve de (1.11) consiste à montrer que

$$(\beta-\alpha)\log x=u\vartheta_1(x,y)+O(1+\varepsilon_y\overline{u})\qquad(x\geqslant y\geqslant 2),\tag{4.1}$$

où le terme $O(\varepsilon_y\overline{u})$ peut être omis si $(x,y)\in(H_\varepsilon)$.

Conservons la notation $\alpha_v:=\alpha(y^v,y)$, de sorte que $\alpha=\alpha_u$, $\beta=\alpha_{u/2}$. Dans le domaine (H_ε), il résulte de (3.1) que

$$\beta-\alpha=\frac{\xi(u)-\xi(u/2)}{\log y}+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Lorsque, disons, $\log y\leqslant(\log_2 x)^2$, l'évaluation

$$\sigma_{2,v}=\Big(1+\frac{v\log y}{y}\Big)v(\log y)^2\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log(v+1)}\Big)\Big\}$$

établie en [10, th. 2] fournit, compte tenu de (2.2),

$$
\begin{aligned}
(\beta-\alpha)\log y = \int_{u/2}^{u} \frac{(\log y)^2}{\sigma_{2,v}}\,\mathrm{d}v &= \{1+O(\varepsilon_y)\}y\int_{u/2}^{u}\frac{\mathrm{d}v}{v(y+v\log y)} \\
&= \{1+O(\varepsilon_y)\}\log\Big(1+\frac{y}{y+\log x}\Big).
\end{aligned}
$$

Cela implique bien (4.1).

Il reste à établir l'estimation

$$
Z(x,y) := \log\Big(\frac{\zeta(\alpha,y)}{\zeta(\beta,y)}\Big) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(x,y) + O(1+\varepsilon_y\overline{u}) \quad (x \geqslant y \geqslant 2), \tag{4.2}
$$

avec la même convention que pour (4.1) concernant le terme d'erreur $O(\varepsilon_y\overline{u})$.

Dans le domaine (H_ε), l'estimation (4.2) résulte du calcul effectué dans [10, p. 289]. Dans le domaine complémentaire, l'évaluation de $\varphi_y'(\sigma)$ apparaissant au lemme 13 de [10] permet d'écrire

$$
Z(x,y) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{y^{1-\sigma}-1}{(1-\sigma)(1-y^{-\sigma})}\,\mathrm{d}\sigma. \tag{4.3}
$$

La preuve donnée dans [10] de l'évaluation (3.1) pour $\alpha=\alpha_u$ fournit en fait (cf. [10, pp. 285–287]), pour une constante C assez grande,

$$
\alpha(x,y) = 1-\frac{\xi(u)}{\log y}+O\Big(\frac{1}{(\log y)^2}\Big) \qquad (C(\log x)(\log_2 x)^3 < y \leqslant x). \tag{4.4}
$$

Cela implique dans le même domaine $y^\alpha \gg y\mathrm{e}^{-\xi(u)} \gg \log y$, de sorte que le terme $1-y^{-\sigma}$ peut être englobé par le terme d'erreur. Le changement de variables $(1-\sigma)\log y=\xi(t)$ et l'évaluation (4.4) fournissent alors (4.2).

Lorsque $y \leqslant C(\log x)(\log_2 2x)^3$, nous effectuons le changement de variables $t=y^\sigma$ dans l'intégrale de (4.3). Il vient

$$
Z(x,y) = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\int_{y^\alpha}^{y^\beta}\frac{y-t}{t(t-1)\log(y/t)}\,\mathrm{d}t.
$$

Or l'évaluation (1.2) implique $\beta\log y \ll \log_2 2y$, d'où

$$
\begin{aligned}
Z(x,y) &= \Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 2y}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y}{\log y}\int_{y^\alpha}^{y^\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)} \\
&= \Big\{1+O\Big(\frac{\log_2 2y}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y}{\log y}\log\Big(\frac{1-y^{-\beta}}{1-y^{-\alpha}}\Big).
\end{aligned}
$$

Comme nous avons [10, (7.8)]

$$
\frac{1}{1-y^{-\alpha_v}} = \Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\frac{y+v\log y}{y} \qquad (v \geqslant 1,\ y \geqslant 2),
$$

cela fournit à nouveau (4.2).

Pour achever la preuve du Théorème 1.2, observons que l'évaluation (1.12) résulte de l'avant-dernière formule (3.3) avec $w = u$, de (3.5) avec $s = 0$, de la formule de Hildebrand (3.2), et de la formule analogue pour $\Psi_\tau(x, y)$, telle qu'elle découle de [15, cor. 2.3].

5. Remarque finale

Il résulte de (1.6), (3.3) et (3.5) que, pour une constante absolue convenable $c > 0$, nous avons

$$c \leqslant \kappa(u, u) \leqslant 1 - c \qquad (u \geqslant 1).$$

On peut établir cela directement, sans invoquer (3.5). En effet, d'après [7, lem. 6.1] et [14, (III.5.63)], nous avons, pour une constante absolue convenable c_0,

$$\varrho(u - v) \asymp \varrho(u)\mathrm{e}^{v\xi(u)} \quad (1 \leqslant v \leqslant c_0\sqrt{u}).$$

Cela implique, d'une part,

$$\int_0^u \mathrm{e}^{v\xi(u)}\,\mathrm{d}v \gg \mathrm{e}^{u\xi(u)} \int_0^{c_0\sqrt{u}} \mathrm{e}^{-v\xi(u)}\varrho(u - v)\,\mathrm{d}v \asymp \varrho(u)\mathrm{e}^{u\xi(u)}\sqrt{u} \asymp \widehat{\varrho}(-\xi(u))$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}\int_u^\infty \varrho(v)\mathrm{e}^{v\xi(u)}\,\mathrm{d}v &= \mathrm{e}^{u\xi(u)} \int_0^\infty \varrho(u + v)\mathrm{e}^{v\xi(u)}\,\mathrm{d}v \\ &\gg \varrho(u)\mathrm{e}^{u\xi(u)} \int_0^{c_0\sqrt{u}} \mathrm{e}^{v\xi(u) - v\xi(u+v)}\,\mathrm{d}v \\ &\gg \varrho(u)\mathrm{e}^{u\xi(u)}\sqrt{u} \asymp \widehat{\varrho}(-\xi(u)).\end{aligned}$$

Remerciements. L'auteur tient ici à exprimer ici sa plus plus chaleureuse gratitude envers l'arbitre pour sa relecture attentive et ses suggestions pertinentes.

Bibliographie

[1] K. ALLADI, « The Turán–Kubilius inequality for integers without large prime factors », *J. Reine Angew. Math.* **355** (1982), p. 180-196.

[2] R. DE LA BRETÈCHE, Y. LAMZOURI & G. TENENBAUM, « Inégalité de Turán-Kubilius friable et indépendance asymptotique », *Acta Arith.* **183** (2018), n° 2, p. 191-199.

[3] R. DE LA BRETÈCHE & G. TENENBAUM, « Entiers friables : inégalité de Turán–Kubilius et applications (avec R. de la Bretèche) », *Invent. Math.* **159** (2005), n° 3, p. 531-588.

[4] ———, « Propriétés statistiques des entiers friables », *Ramanujan J.* **9** (2005), n° 1-2, p. 139-202.

[5] ———, « Sur l'inégalité de Turán–Kubilius friable », *J. Lond. Math. Soc.* **93** (2016), n° 1, p. 175-193.

[6] S. DRAPPEAU, « Remarques sur les moyennes des fonctions de Piltz sur les entiers friables », *Q. J. Math.* **67** (2016), n° 4, p. 507-517.

[7] É. FOUVRY & G. TENENBAUM, « Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques », *Proc. Lond. Math. Soc.* **72** (1996), n° 3, p. 481-514.

[8] G. Hanrot, B. Martin & G. Tenenbaum, « Constantes de Turán-Kubilius friables : étude numérique », *Exp. Math.* **19** (2010), n° 3, p. 345-361.

[9] G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. II », *Proc. Lond. Math. Soc.* **96** (2008), n° 1, p. 107-135.

[10] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, « On integers free of large prime factors », *Trans. Am. Math. Soc.* **296** (1986), p. 265-290.

[11] ———, « On a class of difference differential equations arising in number theory », *J. Anal. Math.* **61** (1993), p. 145-179.

[12] B. Martin & G. Tenenbaum, « Sur l'inégalité de Turán–Kubilius friable », *J. Reine Angew. Math.* **647** (2010), p. 175-234.

[13] H. Smida, « Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman », *Acta Arith.* **59** (1991), n° 2, p. 124-143.

[14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 5ème éd., Dunod, 2022.

[15] G. Tenenbaum & J. Wu, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables », *J. Reine Angew. Math.* **564** (2003), p. 119-166.

[16] ———, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. III », *Compos. Math.* **144** (2008), n° 2, p. 339-376.

[17] ———, « Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables. IV », in *Anatomy of integers. Based on the CRM workshop, Montreal, Canada, March 13–17, 2006*, CRM Proceedings & Lecture Notes, vol. 46, American Mathematical Society, 2008, p. 129-141.

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université de Lorraine
BP 70239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail: gerald.tenenbaum@univ-lorraine.fr
URL: https://tenenb.perso.math.cnrs.fr