MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Méthodes sécantes pour la résolution d'un système d'équations non linéaires

Romain, Nadine

Award date:
1976

Awarding institution:
Universite de Namur

1975|76.

METHODES SECANTES POUR LA RESOLUTION D'UN SYSTEME D'EQUATIONS NON LINEAIRES.

ROMAIN
NADINE

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous sommes fixés l'objectif suivant :
résoudre un système d'équations non linéaires : $Fx = \Theta$.
où $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable sur un ensemble ouvert D.
Les algorithmes permettant de résoudre de tels systèmes sont des méthodes itératives.
Ils peuvent généralement s'écrire sous la forme :

$$x^{k+1} = g_k(x^k) \qquad k = 0, 1, \dots,$$

Ils engendrent une suite de points $\{x^k\}$ susceptible de converger vers la racine x^* du système avec une vitesse appréciable.
La convergence de tels processus est assurée si, pour tout k, l'application $g_k(x)$

transforme un sous-ensemble fermé et borné $S \subset \mathbb{R}^n$ en lui-même et si pour tout k, g_k est une application de contraction c'est-à-dire :

$$\| g_k(x) - g_k(y) \| \leq L \| x - y \| ,$$

pour tout $x, y \in S$, $L < 1$

(L est la constante de Lipschitz).

Remarquons que le système :

$x^{k+1} = g_k(x^k)$ est équivalent à :

$$g_k(x^k) = (x^k) - A_k(x) F(x^k)$$

où $A_k(x)$ est une matrice carrée d'ordre n.

Des choix différents de cette matrice vont engendrer différentes méthodes.

Considérons l'algorithme de résolution proposé par Newton-Raphson [7].

La matrice $A_k(x)$ représente dans ce cas l'inverse de la matrice Jacobienne de la fonction F. Nous obtenons dès lors la récurrence suivante :

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} \, F x^k$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

Cet algorithme nous assure une convergence quadratique.

Nous allons nous attacher à un cas particulier de ce procédé de calcul : la méthode sécante, [2], [3], [4].

C'est une méthode itérative à pas multiples qui nous permettra d'éviter le calcul des dérivées apparaissant dans la méthode Newton-Raphson. En effet, nous ne considérerons plus la dérivée de la fonction F, MAIS, une approximation que nous noterons J où :

$$J : D_y \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

dépend d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et d'une matrice $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Cette méthode nous donnera le point à la $k+1$ ème itération par la formule de récurrence :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

Notre but est de démontrer que la méthode préconisée converge et que sa vitesse de convergence est superlinéaire.

- Nous trouverons deux parties dans ce mémoire :

a) <u>La partie théorique</u> : dans laquelle le travail que nous y faisons est le regroupement et la réinterprétation des résultats de " O.-R. ", [5]

En un premier temps, nous démontrerons que J est une <u>approximation CONSISTANTE</u> de F' sur $D_0 \subset D_J$, c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ est un point limite de } D_H \\ \cdot\ \lim\limits_{\substack{H \to 0 \\ H \in D_H}} J(x, H) = F'(x) \text{ uniformément pour } x \in D_0 \end{cases}$$

($D_H = \{ H \mid H$ non singulière $\})$.
Nous établirons ensuite le théorème de convergence et de vitesse de convergence de la méthode. Nous appliquerons ce dernier à un cas particulier de la méthode sécante : la "méthode n+1 points séquentiels ".

b/ La partie numérique : où nous programmerons l'algorithme défini par la méthode "n+1 points séquentiels" et vérifierons expérimentalement sa bonne marche.

CHAPITRE 1

PARTIE THEORIQUE

§ 1

PROCEDE ITERATIF
VITESSE DE CONVERGENCE
DIFFERENTIABILITE

Dans ce premier paragraphe, nous allons énoncer quelques définitions nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.

1-1 Qu'est-ce qu'un procédé itératif ?

Considérons une famille d'opérateurs $\{G_k\}$ où $G_k : D_k \subset (\mathbb{R}^n)^{k+p} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \ldots$.
Donnons-nous un domaine D^* contenu dans D_0 ainsi que p points initiaux.
Dans ces conditions $\mathcal{F} = (\{G_k\}, D^*, p)$ est un procédé itératif si :

- D^* est non vide.
- pour tout p-uple de points $(x^0, \ldots, x^{-p+1})$ appartenant à D^*, la suite $\{x^k\}$ engendrée par :

$$x^{k+1} = G_k(x^k, \ldots, x^{-p+1}) \quad k = 0, 1, \ldots$$

existe. En d'autres termes, $(x^k, \ldots, x^{-p+1})$ doit appartenir à D_k, $\forall k \geq 0$.

Un point $\underline{x^*}$ tel que $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$ est appelé : <u>limite du procédé</u>.

Nous noterons $\mathcal{C}(\mathcal{F}, x^*)$, l'ensemble de toutes les suites $\{x^k\}$ engendrées par $\mathcal{F}$ et convergeant vers x^*.

Un tel type d'itérations étant très peu utilisé en pratique, nous allons le particulariser de la façon suivante.

1 - 2 <u>Particularisation</u>. <u>Méthode m-pas</u>.

Un procédé itératif $\mathcal{F} = (\{G_k\}, D^*, p)$ est une méthode à m-pas si $p = m$ et si les opérateurs G_k sont de la forme :

$$G_k : D_k \subset (\mathbb{R}^n)^m \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Un <u>procédé</u> m-pas est <u>séquentiel</u>

si les itérés sont engendrés par

$$x^{k+1} = G_k(x^k, \dots, x^{k-m+1})$$

$k = 0, 1, \dots,$

c'est à dire que le nouveau point itéré ne dépend que des m points <u>précédents</u>. ∎

Quand nous sommes en présence d'un procédé itératif de recherche d'une racine, nous désirons non seulement que la suite $\{x^k\}$ qu'il engendre converge vers cette racine mais nous attachons aussi de l'importance à sa vitesse de convergence.

Aussi, nous allons présenter ci-après deux types courants de vitesse de convergence : le facteur quotient de convergence $Q_p\{x^k\}$ et le facteur racine de convergence : $R_p\{x^k\}$.

1 - 3 Facteurs Q_p et R_p

1 - 3 - 1 Les facteurs Q_p

a) d'une suite $\{x^k\}$

Soit $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergeant vers le point x^*

Alors, les quantités

$$Q_p\{x^k\} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } x^k = x^* \text{ (sauf pour un nombre fini de } k\text{)} \\ \limsup \dfrac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^p} & \text{si } x^k \neq x^* \text{ (sauf pour un nombre fini de } k\text{)} \\ +\infty & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

définies pour tout $p \in [1, \infty)$, sont les facteurs quotient de convergence de la suite $\{x^k\}$.

Les facteurs Q_p dépendent de la norme que l'on prend sur $\mathbb{R}^n$, [5]

b) d'un procédé itératif $\mathcal{F}$.

$$Q_p(\mathcal{F}, x^*) \triangleq \sup \{ Q_p\{x^k\} \mid \{x^k\} \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, x^*) \} \qquad 1 \leq p < \infty$$

1-3-2 Les facteurs R_p

a) d'une suite $\{x^k\}$

Soit $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergeant vers x^*.

Alors, les quantités

$$R_p\{x^k\} \triangleq \begin{cases} \limsup_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^{1/k} & \text{si } p = 1 \\ \limsup_{k\to\infty} \|x^k - x^*\|^{1/p^k} & \text{si } p > 1 \end{cases}$$

sont les R-facteurs de la suite

Contrairement aux Q-facteurs, les R-facteurs sont indépendants de la norme, [5]

Remarquons aussi que pour tout $p \geq 1$, $0 \leq R_p\{x^k\} \leq 1$.

b) d'un procédé itératif $\mathcal{F}$

$$R_p(\mathcal{F}, x^*) \triangleq \sup\{R_p\{x^k\} \mid \{x^k\} \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, x^*)\} \qquad 1 \leq p < \infty$$

1-4 Convergence Q- et R- linéaire, Q- et R- superlinéaire

Suivant les différentes valeurs des Q et R facteurs, nous obtenons divers types de convergence.

Si $0 < Q_1(\mathcal{F}, x^*) < 1$, la convergence sera Q- linéaire

Si $0 < R_1(\mathcal{F}, x^*) < 1$, la convergence sera R- linéaire

Si $Q_1(\mathcal{F}, x^*) = 0$ ou si $R_1(\mathcal{F}, x^*) = 0$, nous aurons respectivement convergence Q- superlinéaire et R- superlinéaire

1-5 Propriété des Q et R facteurs

1-5-1 des Q- facteurs

Considérons un procédé itératif $\mathcal{F}$ convergeant vers le point limite x^*

Soient $Q_p(\mathcal{F}, x^*)$ les Q- facteurs de ce procédé pour une norme fixée de

$\mathbb{R}^n$. Alors, une <u>seule</u> des conditions suivantes est vraie :

a) $Q_p(\mathcal{F}, x^*) = 0$, $\forall p \in [1, \infty)$

b) $Q_p(\mathcal{F}, x^*) = \infty$, $\forall p \in [1, \infty)$

c) Il existe un $p_0 \in (1, \infty)$ tel que

$Q_p(\mathcal{F}, x^*) = 0 \quad \forall p \in [1, p_0)$ et

$Q_p(\mathcal{F}, x^*) = \infty \quad \forall p \in (p_0, \infty)$. ∎

Q_p est donc une fonction croissante de p qui prend uniquement les valeurs 0 et ∞ sauf en un point

1-5-2 <u>des R-facteurs.</u>

Considérons un procédé itératif $\mathcal{F}$ dont le point limite est x^*. Soient R_p, les R-facteurs de ce procédé. Alors, une <u>seule</u> des conditions suivantes est vraie :

a) $R_p(\mathcal{F}, x^*) = 0 \qquad \forall p \in [1, \infty)$

b) $R_p(\mathcal{F}, x^*) = 1 \qquad \forall p \in [1, \infty)$

c) Il existe un $p_0 \in [1, \infty)$ tel que

$R_p(\mathcal{F}, x^*) = 0 \quad \forall p \in [1, p_0)$ et

$R_p(\mathcal{F}, x^*) = 1 \quad \forall p \in (p_0, \infty)$ -

R_p est donc une fonction croissante de p qui prend uniquement les valeurs 0 et 1 sauf en un point.

1-6 Ordre R d'un procédé itératif.

Soit $\mathcal{F}$ un procédé itératif convergeant vers le point x^*

a) Définition

La quantité

$$O_R(\mathcal{F}, x^*) \triangleq \begin{cases} \infty & \text{si } R_p(\mathcal{F}, x^*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty) \\ \inf \{ p \in [1, \infty) \mid R_p(\mathcal{F}, x^*) = 1 \} & \text{autre part.} \end{cases}$$

est appelée l'ordre R "racine" de $\mathcal{F}$ en x^*

b) Propriété. [5]

Si $R_p(\mathcal{F}, x^*) < 1$ pour un certain $p \in [1, \infty)$, alors $O_R(\mathcal{F}, x^*) \geq p$

Si $R_q(\mathcal{F}, x^*) > 0$ pour un certain $q \in [1, \infty)$, alors $O_R(\mathcal{F}, x^*) \leq q$

Donc, si $0 < R_p(\mathcal{F}, x^*) < 1$ pour un certain $p \in [1, \infty)$, alors

$O_R(\mathcal{F}, x^*) = p$ ∎

Remarquons que la convergence de $\mathcal{F}$ en x^* sera R-linéaire si $O_R(\mathcal{F}, x^*) = 1$ ce qui est en accord avec la définition de la R-linéarité.

Ce dernier concept n'apparaîtra que dans le chapitre 6, lorsque nous traiterons la convergence de la méthode $n+1$ points séquentiels. Nous y verrons alors son interprétation.

1-7 Dérivées

1-7-1 Gateaux - dérivée (G - dérivée) (dérivée directionnelle)

Une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est G- différentiable en un point intérieur de D s'il existe un opérateur linéaire $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \to 0} (1/t) \| F(x + th) - Fx - tAh \| = 0 \quad (1)$$

L'opérateur A est noté $F'(x)$ et est appelé la G- dérivée de F en x

Remarque :

Si F est G- différentiable en chaque point d'un sous-ensemble $D_0 \subset D$, alors, pour tout $x \in D_0$, $F'(x)$ est un opérateur linéaire (opérateur de $D_0 \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$)

En particulier, F' est continue en $x \in D_0$ si $\| F'(x + h) - F'(x) \| \longrightarrow 0$ quand $\| h \| \longrightarrow 0$ (2)

Nous considèrerons dans la suite la

représentation suivante de $F'(x)$:

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_n f_1(x) \\ & \\ \partial_1 f_n(x) & \partial_n f_n(x) \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que la matrice Jacobienne des dérivées partielles. Il est facile de se convaincre que si F est G-différentiable, alors la matrice Jacobienne existe. Il suffit pour cela de prendre h^j comme étant les directions des coordonnées : $(1, 0, 0, \dots), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)$ ([5], p 60)

1-7-2 Hemi-continuité (continuité directionnelle)

Une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est hemi-continue en $x \in D$ si, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, h)$ tel que : quand $|t| < \delta$ et $x + th \in D$, alors, $\| F(x + th) - Fx \| < \varepsilon$

(3)

<u>Théorème</u> : « Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est G-différentiable en $x \in D$, alors F est hemi-continue en x. ».

Ce théorème indique donc que la différentiabilité directionnelle implique la continuité directionnelle.

1-7-3 <u>Dérivée de Fréchet</u> (<u>dérivée uniforme</u>, <u>quelle que soit la direction</u>)

Une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est Fréchet-différentiable en $x \in \mathrm{int}(D)$ s'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\|h\|}\right) \| F(x+h) - Fx - Ah \| = 0$$

<u>L'opérateur linéaire A</u> est noté par $F'(x)$ et <u>est appelé la F-dérivée</u> de F en x. ■

Un résultat important, reliant la G-différentiabilité à la F-différentiabilité est le suivant :

<u>Théorème</u> : « Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est G-différentiable en chaque point d'un voisinage ouvert de x et si F' (la G-dérivée) est continue en x, alors, F est F-différentiable en x et F' est aussi la dérivée de Fréchet ».

Ce théorème résulte de l'application du théorème de la valeur moyenne à la "différence de Fréchet" :

$$\| F(x+h) - Fx - Ah \| \quad , \quad ([5], p\,70)$$

- Après ces quelques définitions nécessaires à la compréhension de la suite, passons, dans le chapitre suivant, au sujet proprement dit du mémoire.

§2 DEFINITION ET INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA METHODE SECANTE

Venons-en maintenant au sujet qui nous intéresse : la méthode sécante. Nous présentons de suite la définition et l'interprétation géométrique de la méthode. Nous le ferons d'abord à une dimension pour l'étendre ensuite à n dimensions. Dans les paragraphes suivants, nous ne nous attacherons qu'à ce dernier cas.

2-1 Définition de la méthode à une dimension.

Par définition, la méthode suivante, appelée la méthode de Newton discrétisée nous fournit dans le cas d'une fonction réelle d'une variable réelle, le procédé itératif :

$$x^{k+1} = x^{k} - \left[\frac{f(x^{k} + h^{k}) - f(x^{k})}{h^{k}} \right]^{-1} f(x^{k}) \qquad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

où h^k est le pas d'itération et f est une fonction différentiable, possédant une racine x^* telle que en ce point : $f(x^*) = 0$, $f'(x^*)$ est non nulle et f' est continue en x^*.

Si nous posons : $h^k = x^{k-1} - x^k$, nous obtenons le procédé de récurrence :

$$\boxed{x^{k+1} = x^{k} - \left[\frac{f(x^{k-1}) - f(x^{k})}{x^{k-1} - x^{k}} \right]^{-1} f(x^{k}) \qquad k = 0, 1, \dots,} \qquad (5)$$

que nous appellerons la méthode sécante à une dimension.

2-2 Interprétation géométrique à une dimension

La méthode sécante, engendrant la formule de récurrence (5), consiste à :

a) remplacer la fonction f en une certaine approximation x^k de x^* (point racine de la fonction) par une fonction affine :

$$\ell_k(x) = \alpha(x - x^k) + f(x^k)$$

avec

$$\alpha = \frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k} \neq 0$$

b) rechercher ensuite la racine x^{k+1} de $\ell_k(x)$

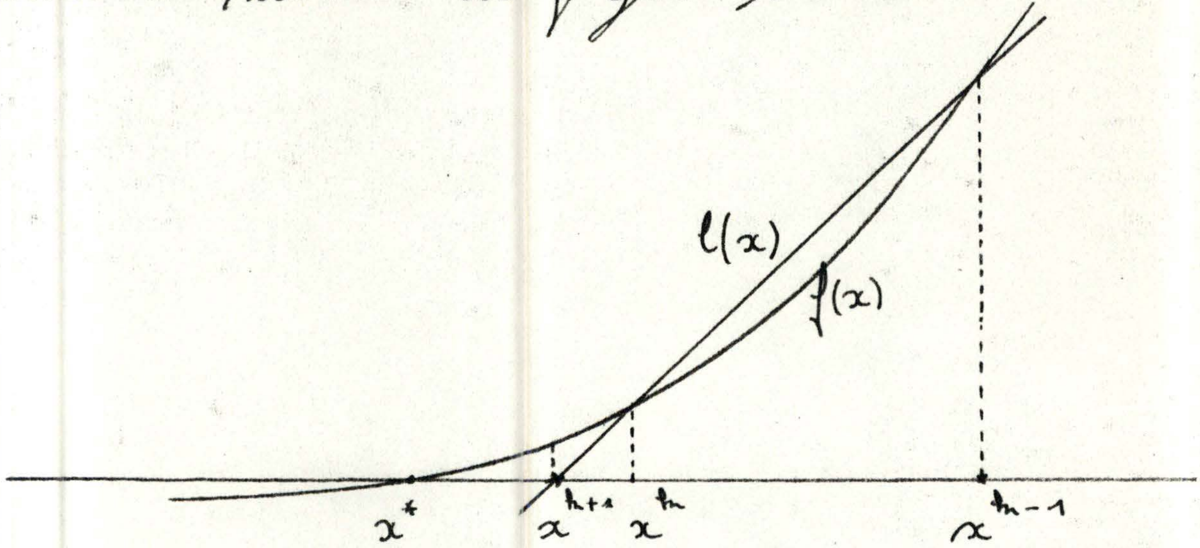
c) prendre ce point comme nouvelle approximation de x^*

d) recommencer le processus autant de fois que nécessaire, c'est-à-dire jusqu'au moment où $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$.

Le point x^{k+1} obtenu à la $k+1^{\text{ème}}$ itération est donc la solution de l'équation linéarisée :

$$l_k(x) = \frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k}(x - x^k) + f(x^k) = 0$$

Dans cette méthode, $l_k(x)$ peut être représentée comme une interpolation linéaire de la fonction f entre les points x^{k-1} et x^k, comme le montre la figure suivante :



<u>Remarque</u> : Dans la méthode de Newton discrétisée (4), l'équation linéarisée $l(x)$ peut être interprétée comme l'approximation de la tangente.

$$l_{k_T}(x) = f'(x^k)(x - x^k) + f(x^k) \quad \text{en } x^k$$

En fait, nous espérons que si $x^k \longrightarrow x^*$, alors la fonction $l_k(\cdot)$ tend vers $l_{k_T}(\cdot)$, ce qui entraînera un type de convergence newtonien avec tous les avantages que cela comporte, [5].

2-3 Définition générale de la méthode sécante

Considérons la fonction

$$F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$x \rightsquigarrow Fx$$

G-différentiable dans un voisinage ouvert $S_0 \subset D$ d'une racine x^* telle que en x^*, $Fx^* = \theta$, $F'(x^*)$ est non singulière et F' est continue en x^*.

Pour trouver un procédé itératif analogue à celui décrit par (5), nous devons généraliser le facteur

$$\frac{f(x^{k-1}) - f(x^k)}{x^{k-1} - x^k} \quad \text{à } n \text{ dimensions}$$

Pour ce faire, définissons d'abord une matrice H_k comme suit :

$$H_k = \left(x^{k,1} - x^k , \dots , x^{k,n} - x^k \right)$$

où $x^{k,i}$ sont n points auxiliaires donnés

$i = 1, \dots, n.$

Considérons ensuite le domaine

$$D_{\mathcal{J}} \times D_H = \{ (x, H) \mid x + He^i \in D,\ i = 1, \dots, n ;$$
$$H \text{ est non singulière} \} \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

et où $e^i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base.

Introduisons enfin l'opérateur suivant :

$$\mathcal{J} : D_{\mathcal{J}} \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$
$$(x, H) \rightsquigarrow \mathcal{J}(x, H) \triangleq \left(F(x + He^1) - Fx, \dots \right.$$
$$\left. \dots\dots, F(x + He^n) - Fx \right) H^{-1} \qquad (6)$$

ALORS, sous ces conditions, le point à la $k+1^{\text{ème}}$ itération est donné par :

$$\boxed{\begin{array}{c} x^{k+1} = x^k - \mathcal{J}(x^k, H_k)^{-1} F x^k \\ k = 0, 1, \dots, \end{array}} \qquad (7)$$

Remarques

1. Nous constatons que la matrice H est une matrice carrée $n \times n$, possé-

dant donc n^2 éléments h_{ij}
Ces éléments constituent les paramètres de l'opérateur $\mathcal{J}$.

2. Vérifions que dans le cas où $n = 1$, nous retombons sur la relation (5)

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightsquigarrow f(x)$$

$$\mathcal{J} : D_y \times D_h \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$$
$$(x, h) \rightsquigarrow \mathcal{J}(x, h) \triangleq (f(x+h) - f(x))\, h^{-1} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

où $D_y \times D_h = \{(x, h) \mid x + h \in D \text{ et } h \neq 0\}$

La relation (7) est équivalente à :

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{f(x^k + h^k) - f(x^k)}{h^k}\right]^{-1} f(x^k)$$

Si nous posons : $h^k = x^{k-1} - x^k$,
nous obtenons bien la récurrence (5)

2-4 Interprétation géométrique à n dimensions

Au lieu de remplacer la fonction f par une fonction $l_k(x)$ comme nous l'avons fait dans le cas unidimentionnel, nous remplaçons cette fois la fonction F au point x^k par la fonction affine suivante :

$$L_k x = A(x - x^k) + Fx^k$$

où A est une matrice non singulière égale à $J(x^k, H_k)$.

Le point x^{k+1} sera donc la solution de $L_k x = 0$.

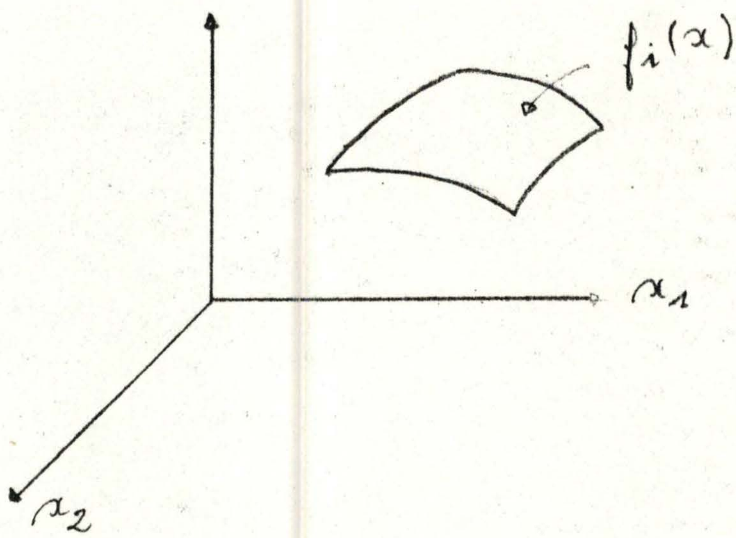
Géométriquement, nous considérons chaque surface composante f_i, $(i = 1, .., n)$, de $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Chacune d'elle possède un graphe $< x, f_i(x) >$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f_i(x) \in \mathbb{R}$.

<u>Exemple.</u>

La fonction : $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ possède deux surfaces composantes.

$$F = (f_1, f_2) \quad ; \quad \langle x, f_1(x) \rangle \in \mathbb{R}^3$$



- Nous remplaçons chaque surface composante par un hyperplan qui interpole f_i en $n+1$ points donnés $x^{k,j}$, $j = 0, \dots, n$, dans un voisinage de x^k.

Il faudra donc trouver un scalaire α_i et un vecteur a^i tels que :

$$L_i x = \alpha_i + x^T a^i \quad \text{satisfasse :}$$

$$L_i x^{k,j} = f_i(x^{k,j}) \qquad j = 0, 1, \dots, n.$$

Le point x^{k+1} sera l'intersection de ces n hyperplans dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec l'hyperplan $x = 0$.

2-5 Nous allons dans ce paragraphe, énoncer sans les démontrer les résultats menant au fait que :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k$$

est l'intersection de n hyperplans dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec l'hyperplan $x = 0$.

2-5-1 <u>Définition 1</u>

"$n+1$ points $x^0, x^1, \ldots, x^n$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ sont en <u>POSITION GENERALE</u> si les vecteurs $x^0 - x^j$, $j = 1, \ldots, n$ sont linéairement indépendants. En d'autres termes, $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$ sont en position générale s'ils n'appartiennent pas à un sous espace affine de dimension inférieure à n

<u>Exemple</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, x^0, x^1, x^2 sont en position générale s'ils ne sont pas colinéaires.

Remarquons que cette définition est indépendante de l'ordre d'énumération des points x^j et ce, grâce à l'équivalence des propositions suivantes : ([5], p 191).

1°) $x^0 \in \mathbb{R}^n, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ sont en position générale

2°) Pour tout j, $0 \leq j \leq n$, les vecteurs : $x^j - x^i$, $i = 0, \ldots, n$; $i \neq j$, sont linéairement indépendants

3°) La matrice $(e, X^T)_{(n+1) \times (n+1)}$ où $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$ et $X = (x^0, \ldots, x^n)$ est non singulière.

4°) Pour tout y appartenant à $\mathbb{R}^n$, il existe des scalaires $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels que : $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = 1$ et tels que : $y = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$.

2-5-2 <u>Définition 2</u> : elle nous permet d'exprimer <u>un</u> pas de toute méthode sécante.

« Considérons la fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et supposons que les points : $x^0, \dots, x^n \in D$ et $Fx^0, \dots, Fx^n$, sont en position générale. Alors, <u>le point</u> : $\underline{x^s = -A^{-1} a}$,

où $a \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ satisfont

$$a + Ax^j = Fx^j, \quad j = 0, \dots, n,$$

<u>est une APPROXIMATION SECANTE DE BASE</u> par rapport à $x^0, \dots, x^n$. »

L'existence du point x^s et le fait qu'il soit bien défini sont assurés par le théorème suivant : ([5], p 192).

« Soient donnés les points $x^0, \dots, x^n$ et $y^0, \dots, y^n$, appartenant à $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une fonction affine <u>unique</u> :

$Lx = a + Ax$, où $a \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, telle que $Lx^j = y^j$, $j = 0, \dots, n$ si et seulement si $x^0, \dots, x^n$ sont en position générale. En outre, A est non singulière si et seulement si $y^0, \dots, y^n$ sont en position générale ».

La démonstration de ce théorème se base sur les propriétés d'équivalence énoncées dans 2-5-1 ∎

L'approximation sécante de base se calcule :

1°) en trouvant a et A tels que :

$$a + Ax^j = Lx^j = y^j = Fx^j$$

c'est-à-dire en résolvant le système linéaire :

$$(e, X^T)\begin{pmatrix} a^T \\ A^T \end{pmatrix} = (Fx^0, \dots, Fx^n)^T$$

2°) en résolvant : $a + Ax = 0$.

2-5-3 Il n'est pas nécessaire de calculer explicitement la fonction d'interpolation

$a + Ax$. Nous allons voir que x^s peut être obtenue en résolvant UN système linéaire et nous allons pour ce faire, considérer la formulation dite de Newton.

Introduisons l'opérateur :

$$\mathcal{J} : D_{\mathcal{J}} \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$$(x, H) \rightsquigarrow \mathcal{J}(x, H) \triangleq \left(F(x + He^1) - Fx, \dots \right.$$

$$\left. \dots\dots, F(x + He^n) - Fx \right) H^{-1} \qquad (6)$$

où $D_{\mathcal{J}} \times D_H = \{ (x, H) \mid x + He^i \in D,\ i = 1, \dots, n;$
H non singulière $\}$

Dès lors, la formulation dite de Newton s'énonce de la façon suivante, ([5], p 194) :

« Soient $x^0, \dots, x^n$ et $Fx^0, \dots, Fx^n$ en position générale. Posons : $H = (x^1 - x^0, \dots, x^n - x^0)$

Alors $\mathcal{J}(x^0, H)$ est non singulière et l'approximation sécante de base x^s s'exprime par :

$$x^s = x^0 - \mathcal{J}(x^0, H)^{-1} Fx^0 \ .$$ »

. Posons $T = (Fx^1 - Fx^0, \dots, Fx^n - Fx^0)$

A ce moment, l'approximation x^s prendra la forme :

$$x^s = x^0 - HT^{-1}Fx^0$$

et il suffira que $Fx^0, \dots, Fx^n$ soient en position générale pour qu'elle puisse être calculée. Mais si les x^i, $i = 0, \dots, n$ ne sont pas en position générale, alors x^s n'est pas une approximation sécante de base car il n'existera pas de fonction affine interpolante $a + Ax$ satisfaisant : $a + Ax^j = Fx^j$, $j = 0, \dots, n$.

Remarques

1. La formulation de Newton demande
   - la résolution d'un seul système d'équations linéaires $Tx = Fx^0$.
   - le calcul d'une combinaison linéaire de vecteurs $x^1 - x^0, \dots, x^n - x^0$,

grâce à :

$$x^1 = x^0 - HT^{-1} F x^0.$$

2. Si nous posons $\hat{H} = (h^1, h^2 - h^1, .., h^n - h^{n-1})$, alors ([S], p 194),

$$J(x, H) = (F(x + h^1) - Fx, F(x + h^2) - F(x + h^1), \ldots, F(x + h^n) - F(x + h^{n-1}))\hat{H}^{-1},$$

et l'approximation sécante de base peut aussi s'écrire :

$$x^1 = x^0 - [(Fx^1 - Fx^0, \ldots, Fx^n - Fx^{n-1}) \times (x^1 - x^0, .., x^n - x^{n-1})^{-1}]^{-1} F x^0.$$

3. Remarquons enfin que la formulation de Newton nous permet d'exprimer la méthode sécante par :

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k & k = 0, 1, \ldots, \\ H_k = (x^{k,1} - x^k, \ldots, x^{k,n} - x^k) & \\ \text{où } x^{k,0} = x^k & \end{cases}$$

Nous avons donc, grâce à toutes les considérations précédentes, que :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k$$

est l'intersection de n hyperplans $a + Ax^j = Fx^j$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ avec l'hyperplan $x = 0$.

§3 DEFINITION ET AVANTAGE D'UNE APPROXIMATION CONSISTANTE

La méthode sécante engendre la formule de récurrence suivante :

$$x^{k+1} = x^{k} - J(x^{k}, H_{k})^{-1} F x^{k} \qquad (7)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

Elle utilise, à chaque itération, l'opérateur :

$$J : D_{J} \times D_{H} \subset \mathbb{R}^{n} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n})$$

$$(x, H) \rightsquigarrow J(x, H) \triangleq \left(F(x + He^{1}) - Fx, \dots, F(x + He^{n}) - Fx\right) H^{-1} \qquad (6)$$

Cet opérateur représente comme nous le verrons, une approximation de la matrice Jacobienne $F'(x)$ employée dans la méthode de Newton-Raphson qui, nous le savons, converge quadratiquement.

Or, des méthodes du type (7) sont reliées à la méthode de Newton par le fait que si $\| H \|$ tend vers zéro, alors $J(x, H)$ tend vers $F'(x)$.

C'est pourquoi nous allons introduire la notion d'approximation consistante suivante :

Tout d'abord : Qu'est-ce qu'une approximation consistante ?

3-1 Définition.

Soit donnée une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ G-différentiable sur un ensemble $D_0 \subset D$.

Considérons l'opérateur J défini par (6)

J est une APPROXIMATION CONSISTANTE de F' sur $D_0 \subset D_J$ si

$$\left\{ \begin{array}{l} - \ 0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \text{ est un point limite de } D_H \\ - \ \lim\limits_{H \to 0, H \in D_H} J(x, H) = F'(x) \quad \text{UNIFORMEMENT } \forall x \in D_0 \end{array} \right. \tag{8}$$

De plus, s'il existe des constantes c et $r > 0$, telles que :

$$\| F'(x) - J(x, H) \| \leq c \, \| H \| \qquad \forall x \in D_0, \; H \in D_H \cap S(0, r), \tag{9}$$

Alors, J est une <u>approximation</u>
<u>FORTEMENT consistante</u> de F' sur D_0

■

<u>Remarques</u>

1. $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est un point limite de $D_H = \{ H \mid H \text{ est non singulière} \}$ si et seulement s'il existe une suite $\{H_k\}$ dans D_H qui converge vers zéro, c'est-à-dire : si et seulement s'il existe une suite $\{H_k\}$ dans D_H telle que :

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ H_k \in D_H}} H_k = 0 .$$

2. $\lim\limits_{\substack{H \to 0 \\ H \in D_H}} J(x, H) = F'(x)$ est uniforme pour $x \in D_0$.

si $\forall r \;\; \exists \, \varepsilon(r) > 0$ tel que :

$$\| H \| \leq r \implies \| F'(x) - J(x, H) \| \leq \varepsilon$$

Nous constatons que si J est une approximation consistante de F' sur $D_0 \subset D_J$ nous sommes déjà certains d'une chose :

$$\lim_{H \to 0,\ H \in D_H} J(x, H) = F'(x) \text{ uniformément pour } x \in D_0 .$$

Nous allons voir, dans des théorèmes ultérieurs que le fait d'avoir une telle approximation joue un rôle important dans la convergence et la vitesse de convergence d'une méthode.

Mais avant de poursuivre cette étude, introduisons la définition suivante

3 - 2 Point d'attraction

3 - 2 - 1 Définition

Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'attraction d'un procédé itératif

$$x^{k+1} = G_k(x^k, x^{k-1}, \dots, x^0, \dots, x^{-p+1})$$

s'il existe un voisinage ouvert S

de x^* tel que pour tout p-uple de points de départ $(x^{-p+1}, \dots, x^0) \subset S$, la suite entière des itérés $\{x^k\}$ engendrée par la méthode est bien définie et converge vers x^*.

3-2-2 Propriété

Remarquons que si nous considérons le procédé itératif $x^{k+1} = G x^k$, et si la fonction G est F-differentiable, cette notion de point d'attraction est reliée à celle du point fixe par le théorème d'Ostrowski qui s'énonce de la façon suivante :

« Supposons que $G : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ait un point fixe $x^* \in \operatorname{int}(D)$ et soit F-différentiable en x^*. Si le rayon spectral de $G'(x^*)$ satisfait : $\rho(G'(x^*)) = \sigma < 1$, alors x^* est un point d'attraction de $x^{k+1} = G x^k$. »

([5] p.300)

dans le cas où $x^{k+1} = G(x^k, H_k)$,
il suffit de généraliser ce théorème :
l'opérateur G dépend maintenant
du paramètre H_k ∎

Voyons maintenant l'intérêt fondamental d'avoir une approximation consistante.

3-3 <u>Théorème 1</u> : <u>Avantage d'avoir une approximation consistante</u>

Considérons une fonction : $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
G-différentiable dans un voisinage ouvert
$S_0 \subset D$ d'un point x^* telle qu'en ce
point $Fx^* = \theta$, F' est continue en x^*
et $F'(x^*)$ est non singulière
Soit J une approximation consistante
de F' sur S_0.

ALORS,

(I) : Il existe des constantes $r > 0$ et $\delta > 0$ telles que : avec :

$S \triangleq S(x^*, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ et $D'_H \triangleq D_H \cap S(0, r)$,

l'opérateur :

$$G : S \times D'_H \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, H) \rightsquigarrow G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} Fx \qquad (10)$$

a) est défini pour tout $(x, H) \in S \times D'_H$

b) satisfait l'inégalité :

$$\| x^* - G(x, H) \| \leq W(x, H) \| x - x^* \| \qquad (11)$$

pour tout $(x, H) \in S \times D'_H$

et où $W : S \times D'_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$(x, H) \rightsquigarrow W(x, H) \qquad (11')$$

est telle que $W(x, H) \longrightarrow 0$

si $(x, H) \in S \times D'_H \longrightarrow (x^*, 0)$

(II) En outre, si J est une approximation fortement consistante de F' sur S_0 et si :

$$\| F'(x) - F'(x^*) \| \leq \gamma \| x - x^* \| \qquad \forall x \in S_0, \qquad (12)$$

ALORS,

Il existe des constantes α_1 et α_2 telles que :

$$\| x^* - G(x, H) \| \leq \alpha_1 \| x - x^* \|^2 + \alpha_2 \| H \| \| x - x^* \| \quad , \quad \forall (x, H) \in S \times D'_H \qquad (13)$$

Démonstration.

RAPPEL : LEMME DE PERTURBATION.

« Soient A, C appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Supposons que A soit inversible et que $\| A^{-1} \| \leq \alpha$

Si $\| A - C \| \leq \beta$ et $\beta\alpha < 1$,

ALORS, C est aussi inversible et

$\| C^{-1} \| \leq \alpha / (1 - \alpha\beta)$. »

([5], p 45)

Remarquons que ce lemme est une conséquence du fait suivant.

« Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et soit $\| B \| < 1$ (14).

ALORS, $(I-B)$ est inversible et

$$\|(I-B)^{-1}\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|B\|^i = 1/(1-\|B\|)$$ »

Preuve :

Pour tout $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$(I-B)(I+B+\ldots+B^{k-1}) = I - B^k$$

où par (14), $B^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

$$\left(\|B^k\| \leq \|B\|^k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0\right)$$

On a donc, en prenant la limite :

$$(I-B)\left(\sum_{i=0}^{\infty} B^i\right) = I$$

d'où : $(I-B)^{-1}$ existe et

$$\|(I-B)^{-1}\| = \left\|\sum_{i=0}^{\infty} B^i\right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|B\|^i = (1-\|B\|)^{-1}$$

■

Pour obtenir le lemme de perturbation, il suffit de prendre $B = I - A^{-1}C$ et de remarquer que $\|B\| < 1$ et

$$C^{-1} = (I-B)^{-1}A^{-1}$$

Pas # 1 : L'assertion (I) est vraie

1) Préparation à l'application du lemme de perturbation.

Posons $\beta = \| F'(x^*)^{-1} \|$. Ce fait est plausible puisque $F'(x^*)$ est non singulière. Par hypothèse aussi, nous savons que J est une approximation consistante de F' sur S_0.

Donc, $\lim\limits_{H \to 0,\, H \in D_H} J(x, H) = F'(x)$ uniformément pour tout $x \in S_0$

et $0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est un point limite de D_H, c'est-à-dire que :

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, r > 0$, tel que $D'_H = D_H \cap S(0, r) \neq \phi$ et $H \in D'_H \Longrightarrow \| F'(x) - J(x, H) \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in S_0$

De plus, F' est continue en x^*.

Dès lors,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta(x^*, \varepsilon)$ tel que $S = S(x^*, \delta) \subset S_0$ et $\| x - x^* \| \leq \delta \Longrightarrow \| F'(x) - F'(x^*) \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in S$.

Nous pouvons donc conclure que,

$\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\beta^{-1})$, $\exists r > 0$, $\exists \delta > 0$, tels que :

$$\| F'(x^*) - J(x, H) \| = \| F'(x^*) - F'(x) + F'(x) - J(x, H) \| \leq \| F'(x^*) - F'(x) \| + \| F'(x) - J(x, H) \| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon,$$

$$\forall (x, H) \in S \times D'_H$$

<u>Conséquence</u> : Puisque :

$$\| F'(x^*)^{-1} \| = \beta \text{ et } \| F'(x^*) - J(x, H) \| \leq \varepsilon,$$

$\forall (x, H) \in S \times D'_H$ où $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}\beta^{-1})$,

nous pouvons donc observer que :

$$\boxed{\beta \varepsilon < 1}$$

et dès lors, nous pouvons appliquer le lemme de perturbation.

2) <u>L'application du lemme de perturbation et le fait que F soit G-différentiable sur S_0, $F(x^*) = \theta$ et F' est continue en x^* permettent de conclure que (I) est vraie.</u>

Appliquons le lemme de perturbation avec les remplacements suivants :

$A \longleftarrow F'(x^*)$, $C \longleftarrow \mathcal{J}(x, H)$; $\alpha \longleftarrow \beta$

et $\beta \longleftarrow \varepsilon$

Il s'ensuit que $\mathcal{J}(x, H)^{-1}$ existe et satisfait :

$$\| \mathcal{J}(x, H)^{-1} \| \leq \eta \quad , \quad \forall (x, H) \in S \times D'_H \qquad (15)$$

où $\eta \stackrel{\Delta}{=} \beta / 1 - \beta \varepsilon$ (15')

Il s'ensuit donc que l'opérateur $G(x, H)$ donné par la relation (10) est bien défini sur $S \times D'_H$

De plus : $\forall (x, H) \in S \times D'_H$,

$$\| G(x, H) - x^* \| = \| (x - x^*) - \mathcal{J}(x, H)^{-1} F x \|$$

$$= \| \mathcal{J}(x, H)^{-1} \mathcal{J}(x, H)(x - x^*) - \mathcal{J}(x, H)^{-1} F x \|$$

$$= \| \mathcal{J}(x, H)^{-1} [\mathcal{J}(x, H)(x - x^*) - F x] \|$$

$$\leq \eta [\| \mathcal{J}(x, H) - F'(x) \| + \| F'(x) - F'(x^*) \|] \| x - x^* \|$$

$$+ \eta \| F x - F x^* - F'(x^*)(x - x^*) \| \qquad (16)$$

(en ajoutant puis soustrayant les termes : $F'(x)(x - x^*)$, $F'(x^*)(x - x^*)$, $F(x^*) = \theta$).

Posons :

- $q : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$x \rightsquigarrow q(x) \triangleq \frac{\| Fx - Fx^* - F'(x^*)(x-x^*) \|}{\| x - x^* \|}$$

$$(\text{où } x \neq x^* \text{ et } q(x^*) \triangleq 0) \qquad (16')$$

- $W : S \times D'_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$

$$(x, H) \rightsquigarrow W(x,H) \triangleq \eta \left[\| J(x,H) - F'(x) \| + \| F'(x) - F'(x^*) \| + q(x) \right] \qquad (16'')$$

Analysons maintenant $W(x, H)$.

Nous constatons qu'il est composé de trois termes et nous allons démontrer que chacun d'eux tend vers zéro quand le couple (x, H) tend vers le couple $(x^*, 0)$.

- 1°) $q(x) = \dfrac{\| Fx - Fx^* - F'(x^*)(x-x^*) \|}{\| x - x^* \|}$

tend vers zéro quand x tend vers x^*.

Puisque F est G-différentiable dans un voisinage ouvert $S_0 \subset D$ de x^* et que F' est continue en x^*, F est aussi F-différentiable en x^* (voir § 1, 1-7-3)

c'est-à-dire, par définition de la

F-différentiabilité :

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{\|h\|}\right) \| F(x^* + h) - Fx^* - Ah \| = 0.$$

Dans notre cas : $x \to x^*$ implique que

$\|x - x^*\| \to 0$. Posons $h = x - x^*$.

Nous aurons donc :

$$\lim_{(x - x^*) \to 0} \left(\frac{1}{\|x - x^*\|}\right) \| Fx - Fx^* - F'(x^*)(x - x^*) \| = 0$$

et donc : $q(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow x^*$

- 2°) $\left\{ \begin{array}{l} \|F'(x) - F'(x^*)\| \text{ tend vers zéro} \\ \text{quand } x \text{ tend vers } x^*. \end{array} \right.$

Evident par la continuité de F' en x^*.

- 3°) $\left\{ \begin{array}{l} J(x, H) - F'(x) \text{ tend vers zéro} \\ \text{quand } (x, H) \text{ tend vers } (x^*, 0) \end{array} \right.$

Par définition de l'approximation consistante, nous savons que :

$\lim\limits_{H \to 0,\, H \in D_H} \mathcal{Y}(x, H) = F'(x)$ uniformément pour tout $x \in S_0$

donc aussi uniformément pour tout x appartenant à un voisinage arbitrairement petit de x^*, ce qui entraîne la thèse.

– Les trois faits précédents impliquent que $W(x, H)$ tend vers zéro quand (x, H) tend vers $(x^*, 0)$, et nous avons donc complètement démontré (I).

Pas # 2 : l'assertion (II) est vraie.

1) Proposition auxiliaire

« Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est G-différentiable sur l'ensemble convexe $D_0 \subset D$, alors, pour tout x, y, z appartenant à D_0, nous avons:

$$\| Fy - Fz - F'(x)(y - z) \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| F'(z + t(y - z)) - F'(x) \| \, \| y - z \|$$ ».

(Démonstration : voir Annexe 2).

2) La proposition auxiliaire, le fait que J soit une approximation fortement consistante de F' sur S_0 c'est-à-dire que nous ayons (12), et le fait que F' soit G-différentiable sur S_0, conduisent à l'inégalité (13).

Par hypothèse :

$$\| F'(x) - F'(x^*) \| \leq \gamma \| x - x^* \| \quad , \forall x \in S_0$$

Appliquons la proposition 1) avec :

$$x \leftarrow x^*, \quad y \leftarrow x \quad , \quad z \leftarrow x^*$$

Nous aurons par (16'), pour tout $x \in S = S(x^*, \delta) \subset S_0$:

$$q(x) \| x - x^* \| = \| Fx - Fx^* - F'(x^*)(x - x^*) \|$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| F'(x^* + t(x - x^*)) - F'(x^*) \| \| x - x^* \|$$

$$\underset{(12)}{\leq} \gamma \| x - x^* \| \sup_{t \in [0,1]} \| t(x - x^*) \|$$

$$\leq \gamma \| x - x^* \| \| x - x^* \|$$

et donc : $q(x) \leq \gamma \| x - x^* \|$, $\forall x \in S$.

(où $q(x)$ est une quantité non négative).

Considérons l'inégalité (16) du pas #1 et la constante c apparaissant dans la définition (9) d'une approximation fortement consistante.

Nous aurons, pour tout $(x, H) \in S \times D'_H$:

$$\| x^* - G(x, H) \|$$

$$\underset{(16)}{\leq} \left\{ \eta \left[\| J(x,H) - F'(x) \| + \| F'(x) - F'(x^*) \| \right] + \eta\, q(x) \right\} \| x - x^* \|$$

$$\leq \eta \| J(x, H) - F'(x) \| \| x - x^* \| + \eta \| F'(x) - F'(x^*) \| \| x - x^* \| + \eta\, q(x) \| x - x^* \|$$

$$\underset{(9),(12)}{\leq} \eta c \| H \| \| x - x^* \| + \eta \gamma \| x - x^* \|^2 + \eta \gamma \| x - x^* \|^2$$

$$\leq \eta c \| H \| \| x - x^* \| + 2 \eta \gamma \| x - x^* \|^2$$

$$\leq \alpha_2 \| H \| \| x - x^* \| + \alpha_1 \| x - x^* \|^2$$

en posant : $\alpha_1 = 2\gamma\eta$, $\alpha_2 = \eta c$

où η est défini par (15').

Nous savons jusqu'à présent que si nous

possédons une approximation consistante, l'application :

$G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} Fx$ est définie dans un certain voisinage $S = S(x^*, \delta)$ de la racine x^* et pour tout H appartenant à $D'_H \doteq D_H \cap S(0, r)$. Elle satisfait aussi la relation :

$\| x^* - G(x, H) \| \leq W(x, H) \| x - x^* \|$ pour tout $x \in S$ et $H \in D'_H$ où $W(x, H)$ tend vers zéro quand (x, H) tend vers $(x^*, 0)$.

Mais rien encore ne nous permet de dire si tous les itérés restent dans un voisinage suffisamment proche de x^* et convergent vers cette racine. Rien non plus ne nous indique si le fait d'avoir une telle approximation a une influence quelconque sur la vitesse de convergence de la suite. Par le théorème suivant, appelé le théorème de convergence de l'approximation consistante, nous allons combler cette lacune.

3-4 <u>Théorème 2</u> : <u>Théorème de convergence de l'approximation consistante</u>

« Soit $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction G-différentiable dans un voisinage ouvert $S_0 \subset D$ de $x^* \in D$ telle qu'en ce point : $Fx^* = \theta$, F' est continue et $F'(x^*)$ non singulière.

Soit J défini par la relation (6) une approximation consistante de F' sur S_0.

ALORS :

(I) Il existe une boule $S_1 \triangleq S(x^*, \delta_1) \subset S_0$ et une constante $r_1 > 0$, telles que : pour tout $x^0 \in S_1$ et toute suite $\{H_k\} \subset D_H^1 \triangleq D_H \cap S(0, r_1)$, les itérés $\{x^k\}$ engendrés par l'équation (7) restent dans S_1 et convergent vers x^*.

(II) En outre, si $\lim_{k \to \infty} H_k = 0$,

ALORS : $R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0 \quad (17)$ ».

Démonstration

Pas # 1 Soient donnés les ensembles $S = S(x^*, \delta)$ et $D'_H = D_H \cap S(0, r)$ et l'application (16") du théorème 1 : $W : S \times D'_H \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Pour tout $\alpha \in (0,1)$, il existe $\delta_1 > 0$ et $r_1 > 0$ tels que : $W(x, H) \leq \alpha$, pour tout $(x, H) \in S_1 \times D^1_H$ où : $S_1 = S(x^*, \delta_1)$, $D^1_H = D_H \cap S(0, r_1)$.

En conséquence, l'opérateur :

$$G : S_1 \times D^1_H \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, H) \rightsquigarrow G(x, H) \hat{=} x - J(x, H)^{-1} Fx \quad (10)$$

satisfait l'équation :

(18) $\|x^* - G(x, H)\| \leq \alpha \|x - x^*\|$, $\forall (x, H) \in S_1 \times D^1_H$

c'est-à-dire : uniformément pour tout $H \in D^1_H$, l'opérateur (10) est un opérateur de contraction en x.

Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, nous pouvons choisir un $\delta_1 \leq \delta$ et $r_1 \leq r$ tels que : $W(x, H) \leq \alpha$, $\forall x \in S_1 = S(x^*, \delta_1)$, $H \in D^1_H \hat{=} D_H \cap S(0, r_1)$.

(nous nous trouvons dans des voisinages plus petits de $(x^*, 0) \in S \times D_H$).

A partir de ce fait, l'opérateur défini par (10) est tel que :

$$\| x^* - G(x, H) \| \leq \alpha \| x - x^* \| \quad , \quad \alpha < 1.$$

$$\forall (x, H) \in S_1 \times D_H^1 .$$ ■

- Remarquons que l'inégalité précédente indique que : <u>uniformément</u> pour tout $H \in D_H \cap S(0, r_1)$, le point $G(x, H)$ est plus proche de x^* que x ; on a donc que : <u>uniformément pour tout $H \in D_H \cap S(0, r_1)$, l'opérateur $G(\cdot, H)$ est un opérateur de contraction en x.</u>

<u>Pas # 2 :</u> <u>Lemme auxiliaire</u>

Puisque nous savons maintenant que uniformément pour H suffisamment petit, l'opérateur défini par (10) est un opérateur de contraction en x, lorsque

J est une approximation consistante, nous allons considérer dans ce pas le lemme auxiliaire suivant :

« Soit $G : D \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Supposons qu'il existe :

- des ensembles $S = S(x^*, \delta) \subset D$ et $D'_H \subset D_H$
- une constante $\alpha < 1$

tels que : $\| G(x, H) - x^* \| \leq \alpha \| x - x^* \|$

pour tout $(x, H) \in S \times D'_H$.

ALORS, pour tout $x^0 \in S$ et pour toute suite $\{H_k\} \subset D'_H$, les itérés engendrés par le processus itératif :

$$x^{k+1} = G(x^k, H_k) \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

restent dans S et convergent vers x^*.

En outre : $R_1\{x^k\} \leq Q_1\{x^k\} \leq \alpha$. »

Démonstration :

a) Procédons par récurrence :

$$\| x^{k+1} - x^* \| = \| G(x^k, H_k) - x^* \|$$

$$\leq \alpha \| x^k - x^* \| = \alpha \| G(x^{k-1}, H_{k-1}) - x^* \|$$

$\leq \alpha^2 \| x^{k-1} - x^* \| \ldots \leq \alpha^{k+1} \| x^0 - x^* \|$

et donc, tout x^k reste dans S et converge vers x^*, point d'attraction du procédé itératif : $G(x, H)$.

b) : <u>$R_1 \{x^k\} \leq Q_1 \{x^k\}$</u> dans chaque norme

Supposons que $Q_1 \{x^k\} < \infty$ et posons : $\varepsilon_k = \| x^k - x^* \|$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\gamma = Q_1 \{x^k\} + \varepsilon$ il existe un $k_0 \geq 0$ tel que :

$$\varepsilon_k \leq \gamma \, \varepsilon_{k-1} \leq \gamma^2 \varepsilon_{k-2} \leq \ldots \leq \gamma^{k-k_0} \varepsilon_{k_0}, \quad \forall k \geq k_0$$

$$R_1 \{x^k\} = \limsup_{k \to \infty} \| x^k - x^* \|^{1/k}$$

donc, $R_1 \{x^k\} = \limsup_{k \to \infty} (\varepsilon_k)^{1/k}$

$$\leq \gamma \limsup_{k \to \infty} \left[\frac{\varepsilon_{k_0}}{\gamma^{k_0}} \right]^{1/k} = \gamma$$

et puisque ε est arbitraire,

$$R_1 \{x^k\} \leq Q_1 \{x^k\}.$$

c/ $Q_1 \{x^k\} \leq \alpha$

Par définition :

$$Q_1 \{x^k\} = \limsup_{k \to \infty} \frac{\| x^{k+1} - x^* \|}{\| x^k - x^* \|}$$

Or, par hypothèse, on sait que :

$$\| G(x, H) - x^* \| = \| x^{k+1} - x^* \| \leq \alpha \| x^k - x^* \|$$

d'où :

$$\frac{\| x^{k+1} - x^* \|}{\| x^k - x^* \|} \leq \alpha \quad \text{et donc } Q_1 \{x^k\} \leq \alpha$$

Pas # 3 — Le pas # 2, l'existence de $S_1 = S(x^*, \delta_1) \subset S_0$, d'une constante $\alpha < 1$, de $r_1 > 0$. tels que pour tout $(x, H) \in S_1 \times D_H^1$, l'équation (18) est vraie, entraînant l'assertion (I). En outre :
$R_1 \{x^k\} \leq Q_1 \{x^k\} \leq \alpha$.

Nous satisfaisons entièrement les conditions du lemme présenté dans le pas #2, avec le procédé itératif :

$$G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} Fx$$

Nous pouvons donc conclure que la suite $\{x^k\}$ existe, $x^k \in S_1$ et que la suite $\{x^k\}$ converge vers x^*, pour tout couple $(x^0, H) \in S_1 \times D_H^1$.

En outre : $R_1\{x^k\} \leq Q_1\{x^k\} \leq \tau$.

<u>Pas # 4</u> : $\begin{cases} \text{En outre : si } \lim\limits_{k \to \infty} H_k = 0, \\ R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0. \end{cases}$

Observons, par les relations (10) et (11) que :

$$\frac{\| x^{k+1} - x^* \|}{\| x^k - x^* \|} = \frac{\| G(x^k, H_k) - x^* \|}{\| x^k - x^* \|} \leq W(x^k, H_k) \qquad (19)$$

Comme :

. $W(x, H) \longrightarrow 0$ si $(x, H) \longrightarrow (x^*; 0)$ dans $S_1 \times D_H^1$

. par le pas # 3 :

$\forall x^0 \in S_1$, $\forall \{H_k\} \in D_H^1$, $x^k \in S_1 \longrightarrow x^*$.

. par hypothèse : $H_k \longrightarrow 0$ si $k \longrightarrow \infty$, nous aurons donc que :

$$w(x^h, H_h) \longrightarrow 0 \quad \text{pour tout } x^h \in S_1,$$

$$x^h \longrightarrow x^*, \text{ et } \{H_h\} \in D_H^1,\ H_h \longrightarrow 0$$

Donc, en prenant la limite supérieure dans (19) des deux côtés de l'inégalité, nous obtenons : $Q\{x^h\} \leq 0$.

Par définition des facteurs de convergence (§ 1, 1-3) et comme démontré dans le pas # 2, :

$$0 \leq R_1\{x^h\} \leq Q_1\{x^h\}$$

On obtient donc que

$$R_1\{x^h\} = Q_1\{x^h\} = 0.$$

■

Conclusions.

Le théorème 2 nous apporte une indication peu négligeable en ce qui concerne la vitesse de convergence d'une méthode.

En effet, si nous possédons un procédé

du type : $x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k$,
$k = 0, 1, \ldots$;

Nous savons par ce théorème que si J est une approximation consistante de F' sur un domaine $D_0 \subset D$, l'opérateur $G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} Fx$ est un opérateur de contraction en x et x^* est un point d'attraction de la méthode. Dès lors, si nous choisissons un point de départ x^0 suffisamment près de x^* et si la suite des matrices $\{H_k\}$ a une borne supérieure suffisamment petite, alors :

1) $\{x^k\}$ restera dans le voisinage de la racine x^*

2) $\{x^k\} \longrightarrow x^*$

3) En outre, si $H_k \longrightarrow 0$, alors :

$$R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0$$

Nous voyons maintenant l'intérêt d'avoir une approximation consistante. Elle nous permet d'affirmer que la méthode considérée converge à la fois R- et Q- superlinéairement et ce, grâce au fait qu'elle permet d'obtenir un opérateur de contraction en x.

Nous aurons donc deux choses à démontrer :

1°) l'approximation J définie par (6) est consistante

2°) $\lim\limits_{h \to \infty} H_h = 0$

C'est ce que nous ferons dans le paragraphe suivant.

§ 4 L'APPROXIMATION J DANS LA METHODE SECANTE EST CONSISTANTE

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, l'intérêt d'avoir une approximation consistante.

En ce qui concerne la méthode sécante, l'opérateur qui approxime la dérivée de F à chaque itération est J défini par (6)

C'est donc à lui qu'incombe la nécessité d'être une approximation consistante.

Rappelons la définition de J et analysons les termes dont il dépend.

$$J : D_J \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$$(x, H) \rightsquigarrow J(x, H) \stackrel{\Delta}{=} (F(x + He^1) - Fx, \ldots, F(x + He^n) - Fx)\, H^{-1} \qquad (6)$$

où si D est le domaine de définition de F,

$$D_J \times D_H = \{ (x, H) \mid x + He^i \in D \quad i = 1, \ldots, n ; \; H \text{ est non singulière} \}.$$

A la $k^{\text{ème}}$ - itération, J dépend donc du point x^k et de la matrice H_k définie par : $(x^{k,1} - x^k, \dots, x^{k,n} - x^k)$

où $x^{k,i}$ soit n points auxiliaires donnés

$i = 1, \dots, n$.

Pour que J soit complètement calculable, il faut en plus que la matrice H_k soit inversible.

Nous allons cependant exiger plus que cela : nous allons demander que H_k appartienne à une famille de matrices uniformément non singulières.

Nous en verrons l'utilité dans la suite.

Commençons par définir cette nouvelle notion

4-1 Définition

Soit $\sigma > 0$ donné

Posons : $K(\sigma) \stackrel{\Delta}{=} \{ H = (h^1, \dots, h^n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid$

$$h^j \neq \theta,\ j = 1, \dots, n\ ;\ \left| \det \left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \dots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right) \right| \geq \sigma \} \qquad (20)$$

Une famille de matrices $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est uniformément non singulière si $Q \subset K(\sigma)$ pour un certain $\sigma > 0$ ∎

- Remarquons que si $K(\sigma)$ est non vide, alors toutes les matrices appartenant à $K(\sigma)$ seront non singulières puisque le déterminant est non nul.
- Remarquons aussi que, étant donné une norme dans $\mathbb{R}^n$, il existe une constante σ_0 telle que pour tout $\sigma > \sigma_0$, $K(\sigma)$ est vide et pour tout $\sigma \leq \sigma_0$, $K(\sigma)$ n'est pas vide, [5]. Cette constatation se base sur l'inégalité de Hadamard à savoir:

$$|\det H| \leq \prod_{i=1}^{n} \| h^i \|_2 \qquad (21)$$

où h^i sont les vecteurs colonnes de H.
- Remarquons finalement que grâce à l'inégalité (21), nous pouvons déduire que pour toute matrice $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left| \text{dét}\left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \dots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right) \right| \leq 1$$

Il s'ensuit donc que σ sera une constante telle que : $0 < \sigma \leq 1$.

Pour démontrer que J est une approximation consistante, considérons en premier lieu la caractérisation suivante d'une famille de matrices uniformément non singulières, caractérisation qui n'offre qu'un intérêt purement conceptuel.

4 - 2 Lemme 1

(I) Soit $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un ensemble de matrices non singulières.

ALORS, Q est uniformément non singulière si et seulement s'il existe une constante α telle que :

$$\|(h^1/\|h^1\|, \dots, h^n/\|h^n\|)^{-1}\| \leq \alpha, \ \forall H \in Q \qquad (22)$$

(II) De plus, s'il existe une constante β telle que :

$$\| H \| \| H \|^{-1} \leq \beta \qquad \forall H \in Q \qquad (23)$$

ALORS, Q est uniformément non singulière

(I) a) <u>Pas # 1</u> : <u>Condition nécessaire</u>

Si $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, si les éléments de Q sont non singuliers et si $Q \subset$ l'ensemble $K(\sigma)$ défini par (20), $\sigma > 0$, alors, il existe un σ tel que (22) soit vrai.

Posons $K_1 = \{ A = (a^1, \dots, a^n) \in K(\sigma) \mid \| a^j \| = 1, \ j = 1, \dots, n \}$

1°) <u>K_1 est borné</u>

En effet, tous les vecteurs colonnes a^j des matrices $A \in K_1$ sont tels que $\| a^j \| = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Or, en prenant la norme induite l_1,

$$\| A \|_1 \triangleq \max \{ \| a^j \|_1 \}_{j=1}^{n} = 1 .$$

Tout élément de K_1 est donc borné, ce qui implique que K_1 est borné.

2°) <u>K_1 est fermé</u>.

Si $\{A_k\} \subset K_1$ est une suite convergente telle que $\lim_{k \to \infty} A_k = A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

alors $\| a^j \| = 1$, $j = 1, .., n$ et $|\det A| \geq \sigma$

Nous savons que le déterminant est une fonction continue de ses éléments et de même que la norme est continue dans ses éléments. Il s'ensuit que $\| a^j \| = 1$

$j = 1, .., n$ et $|\det A| \geq \sigma$.

Donc, $A \in K_1$ et K_1 est fermé.

3°) <u>Considérons la fonction</u>:

$$\left\{ \begin{array}{l} f : K_1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \\ \qquad A \rightsquigarrow f(A) = \| A^{-1} \| \end{array} \right.$$

<u>Cette fonction est continue</u>

En effet - la norme est continue dans

ses arguments.

- $A^{-1} = \left(\dfrac{\text{mineur}(A)}{\text{dét}(A)} \right)$ et nous savons que dét(A) est aussi une fonction continue dans ses arguments. Comme le mineur (A) n'est autre qu'un déterminant, il sera également continu.

D'où l'application : $K_1 \longrightarrow \dfrac{\text{mineur}(A)}{\text{dét}(A)}$

est continue car $|\text{dét}(A)| \geq \sigma$.

La fonction f est donc une fonction continue.

De plus, K_1 est compact. Or une fonction continue sur un compact est bornée.

Nous pouvons donc affirmer qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que :

$$\| A^{-1} \| \leq \alpha, \quad \forall A \in K_1.$$

4°) Pour tout $H \in Q$, la matrice

$$\tilde{H} = (h^1 / \| h^1 \|, \ldots, h^n / \| h^n \|) \qquad (24)$$

appartient à K_1 et donc : $\| \tilde{A}^{-1} \| \leq \alpha$

ce qui est exactement la relation (22)

cqfd.

b) Pas # 2 : Condition suffisante

S'il existe $\alpha > 0$, tel que (22) soit vrai, et si $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est une matrice non singulière, alors, $Q \subset K(\sigma)$ défini par (20), $\sigma > 0$.

L'ensemble $S = \{ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid \|A\| \leq \alpha \}$ est un ensemble fermé et borné (donc compact) parce qu'il peut être identifié à un fermé et borné de $\mathbb{R}^{n^2}$

(Remarquons que dans $\mathbb{R}^{n^2}$, la matrice A peut être représentée comme un vecteur à n^2 éléments tandis que dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, A est représentée par une matrice $n \times n$)

Comme le déterminant est une fonction continue dans ses éléments, il existe une constante $\tau_0 > 0$ telle que :

$|\text{dét } A| \leq \tau$, pour tout $A \in S$ (une fonction continue sur un compact est bornée).

La matrice $\tilde{H}^{-1} = (h^1/\|h^1\|, \ldots, h^n/\|h^n\|)^{-1}$ appartient à l'ensemble S puisque par hypothèse : $\|\tilde{H}^{-1}\| \leq \alpha$, pour tout $H \in Q$.

Nous obtenons donc que :

$|\text{dét } \tilde{H}| = (1 / |\text{dét } \tilde{H}^{-1}|) \geq 1/\tau$

c'est-à-dire :

$|\text{dét}(h^1/\|h^1\|, \ldots, h^n/\|h^n\|)| \geq \sigma$

pour tout $H \in Q$, en posant $\sigma = 1/\tau$.

c.q.f.d.

(II) $\left\{\begin{array}{l} \underline{\text{Hypothèse}} : \ \|H\| \, \|H^{-1}\| \leq \beta \quad \forall H \in Q \qquad (23) \\ \underline{\text{Thèse}} : \ Q \text{ est uniformément non singulier.} \end{array}\right.$

a) Rappel $\left\{\begin{array}{l} \text{Théorème d'équivalence des} \\ \text{normes et des normes induites} \end{array}\right.$

« Prenons deux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ dans un espace de dimension finie $\mathbb{R}^n$.

Il existe des constantes c_1, c_2 telles

| que $c_1 \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq c_2 \| x \|_1$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ ».

Considérons les normes matricielles $\| A \|_1$ et $\| A \|_2$ induites des normes vectorielles $\| x \|_1$ et $\| x \|_2$.

Il existe une relation entre les constantes d'équivalence d'une norme vecteur et celles d'une norme matricielle, cette relation étant donnée par le théorème suivant :

« Posons $d_1 = c_1 / c_2$ et $d_2 = c_2 / c_1$.
Nous obtenons alors :
$d_1 \| A \|_1 \leq \| A \|_2 \leq d_2 \| A \|_1$, $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (e5) ».

(Démonstration : voir Annexe 1)

Grâce à ce théorème, nous pouvons sans perdre de généralité, prendre la norme induite par l_1.

b) L'assertion (II) est vraie

Considérons la matrice $\tilde{H}$ donnée par

(24). Remarquons que :

$$\hat{H} = H D^{-1} \quad \text{où} \quad D = \mathrm{diag}(\|h^1\|, \dots, \|h^n\|)$$

Prenons la norme induite l_1 de cette matrice D.

$$\|D\|_1 = \max_j \|h^j\|_1 = \|H\|_1.$$

L'équation (25) implique qu'il existe une constante c telle que :

$$\|D\| \leq c\,\|H\|.$$

On a donc :

$$\|\hat{H}^{-1}\| = \|DH^{-1}\| \leq \|D\|\|H^{-1}\| \leq c\,\|H\|\|H^{-1}\|$$

$$\leq c\,\beta \quad \text{par hypothèse,}$$

ce qui implique par (I) que $Q \in K(\sigma)$ pour quelque $\sigma > 0$. ▬

Voyons à présent l'intérêt de cette notion. Nous allons démontrer que si la matrice H entrant dans la définition de l'approximation J définie par (6) appartient à une famille uniformément non singulière, alors J est une approximation consistante de la dérivée F' sur une partie D_0 du domaine de définition D de F.

4-3 Théorème 3

Considérons

- la fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continûment différentiable sur un ouvert D.
- $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, une famille de matrices uniformément non singulières telle que la matrice nulle soit un point limite de Q

(I) <u>ALORS</u>, pour tout ensemble convexe et compact $D_0 \subset D$, il existe une constante $r > 0$ telle que l'opérateur J donné par (6)

a) - est défini sur $D_0 \times D_H$ (où $D_H = \{ H \in Q \mid \|H\| \leq r \}$)

b) - est une approximation consistante de F' sur D_0.

(II) Si

$$\| F'(x) - F'(y) \| \leq \gamma \| x - y \| , \qquad (26)$$

pour tout $x, y \in D$,

<u>ALORS</u>, J est une approximation fortement consistante de F' sur D_0.

<u>Démonstration</u>.

<u>Remarques préliminaires</u>

1) Il faut que la matrice nulle soit un point limite de D_H pour que J définie par (6) puisse devenir une approximation consistante (voir la définition 3-1) ; c'est la raison pour laquelle on a supposé que 0 est un point limite de Q.

2) Dans la démonstration, nous allons utiliser la norme et la norme induite l_1 (ceci se fait sans perdre de généralité car les normes et les normes induites sont équivalentes).

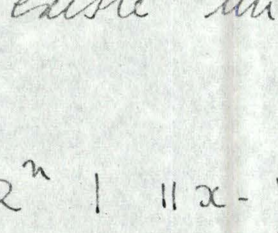
Pas # 1 : Le fait que F est continûment différentiable sur l'ouvert D contenant le compact et convexe D_0, et le fait que Q est uniformément non singulière mènent à l'assertion [(I) a)].

Puisque le compact et convexe D_0 est contenu dans l'ouvert D, on peut sans perdre de généralité affirmer que D_0 est tel qu'il existe un $r > 0$ pour lequel l'ensemble :

$$D_r \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\|_1 \leq r,\ y \in D_0 \} \qquad (27)$$

est convexe et compact et $D_r \subset D$

Nous sommes dans la situation suivante :



Nous avons que $J(x, H) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in D_0$

et $\forall H \in D_H \triangleq \{ H \in Q \mid \|H\|_1 \triangleq \max_j \|h^j\|_1 \leq r \}$

En effet :

$$J(x, H) \triangleq \left(F(x + He^1) - Fx, \ldots, F(x + He^n) - Fx \right) H^{-1} \qquad (6)$$

pour tout $(x, H) \in D_0 \times D_H$,

$$x + He^j \triangleq x + h^j \in D_r \subset D.$$

et donc, le premier facteur à droite de (6) existe. En outre, pour tout $H \in D_H$, $H \in Q$ et donc H est non singulière (puisque Q est uniformément non singulière par hypothèse) ; donc, H^{-1} existe.

On a donc que, pour tout $(x, H) \in D_0 \times D_H$,

$$J(x, H) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n).$$

<u>Pas # 2</u> $\left[\right.$ Le fait que F est continûment différentiable sur l'ouvert D contenant le convexe et compact $D_0 \subset D$ et le fait que Q est uniformément non singulière mènent à l'assertion [(I) b)]

Comme 0 est un point limite de D_H (0 est un point limite de Q), il suffit de démontrer que pour $J(x,H)$ défini par (6) :

$$\lim_{H \to 0;\, H \in D_H} J(x,H) = F'(x) \text{ uniformément en } x \in D_0 \quad (28)$$

c'est-à-dire : $\forall \eta > 0$, $\exists \rho \in (0, r)$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \|H\|_1 \leq \rho \Rightarrow \|J(x,H) - F'(x)\|_1 \leq \eta \\ H \in Q \qquad\qquad \forall x \in D_0 \end{array}\right\} \quad (29)$$

Soit $\bar{B}(0,r) = \{ h \in \mathbb{R}^n ;\ \|h\|_1 \leq r \}$ où r est choisi au pas # 1 et définissons l'application T par :

$$\left.\begin{array}{l} T : D_0 \times \bar{B}(0,r) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad (x, h) \rightsquigarrow T(x,h) \triangleq \\ \qquad\qquad F(x+h) - Fx - F'(x)h \end{array}\right\} \quad (30)$$

Remarquons qu'il est facile d'établir que T est définie et permet d'obtenir :

$$\left.\begin{array}{l} J(x,H) - F'(x) = (T(x,h^1), \ldots, T(x,h^n))\, H^{-1} \\ \quad \text{pour tout } (x,H) \in D_0 \times D_H \end{array}\right\} \quad (31)$$

- En effet : pour tout $(x,H) \in D_0 \times D_H$,

$$J(x,H) - F'(x) \underset{(6)}{=} (F(x + He^1) - Fx, \ldots,$$

$$\ldots, F(x+He^n) - Fx) H^{-1} - F'(x) H H^{-1}$$

$$= \left(F(x+h^1) - Fx - F'(x)h^1, \ldots, F(x+h^n) - Fx - F'(x)h^n\right) H^{-1}$$

$$\underset{(30)}{=} \left(T(x,h^1), \ldots, T(x,h^n)\right) H^{-1} \qquad \blacksquare$$

Par le lemme 1, comme Q est uniformément non singulière, nous avons que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{il existe un } \alpha > 0, \text{ tel que :} \\ \|(h^1/\|h^1\|, \ldots, h^n/\|h^n\|)^{-1}\|_1 \leq \alpha, \ \forall H \in D_H \end{array}\right\} (32)$$

Nous avons en outre que:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \rho \in (0, r) \text{ tel que} \\ \|h\|_1 \leq \rho \Rightarrow \|T(x,h)\|_1 \leq \varepsilon \|h\|_1, \ \forall x \in D_0 \end{array}\right\} (33)$$

$\blacksquare$ En effet, rappelons-nous que:

« Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction G-différentiable sur l'ensemble convexe $D_c \subset D$, ALORS, pour tout $x, y, z \in D_c$:

$$\|Fy - Fz - F'(x)(y-z)\|_1 \leq \sup_{t \in [0,1]} \|F'(z + t(y-z)) - F'(x)\|_1 \|y-z\|_1$$ ».

Nous pouvons appliquer ce théorème en faisant les remplacements:

$x \leftarrow x$, $y \leftarrow x+h$, $z \leftarrow x$ où

$x \in D_0$, $h \in \bar{B}(0,r)$

(si $(x,h) \in D_0 \times \bar{B}(0,r)$, alors x et $x+h$ appartiennent à D_r (convexe) $\subset D$).

On a donc par (30) :

$$\left.\begin{array}{l} \|T(x,h)\|_1 \leq \sup\limits_{t \in [0,1]} \|F'(x+th) - F'(x)\|_1 \|h\|_1 \\ \qquad\qquad \text{pour tout } (x,h) \in D_0 \times \bar{B}(0,r) \end{array}\right\} (34)$$

Or, on a aussi que F' est uniformément continue sur le compact D_r défini par (27), ce qui implique :

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \ \exists \rho \in (0,r) \text{ tel que :} \\ \|h\|_1 \leq \rho \Rightarrow \|F'(x+th) - F'(x)\|_1 \leq \varepsilon \\ \qquad\qquad \text{pour tout } x \in D_0, \text{ pour tout } t \in [0,1] \end{array}\right\} (35)$$

L'application de (35) et (34) nous donne (33). ▬

- Nous sommes prêts à établir la thèse.

En effet :

pour tout $x \in D_0$, pour tout $H \in D_H^\rho =$

$\{ H \in Q \; ! \; \| H \|_1 \triangleq \max_{j=1,\dots,n} \| h^j \|_1 \leq \rho \}$ où ρ est défini dans (33) ;

$$\| J(x,H) - F'(x) \|_1 \overset{(31)}{=} \| (T(x,h^1), \dots, T(x,h^n)) H^{-1} \|_1$$

$$= \left\| \left(\frac{T(x,h^1)}{\|h^1\|}, \dots, \frac{T(x,h^n)}{\|h^n\|} \right) \times \left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \dots\dots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right)^{-1} \right\|_1$$

$$\leq \left\| \left(\frac{T(x,h^1)}{\|h^1\|}, \dots, \frac{T(x,h^n)}{\|h^n\|} \right) \right\|_1 \left\| \left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \dots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right)^{-1} \right\|_1$$

$$\underset{(32)-(33)}{\leq} \varepsilon \alpha$$

Il suit donc que (29) est vrai en prenant

$$M = \varepsilon \alpha$$

c.q.f.d.

<u>Pas II 3</u> L'hypothèse additionnelle que F' est Lipschitz continue sur D, c'est-à-dire qu'on a la relation (26), mène à l'assertion (II)

En effet, nous aurons alors qu'il existe un $c > 0$ tel que :

$$\left. \begin{array}{l} \| J(x,H) - F'(x) \|_1 \leq c \, \| H \|_1 \\ \quad \text{pour tout } (x,H) \in D_0 \times D_H \end{array} \right\} \qquad (36)$$

où $D_0 \times D_H$ est le domaine d'existence de $\mathcal{J}(x, H)$ discuté au pas # 1, donc
$D_H \stackrel{\Delta}{=} \{ H \in Q \mid \|H\|_1 \leq r \}$.

- Rappel : Lemme

« Considérons une fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continûment différentiable sur un ensemble convexe $D_c \subset \overset{\circ}{D}$. Supposons qu'il existe des constantes $\alpha \geq 0$ et $p \geq 0$ telles que pour tout $u, v \in D_c$,

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq \alpha \|u - v\|^p.$$

Dans ces conditions, nous avons pour tout $x, y \in D_c$:

$$\|Fy - Fx - F'(x)(y-x)\| \leq \left(\frac{\alpha}{p+1}\right) \|y - x\|^{p+1} \text{ ».}$$

(Démonstration : voir Annexe 2 bis).

- Appliquons ce lemme avec : $p \leftarrow 1$, $\alpha \leftarrow \gamma$, $x \leftarrow x$, $y \leftarrow x + h$ où $(x, h) \in D_0 \times \bar{B}(0, r)$

(En effet, comme D_r (convexe) $\subset \overset{\circ}{D}$ et comme (26) est vrai, nous pouvons appliquer ce lemme en prenant $D_c = D_r$, on a en outre que pour tout $(x, h) \in D_0 \times \bar{B}(0, r)$, x et $x + h \in D_r$).

On obtient donc, en utilisant (30) :

$$\left.\begin{array}{l} \| T(x, h) \|_1 \leq \dfrac{\gamma}{2} \| h \|_1^2 \\ \text{pour tout } (x, h) \in D_0 \times \bar{B}(0, r) \end{array}\right\} \quad (37)$$

En procédant de manière analogue à celle du pas #2, nous obtenons alors : pour tout $x \in D_0$, pour tout $H \in D_H \triangleq \{ H \in Q \, ; \, \| H \|_1 \leq r \}$:

$$\| J(x, H) - F'(x) \|_1 \leq \left\| \left(\frac{T(x, h^1)}{\| h^1 \|}, \dots, \frac{T(x, h^n)}{\| h^n \|} \right) \right\| \times$$

$$\left\| \left(\frac{h^1}{\| h^1 \|}, \dots, \frac{h^n}{\| h^n \|} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{\alpha \gamma}{2} \max_j \| h^j \|$$

$$\leq \frac{\alpha \gamma}{2} \| H \|_1$$

Il suit donc que (36) est vrai avec

$c = \dfrac{\alpha \gamma}{2}$

■

Remarques

Dans le théorème 3, nous avons introduit la restriction que F était continûment différentiable sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$.
Supposons maintenant que $D = \mathbb{R}^n$ et voyons quelles sont les modifications apportées par cette extension.
Nous avons que pour toute partie convexe et compacte $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, $J(x, H)$ est définie sur $D_0 \times Q$ et est une approximation consistante de F' sur D_0
En conséquence, $J(x, H)$ sera définie sur $\mathbb{R}^n \times Q$ et sera une approximation consistante de F' sur toute partie convexe et compacte D_0 de $\mathbb{R}^n$.
En outre, si F' est Lipschitz continue sur $\mathbb{R}^n$, alors, $J(x, H)$ sera une approximation fortement consistante de F' sur $\mathbb{R}^n$
Le théorème 3 peut s'énoncer de la

façon suivante :

« Soit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable. Soit $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une famille de matrices uniformément non singulière telle que la matrice nulle soit un point limite de Q.

ALORS, pour tout ensemble convexe et compact D_0 de $\mathbb{R}^n$, l'opérateur J donné par (6) est bien défini sur $D_0 \times D_H$ où $D_H = Q$ et est une approximation consistante de F' sur D_0

De plus, si F' est Lipschitz continue sur $\mathbb{R}^n$, alors $J(x, H)$ est une approximation fortement consistante de F' sur $\mathbb{R}^n$. »

Conclusions.

Nous avons donc démontré que sous les hypothèses suivantes :

1°) si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continûment différentiable sur un ouvert D

2°) si à chaque itération, la matrice H appartient à une famille $Q \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ uniformément non singulière,

ALORS,

l'approximation J définie par (6) intervenant dans la méthode sécante générale est consistante.

Il s'ensuivra que sous ces mêmes hypothèses auxquelles viendra s'ajouter l'existence d'un point x^* tel que $Fx^* = \theta$, F' est continue et $F'(x^*)$ est non singulière, la suite engendrée par la récurrence (7) convergera superlinéairement vers la racine de la fonction : x^*.

si 1) x^0 est suffisamment près de x^*

2) la borne de $\{H_k\}$ est suffisamment petite

3) $H_k \longrightarrow 0$.

Dans le paragraphe suivant, nous expliciterons ce fait par le théorème appelé : « théorème de la sécante générale ».

§5 THEOREME DE LA SECANTE GENERALE

Jusqu'à présent, nous avons établi que :

1) la méthode sécante est un procédé itératif engendrant une suite de points $\{x^k\}$ par la récurrence :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

où $H_k = (x^{k,1} - x^k, \ldots, x^{k,n} - x^k)$

2) Si une famille de matrices H est uniformément non singulière, si 0 est un point limite de cette famille et si la borne supérieure de cette famille est suffisamment petite, alors :

$$J : D_J \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$$(x, H) \rightsquigarrow J(x, H) \triangleq (F(x + He^1) - Fx, \ldots, F(x + He^n) - Fx)\, H^{-1} \tag{6}$$

est une approximation consistante de F sur D_0, un voisinage compact et convexe de x^* : la racine de F. Nous allons aborder maintenant la convergence de la méthode. Envisageons en premier lieu un lemme nous donnant une des conditions nécessaires pour que J puisse devenir une approximation consistante de la dérivée de la fonction F à savoir : que la matrice nulle doit être un point limite de $K(\sigma)$ (voir définition : 3-1)

5-1 Lemme 2

« S'il existe une constante $\sigma > 0$, telle que $K(\sigma) \triangleq \{ H = (h^1, .., h^n) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid h^j \neq \theta$

$$j = 1, \dots, n ; \left| \text{dét} \left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \dots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right) \right| \geq \sigma \} \quad (20)$$

soit différent du vide.

Alors, Θ est un point limite de $K(\sigma)$. »

Démonstration

1°) $K(\sigma)$ est invariant sous une multiplication scalaire c'est-à-dire que si $H \in K(\sigma)$, alors $cH \in K(\sigma)$, $c \neq 0$

- En effet : multiplions la matrice H par une constante c, tous les éléments de H le sont aussi ce qui nous donne : $cH = (ch^1, \ldots, ch^n)$

$$\left| \text{dét} \left(\frac{ch^1}{\|ch^1\|}, \ldots, \frac{ch^n}{\|ch^n\|} \right) \right|$$

$$= \left| \text{dét} \left(\frac{c}{|c|} \frac{h^1}{\|h^1\|}, \ldots, \frac{c}{|c|} \frac{h^n}{\|h^n\|} \right) \right|$$

$$= \left| \text{dét} \left(\frac{h^1}{\|h^1\|}, \ldots, \frac{h^n}{\|h^n\|} \right) \right| \geq \sigma \text{ par hypothèse.}$$

et donc $cH \in K(\sigma)$ ■

2°) 0 est un point limite de $K(\sigma)$. si et seulement si il existe une suite dans $K(\sigma)$ qui tend vers zéro

Si $H \in K(\sigma)$, il suffit de prendre une suite de scalaires $<c_n>$ telle que :

$c_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ et nous obtiendrons :

$<c_n H> \subset K(\sigma)$ et $c_n H \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

∎

- Après ce lemme, passons maintenant au théorème proprement dit appelé théorème de la sécante générale.

5 - 2 : Théorème 4 : Théorème de la sécante générale

Considérons la fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continûment différentiable sur un ouvert D.
Supposons qu'il existe un point $x^* \in D$ tel qu'en ce point $Fx^* = \theta$, $F'(x^*)$ soit non singulière.
Soit $\sigma > 0$ choisie telle que $K(\sigma)$ défini par (20) soit non vide.
ALORS, sous ces hypothèses :
(I) Il existe une constante $r_1 > 0$ telle que

a) pour toute suite $\{H_k\} \subset K(\sigma)$ où

$\| H_k \| \leq r_1$, $k = 0, 1, \ldots,$

le procédé : $x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k$

avec

$$J : D_J \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

$$(x, H) \rightsquigarrow J(x, H) \triangleq (F(x + He^1) - Fx, \ldots$$

$$\ldots, F(x + He^n) - Fx) H^{-1} \qquad (6)$$

soit bien défini

b) $\lim_{k \to \infty} x^k = x^*$ pourvu que $\| x^0 - x^* \|$ soit suffisamment petite

(II) En outre, si $\lim_{k \to \infty} H_k = 0$, alors

$R_1 \{x^k\} = Q_1 \{x^k\} = 0.$

Démonstration

Pas # 1 Le fait que F est continûment différentiable sur un ouvert D et que $K(\sigma) \neq \phi$ permettent de conclure que J est une approximation consistante de F' sur un

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ensemble compact et convexe} \\ \bar{S} \triangleq \bar{S}(x^*, \delta) \subset D. \end{array} \right.$$

1°) Nous savons par hypothèse que $K(\sigma)$ défini par (20) est différent du vide. Nous possédons donc une famille de matrices uniformément non singulières. De plus, puisque $K(\sigma) \neq \phi$, nous pouvons appliquer le lemme 1 et en conclure que la matrice nulle est un point limite de $K(\sigma)$.

2°) Choisissons une constante δ telle que l'ensemble compact et convexe :
$\bar{S} = \bar{S}(x^*, \delta)$ soit inclus dans D.

Nous satisfaisons entièrement les hypothèses du théorème 3. Nous pouvons donc affirmer qu'il existe une constante $r > 0$ telle que l'opérateur $\mathcal{J}$ soit défini sur $\bar{S} \times D_H$ où $D_H = \{ H \in K(\sigma) \mid \|H\| \leq r \}$ et soit une approximation consistante de F' sur $\bar{S}$.

Pas # 2 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Par le pas \# 1, les assertions} \\ \text{(I) et (II) du théorème sont} \\ \text{vraies.} \end{array} \right.$

Observons que les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées. En particulier :

- $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est Gateaux-différentiable dans le voisinage ouvert $S = S(x^*, \delta)$ de $x^* \in D$.
- $Fx^* = \theta$
- F' est continue en x^*
- $F'(x^*)$ est non singulière.
- $J : \bar{S} \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

  $(x, H) \rightsquigarrow J(x, H)$.

  est une approximation consistante de F' sur $\bar{S}$.

En conséquence, il existe $\delta_1 \in (0, \delta)$ et $r_1 \in (0, r)$ telles que :

pour tout $x^0 \in S_1 = S(x^*, \delta_1)$ et
pour tout $\{H_k\} \subset \{H \,;\, H \in K(\sigma),$
$\|H\| \leq r_1\}$,
les itérés x^k engendrés par (7)
appartiendront à S_1 et convergeront
vers x^*.
En outre : si $\lim_{k \to \infty} H_k = 0$, alors,

$$R_1\{x^k\} = Q_1\{x^k\} = 0 \quad \blacksquare$$

Conclusion

Nous avons établi que la suite engendrée par la méthode sécante converge
MAIS cette convergence nécessite de nombreuses hypothèses sur la fonction F et sur les matrices H_k obtenues à chaque itération. En effet, F doit être continûment différentiable sur un ouvert

$D \subset \mathbb{R}^n$; les matrices H_k doivent appartenir à une famille de matrices uniformément non singulières de façon à ce que l'opérateur J soit une approximation consistante de F' sur un voisinage $\bar{S} = \bar{S}(x^*, \delta) \subset D$.

Elle exige en outre l'existence d'un point x^* tel qu'en ce point $Fx^* = \theta$, $F'(x^*)$ est non singulière.

Nous obtenons pourtant un résultat important quant à la vitesse de convergence. En effet, si la méthode converge et si $\lim\limits_{k \to \infty} H_k = 0$, elle converge superlinéairement ce qui n'est pas à rejeter.

Remarquons cependant que ce théorème ne nous donne aucun mécanisme de sélection des points auxiliaires : $x^{k,1}, \ldots, x^{k,n}$ déterminant la matrice H_k.

Il existe différents choix possibles de ces points auxiliaires, engendrant différentes méthodes.

Nous proposons, dans le paragraphe suivant de prendre $x^{k,1} = x^{k-1}, \ldots, x^{k,n} = x^{k-n}$.

Nous engendrerons de cette manière, la méthode $n+1$ points séquentiels et nous allons voir que pour ce choix, si x^{k} tend vers x^{*}, alors H_{k} tend vers zéro.

§6 APPLICATION DE LA METHODE SECANTE GENERALE

Afin d'illustrer la théorie précédente, nous allons l'appliquer à un cas particulier : la méthode "n+1 points séquentiels".
Considérons l'opérateur J défini par (6) ainsi que la formule de récurrence (7) à savoir :

$$x^{k+1} = x^{k} - J(x^{k}, H_k)^{-1} F x^{k} \qquad k = 0, 1, \dots,$$

A chaque itération, calculons la matrice H_k de la façon suivante :

$$H_k = (x^{k-1} - x^{k}, \dots, x^{k-n} - x^{k}) \qquad k = 0, 1, \dots,$$

nous obtenons de cette manière un nouveau procédé itératif :

$$(38) \begin{cases} x^{k+1} = x^{k} - J(x^{k}, H_k)^{-1} F x^{k} \\ H_k = (x^{k-1} - x^{k}, \dots, x^{k-n} - x^{k}) \\ \qquad\qquad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

Cette méthode est telle que chaque point x^k dépend de $n+1$ points PRÉCEDENTS.
C'est pourquoi, nous l'appellerons la méthode de " $n+1$ points séquentiels ".
Tout comme pour la méthode sécante générale, nous allons établir la convergence de la suite $\{x^k\}$ engendrée par (38) et sa vitesse de convergence.

6-1 Théorème 5 : Théorème de la méthode " $n+1$ points séquentiels ".

Considérons la fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 sur un ouvert D.
Supposons qu'il existe un point $x^* \in D$ tel que $Fx^* = \theta$, $F'(x^*)$ est non singulière
Supposons aussi qu'il existe un $\sigma > 0$ tel que $K(\sigma) \neq \phi$ où $K(\sigma)$ est défini par (20).

(I) ALORS, il existe une constante $\mu > 0$

telle que si

- la suite $\{x^k\}$ engendrée par la méthode

$$(38)\quad \begin{cases} x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k \\ H_k = (x^{k-1} - x^k, \dots, x^{k-n} - x^k) \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots,$$

est définie.

- $\| x^0 - x^* \|$ est suffisamment petite
- la matrice H_k obtenue à la $k^{\text{ème}}$ itération appartient à l'ensemble :

$\{ H \in K(\sigma) \mid \| H \| \leq r \}$

ALORS :

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^* \text{ et } R_1 \{x^k\} = Q_1 \{x^k\} = 0.$$

(II) Si la condition de Lipschitz :

$$\| F'(x) - F'(y) \| \leq \gamma \| x - y \| \qquad (26)$$

pour tout $x, y \in D$

est vérifiée,

ALORS :

la suite engendrée par la méthode (38)

satisfait l'inégalité : $O_R\{x^k\} \geq \tau$
où τ est la racine unique positive de :

$$t^{n+1} - t^n - 1 = 0.$$

Démonstration :

Pas #1 : Le fait que F est de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$, qu'il existe un point x^* tel que $Fx^* = \theta$, F' est non singulière en x^*, que $\| x^0 - x^* \|$ soit suffisamment petite, que $K(\sigma) \neq \phi$, et $H_k \in \{H \in K(\sigma) \mid \| H \| \leq r\}$, mènent à l'assertion (I).

En effet, nous remplissons entièrement les conditions du théorème 4 de la méthode sécante générale. Une application directe de ce théorème nous permet d'établir que la suite $\{x^k\}$ est bien définie et que $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$.

Remarquons que si la $\lim\limits_{k \to \infty} x^k = x^*$, alors : $\lim_{h \to \infty} H_h = 0$ (par définition de H_h)

nous pouvons donc conclure également à partir du théorème 4 que :

$$R_1 \{x^h\} = Q_1 \{x^h\} = 0.$$

CONSTATATION IMPORTANTE :

Puisque si x^h tend vers x^*, H_h tend vers zéro, il suffira que la méthode converge pour que nous soyons certains qu'elle converge R- et Q- superlinéairement.

Pas # 2 Le fait que nous satisfaisons la condition de Lipschitz (26), conduit à la conclusion que :
il existe un $h_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $h \geq h_0$:

$$\|x^{h+1} - x^*\| \leq (\alpha_1 + m\beta\alpha_2)\|x^h - x^*\|^2 + \alpha_2\beta\|x^h - x^*\| \sum_{j=1}^{m} \|x^{h-j} - x^*\|.$$

A) Nous savons que F est de classe C^1 sur un ouvert D. Nous possédons aussi une famille de matrices uniformément non singulières et la matrice nulle est un point limite de $K(\sigma)$, (voir lemme 2).

Nous satisfaisons la condition de Lipschitz (26). Nous pourrons donc appliquer le théorème 3. Nous en déduisons que J est une approximation fortement consistante de F' sur une boule

$$S_1 = S(x^*, \delta_1) \subset \bar{S} = \bar{S}(x^*, \delta).$$

Remarquons que nous satisfaisons aussi les hypothèses du théorème 1.

Dès lors, les itérés engendrés par la méthode (38) satisfont les inégalités:

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \alpha_1 \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_2 \|x^k - x^*\| \|H_k\| \qquad (39)$$

pour tout $k \geq k_0$.

B) Rappelons-nous le lemme suivant:

« Soit $\| . \|$ une norme arbitraire de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante η_2 telle que $\| A \| \leq \eta_2 \sum_{i=1}^{n} \| a^i \|$, pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ où :

$a^1, \dots, a^n$ sont les colonnes de A. ».

(Démonstration : voir Annexe 3).

c) Puisque la matrice H_h obtenue à la $h^{\text{ème}}$ itération appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, nous pouvons appliquer ce lemme. Il existe donc une constante β telle que :

$\| H \| \leq \beta \sum_{j=1}^{n} \| h^j \|$; $h^1, \dots, h^n$ sont les vecteurs colonnes de H

$\leq \beta \sum_{j=1}^{n} \| x^h - x^{h-j} \|$ (par définition de H_h)

$\leq \beta \sum_{j=1}^{n} \| x^h - x^* + x^* - x^{h-j} \|$.

$\leq \beta \sum_{j=1}^{n} \| x^h - x^* \| + \beta \sum_{j=1}^{n} \| x^{h-j} - x^* \|$

$$\leq n \beta \| x^h - x^* \| + \beta \sum_{j=1}^{n} \| x^{h-j} - x^* \| \qquad (40)$$

Remplaçons dans la relation (39), $\|H_k\|$ par sa borne supérieure obtenue en (40) nous obtenons : il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$,

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq (\alpha_1 + n\beta\alpha_2)\|x^k - x^*\|^2 + \alpha_2 \beta \|x^k - x^*\| \sum_{j=1}^{n} \|x^{k-j} - x^*\| \quad (41)$$

Pas # 3 Le fait que la condition de Lipschitz (26) est vérifiée et les résultats obtenus dans le pas # 2 conduisent à l'assertion (II).

Tout comme la méthode sécante, la méthode $n+1$ points séquentiels est un procédé itératif engendrant une suite de points $\{x^k\}$ par la récurrence (38) et demandant $n+1$ points de départ.

Nous établirons que $O_R\{x^k\} \geq \tau$ en nous basant sur le lemme suivant :

« Considérons un procédé itératif $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{F}, x^*)$ l'ensemble des suites engendrées par ce procédé et convergeant vers le point x^*. Soient encore $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ des constantes non négatives.

Si pour toute suite $\{x^k\} \in \mathcal{C}(\mathcal{F}, x^*)$, il existe un $k_0 \geq n$ tel que :

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq \| x^k - x^* \| \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \| x^{k-j} - x^* \|$$

pour tout $k \geq k_0$,

ALORS,

$O_R(\mathcal{F}, x^*) \geq \tau$ où τ est la racine positive unique de $t^{n+1} - t^n - 1 = 0$ ».

(Démonstration : ([5], th. 9.2.9, p 291))

Posons $\gamma_0 = \alpha_1 + n\beta\alpha_2$

$\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n = \alpha_2 \beta$.

Alors, la relation (41) du pas #2 s'énonce sous la forme :

$$\| x^{k+1} - x^* \| \leq \| x^k - x^* \| \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \| x^{k-j} - x^* \|,$$

pour tout $k \geq k_0$.

Une application directe du lemme précédent nous permet de conclure que :

$O_R\{x^k\} \geq \tau$ où τ est la racine positive unique de $t^{n+1} - t^n - 1 = 0$

■

6 - 2 : <u>Remarque concernant le fait que $O_R\{x^k\} \geq \tau$.</u>

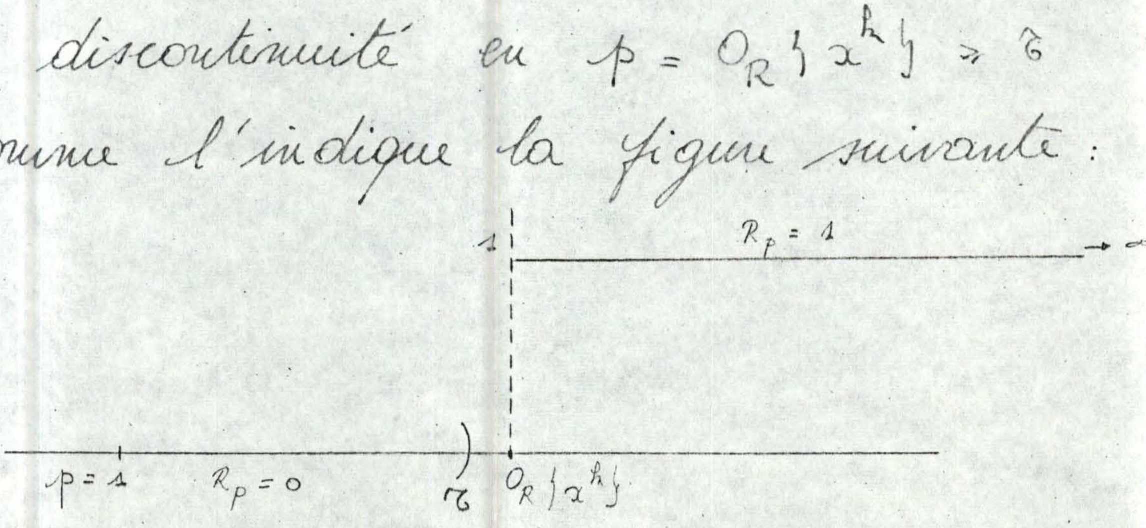
Rappelons-nous la définition de l'ordre R d'un procédé itératif $\mathcal{F}$.

$$O_R(\mathcal{F}, x^*) \begin{cases} = \infty & \text{si } R_p(\mathcal{F}, x^*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty) \\ = \inf\{p \in [1, \infty) \mid R_p(\mathcal{F}, x^*) = 1\} & \text{autre part.} \end{cases}$$

En ce qui nous concerne, nous avons :
$O_R\{x^k\} \geq \tau$ où τ est la racine positive unique de $t^{n+1} - t^n - 1 = 0$.

Remarquons que pour $n = 1$, $\tau = 1,68$

et quand n tend vers l'infini,
τ tend vers 1.
Nous savons déjà que pour $p = 1$,
$R_1 \{x^k\} = 0$, et donc $O_R \{x^k\} > 1$.
Or, $R_p \{x^k\}$ est une fonction croissante
de p à deux valeurs 0 et 1 sauf en
un point $p_0 = O_R \{x^k\}$
c'est-à-dire, qu'il existe un $p_0 = O_R \{x^k\}$
appartenant à $[1, \infty)$ tel que $R_p \{x^k\} = 0$
pour tout p appartenant à $[1, p_0)$ et
$R_p \{x^k\} = 1$, pour tout p appartenant à
(p_0, ∞).
Dans le cas de la Lipschitz continuité,
$O_R \{x^k\} \geq \tau$; il existe donc un saut
de discontinuité en $p = O_R \{x^k\} \geq \tau$
comme l'indique la figure suivante :



Nous pouvons donc faire la constatation suivante :

$R_p\{x^k\} = 0$ pour tout $p \in [1, \tau)$.

- La Lipschitz continuité nous apporte donc une précision additionnelle sur la superlinéarité.

Notons que lorsque $p > 1$ et $R_p < 1$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tel que $R_p + \varepsilon < 1$, il existe un $k_0 \geq 0$ tel que :

$$\|x^k - x^*\| \leq (R_p + \varepsilon)^{p^k} \quad \text{pour tout } k \geq k_0$$

([5], p 290)

ou encore : en coordonnées semi-logarithmiques $(k, \log \|x^k - x^*\|)$:

$$\log \|x^k - x^*\| \leq p^k \log (R_p + \varepsilon),$$

pour tout $k \geq k_0$.

Conclusion :

nous pouvons tirer de ce dernier théorème, les mêmes conclusions que pour le théorème 4.

C'est un résultat faible en ce sens qu'il exige que la suite entière $\{x^k\}$ soit bien définie, que la suite correspondante des matrices $\{H_k\}$ reste dans un ensemble $K(\sigma)$ et que la norme de H_k doit être suffisamment petite.

Bien que les notions de convergence ne soient pas d'un grand intérêt, les résultats de vitesse de convergence le sont beaucoup plus.

Ce théorème clôture la partie théorique. nous allons tester dans la seconde partie si effectivement, la méthode décrite par les relations (38) converge. La convergence suffira car, automatiquement : si $\lim_{h \to \infty} x^h = x^*$, où x^* est la racine du système d'équations non linéaires, alors : $\lim_{h \to \infty} H_h = 0$ et la R- et Q- superlinéarité est assurée.

CONCLUSIONS GENERALES

Nous avons considéré la résolution d'un système d'équations non linéaires dans l'espace à n dimensions

Nous avons envisagé pour ce faire, une méthode itérative particulière :

« la méthode sécante ».

Celle-ci engendre une suite de points $\{x^k\}$ par la formule de récurrence :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F x^k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$J(x^k, H_k)$ est une matrice $n \times n$ qui approxime la matrice Jacobienne F' de la fonction $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

H_k est une matrice $n \times n$ définie comme suit : $H_k = (x^{k,1} - x^k, \dots, x^{k,n} - x^k)$.

où $x^{k,i}$ sont les points auxiliaires donnés nous avons démontré que si entre autre, J était une approximation CONSISTANTE de F', alors, l'opérateur :

$$G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} Fx,$$

est un opérateur de contraction en x possédant un point d'attraction unique x^*, racine du système d'équations.

dès lors, la méthode sécante converge.

de plus, si $\lim_{k \to \infty} H_k = 0$, la convergence sera R- et Q- superlinéaire.

Suivant les valeurs données aux points auxiliaires figurant dans l'expression de H_k, nous obtenons différentes sous-méthodes de la méthode sécante générale.

nous avons proposé le choix suivant :

$$H_k = (x^{k-1} - x^k, \dots, x^{k-n} - x^k)_{k=0,1,\dots,}$$

et nous avons appelé la méthode ainsi déterminée : « la méthode $n+1$ points séquentiels » car dépendant de $n+1$ points précédents.

Nous avons aussi établi la convergence de cette méthode ; la vitesse de convergence (superlinéarité) découle, dans ce cas, du fait que si

$$\lim_{k \to \infty} x^k = x^*, \text{ alors } \lim_{k \to \infty} H_k = 0 .$$

ANNEXES

ANNEXE 1 Démonstration de l'assertion (25) dans la démonstration du lemme 1.

Par définition, la norme matricielle L_2 s'exprime de la façon suivante :

$$\|A\|_2 \triangleq \sup_{x \neq 0} \left\{ \|Ax\|_2 \,/\, \|x\|_2 \right\} \qquad (a)$$

Puisque nous savons que :

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|,$$

en transformant (a), nous obtenons :

$$\|A\|_2 \leq \sup \left\{ c_2 \|Ax\|_1 \,/\, c_1 \|x\|_1 \right\} = (c_2 / c_1) \|A\|_1$$

Dès lors, en posant $d_2 = c_2 / c_1$, nous pouvons établir que :

$$\|A\|_2 \leq d_2 \|A\|_1 \quad \text{où} \quad d_2 = c_2 / c_1 .$$

On trouve de manière analogue : $d_1 = c_1 / c_2$.

ANNEXE 2 : Démonstration de la proposition auxiliaire du pas # 2 (théorème 3-3)

- Proposition nécessaire à la démonstration

« Soit $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction G-différentiable sur un ensemble convexe $D_0 \subset D$.

ALORS, pour tout $x, y \in D_0$,

$$\| Fy - Fx \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| F'(x + t(y - x)) \| \, \| x - y \| \text{ »}$$

([5], p 69).

- Démonstration :

Pour x fixé appartenant à D_0, définissons l'opérateur : $GW = FW - F'(x)W$, $W \in D$.

Remarquons que les conditions de la proposition sont vérifiées et puisque,

$$G'(W) = F'(W) - F'(x),$$

la thèse est exactement la relation :

$$\| Gy - Gz \| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \| G'(z + t(y - z)) \| \, \| y - z \|$$

ANNEXE 2BIS <u>Démonstration du lemme figurant dans le pas # 3</u> (<u>théorème 4-3</u>)

- <u>Propositions nécessaires à la démonstration</u>

1) <u>Rappel</u> : fonction <u>hemi-continue</u>

$F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction hemi-continue en $x \in D$, si pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, h)$ tel que : $\| F(x + th) - Fx \| < \varepsilon$ pour

$$|t| < \delta \quad \text{et} \quad x + th \in D.$$

2) « Si $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ a une G-dérivée en chaque point d'un ensemble convexe $D_0 \subset D$ et si F' est hemi-continue sur D_0, ALORS, pour tout $x, y \in D_0$, on a :

$$Fy - Fx = \int_0^1 F'(x + t(y - x))(y - x)\, dt \quad . »$$

([5], p 71).

3) « Si $G : [a,b] \subset \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction continue sur $[a,b]$,

ALORS,

$$\left\| \int_a^b G(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \| G(t) \| \, dt$$ ».

([5], p 72).

- Démonstration :

Grâce aux propositions 2) et 3), nous pouvons déduire que :

$$\| Fy - Fx - F'(x)(y-x) \|$$

$$= \left\| \int_0^1 [F'(x + t(y-x)) - F'(x)](y-x)\, dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \| F'(x+t(y-x)) - F'(x) \| \, \| y - x \| \, dt$$

$$\leq \alpha \, \| y - x \|^{p+1} \int_0^1 t^p \, dt$$

$$\leq \alpha \, \| y - x \|^{p+1} \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^1 = \frac{\alpha \, \| y - x \|^{p+1}}{p+1}$$

ANNEXE 3 : Démonstration du lemme figurant dans le pas # 2B, (théorème 6-1)

Pas # 1 : $\|A\| \leq \tilde{\eta}_1 \|A\|_1$

Reprenons le théorème d'équivalence des normes induites :

« Pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, il existe des constantes d_1 et d_2 telles que :

$d_1 \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq d_2 \|A\|_1$ ».

Il existe donc une constante $\tilde{\eta}_1$ telle que :

$\|A\| \leq \tilde{\eta}_1 \|A\|_1$.

Pas # 2 : $\left\{ \|A\| \leq \eta_2 \sum_{i=1}^{n} \|a^i\|, \text{ pour tout } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n). \right.$

Appliquons le théorème de la norme équivalente : « Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe des constantes c_1 et c_2 telles que :

$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ ».

Nous pouvons conclure qu'il existe une

constante M_2 telle que :

$$\| A \| \leq \tilde{M}_1 \sum_{i=1}^{n} \| a^i \|_1 \leq M_2 \sum_{i=1}^{n} \| a^i \|$$

où a^i sont les vecteurs colonnes de A et appartiennent à $\mathbb{R}^n$ $\blacksquare$

CHAPITRE 2

PARTIE APPLIQUEE

EXPERIENCE NUMERIQUE

Nous nous proposons dans cette seconde partie de programmer l'algorithme défini par la méthode n+1 points séquentiels.

Rappelons-nous la méthode telle qu'elle est présentée dans la partie théorique.

Le point à la $k+1^{\text{ème}}$ itération est donné par la récurrence :

$$x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} Fx^k \qquad (1)$$

où - $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^1 sur un ouvert D.

- $H_{1k} \triangleq (x^{k-1} - x^k, \ldots, x^{k-n} - x^k) \qquad (2)$

$\in$ à une famille uniformément non singulière.

- $J : D_J \times D_H \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$(x, H) \rightsquigarrow J(x, H) \triangleq (Fx^{k-1} - Fx^k, \ldots,$

$$, Fx^{k-n} - Fx^{k}) H_k^{-1} \qquad (3)$$

est une approximation consistante de F sur $D_0 \subset D$. ∎

Nous voyons que dans cette méthode, il faut à chaque itération k, calculer et l'inverse de la matrice H_k et l'inverse de l'approximation $J(x^k, H_k)$.

Afin d'éviter ces calculs, envisageons la procédure suivante

Rappelons-nous (§ 2, p 38) que l'approximation sécante de base pouvait, grâce à la formulation de Newton, s'exprimer par :

$$x^1 = x^0 - HT^{-1} Fx^0,$$

en posant : $T = (Fx^1 - Fx^0, \dots, Fx^n - Fx^0)$

Si de plus, nous posons :

$$\bar{H} = (h^1, h^2 - h^1, \dots, h^n - h^{n-1}),$$

ALORS :

$$J(x, H) = (F(x + h^1) - Fx,\ F(x + h^2) - F(x + h^1), \dots$$

$, F(x + h^n) - F(x + h^{n-1})) \bar{H}^{-1}$

et l'approximation sécante de base peut aussi s'écrire :

$$x^s = x^0 - [(Fx^1 - Fx^0, \dots, Fx^n - Fx^{n-1}) \times (x^1 - x^0, \dots, x^n - x^{n-1})^{-1}]^{-1} Fx^0.$$

Nous allons nous baser sur cette formulation pour engendrer la suite des itérés $\{x^k\}$.

Le point à la $k+1^{\text{ème}}$ itération nous sera cette fois donné par :

$$x^{k+1} = x^k - H_k T_k^{-1} Fx^k \qquad (4)$$

où - $H_k \triangleq (x^k - x^{k-1}, x^{k-1} - x^{k-2}, \dots, x^{k-n+1} - x^{k-n}) \qquad (5)$

- $T_k \triangleq (Fx^k - Fx^{k-1}, \dots, Fx^{k-n+1} - Fx^{k-n}) \qquad (6)$

Considérons le théorème suivant :

« Supposons que les matrices T_p et T_{p+1} définies par (6) avec $k = p, p+1$, soient non singulières. Notons les lignes de T_p^{-1} par $v^1, \ldots, v^n$.

ALORS :

$$T_{p+1}^{-1} = B - \frac{B(q^p - q^{p-n})\, v^n}{1 + v^n (q^p - q^{p-n})}$$

où - $q^i \triangleq Fx^{i+1} - Fx^i$

- B : la matrice formée avec les lignes $v^n, v^1, \ldots, v^{n-1}$. »

([5], p 198).

Grâce à ce résultat important, nous voyons que nous ne devrons plus faire appel à la sous-routine INVMAT qu'une seule fois et ce, à la première itération.

ALGORITME GENERAL

Etape 0 : - Lire les points de départ :

$x^{-n}, \ldots, x^{-1}$ et l'approximation initiale x^{0} de la racine.

- Calculer la valeur de $Fx^{-n}, \ldots, Fx^{0}$ au moyen de la sous-routine FONCT).

Etape 1 : - Calculer T_0

$$T_0 = (Fx^{0} - Fx^{-1}, \ldots, Fx^{-n+1} - Fx^{-n})$$

- Calculer T_0^{-1} (appeler la sous-routine INVMAT).

Si l'inverse existe : aller à l'étape 2.

Si NON, STØP, le problème est impossible à résoudre.

Etape 2 : Plaçons-nous à la $k+1^{\text{ème}}$ itération

$x^{k-n}, \ldots, x^{k}$; $Fx^{k-n}, \ldots, Fx^{k}$; T_k^{-1}

sont connus.

- Calculer la matrice H_k :

$$H_k \triangleq (x^{k} - x^{k-1}, \ldots, x^{k-n+1} - x^{k})$$

- Calculer : $\prod_{j=1}^{n} \| x^{k} - x^{k-j} \|$

- Calculer la norme du déterminant de $\tilde{H}_k$:

$$|\det \tilde{H}_k| = \frac{|\det H_k|}{\prod_{j=1}^{n} \| x^{k} - x^{k-j} \|}$$

Nous le ferons en faisant appel aux sous-routines IVNS, DETI.

(Remarquons que si $|\det| = 0$, alors, nous arrêtons le procédé car $\tilde{H}_k$ est singulière)

<u>Etape 3</u> : Calculer le point à la $k+1^{\text{ème}}$-itération par la récurrence :

$$x^{k+1} = x^{k} - H_k T_k^{-1} F x^{k}.$$

Aller en 4.

<u>Etape 4</u> : . Test d'arrêt.

Si $\| x^{k+1} - x^{k} \| \leq \varepsilon$, aller en 6

Sinon aller en 5.

(ε = précision demandée $= 10^{-8}$)

<u>Etape 5</u> : - Calculer Fx^{k+1}

(sous routine FONCT)

- Calculer T_{k+1}^{-1} par la relation :

$$T_{k+1}^{-1} = B - \frac{B(q^{k-1} - q^{k-n})v^n}{1 + v^n(q^{k-1} - q^{k-n})}$$

où $v^1, \dots, v^n$ étant les lignes de T_k^{-1}, la matrice B est formée des lignes $v^n, v^1, \dots, v^{n-1}$ et où $q^i \triangleq Fx^{i+1} - Fx^i$

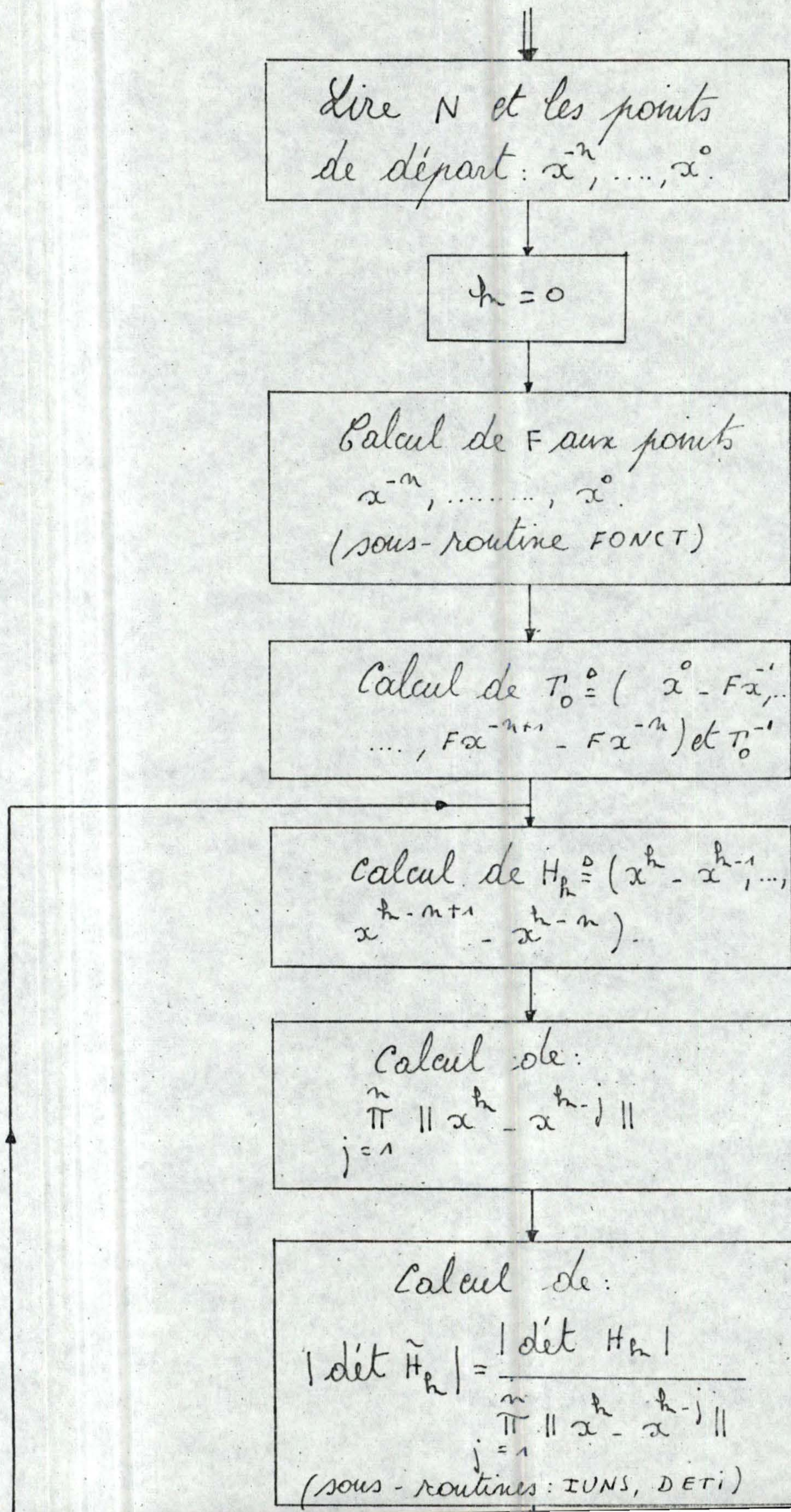
- Retourner à l'étape 2.

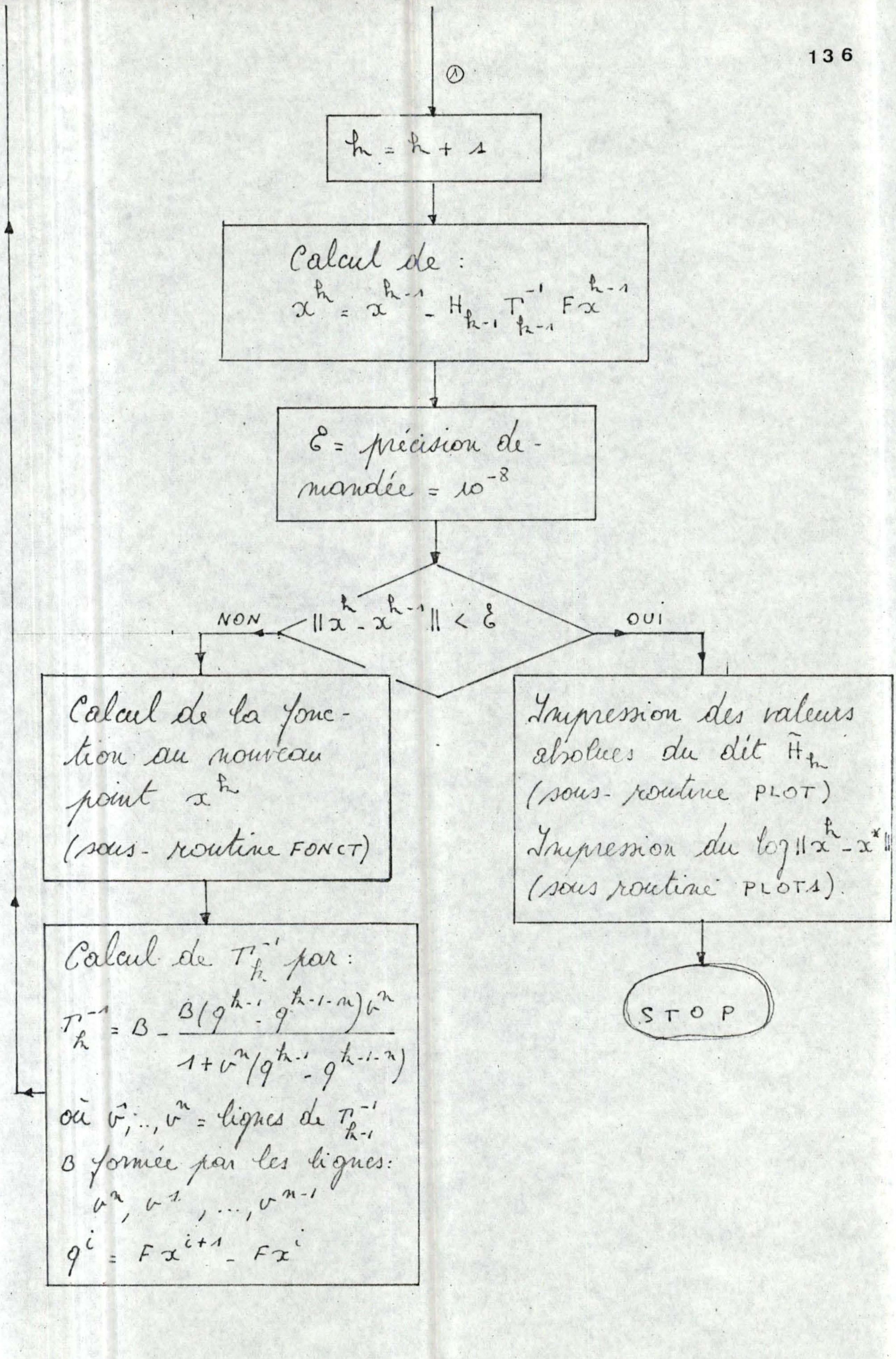
Etape 6 : Imprimer le graphe de la norme du dét $\tilde{H}$ à l'aide de la sous-routine PLOT.

- Imprimer le graphe du $\log \| x^k - x^* \|$ à l'aide de la sous-routine PLOT1

STØP.

Organigramme général




①
$k = k + 1$
Calcul de :
$x^{k} = x^{k-1} - H_{k-1} T_{k-1}^{-1} F x^{k-1}$
ε = précision demandée = 10^{-8}
$\|x^{k} - x^{k-1}\| < \varepsilon$
NON
OUI
Calcul de la fonction au nouveau point x^{k}
(sous-routine FONCT)
Calcul de T_{k}^{-1} par :
$T_{k}^{-1} = B - \dfrac{B(q^{k-1} - q^{k-1-n})v^{n}}{1 + v^{n}(q^{k-1} - q^{k-1-n})}$
où $v^{1}, \ldots, v^{n}$ = lignes de T_{k-1}^{-1}
B formée par les lignes :
$v^{n}, v^{1}, \ldots, v^{n-1}$
$q^{i} = Fx^{i+1} - Fx^{i}$
Impression des valeurs absolues du dit $\tilde{H}_{k}$
(sous-routine PLOT)
Impression du $\log\|x^{k} - x^{*}\|$
(sous routine PLOT1)
STOP

```
C*************************************************************************************
C**                                                                                **
C**                              NOM=ROMAIN NADINE                                 **
C**                                                                                **
C**                                                                                **
C**                                                      2EME LICENCE-MATH         **
C**                                                                                **
C**                                                                                **
C*************************************************************************************
C
C
      PROGRAM CATHY4
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION NORM
      DOUBLE PRECISION NORMA
      DIMENSION X(10,50),F(10,50),H1(10,10),Q(10,50),GAMA(10,10)
      DIMENSION HH(10,10)
      DIMENSION GAM(10,10),V(10,10),D(10),E(10)
      DIMENSION B(10,10),QQ(10),FF(10,10),G(10,10)
      DIMENSION XSTAR(10),DIFF(10),GPRINT(50)
      DIMENSION XPRINT(50)
      DIMENSION DIF(10)
      COMMON XPRINT,IT
      JOLI=1
      READ 9000,N
      XSTAR(1)=1.D0/DSQRT(2.D0)
      XSTAR(2)=1.D0/DSQRT(2.D0)
      XSTAR(3)=DSQRT(3.D0)
      N1=N+1
C
C LECTURE DES N+1POINTS DE DEPART
C
      DO 1 IT=1,N1
    1 READ 9002,(X(K,IT),K=1,N)
C
C IMPRESSION DES N+1 POINTS DE DEPART
C
      PRINT 8003
      DO 2 IT=1,N1
    2 PRINT 9003,(X(K,IT),K=1,N)
C
C SPECIFICATION DE LA METHODE CHOISIE
C
      PRINT 9007
      PRINT 3000
C
C  CALCUL DE LA FONCTION AUX POINTS DE DEPART
C
      DO 3 IT=1,N
    3 CALL FONCT(X,F,IT)
```

```
C
C   CALCUL DE LA FONCTION AU POINT X(0)
C
      IT=N1
      CALL FONC (X,F,IT)
C
C   IMPRESSION DES VALEURS DE LA FONCTION
C
      PRINT 8002
 8002 FORMAT(1X,//,1X,'VALEURS DE LA FONCTION',//)
      DO 4 K=1,N1
    4 PRINT 9004,(F(I,K),I=1,N)
C
C   CALCUL DES Q(I)=FX(I+1)-FX(I)
C   CALCUL DE LA MATRICE GAMA=(Q(K-1,..,Q(K-N))
C
      IT1=IT-1
      IT2=IT-N
      K=0
      DO 5 JUT=IT2,IT1
      J=IT-JUT
      J1=J+1
      K=K+1
      DO 5 I=1,N
      Q(I,J)=F(I,J1)-F(I,J)
    5 GAMA(I,K)=Q(I,J)
C
C   IMPRESSION DE GAMA
C
      PRINT 7010
 7010 FORMAT(1X,//,1X,'MATRICE GAMA',//)
      DO 9 I=1,N
    9 PRINT 9011,(GAMA(I,J),J=1,N)
C
C   CALCUL DE L'INVERSE DE GAMA
C
      CALL INVMAT(GAMA,GAM)
C
C   APPELLATION DES VECTEURS DE L'INVERSE PAR V(I)
C
   31 DO 11 I=1,N
      DO 11 J=1,N
   11 V(I,J)=GAMA(I,J)
C
C   CALCUL DE LA MATRICE H1 SUIVANT LA FORMULE :
C   H1(K)=(X(K)-X(K-1),X(K-1)-X(K-2),....,X(K-N+1)-X(K-N))
C
      PRINT 8011
C
C   CALCUL DES ELEMENTS DE LA MATRICE H1
```

```
C
      ITT=IT
      DO 6 J=1,N
      IJ=ITT-1
      DO 60 I=1,N
   60 H1(I,J)=X(I,ITT)-X(I,IJ)
    6 ITT=ITT-1
C
C   IMPRESSION DE LA MATRICE H1
C
      DO 7 I=1,N
    7 PRINT 9011,(H1(I,J),J=1,N)
      DO 100 J=1,N
      DO 100 I=1,N
      ITJ=IT-J
  100 HH(I,J)=X(I,IT)-X(I,ITJ)
      CALL IUNS(H1,HH,N)
C
C   CALCUL DU POINT A L'ITERATION SUIVANTE :
C
C    CALCUL DE GAMA*FX(0)
C
      DO 12 I=1,N
   12 D(I)=0.D0
      DO 13 I=1,N
      DO 13 J=1,N
   13 D(I)=D(I)+V(I,J)*F(J,IT)
C
C    CALCUL DE H1*D(I)
C
      DO 14 I=1,N
   14 E(I)=0.D0
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
   15 E(I)=E(I)+H1(I,J)*D(J)
C
C   CALCUL DE X
C
      IU=IT-2
C
C   COMPTEUR DES ITERATIONS
C
      PRINT 6283,JOLI
      JOLI=JOLI+1
      IT=IT+1
      IT1=IT-1
      DO 16 I=1,N
   16 X(I,IT)=X(I,IT1)-E(I)
      PRINT 9090
      PRINT 9011,(X(I,IT),I=1,N)
```

```
      DO 72 I=1,N
   72 DIFF(I)=X(I,IT)-XSTAR(I)
      SUMO=0.D0
      DO 73 I=1,N
   73 SUMO=SUMO+DIFF(I)*DIFF(I)
      NORMA=DSQRT(SUMO)
      GPRINT(IU)=DLOG(NORMA)
C
C  EPSIL EST LA PRECISION DEMANDEE
C  A CHAQUE ITERATION, NOUS ALLONS TESTER SI LE NORME DE X(K+1)-X(K)
C  INFERIEURE A LA PRECISION DEMANDEE
C  SI OUI : LE DERNIER POINT OBTENU EST LA MEILLEURE APPROXIMATION
C  DU POINT SOLUTION DU SYSTEME
C  SI NON, ON CONTINUE LE PROCEDE
C
      EPSIL=0.00000001D0
      DO 70 I=1,N
   70 DIF(I)=X(I,IT)-X(I,IT1)
      SUMI=0.D0
      DO 71 I=1,N
   71 SUMI=SUMI+DIF(I)*DIF(I)
      NORM=DSQRT(SUMI)
      IF(NORM.LT.EPSIL) GOTO 99
      CONTINUE
      CALL FONCT(X,F,IT)
      PRINT 7011
 7011 FORMAT(1X,//,1X,'VALEUR DE LA FONCTION',//)
      PRINT 9004,(F(I,IT),I=1,N)
C
C  POUR CALCULER LA MATRICE B, IL FAUT PERMUTER LA DERNIERE LIGNE
C  DE SORTE QU'ELLE DEVIENNE LA PREMIERE.
C  ON AVAIT V(1),...,V(N) ,LES LIGNES DE GAMA INVERSE.
C  B SERA FORMEE AVEC LES LIGNES V(N),......,V(N-1)
C
      DO 17 J=1,N
   17 B(1,J)=V(N,J)
      N1=N-1
      DO 18 I=1,N1
      DO 18 J=1,N
      K=I+1
   18 B(K,J)=V(I,J)
C
C  CALCUL DE L'INVERSE DE GAMA
C
C    1)  CALCUL DE Q(K)-Q(K-N)
C
      IT1=IT-1
      IT2=IT1-N
      DO 8 I=1,N
    8 Q(I,IT1)=F(I,IT)-F(I,IT1)
```

```
      DO 20 I=1,N
   20 QQ(I)=Q(I,IT1)-Q(I,IT2)
C
C     2)  CALCUL DE (Q(K)-Q(K-N))*V(N)
C
      DO 21 I=1,N
      DO 21 J=1,N
   21 FF(I,J)=0.D0
      DO 22 I=1,N
      DO 22 J=1,N
   22 FF(I,J)=QQ(I)*V(N,J)
C
C     3)  CALCUL DE B*FF=G
C
      DO 24 I=1,N
      DO 24 J=1,N
   24 G(I,J)=0.D0
      DO 25 I=1,N
      DO 25 J=1,N
      DO 25 K=1,N
   25 G(I,J)=G(I,J)+B(I,K)*FF(K,J)
C
C     4)  CALCUL DE V(N)*(Q(K)-Q(K-N))
C
      GG=0.D0
      DO 27 J=1,N
   27 GG=GG+V(N,J)*QQ(J)
      R=GG+1.D0
C
C     5)  CALCUL DU QUOTIENT
C
      DO 28 I=1,N
      DO 28 J=1,N
   28 G(I,J)=G(I,J)/R
C
C     6)  CALCUL DE GAMA INVERSE
C
      DO 29 I=1,N
      DO 29 J=1,N
   29 GAMA(I,J)=B(I,J)-G(I,J)
      PRINT 7005
 7005 FORMAT(1X,//,1X,'MATRICE GAMA INVERSE',//)
      DO 30 I=1,N
   30 PRINT 9011,(GAMA(I,J),J=1,N)
      GOTO 31
 6283 FORMAT(1X,//,1X,'ITERATION NO ',I2,/,1X,17(1H*),//)
 9000 FORMAT(I2)
 9002 FORMAT(6D20.10)
 3000 FORMAT(1X,//,1X,'ITERATION ZERO',/,1X,14(1H*),//)
 8003 FORMAT (1X,//,1X,'POINTS DE DEPART',//)
```

```
9003 FORMAT(1X,6D20.10,//)
9004 FORMAT(1X,6D20.10,//)
9007 FORMAT (1X,//,15X,38(1H*),2(/,15X,1H*,36X,1H*),/,15X,'*    METHODE
    1N+1 POINTS SEQUENTIELS    *',2(/,15X,1H*,36X,1H*),/,15X,38(1H*))
8011 FORMAT (1X,//,1X,'MATRICE H',//)
9011 FORMAT(1X,6D20.10,//)
9090 FORMAT(1X,//,1X,'POINT A L''ITERATION SUIVANTE',//)
  99 CALL PLOT(XPRINT,IT)
     PRINT 9011,(GPRINT(I),I=1,IT)
     CALL PLOT1(GPRINT,IT)
     STOP
     END
```

```
     SUBROUTINE FONCT(X,F,IT)
     IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
     DIMENSION F(10,50),X(10,50)
     F(1,IT)=X(1,IT)*X(1,IT)/4+X(2,IT)*X(2,IT)/4+X(3,IT)*X(3,IT)/4-1.D0
     F(2,IT)=X(1,IT)*X(1,IT)+X(2,IT)*X(2,IT)-1.D0
     F(3,IT)=X(1,IT)-X(2,IT)
     RETURN
     END
```

```
      SUBROUTINE INVMAT(M,MI)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION M
      DOUBLE PR CISION MI
      DIMENSION MI(10,10)
      DIMENSION M(10,10)
      DIMENSION L(10)
C
C  CETTE SOUS-ROUTINE CALCULE L'INVERSE D'UNE MATRICE PAR LA METHODE
C  DU PIVOT
C
      EPSIL=0.0000001D0
      INTEGER U,H
      MAX=3
      DO 5 I=1,MAX
      DO 5 K=1,MAX
      MI(I,K)=0.
    5 CONTINUE
      DO 8 J=1,MAX
      PIV=0.
      L(J)=0
      DO 2 I=1,MAX
      IF (J.EQ.1) GOTO 3
      N=J-1
      DO 4 K=1,N
      IF (L(K).EQ.I) GOTO 2
    4 CONTINUE
    3 IF(DABS(PIV).GE.DABS(M(I,J))) GOTO 2
      PIV=M(I,J)
      L(J)=I
    2 CONTINUE
      IF(EPSIL.GE.DABS(PIV)) GOTO 13
      DO 6 K=1,MAX
    6 M(L(J),K)=M(L(J),K)/PIV
      MI(L(J),J)=1./PIV
      DO 7 I=1,MAX
      IF (I.EQ.L(J)) GOTO 7
      MI(I,J)=MI(I,J)-M(I,J)*MI(L(J),J)
      DO 16 K=1,MAX
      IF (K.NE.J) GOTO 18
      GOTO 16
   18 M(I,K)=M(I,K)-M(I,J)*M(L(J),K)
   16 CONTINUE
      M(I,J)=M(I,J)-M(I,J)*M(L(J),J)
    7 CONTINUE
      DO 9 I=1,MAX
      Y=M(I,J)
      M(I,J)=MI(I,J)
      MI(I,J)=Y
    9 CONTINUE
```

```
  8 CONTINUE
    DO 19 J=1,MAX
    IF (L(J).EQ.J) GOTO 19
    DO 20 I=1,MAX
    IF (L(I).EQ.J) GOTO 21
 20 CONTINUE
 21 K=I
    DO 22 I=1,MAX
    T=M(I,K)
    M(I,K)=M(I,J)
    M(I,J)=T
 22 CONTINUE
    U=L(K)
    L(K)=L(J)
    L(J)=U
 19 CONTINUE
    DO 11 J=1,MAX
    DO 10 I=1,MAX
    IM=INT(MI(I,J)+0.5)
    IF (IM.EQ.1) GOTO 12
    GOTO 10
 12 H=I
 10 CONTINUE
    DO 14 K=1,MAX
    X=M(H,K)
    M(H,K)=M(J,K)
    M(J,K)=X
    Z=MI(H,K)
    MI(H,K)=MI(J,K)
    MI(J,K)=Z
 14 CONTINUE
 11 CONTINUE
    PRINT 500
    PRINT 600,((M(I,K),K=1,MAX),I=1,MAX)
    GOTO 15
 13 PRINT 700
    STOP
 15 CONTINUE
500 FORMAT(1X,//,1X,'MATRICE INVERSE',//)
600 FORMAT (1X,3D20.10,/)
700 FORMAT (1X,19HPROBLEME IMPOSSIBLE)
    RETURN
    END
```

```
      SUBROUTINE IUNS(H1,AA,N)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION H1(10,10),GNAN(10),AA(10,10),SUM(10)
      DIMENSION XPRINT(50)
      COMMON XP INT,IT
C
C  CETTE SOUS ROUTINE PERMET DE CALCULER LA VALEUR ABSOLUE DU DET.
C
C
C  CALCUL DE LA NORME DES VECTEURS COLONNES DE HH
C
      DO 99 J=1,N
      SUM(J)=0.D0
      DO 99 I=1,N
      SUM(J)=SUM(J)+AA(I,J)*AA(I,J)
   99 GNAN(J)=DSQRT(SUM(J))
      PROD=1.D0
      DO 200 J=1,N
  200 PROD=PROD*GNAN(J)
C
C  CALCUL DU DETERMINANT
C
C
      IF (N.EQ.2) GOTO 5
      CALL DETI(H1,N,DET)
      GOTO 49
    5 DET=H1(1,1)*H1(2,2)-H1(2,1)*H1(1,2)
   49 IU=IT-2
      DET=DET/PROD
      PRINT 800
      PRINT 900,DET
  800 FORMAT(1X,//,1X,'DETERMINANT',//)
  900 FORMAT(1X,D20.10,//)
      XPRINT(IU)=DABS(DET)
      IF(DABS(DET)) 51,51,10
   51 STOP
   10 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE DETI(M,N,DET)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DOUBLE PRECISION M
      DIMENSION M(10,10)
C
C  CALCUL DU DETERMINANT SUIVANT LA METHODE D'ELIMINATION DE GAUSS.
C  NOUS OBTENONS UNE MATRICE SUPRA TRIANGULAIRE.
C  LE DETERMINANT S'OBTIENT EN EFFECTUANT LE PRODUIT DES ELEMENTS
C  DIAGONAUX
C
      I=1
      J=1
    3 PIV=M(I,J
C
C  SI LE PIVOT EST NUL, NOUS ALLONS INTERCHANGER 2 COLONNES DE LA
C  MATRICE DE MANIERE A AVOIR LE COEFFICIENT DE TETE NON NUL
C
      IF (PIV) 5,6,5
    6 J1=J+1
      IF(J.GT.N) GOTO 20
      IF(M(I,J1)) 8,6,8
    8 DO 7 IA=1,N
      M(IA,J)=M(IA,J1)
    7 M(IA,J1)=M(IA,J)
      PIV=M(I,J1)
    5 PRINT 1000
      PRINT 1001,PIV
 1000 FORMAT(1X,//,1X,'PIVOT',//)
 1001 FORMAT(1X,6D20.10,//)
      PRINT 1008
 1008 FORMAT(1X,//,1X,'MATRICE TRANSFORMEE',//)
      I1=I+1
      DO 1 K=I1,N
      R=M(K,I)/PIV
      DO 1 JA=I,N
    1 M(K,JA)=M(K,JA)-(R*M(I,JA))
      DO 2 IA=1,N
    2 PRINT 1003,(M(IA,JA),JA=1,N)
 1003 FORMAT(1X,//,6D20.10,//)
      I=I+1
      J=J+1
      IF(I.EQ.N) GOTO 10
      GOTO 3
   10 DET=1.D0
      DO 4 IA=1,N
      J=IA
    4 DET=DET*M(IA,J)
      PRINT 1004
      PRINT 1005,DET
      GOTO 99
   20 PRINT 1007
      STOP
 1007 FORMAT(1X,//,1X,'PROBLEME IMPOSSIBLE',//)
 1004 FORMAT(1X,//,1X,'DETERMINANT',//)
 1005 FORMAT(1X,D20.10)
   99 RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PLOT(A,IV)
      DIMENSION N(51,100)
      DOUBLE PRECISION A(1)
      DATA IASTER/'+    '/
      DATA IBLANC/'     '/
      DATA IAXE/'*    '/
      INTEGER UNITEX
      IT=IV-3
      DO 10 I=1,51
      DO 10 J=1,100
   10 N(I,J)=IBLANC
      DO 1 I=1,100
    1 N(51,I)=IAXE
      DO 2 J=1,51
    2 N(J,1)=IAXE
      RMAX=A(1)
      DO 3 I=2,IT
      IF(RMAX.LT.A(I)) RMAX=A(I)
    3 CONTINUE
      UNITEY=RMAX/50.
      UNITEX=100/IT
      DO 4 K=1,IT
      MORD=A(K)/UNITEY+0.5
      IAUX1=51-MORD
      IAUX2=K*UNITEX
      N(IAUX1,IAUX2)=IASTER
    4 CONTINUE
      PRINT 9002
 9002 FORMAT(1X,'VALEURS DU DET')
      PRINT 9000,((N(I,J),J=1,100),I=1,51)
 9000 FORMAT(10X,100A1)
      PRINT 9001
 9001 FORMAT(102X,'ITERATIONS')
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE PLOT1(A,IV)
      DIMENSION N(51,100)
      DOUBLE PRECISION A(1)
      DATA IASTER/'+   '/
      DATA IBLANC/'    '/
      DATA IAXE/'*   '/
      INTEGER UNITEX
      IT=IV-3
      DO 10 I=1,51
      DO 10 J=1,100
   10 N(I,J)=IBLANC
      DO 1 I=1,100
    1 N(1,I)=IAXE
      DO 2 J=1,51
    2 N(J,1)=IAXE
      RMIN=A(1)
      DO 3 I=2,IT
      IF(RMIN.GT.A(I)) RMIN=A(I)
    3 CONTINUE
      UNITEY=ABS(RMIN)/50.
      UNITEX=100/IT
      DO 4 K=1,IT
      MORD=ABS(A(K))/UNITEY+0.5
      IAUX2=K*UNITEX
      MORD1=MORD+1
      N(MORD1,IAUX2)=IASTER
    4 CONTINUE
      PRINT 9001
 9001 FORMAT(102X,'ITERATIONS')
      PRINT 9000,((N(I,J),J=1,100),I=1,51)
 9000 FORMAT(10X,100A1)
      PRINT 9002
 9002 FORMAT(1X,'LOGARITHMES')
      RETURN
      END
```

COMMENTAIRES

① Théoriquement, nous devrions tester si l'approximation J donnée par (3) est une approximation consistante de F ou encore, via le théorème 4-3, si la suite des matrices $\{H_{1_k}\}$ où H_{1_k} est définie par (2) appartient à une famille de matrices uniformément non singulières c'est-à-dire s'il existe un $\sigma > 0$ tel que $\{H_{1_k}\} \in K(\sigma) \triangleq$
$\{ H_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \mid \forall j = 0, 1, \ldots,$
$| \det(h^1 / \| h^1 \|, \ldots, h^n / \| h^n \|) | \geq \sigma \}$.
Remarquons que dans la nouvelle approche de la méthode que nous considérons, nous possédons les matrices

$$H_k = (x^k - x^{k-1}, \ldots, x^{k-n+1} - x^{k-n})$$

nous devons donc au préalable, pour être en accord avec la théorie calculer :

$$\prod_{j=1}^{n} \| x^{k} - x^{k-j} \|.$$

nous calculerons alors :

$$|\text{dét } \tilde{H}| = \frac{|\text{dét } H|}{\prod_{j=1}^{n} \| x^{k} - x^{k-j} \|}$$

Or, puisque l'ordinateur ne nous permet de considérer qu'un nombre fini d'itérés, nous n'aurons qu'une suite finie de matrices $\tilde{H}_k$.

Dès lors, même si cette suite finie appartient à $K(\sigma)$, rien ne nous permet d'affirmer que la suite infinie y appartiendrait entièrement. C'est pourquoi, nous nous sommes proposés de regarder uniquement le comportement de la norme du déterminant de $\tilde{H}$ (matrice H_1 normalisée).

Nous avons introduit pour ce faire les sous-routines IUNS, DETI et PLOT.

Si à une certaine itération k, la norme du déterminant est nulle, alors nous pouvons dire que la suite $\{H_{1,k}\}$ n'est pas uniformément non singulière et, dans ce cas, nous arrêtons le processus. Si ce n'est pas le cas, nous savons que la norme du déterminant est un nombre strictement positif. Dès lors, nous avons conçu la sous-routine PLOT de telle façon qu'elle ne soit valable que pour le premier quadrant.

② Nous aurions très bien pu utiliser la sous-routine INVMAT pour calculer le déterminant. Mais puisque nous nous attachons à la vitesse de convergence, nous avons préféré avoir recours à une sous-routine DETI employant la méthode d'élimination de Gauss.

En effet, celle-ci demande un nombre $N_1 = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3}$ de multiplications et de divisions alors que la méthode de Gauss-Jordan utilisée dans INVMAT en demande : $N_2 = \frac{n^3}{2} + n^2 - \frac{5}{2}n + 2$ supérieur à N_1 pour $n > 2$ (pour $n = 2$, nous calculons le déterminant de façon élémentaire).

③ Puisque l'ordinateur travaille avec des nombres rationnels possédant un nombre fini de chiffres et que nous avons un test d'arrêt dans le programme principal, nous n'engendrons qu'une suite finie de nombres.
Pour pouvoir affirmer la convergence et la convergence superlinéaire, nous devrions tester une suite infinie de points. Nous ne pouvons donc affirmer que la "TENDANCE.

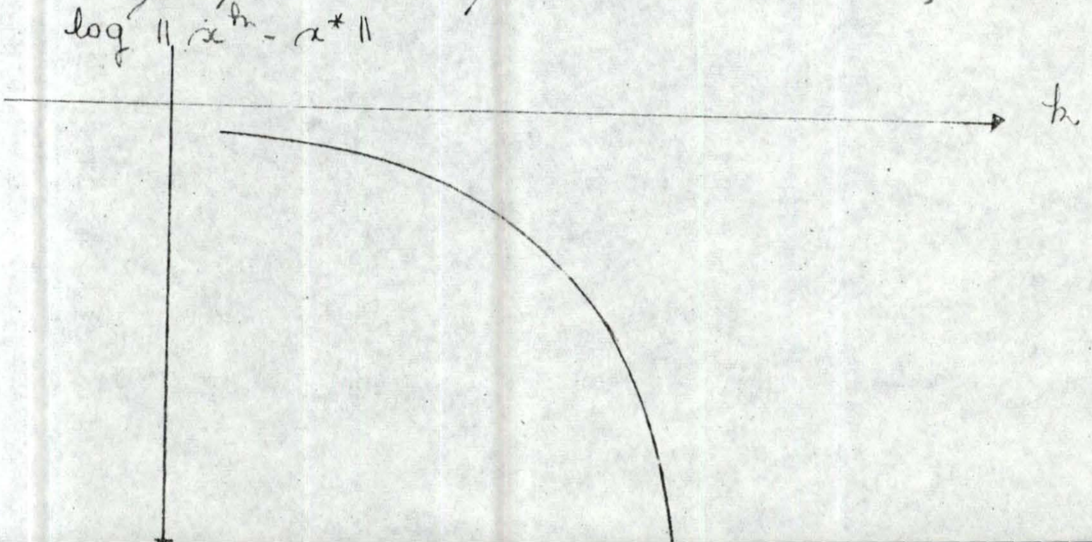
à la convergence et à la convergence superlinéaire.

Nous savons, par le théorème 6-1 que dans la méthode $n+1$ points séquentiels, si la suite $\{x^k\}$ converge, automatiquement la méthode converge superlinéairement

Afin de vérifier la "TENDANCE" à cette convergence superlinéaire, nous avons introduit la sous-routine PLOT1.

Celle-ci nous trace le graphe du $\log \| x^k - x^* \|$, $k = 0, 1, \ldots,$ en coordonnées semi-logarithmiques

Si le graphe se présente comme suit :



nous pouvons conclure à la tendance superlinéaire. Remarquons qu'à ce moment, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un k_0 tel que : pour tout $k \geq k_0$,

$$\log \| x^k - x^* \| \leq k \log (\varepsilon).$$

④ Remarquons aussi que comme la sous-routine PLOT, la sous-routine PLOT1 n'est conçue que pour le dernier quadrant, le $\log \| x^k - x^* \|$ étant toujours négatif quand le point x^k est suffisamment près de x^*.
Il se peut cependant que les points obtenus aux premières itérations soient tels que le logarithme est positif. A ce moment, si les valeurs sont petites, elles seront mises à zéro.

EXEMPLE [3], [4].

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$.

Définissons la fonction F par :

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \rightsquigarrow Fx \stackrel{\Delta}{=} \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 - x_2^2 + 1 \\ (1 + 2x_1)\, x_2 \end{pmatrix}$$

continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Nous avons donc un système de 2 équations à deux inconnues.

Le point racine x^* de ce système a comme valeur :

$$x_1^* = -0.5 \qquad x_2^* = \sqrt{3}/2.$$

Observons que la matrice Jacobienne en ce point vaut :

$$F'(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut 3, elle est donc non singulière.

Pour pouvoir démarrer le processus itératif, nous devons posséder trois points de départ.

1er CAS.

POINTS DE DEPART

0.0000000000D 00	-0.2000000000D 01
-0.2000000000D 01	0.8000000000D 01
-0.3000000000D 00	0.9000000000D 00

METHODE N+1 POINTS SEQUENTIELS

RESULTATS

ITERATION ZERO
****

VALEURS DE LA FONCTION

-0.3000000000D 01	-0.2000000000D 01
-0.6100000000D 02	-0.2400000000D 02
-0.2000000000D-01	0.3600000000D 00

MATRICE GAMA

0.6098000000D 02	-0.5800000000D 02
0.2436000000D 02	-0.2200000000D 02

MATRICE INVERSE

-0.3084688727D 00	0.8132361189D 00
-0.3415591699D 00	0.8550196298D 00

MATRICE H

0.1700000000D 01	-0.2000000000D 01
-0.7100000000D 01	0.1000000000D 02

DETERMINANT

0.1315482164D 00

ITERATION NO 1
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.1789119462D 00 -0.1239484016D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.8377343321D 00	-0.7959670207D-01

MATRICE GAMA INVERSE

0.5106809548D 00	-0.1278379500D 01
0.9215667634D-02	0.1798146912D-01

MATRICE H

0.1210880538D 00	0.1700000000D 01
-0.1023948402D 01	-0.7100000000D 01

DETERMINANT

0.1026272103D 00

ITERATION NO 2
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.2537278443D 00	0.4629557188D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.5963219771D 00	0.2280262058D 00

MATRICE GAMA INVERSE

0.2786938001D 01	0.5437830614D 01
0.1950255695D 01	0.1530496618D 01

MATRICE H

-0.7481589811D-01	0.1210880538D 00
0.5869041204D 00	-0.1023948402D 01

DETERMINANT

0.2130780691D-01

ITERATION NO 3
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.2197030153D 00   0.3080132579D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.7336942326D 00   0.1726703749D 00

MATRICE GAMA INVERSE

0.1064613327D 02   0.8354735742D 01
0.1915740141D 01   0.4754143146D 01

MATRICE H

0.3402482896D-01   -0.7481589811D-01
-0.1549424609D 00   0.5869041204D 00

DETERMINANT

0.1217099862D 00

ITERATION NO 4
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.3670807776D 00   [illegible]

VALEUR DE LA FONCTION

0.5781436443D 00   0.1148750623D 00

MATRICE GAMA INVERSE

-0.3344742075D 01	-0.8300385983D 01
0.3492141853D 01	-0.9398767735D 01

MATRICE H

-0.1482777623D 00	0.3402482896D-01
0.1270561972D 00	-0.1549424609D 00

DETERMINANT

0.8121739834D 00

ITERATION NO 5
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.8280542498D 00   0.9474459700D 00

VALEUR DE LA FONCTION

-0.4003427534D-01   -0.6216273538D 00

MATRICE GAMA INVERSE

0.7331118699D 00	-0.1973100887D 01
-0.9342256992D 01	0.7841355122D 01

MATRICE H

-0.4600734721D 00	-0.1482777623D 00
0.5123765150D 00	0.1270561972D 00

```
DETERMINANT

     0.2882485637D-01


ITERATION NO  6
*****************



POINT A L'ITERATION SUIVANTE

    -0.9445695151D 00     0.9058395485D 00

VALEUR DE LA FONCTION

     0.1270967662D 00    -0.8054172976D 00

MATRICE GAMA INVERSE

     0.3111447822D 01    -0.2611570987D 01
    -0.7764439163D 00    -0.7060662718D 00

MATRICE H

    -0.1165152653D 00    -0.4600734721D 00
    -0.4160642156D-01     0.5123765150D 00

DETERMINANT

    -0.8561038546D 00


ITERATION NO  7
*****************



POINT A L'ITERATION SUIVANTE

    -0.4371822575D 00     0.76809[illegible]
```

```
VALEUR DE LA FONCTION

      0.1625942756D 00     0.9661293581D-01

MATRICE GAMA INVERSE

      0.1168542604D 01     0.1062624746D 01
      0.5735138364D 01    -0.2256943514D 00

MATRICE H

      0.5073872575D 00    -0.1165152653D 00
     -0.1368455348D 00    -0.4160642156D-01

DETERMINANT

     -0.1641024911D 00


ITERATION NO  8
******************


POINT A L'ITERATION SUIVANTE

     -0.4795650936D 00     0.8469342397D 00

VALEUR DE LA FONCTION

      0.3311997897D-01     0.3461404378D-01

MATRICE GAMA INVERSE

     -0.7871879791D 01     0.3097813323D 00
     -0.5410548418D 00     0.1129902371D 01

MATRICE H

     -0.4238283609D-01     0.5073872575D 00
      0.7794022602D-01    -0.1368[illegible]
```

DETERMINANT

-0.8115092910D 00

ITERATION NO 9
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5009124602D 00 0.8693186675D 00

VALEUR DE LA FONCTION

-0.5714113020D-02 -0.1586437402D-02

MATRICE GAMA INVERSE

0.2720011774D 02	-0.5680288791D 02
-0.1588185399D 02	0.1703727018D 02

MATRICE H

-0.2134736659D-01	-0.4238283609D-01
0.2238442773D-01	0.7794022602D-01

DETERMINANT

-0.1945117360D 00

ITERATION NO 10
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.4996059383D 00 0.8658140832D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.3661286767D-03   0.6823683142D-03

MATRICE GAMA INVERSE

0.2742446874D 03	-0.2941961839D 03
0.1718783547D 02	-0.4606220496D 02

MATRICE H

0.1306521904D-02	-0.2134736659D-01
-0.3504584300D-02	0.2238442773D-01

DETERMINANT

-0.4424918943D 00

ITERATION NO 11
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000114795D 00   0.8660251380D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.4605699213D-06   -0.1988301839D-04

MATRICE GAMA INVERSE

0.6594928457D 03	-0.1767395009D 04
0.2041293031D 03	-0.1062918251D 03

MATRICE H

-0.4055411552D-03	0.1306521904D-02
0.2110547847D-03	-0.3504584300D-02

DETERMINANT

0.7338096205D 00

ITERATION NO 12
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.4999999891D 00 0.8660253932D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.1829883578D-07 0.1879616469D-07

MATRICE GAMA INVERSE

-0.9254708919D 05	0.4819003872D 05
-0.2622786114D 04	-0.5828506796D 02

MATRICE H

0.1149032152D-04	-0.4055411552D-03
0.2552692888D-06	0.2110547847D-03

DETERMINANT

0.4920459192D 00

ITERATION NO 13
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000000000D 00 0.8660254038D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.5526912261D-11   -0.8171245343D-11

MATRICE GAMA INVERSE

-0.5344328171D 08   -0.1187647475D 07
-0.5049623141D 05   0.4912451717D 05

MATRICE H

-0.1085668855D-07   0.1149032152D-04
0.1056164685D-07   0.2552692888D-06

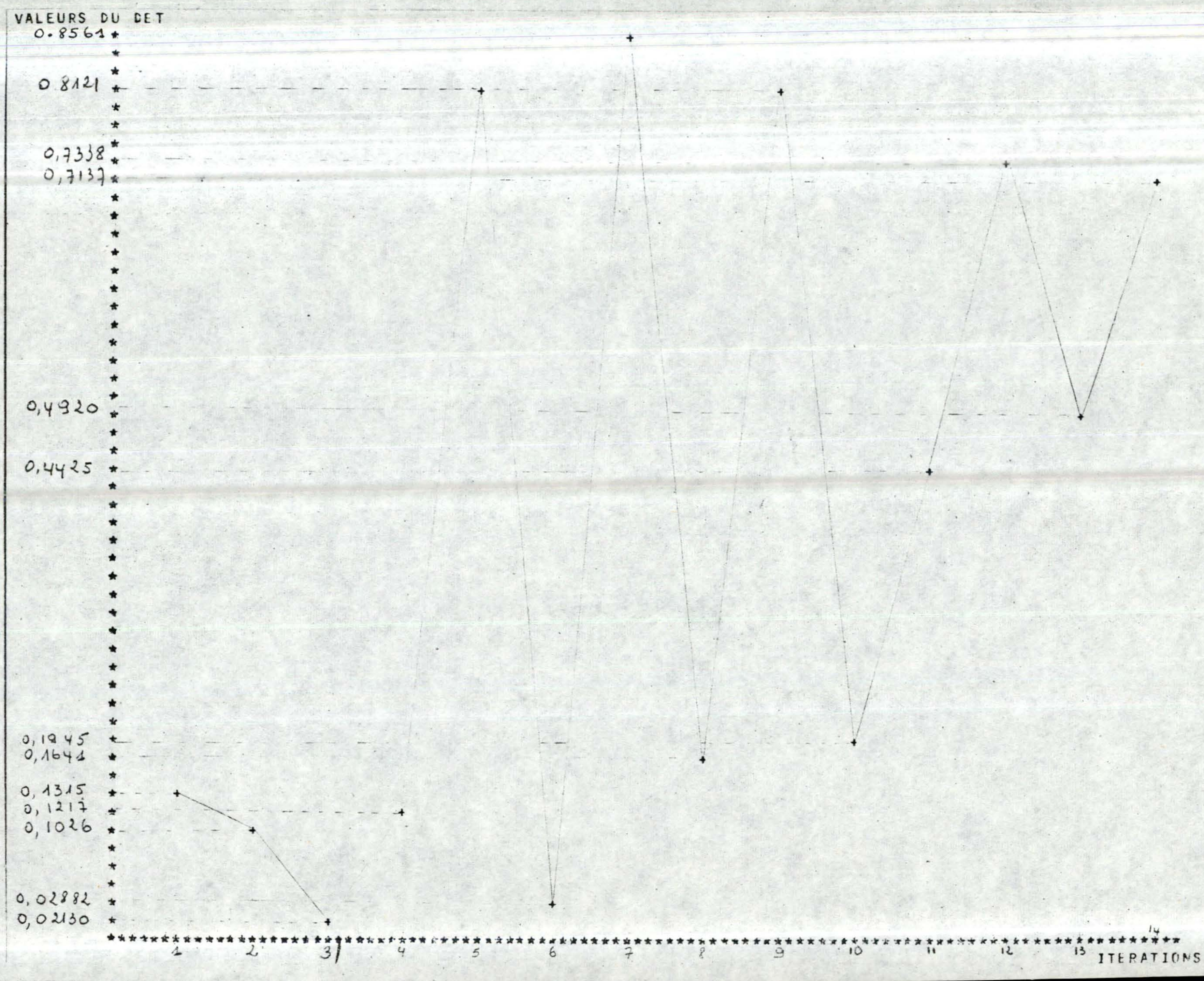
DETERMINANT

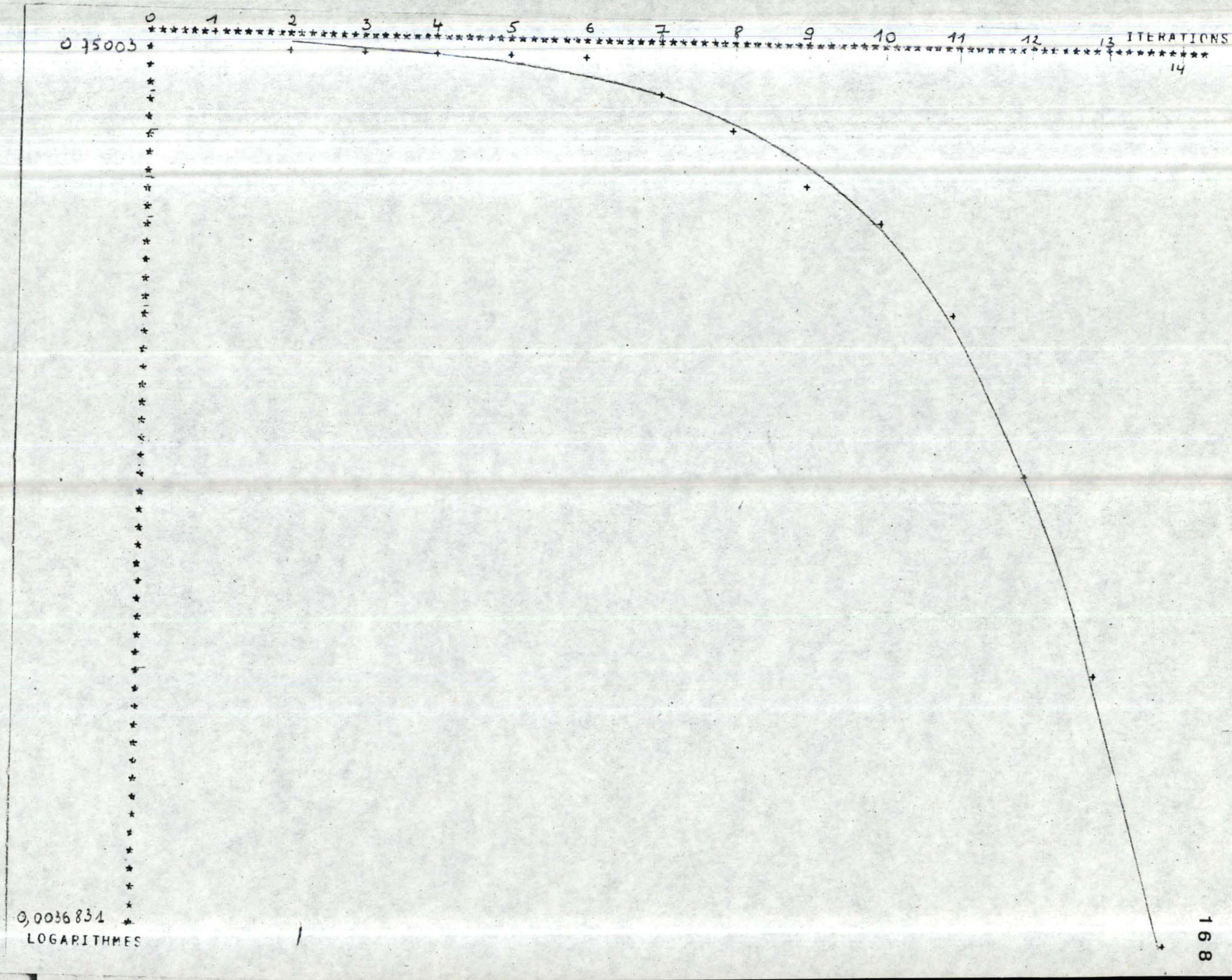
-0.7137072753D 00

ITERATION NO 14
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000000000D 00   0.8660254038D 00


VALEURS DU DET
0.8561
0,8121
0,7338
0,7137
0,4920
0,4425
0,1945
0,1641
0,1315
0,1217
0,1026
0,02882
0,02130
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
ITERATIONS


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
ITERATIONS
0 75003
0,0036831
LOGARITHMES

INTERPRETATION DES RESULTATS

Nous voyons que la méthode s'arrête après un nombre fini d'itérations à savoir : 14.

A ce moment, le test de convergence est satisfait et nous pouvons conclure à la "tendance" de convergence.

Remarquons que ce n'est qu'à partir de la 7ème itération que le point commence à se rapprocher de la valeur de la racine. Il oscille ensuite et à la 13ème itération il devient stable. Nous obtenons la valeur du point x^* avec une précision de l'ordre de 10^{-8}.

La valeur de la fonction F ne commence à décroître de façon appréciable qu'à partir de l'itération n° 8. Nous constatons qu'elle tend vers zéro quand le point x tend vers x^*. Il en est de même pour les matrices H et gama inverse.

Lorsque nous regardons le graphe du $\log \| x^k - x^* \|$, nous pouvons sans hésitation conclure à la tendance superlinéaire. En effet, la courbe qui y figure est la courbe caractéristique de la convergence superlinéaire.
Faible au début, la valeur du logarithme décroît ensuite rapidement.

Quant à la représentation de la norme du déterminant de $\tilde{H}$ où $\tilde{H} = (h^1 / \| h^1 \|, .., h^n / \| h^n \|)$, h^j = vecteur colonne de H_1, nous pouvons simplement constater qu'elle est toujours supérieur à zéro. A aucun moment au cours des itérations, la valeur de la norme ne devient nulle. La matrice ne devient donc jamais singulière et donc, la suite <u>finie</u> des matrices H_{1h} appartient à $K(\sigma)$ où il suffit de prendre σ comme étant la plus petite valeur des normes.

Nous constatons aussi que la courbe des normes est une courbe oscillante.

2ème CAS :

Prenons cette fois des points de départ situés dans des directions orthogonales.

Par exemple, prenons :

POINTS DE DEPART

-0.7000000000D 00	0.9000000000D 00
-0.3000000000D 00	0.8200000000D 00
-0.3000000000D 00	0.9000000000D 00

RESULTATS

ITERATION ZERO
****

VALEURS DE LA FONCTION

-0.2000000000D-01	-0.3600000000D 00
0.1176000000D 00	0.3280000000D 00
-0.2000000000D-01	0.3600000000D 00

MATRICE GAMA

-0.1376000000D 00	0.1376000000D 00
0.3200000000D-01	0.6880000000D 00

MATRICE INVERSE:

-0.6944444444D 01	0.1388888889D 01
0.3229974160D 00	0.1388888889D 01

MATRICE H

0.0000000000D 00	0.4000000000D 00
0.8000000000D-01	-0.8000000000D-01

DETERMINANT

-0.1000000000D 01

ITERATION NO 1
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.4974160207D 00	0.8883720930D 00

VALEUR DE LA FONCTION

-0.3919829871D-01 0.4591070248D-02

MATRICE GAMA INVERSE

-0.6462216372D 00 -0.2778753040D 01
-0.7177279389D 01 0.3876986258D 00

MATRICE H

-0.1974160207D 00 0.0000000000D 00
-0.1162790698D-01 0.8000000000D-01

DETERMINANT

-0.3822580392D 00

ITERATION NO 2
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.4949338422D 00 0.8658689272D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.2966668885D-03 0.8773257159D-02

MATRICE GAMA INVERSE

0.2546534457D 02 -0.1375574024D 01
0.2996571605D 00 -0.2829847040D 01

MATRICE H

0.2482178426D-02	-0.1974160207D 00
-0.2250316584D-01	-0.1162790698D-01

DETERMINANT

-0.9979861949D 00

ITERATION NO 3
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.4998063316D 00   0.8654797062D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.9449156968D-03   0.3352320681D-03

MATRICE GAMA INVERSE

0.1244807375D 02	-0.1175548236D 03
0.2511536688D 02	0.1929480711D 01

MATRICE H

-0.4872489395D-02	0.2482178426D-02
-0.3892210051D-03	-0.2250316584D-01

DETERMINANT

0.9831653812D 00

ITERATION NO 4
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000015477D 00   0.8660175444D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.1361273932D-04   -0.2680667275D-05

MATRICE GAMA INVERSE

-0.1044644988D 04   -0.8025454551D 02
0.4183429673D 02   -0.1152972356D 03

MATRICE H

-0.1952160566D-03   -0.4872489395D-02
0.5378382508D-03   -0.3892210051D-03

DETERMINANT

0.9295908062D 00

ITERATION NO 5
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000000010D 00   0.8660254190D 00

VALEUR DE LA FONCTION

-0.2634113971D-07	-0.1777739229D-08

MATRICE GAMA INVERSE

-0.4756870957D 05	0.1311015397D 06
-0.3771130974D 03	-0.1920002975D 04

MATRICE H

0.1546671640D-05	-0.1952160566D-03
0.7874561053D-05	0.5378382508D-03

DETERMINANT

0.5098165675D 00

ITERATION NO 6
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000000000D 00	0.8660254038D 00

VALEUR DE LA FONCTION

0.3534061932D-11	0.2796564635D-11

MATRICE GAMA INVERSE

0.2824065037D 08	0.1437821520D 09
-0.1877027417D 05	0.2777235531D 06

MATRICE H

0.1027992844D-08	0.1546671640D-05
-0.1521010426D-07	0.7874561053D-05

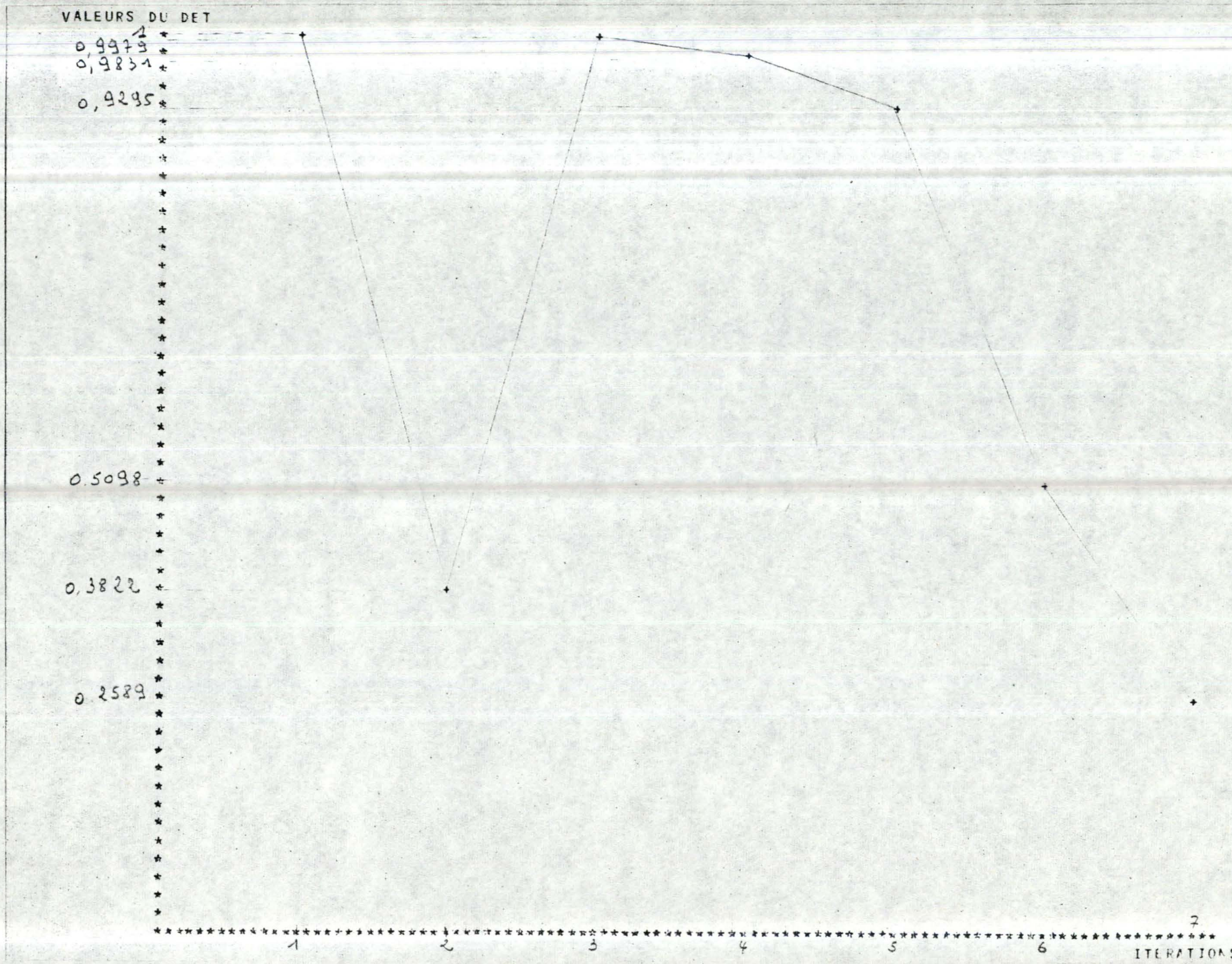
DETERMINANT

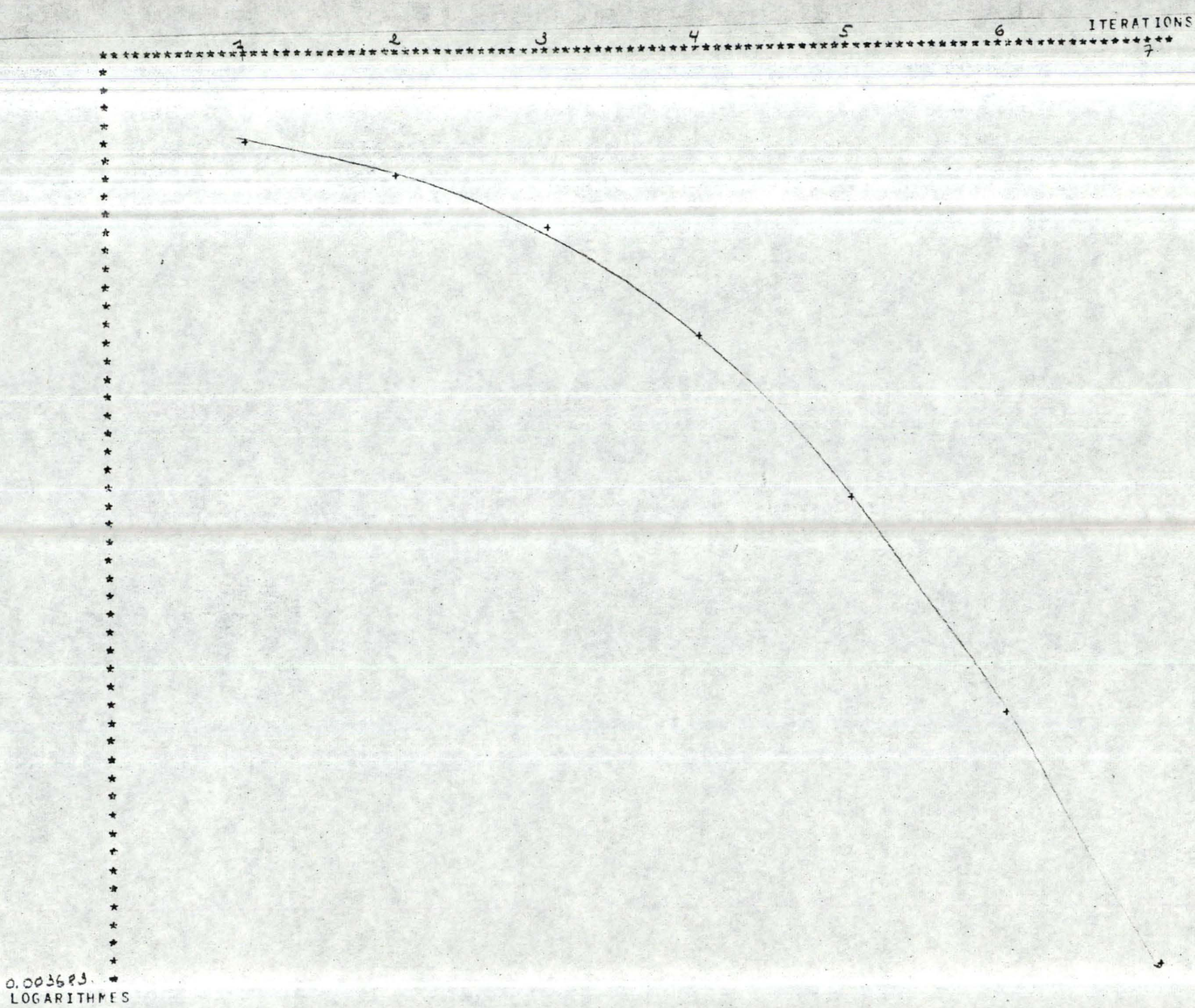
0.2589358032D 00

ITERATION NO 7
****

POINT A L'ITERATION SUIVANTE

-0.5000000000D 00 0.8660254038D 00


VALEURS DU DET
1
0,9979
0,9831
0,9295
0.5098
0,3822
0.2589
1
2
3
4
5
6
7
ITERATIONS


ITERATIONS
1
2
3
4
5
6
7
0.003683
LOGARITHMES

INTERPRETATION

La méthode s'arrête cette fois après 7 itérations et nous donne exactement le même point. Nous avons dans ce cas, une tendance à la convergence nettement plus rapide que dans le cas précédent.

La courbe représentant le $\log \|x^k - x^*\|$ nous permet aussi de conclure à la tendance superlinéaire de convergence.

Quant au graphique de la norme du déterminant, nous voyons qu'à la 1ère itération, elle vaut 1 ce à quoi on s'attendait, les directions étant orthogonales. Comme dans le cas précédent, la courbe oscille et la valeur n'est jamais nulle. Si la suite devenait infinie, nous sommes incapables d'en prédire l'allure, dans les 2 cas.

CONCLUSIONS

Nous avons donc établi numériquement que la méthode n+1 points séquentiels "tend" à converger superlinéairement dans $\mathbb{R}^2$. Les résultats ont été obtenus en exigeant une précision de l'ordre : 10^{-8}. Nous avons aussi mis en évidence que la vitesse de la méthode dépend du choix des n+1 points de départ. Elle dépend donc d'un certain nombre de facteurs arbitraires.

Nous proposons, dans un temps futur, de tester la sensibilité de la méthode de manière plus approfondie suivant les variations apportées à ces facteurs, et, de la tester dans un espace de dimension supérieure à 2.

REFERENCES

[1] POLAK (E) : "Computational Methods in Optimization" : New-York, London : Acad. Press, 1971, Ch. 3, [80-81].

[2] LOOTSMA : "Numerical Methods for Non-Linear Optimization" : New-York, London : Acad. Press, 1972

[3] TORNHEIM (L) : "Convergence of Multipoint Iterative Methods", J. Assoc. Comput. Mach., 1964, 11, 210-220.

[4] WOLFE (P) : "The Secant Method for Simultaneous Non-Linear Equations", Comm. ACM 2

12 (1959), 12-13.

[5] ORTEGA (J-M) and RHEINBOLDT:

« Iterative Solution of Non-Linear Equations in Several Variables », New-York, London, Acad. Press, 1970.