MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Problème de contrôle stochastique traité par les martingales

Farlay, G.; Henin, M.

Award date:
1974

Awarding institution:
Universite de Namur

Problème de contrôle stochastique

traité par les martingales

G. FARLAY

M. HENIN.

1974

Table des matières.

X-3 : Lemme : $\forall n$, la famille $E^{\underline{B}_n}[\sum_{k \in M} V_k \cdot]$ est filtrante croissante.

X-4 : X_n est le plus petit processus satisfaisant aux deux inégalités suivantes :

1. $X_n \underset{q.p.s}{\geq} E^{\underline{B}_n}[\sum_{M} V_k] \quad \forall n \in M, \forall M \in \mathcal{M}$

2. $X_n M_n \underset{q.p.s}{\geq} E^{\underline{B}_n}(X_{n+1} M_{n+1})$.

X-5 : Expression de l'optimum.

X-6 : Convergence q.p.s. de la v.a. X_n vers $\sum V_k$.

X-7 : interprétation de X_S, $\forall S$ t.a. associé à B

X-8 : critère d'optimalité sous l'hypothèse de régularité.

X-9 : condition suffisante d'ε-optimalité.

X-10 : exemple de solution optimale dans le cas particulier où $(\underline{G}_n) = (\underline{B}_n)$ $\forall n$.

Conclusions et perspectives d'avenir.

Index des notations.

$(S, \mathcal{S})$: espace probabilisable composé de l'espace topologique des états du processus stochastique et de sa tribu borélienne.

$(A, \mathcal{a})$: espace de contrôle du processus superposé au système aléatoire.

r et f : applications mesurables et bornées définie sur $S \times A \times S$, représentants les rendements associés aux actions posées à chaque instant.

Ω : espace des trajectoires.

Q : loi de référence sur Ω.

P : loi associée à chaque stratégie admissible.

X_n : application projection, $\forall n$, sur E, qui associe à chaque trajectoire l'état occupé à l'instant n.

$\underline{\underline{B}}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ permet d'observer le processus jusqu'à l'instant n.

$\mathcal{G}_n$ = tribu intermédiaire aux $(\underline{\underline{B}}_n)$ où $\underline{\underline{B}}_n \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \underline{\underline{B}}_{n+1}$.

$(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\forall n : M_n = \dfrac{dP}{dQ}$ représente une martingale par rapport à la suite croissante $(\underline{\underline{B}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$X_n \underset{Q.ps}{=} \underset{M \in \mathcal{M}_n}{\text{ess.sup}}\, E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k \in \mathbb{N}} V_k M_k\Big]$$

où $\mathcal{M}_n = \{$martingales $\in \mathcal{M}$, tel que $M_n = 1\}$

$\mathcal{M} = \{$martingales positives, sommables, $\mathcal{G}_n$-mesurable et d'espérance unité$\}$.

v.a. : variable aléatoire

p.s. : presque sûrement.

t.a : temps d'arrêt.

$\blacksquare$: fin de démonstration.

$E^{\underline{\underline{B}}}$: symbole d'espérance conditionnelle par rapport à la tribu $\underline{\underline{B}}$.

I. Présentation du problème et objectif poursuivi.

Le présent ouvrage se propose d'examiner suivant une optique probabiliste, un problème d'optimisation avec contrainte.

A cet effet, on considère un système évoluant dans le temps, suivant une loi imposée au départ. C'est essentiellement pour des raisons de simplification du bagage technique que nous le supposons discret : c'est-à-dire plus exactement, qu'on se contente d'envisager un système susceptible de ne changer d'état qu'en des instants : 1, 2, 3, ... A tout moment, on est de plus à même de contrôler le processus par le choix d'une action. Une suite de telles actions, constituera assez naturellement une « stratégie de comportement ». Il s'avère profitable de définir dès à présent plus précisément cette notion de « behaviour strategy. »

D'une manière plus réaliste, on substituera à l'action une probabilité sur l'espace de contrôle ; cette dernière étant déterminée par l'histoire partielle du phénomène jusqu'à l'instant actuel. D'autre part, comme tout processus de décision doit permettre de réaliser un certain but, nous allons introduire ce qu'on a coutume d'appeler une « mesure de performance » : à chaque instant, on va associer à l'action prise un double rendement représentant d'une manière heuristique le bénéfice et le coût qui en résultent. Dès lors, le problème consisterait à déterminer à priori un mode d'action qui tout en maximisant le revenu total laisserait la fonction de coût global bornée. Or, l'évolution du processus étant aléatoire, il s'ensuit que les rendements totaux correspondant à une stratégie donnée sont méconnus. Conséquemment notre objectif est plus exactement de sélectionner parmi les stratégies de comportement admissibles (une stratégie admissible étant une stratégie pour laquelle l'espérance mathématique de la « loss function » reste bornée.) celles qui sont optimales : c'est-à-dire celles qui maximisent en moyenne la « reward function ».

En vue de faciliter l'étude du sujet, on interprétera dans une première phase les dites stratégies en terme de martingales discrètes, particulièrement remarquables. Cette manière de faire présente le double avantage suivant : d'abord elle nous permet d'ignorer les hypothèses de convexité relativement restrictives qui dans un cadre classique accompagnent et alourdissent considérablement la résolution du problème qui nous intéresse ; d'autre part elle nous ramène à un problème d'optimisation sur ces outils probabilistes modernes plus commodes à manipuler que constituent sans aucun doute les martingales. A cet effet, il faudra encore nous assurer que la martingale obtenue en résolvant ce dernier problème représente effectivement une stratégie de comportement. C'est pourquoi nous établissons l'existence d'une correspondance biunivoque entre cette classe importante de martingales et l'ensemble des « behaviour strategy ». Dans un second temps, notre but majeur est de nous attacher à la résolution proprement dite du problème en traitant d'abord la situation où on a éliminé la contrainte. La recherche conduisant à l'obtention de solutions ε-optimales et optimales, repose essentiellement sur l'introduction d'un processus stochastique constitué d'enveloppes essentielles supérieures, qu'il nous a semblé utile d'étudier préalablement, dans un contexte relativement général, ainsi que sur une série de propositions fondamentales, caractérisant ce processus. Enfin, il va sans dire, qu'une connaissance élémentaire de la théorie de la mesure est indispensable pour aborder ce travail. Néanmoins, en ce qui concerne les résultats fondamentaux de la théorie des martingales, nous feront souvent référence à l'excellent ouvrage de J. Neveu : « Martingales à temps discret ».

II. Formalisation du problème.

Il nous paraît intéressant et utile de préciser dès à présent la terminologie indispensable à la formulation du modèle d'optimisation qui nous intéresse. A cet effet, considérons un espace probabilisable $(S, \mathcal{S})$ composé de l'espace topologique des états du processus stochastique et de sa tribu borélienne; $(A, \mathcal{a})$ l'espace de contrôle du processus de décision superposé au système aléatoire; ainsi que r et f deux applications mesurables et bornées définies sur $S \times A \times S$, représentant les rendements associés aux actions posées à chaque instant. A ce propos, il faut noter que dans ce qui suit, on se borne à envisager des processus à rendements stationnaires, c'est-à-dire ne dépendant pas explicitement du temps, mais bien implicitement par l'intermédiaire de la transition (il faut entendre par là le couple formé de l'état primal et du nouvel état visité) et de la décision prise.

Formellement celà s'exprime par les relations :

$$\forall i \quad r_i(s_i, a_i, s_{i+1}) = r(s_i, a_i, s_{i+1})$$

$$f_i(s_i, a_i, s_{i+1}) = f(s_i, a_i, s_{i+1})$$

Lorsqu'une décision a été prise, le système change d'état suivant une loi d'évolution q définie comme suit : $q : \begin{array}{ccc} A \times S \times \mathcal{S} & \longrightarrow & [0,1] \\ (a, s, \cdot) & \longmapsto & q(a, s, \cdot) \end{array}$

satisfaisant aux deux clauses suivantes:

1) $\forall (a, s)$ fixé dans $A \times S$, $q(a, s, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathcal{S}$.

2) $\forall T$ fixé dans $\mathcal{S}$, $q(\cdot, \cdot, T)$ est une fonction mesurable de (a, s).

Cette dernière contrainte, revêt un intérêt strictement technique.

Elle est notamment trivialement vérifiée, lorsque A et S sont des ensembles discrets. Elle constitue donc, à chaque instant une loi de probabilité sur S, fonction de l'action prise et de l'état précédemment visité.

Désignons par $\pi = (\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une séquence d'applications mesurables qui pour chaque n sont issues de « l'history set » $= \{a_0, s_0, a_1, s_1, \dots, a_n, s_n\}$ et leur valeur dans l'ensemble des lois de distribution sur $(A, \mathcal{a})$. Cela signifie que, à chaque moment, le joueur est informé de tout ce qui précède et donne à un arbitre une probabilité sur l'espace de contrôle. Cette dernière, lui permettra de déterminer l'action à prendre, compte tenu des états occupés et des actions posées antérieurement.

En outre, l'état et l'action initiaux (cette dernière étant introduite par raison de symétrie) sont supposés préalablement fixés. Par conséquent, l'évolution du processus est entièrement déterminée par q et π.

Soient ρ et φ deux applications représentant les rendements totaux et formellement définies sur l'espace des trajectoires contrôlées $\Omega = \{a_0, s_0, a_1, s_1, \dots\}$ de la façon suivante :

$$\rho = \sum_{i \in \mathbb{N}} r(s_i, a_i, s_{i+1})$$

$$\varphi = \sum_{i \in \mathbb{N}} f(s_i, a_i, s_{i+1})$$

Il est clair que le problème d'optimisation n'est fondé que dans la mesure où ces deux séries sont réellement convergentes. Si tel n'est pas le cas, on remédie à cette situation fâcheuse, en introduisant artificiellement un facteur de pondération β positif et strictement inférieur à l'unité. Une application immédiate du critère de majoration de Weierstrass permet dès lors de garantir la légitimité de ces définitions, ainsi que la convergence uniforme et absolue de chacune des séries.

signalons cependant l'interprétation économique bien connue de ce facteur de poids β. Lorsque les rendements $\Pi(s_i, a_i, s_{i+1})$ et $f(s_i, a_i, s_{i+1})$ représentent, et c'est souvent le cas, une certaine somme d'argent exprimée par exemple en francs et susceptible d'être placée à un intérêt composé, il semble naturel et utile de les actualiser de manière à être à même de les comparer. Par conséquent, c'est cette initialisation qui nous amène à introduire dans les expressions additives des rendements globaux le facteur β de normalisation qui n'est rien d'autre que $(1+i)^{-1}$ où i désigne le taux d'intérêt envisagé. Il s'agit en réalité d'une pondération exponentielle décroissante des rendements ayant pour effet d'attacher au cours du temps de moins en moins d'importance aux contributions apportées par les termes supplémentaires. Notons qu'en écartant la valeur $i = 0$ - indubitablement peu réaliste pour un taux d'intérêt - on en déduit clairement que le coefficient d'actualisation β satisfait à l'inégalité $\beta < 1$. Toutefois, libre à nous, d'éliminer plus tard ce paramètre par un passage à la limite vers l'unité. Ce qui s'interprète aussi par des considérations économiques : en effet, dans de nombreux cas pratiques, il arrive que l'on soit amené à agir sur le processus à des instants relativement proche de l'ordre de quelques jours. Il va sans dire que l'usage d'un coefficient d'actualisation β voisin de 1 s'explique par la brièveté des périodes séparant les décisions de contrôle.

Pour chaque initialisation du problème (détermination de a_0 et s_0) et choix de q et Π, on peut munir Ω de la probabilité naturelle proposée par "Ionescu Tulcea*" dans le théorème qui s'énonce comme suit :

* On trouvera une démonstration détaillée ainsi qu'une interprétation intuitive de ces formules intégrales en se rapportant au paragraphe V - 1 de "Bases mathématiques du calcul des probabilités" (J. Neveu)

Etant donné un espace d'état $(E, \mathcal{E})$ et des probabilités μ et $P_{n+1}^{0,\dots,n}$ respectivement d'initialisation sur cet espace et de transition définies $\forall n$ sur $E^n \times \mathcal{E}$, on peut construire sur $E^{\mathbb{N}}$ une et une seule probabilité q dont :

a) La valeur sur un pavé mesurable est donnée par :

$$q\left[\prod_n F_n\right] = \int_{F_0} d\mu(x_0) \int_{F_1} P_1^0(x_0, dx_1) \int_{F_2} P_2^{0,1}(x_0, x_1, dx_2) \dots$$

$$\dots\dots\dots \int_{F_N} P_N^{0,1,\dots,N-1}(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, dx_N)$$

$$(\forall n \ \text{t.q} : \forall n > N \quad F_n = E)$$

b) L'expression de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire positive sur (Ω, a) ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées :

$$\int_\Omega X(\omega)\, dq = \int_E d\mu(x_0) \int_E P_1^0(x_0, dx_1) \int_E P_2^{0,1}(x_0, x_1; dx_2)$$

$$\dots\dots\dots \int_E P_N^{0,1,\dots,N-1}(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, dx_N)$$

$$\cdot X(x_0, x_1, \dots, x_N)$$

où $\Omega = E^{\mathbb{N}}$.

Notons que les caractérisations formulées aux alinéas a et b, correspondent aux deux points de vue, strictement équivalents, suivant lesquels, une probabilité peut être envisagée ; à savoir : soit comme une fonction d'ensemble définie sur une σ-algèbre et satisfaisant aux axiomes de Kolmogorov ou comme une fonctionnelle linéaire positive.

Désignons encore par D l'ensemble des stratégies admissibles ; c'est-à-dire : $D = \{ \pi \mid E_0^\pi [\varphi] < K \}$; on suppose évidemment que D est non vide.

Il s'agira donc de sélectionner parmi les stratégies de cette classe, celles qui maximisent $E_0^\pi [\rho]$.

III. Espace d'état produit.

- En vue de compactifier les notations et de nous ramener à un espace d'état canonique, nous allons définir l'espace d'état produit $(E, \mathcal{E})$

$$E = A \times S = \{ x = (a, s) \mid a \in A \text{ et } s \in S \}$$

$\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{S}$ (c'est-à-dire la plus petite tribu rendant les applications coordonnées simultanément mesurables)

- D'une manière générale, la donnée supplémentaire d'une probabilité P_0 de référence sur l'espace de contrôle, permet de construire, à partir de la loi d'évolution q, un noyau de transition sur E défini sur la semi-algèbre des pavés mesurables ci-après :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x = (a, s) \text{ fixé dans } E \\ M(x, B \times T) = \int_B q(a', s, T)\, dP_0(a') \\ \begin{cases} B \in \mathcal{A} \\ T \in \mathcal{S}. \end{cases} \end{array}}$$

Il est à remarquer, que la formulation donnée ci-dessus est bien fondée, puisque de la mesurabilité de la loi d'évolution $q(a', s, T)$ T fixé dans $\mathcal{S}$ par rapport au couple (a', s), découle immédiatement la mesurabilité de l'application partielle obtenue en fixant l'état s.

En vertu du théorème de génération d'une probabilité (*), il suffit de vérifier l'axiomatique de Kolmogorov sur la semi-algèbre

(*) Référence : J. Neveu : "Bases mathématiques" - I. 6. 1.

des pavés mesurables", engendrant la tribu produit $\mathcal{E}$.

Plus exactement, il convient de montrer successivement que $N(\cdot,\cdot)$ est σ-additive et de masse totale unité.

α) Propriété de σ-additivité sur les pavés.

Soit $F = B \times T$ $(B \in \mathcal{a}, T \in \mathcal{T})$, un pavé mesurable de la semi-algèbre se décomposant en une somme dénombrable d'objets du même type :

$$F = \bigcup_{\mathbb{N}} F_n \quad \text{où} \quad \forall n \quad F_n = B_n \times T_n.$$

Il faut prouver que : $\boxed{N(x, F) = \sum N(x, F_n)}$

En utilisant les propriétés élémentaires de l'indicatrice, il vient immédiatement :

$$1_{B \times T}(a', s) = 1_B(a')\, 1_T(s) = \sum_{\mathbb{N}} 1_{B_n}(a')\, 1_{T_n}(s)$$

Par intégration en s par rapport à $q(a', s, \cdot)$ et interversion des signes $\int$ et Σ on a :

$$1_B(a')\, q(a', s, T) = \sum_{\mathbb{N}} 1_{B_n}(a')\, q(a', s, T_n)$$

De même, en intégrant par rapport à P_0 :

$$\int_B q(a', s, T)\, dP_0(a') = \sum_{\mathbb{N}} \int_{B_n} q(a', s, T_n)\, dP_0(a')$$

c'est-à-dire :

$$N(x, B \times T) = \sum_{\mathbb{N}} N(x, B_n \times T_n)$$

β) Masse totale unité.

Il est manifeste que :

$$N(x, E) \underset{\text{déf}}{=} \int_A q(a', s, S)\, dP_0(a') \text{ vaut l'unité,}$$

puisque P_0 et $q(a', s, \cdot)$ $\forall (a', s)$ fixé sont des probabilités respectivement sur A et S.

On peut même affirmer davantage. Il résulte effectivement de la mesurabilité de $q(\cdot, \cdot, T)$ pour tout T fixé, que $N(x, F)$ $\forall F$ est mesurable par rapport à son premier argument et que par conséquent, elle constitue une probabilité de transition sur $(E, \mathcal{E})$.

On se propose, à présent, de rechercher l'équivalent de ce noyau, dans le cas particulier où A est fini et S dénombrable.

Sous ces hypothèses, l'espace produit E est également discret.

Dans cette optique, se donner une probabilité de référence sur A équivaut à attribuer un poids à chaque élément de A ; (la masse totale valant 1), de la manière la plus neutre possible : P_0 sera donc la probabilité indifférente, qui charge chaque action d'un poids valant $\frac{1}{k}$, (où $k = \text{card}(A)$), tandis que la transition se formulera comme suit :

Soient $\begin{cases} x = (a, s) \\ x' = (a', s') \end{cases}$

$$N(x, x') = \frac{1}{k}\, q(a', s, s')$$

Il découle immédiatement que $\sum_{x' \in E} N(x, x') = 1$ pour tout $x \in E$.

En effet, $\sum_{x' \in E} N(x, x') \underset{\text{déf}}{=} \frac{1}{k} \sum_{\substack{a' \in A \\ s' \in S}} q(a', s, s')$

$$= \frac{1}{k} \sum_{a' \in A} \sum_{s' \in S} q(a', s, s')$$

or ; $\sum_{s' \in S} q(a', s, s') = 1$; q étant une probabilité sur S.

d'où $\sum_{x' \in E} \Pi(x, x') = \frac{1}{k} k = 1.$

C.Q.F.D.

Notons que ce cadre discret, a l'avantage de rendre les considérations théoriques que nous sommes amenés à faire dans le cas où l'espace produit est non dénombrable, plus intuitives.

. Considérons à présent une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de probabilités de transition sur $E^n \times \mathcal{E}$ supposées absolument continues par rapport à la probabilité de transition $\Pi(\cdot,\cdot)$ énoncée précédemment. Le théorème fondamental de Radon Nikodym, nous permet dès lors d'affirmer l'existence pour tout n fixé d'une densité désignée par f_{n+1}. (application mesurable et sommable de $E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}^+$)

c'est-à-dire, plus précisément que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall n, \ \forall F \in \mathcal{E} : \\ p_n(x_0, x_1, \ldots, x_n ; F) = \displaystyle\int_{x \in F} f_{n+1}(x_0, \ldots, x_n ; x)\, \Pi(x_n, dx) \end{array}}$$

IV Espace d'état canonique.

- Dans le but de faciliter l'interprétation des stratégies sous forme de martingales positives, munissons l'espace des trajectoires $\Omega = E^{\mathbb{N}} = \{\omega = (x_0, x_1, \dots)\}$ d'une structure d'espace probabilisé :

$(\Omega, \mathcal{a}, \underline{\underline{B}}_n, Q)$

où on a posé :

- $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ qui représente l'ensemble des suites de $\mathbb{N} \to E$.
- $\mathcal{a} = \sigma(X_n, n \geq 0)$

  avec X_n l'application projection $\forall n$, sur E

  $$X_n : \begin{array}{l} E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E \\ \omega \longmapsto x_n \end{array}$$

  A chaque trajectoire, elle associe l'état occupé à l'instant n.
- $\forall n$; $\underline{\underline{B}}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$: sous-tribu qui permet d'observer le processus jusqu'à l'instant n.
- Q définie à partir de Π au moyen du théorème d'Ionescu Tulcea.

  (où l'état initial x_0 est fixé avec certitude.)

- Il importe de remarquer, que cette probabilité Q proposée par Tulcea a le mérite de rendre le processus (X_n) markovien (de probabilité de transition Π). En voici la <u>justification</u>:

Il faut démontrer que $\forall n$ et $\forall f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (bornée et mesurable)

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}[f(X_{n+1})] \overset{?}{=} \Pi f(X_n) \quad Q \text{ p.s.}$$

Vérifions que la variable aléatoire $\Pi f(X_n)$ satisfait à la définition d'espérance conditionnelle.

a) Mesurabilité :

Evident : $Nf(X_n)$ étant $\sigma(X_n)$ mesurable l'est encore par rapport à $\underline{\underline{B}}_n$.

b) Identité intégrale :

$$\forall B \in \underline{\underline{B}}_n \quad \int_B f(X_{n+1})\, dq \overset{!}{=} \int_B Nf(X_n)\, dq .$$

En vertu du théorème de Carathéodory , il suffit de la montrer , pour tout événement B du type :

$$A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n$$

où $\forall i \in [0, n] \quad A_i \in \sigma(X_i)$

Transformons :

1) Le premier membre :

$$\int_{A_0 \times \cdots \times A_n} f(X_{n+1})\, dq = \int_\Omega f(X_{n+1})\, 1_{A_0 \times \cdots \times A_n}(X_0, X_1, \dots, X_n)\, dq .$$

$$= \int_\Omega f(X_{n+1})\, 1_{A_0}(X_0)\, 1_{A_1}(X_1) \dots 1_{A_n}(X_n)\, dq .$$

$$= 1_{A_0}(x_0) \int_{A_1} N(X_0, dX_1) \dots \dots \int_E N(X_n, dX_{n+1})\, f(X_{n+1}) .$$

(cfr Ionescu Tulcea)

2) Le second membre :

Pour la même raison, celui-ci peut s'écrire :

$$1_{A_0}(x_0) \int_{A_1} N(x_0, dX_1) \dots \dots \int_{A_n} N(X_{n-1}, dX_n)\, Nf(X_n)$$

$$\text{où } Nf(X_n) = \int_E f(X_{n+1})\, N(X_n, dX_{n+1})$$

C.Q.F.D

- De façon similaire, on peut définir sur $(\Omega ; \mathcal{a})$ une seconde probabilité P à partir des $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (Ionescu Tulcea)

- L'objet du paragraphe suivant, est de mettre en évidence le lien existant entre les différentes restrictions de ces deux probabilités (P et Q) à chacune des sous-tribus $\underline{\underline{B}}_n$.

V. Absolue continuité.

Etablissons que $P = M_n \cdot Q$ sur $\underline{\underline{B}}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

où $M_n = \begin{cases} \mathbb{N}_0 : \prod_{i=1}^{n} f_i(x_0, x_1, \ldots, x_i) \\ 0 \qquad 1 \end{cases}$

C'est à dire $\forall B \in \underline{\underline{B}}_n \quad P[B] \stackrel{?}{=} \int_B M_n \, dQ$.

Il suffit de le prouver pour tout pavé mesurable de la semi algèbre engendrant $\underline{\underline{B}}_n$, en vertu du théorème du prolongement de Carathéodory.

Soit $F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n \times E \times E \times \cdots$ un pavé mesurable de $\underline{\underline{B}}_n$.

$$P[\{x_0 \in F_0\} \cap \{x_1 \in F_1\} \cap \cdots \cap \{x_n \in F_n\}] \stackrel{?}{=} \int_{F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n \times E \times \cdots} M_n \, dQ.$$

En se servant des définitions le premier membre devient :

$$P[\{x_0 \in F_0\} \cap \cdots \cap \{x_n \in F_n\}] = 1_{F_0}(x_0) \int_{F_1} p_0(x_0; dx_1) \int_{F_2} p_1(x_0, x_1; dx_2) \cdots$$

$$\cdots \int_{F_n} p_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}; dx_n)$$

$$= 1_{F_0}(x_0) \int_{F_1} f_1(x_0; x_1) N(x_0, dx_1) \cdots$$

$$\cdots \int_{F_n} f_n(x_0, \ldots; x_n) N(x_{n-1}, dx_n)$$

$$= \int_{F_0 \times F_1 \times \cdots \times F_n} f_1(x_0; x_1) f_2(x_0, x_1; x_2) \cdots f_n(x_0, \ldots; x_n) \, dQ.$$

Ce qui achève la démonstration de cette propriété. ∎

VI. Introduction de la martingale positive.

Un bref rappel de la notion de cet outil probabiliste moderne, s'impose:

Soient : - $(\Omega, \mathcal{A}, \underline{\underline{B}}_n, P)$ un espace probabilisé et une suite croissante de sous-tribu de $\mathcal{A}$.

- $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique défini sur cet espace.

et supposons

1. numérique réel. (représentant par exemple l'état de la fortune d'un joueur à chaque instant n.
2. positif $\Longleftrightarrow \forall n \; X_n \geq 0$ (cela permet de garantir l'existence des espérances conditionnelles.)
3. adapté $\Leftrightarrow \forall n, X_n : \underline{\underline{B}}_n$ - mesurable (Le déroulement du jeu en cours, est observable depuis l'instant initial - $n=0$ - jusqu'à l'instant actuel).

Ce processus est une martingale positive $\overset{déf}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall n \quad X_n = E^{\underline{\underline{B}}_n}[X_{n+1}].$$

VI. 1.

Ce qui s'interprète comme suit : à tout moment je dispose de l'état actuel de ma fortune. Je m'intéresse à ses variations dans le futur immédiat. C'est pourquoi, compte tenu de l'information dont je dispose à cet instant ($\underline{\underline{B}}_n$), je tâche de prédire X_{n+1}, en fabriquant son espérance conditionnelle. J'en conclus que mon processus est constant en moyenne conditionnelle :

$$X_n = E^{B_n}(X_{n+1}) \quad \forall n.$$

Signalons une formulation équivalente de la définition de martingale, à laquelle nous ferons couramment appel par la suite (§ 10 entre autre).

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Le processus est une martingale} \\ \quad\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \\ X_n = E^{\underline{\underline{B}}_n}[X_p] \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \;;\; p > n.\end{array}} \qquad \text{VI - 2.}$$

- Montrons que la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$; [où $\forall n \quad M_n = \dfrac{dP}{dq}$ représente la dérivée au sens de Radon - Nikodym] forme une martingale par rapport à la suite croissante $\underline{\underline{B}}_n$ construite antérieurement.

Montrons que $M_n = E^{\underline{\underline{B}}_n}[M_{n+1}]$ q.p.s. $\forall n$.

où $M_n = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_0, x_1, \dots, x_i)$ pour $n \in \mathbb{N}_0$

Il s'agit d'établir que M_n a les propriétés qui caractérisent l'espérance conditionnelle.

Or, M_n est $\underline{\underline{B}}_n$ mesurable en tant que produit de fonctions $\sigma(X_0, X_1, \dots X_i)_{0 \leq i \leq n}$ mesurables, donc $\underline{\underline{B}}_n$ mesurable.

D'autre part :

$$\forall B \in \underline{\underline{B}}_n \quad \int_B M_n \, dq = \int_B E^{\underline{\underline{B}}_n}(M_{n+1}) \, dq,$$

car chacun des deux membres de l'égalité vaut $P(B)$.

En effet,

$$\alpha) \quad \int_B M_n \, dq = P[B] \quad \text{par définition de } M_n$$

$$\beta) \quad \int_B E^{\underline{\underline{B}}_n}[M_{n+1}] \, dq = \int_B M_{n+1} \, dq$$

par définition de l'espérance conditionnelle.

$$\text{et} \int_B M_{n+1}\, dq = P[B]$$

$$\text{car } B \in \underline{\underline{B}}_n \Longrightarrow B \in \underline{\underline{B}}_{n+1}$$

Un raisonnement analogue mettrait en évidence dans le cas discret une expression du même type pour la martingale : elle se présente sous l'aspect d'un produit, non plus de densités, mais des Π_n.

<u>Conclusion</u>:

<u>Cas discret</u> :	$M_n = k^n \, \Pi_0(x_0; a_1) \cdots\cdots \Pi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}; a_n)$
<u>Cas continu</u> :	$M_n = f_1(x_0; x_1)\, f_2(x_0, x_1; x_2) \cdots f_n(x_0, x_1, \ldots x_{n-1}; x_n)$

VII . Caractérisation de la martingale.

Tâchons de faire apparaître quelques propriétés intéressantes et utiles pour la suite, des martingales représentant des stratégies de comportement :

a) $\boxed{\text{Positivité}}$ résulte de la définition de densité de Radon Nikodym.

b) $\boxed{\text{Intégrabilité}}$

$$\forall n : \quad E_q[M_n] = \int_\Omega M_n \, dq = P(\Omega) = 1$$

c) $\boxed{\text{L'espérance est constante sur tout temps d'arrêt fini } \nu.}$

Cette propriété quoique quasi évidente, revêt une importance cruciale pour les développements ultérieurs. C'est pourquoi, nous l'examinerons en détail.

Un double rappel s'impose :

1) ν temps d'arrêt associé à une suite $(\underline{\underline{B}}_n)$ croissante.

$$\underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{l} \Omega \xrightarrow{\nu} \overline{\mathbb{N}} \\ \omega \longmapsto \nu(\omega) \end{array} \quad \text{t.q :} \ \forall n \ \{\nu = n\} \in \underline{\underline{B}}_n$$

2) M_ν v.a. associée à un T. A. fini

$$\underset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad M_\nu = \sum_{\mathbb{N}} M_n \, 1_{\{\nu = n\}}$$

Cette définition est légitime, car ν étant à valeur dans $\mathbb{N}$, la suite d'événements $(\{\nu = n\})_n$ forme une partition de Ω.

Vérifions à présent que pour tout temps d'arrêt ν fini, $E_q[M_\nu] = 1$.

$$E_q[M_\nu] = \sum_{\mathbb{N}} E_q[M_n \cdot 1_{\{\nu = n\}}] = \sum_{\mathbb{N}} \int_{\{\nu=n\}} M_n \, dq$$

(on a une somme à termes positifs)

$$= \sum_{\mathbb{N}} P[\nu = n] = 1$$

de par la définition de M_n.

d) $\boxed{\text{Comportement asymptotique}}$

De la proposition II-2-9 (Neveu : "Martingales à temps discret) il résulte que $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge p.s. vers une v.a. notée M_∞ jouissant des deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} 1) \ M_\infty \in L^1(\Omega, a, q) \text{ et donc finie } q \text{ p.s.} \\ 2) \ \forall n \in \mathbb{N} \quad M_n \geq E^{B_n}(M_\infty) \ q \text{ p.s.} \end{cases}$$

e) $\boxed{\dfrac{M_n}{M_{n-1}} 1_{\{M_{n-1}>0\}} \text{ représente à l'instant } n-1 \text{ la densité permettant de déterminer } a_n.}$

Lemme : On peut toujours garantir la légitimité du quotient.

En effet :

$$0 = \int_{\{M_{n-1}=0\}} M_{n-1} \, dq = E\left[M_{n-1} 1_{\{M_{n-1}=0\}}\right]$$

$$= E\left[E^{\underline{B}_{n-1}}(M_n) \, 1_{\{M_{n-1}=0\}}\right]$$

$$= E\left[E^{\underline{B}_{n-1}}(M_n 1_{\{M_{n-1}=0\}})\right]$$

$$= E\left[M_n 1_{\{M_{n-1}=0\}}\right]$$

D'où $\displaystyle\int_{\{M_{n-1}=0\}} M_n \, dq = 0$ avec $M_n \geq 0$.

2 cas se présentent :

1) $\{M_{n-1}=0\}$ est q négligeable auquel cas le rapport est défini q p.s.

2) $M_n \, 1_{\{M_{n-1}=0\}} = 0$ q.p.s. ce qui conduit à la même conclusion.

Par définition, $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} = f_n(x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ; x_n)$

A priori, le rapport est $\underline{\underline{B}}_n$ mesurable ; en réalité on peut affiner en constatant que f_n ne dépend que de $pr_1 \, x_n$

où $pr_1 : A \times S \longrightarrow A$
$(a, s) \longmapsto a$

$$\left(f_n = \frac{dp_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}, dx)}{dq\,(A_{n-1}, a_n, ds)} \right)$$

f) $\boxed{\mathcal{G}_n \text{ - mesurable}}$

De la définition de M_n et de la proposition précédente, il découle immédiatement que M_n est $\mathcal{G}_n$ - mesurable (car v.a. associée)

où $\mathcal{G}_n$ est une sous-tribu intermédiaire entre $\underline{\underline{B}}_{n-1}$ et $\underline{\underline{B}}_n$.

$$\forall n \geq 1 \quad \underline{\underline{B}}_{n-1} = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}) \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \underline{\underline{B}}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

$$\mathcal{G}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_{n-1}, a_n)$$

et avec $\mathcal{G}_0 = \{\phi, \Omega\}$ σ - algèbre triviale par rapport à laquelle toute v.a. constante est mesurable.

Remarque :

Rappelons que la v.a. initiale M_0 a été implicitement posée égale à l'unité ce qui se justifie par le fait que l'état et l'action initiaux (s_0, a_0) sont supposés préalablement fixés.

g) Tout T. A. ν fini est régulier pour M_n.

En vertu de la définition de régularité d'un T. A. pour une martingale donnée, il convient de vérifier que la nouvelle martingale, positive et intégrale $M_{\nu\wedge n}$ est régulière.

Or ce résultat est une simple conséquence de la proposition IV - 2 . 3 c * puisqu'on peut mettre en évidence l'existence d'une v.a. $\in L^1(\Omega, \mathcal{a}, Q)$, en l'occurence M_ν, telle que $M_{\nu\wedge n} = E^{\mathcal{B}_n}[M_\nu]$ $\forall n$. En effet la martingale positive $(M_{\nu\wedge n})$ converge p.s. vers M_ν : d'où il résulte par application du théorème de convergence déjà mentionné à l'alinéa d que $E^{\mathcal{B}_n}[M_\nu] \leq M_{\nu\wedge n}$. Pour achever la démonstration, il suffit d'observer que les deux membres de l'égalité ont même espérance finie. Ce fait découle immédiatement des propriétés précédentes puisque.

$$E_Q[M_\nu] = 1 \quad \text{et} \quad E_Q[M_{\nu\wedge n}] = E_Q[M_{\nu\wedge 0}] = E_Q[M_0] = 1.$$

(en se souvenant que la suite des $E(\cdot)$ de $(M_{\nu\wedge n})$ est constante).

Remarques: cette caractérisation appelle les commentaires suivants :

a) soulignons d'abord qu'un résultat essentiel implicite de cette définition de régularité est que pour une martingale positive et sommable $(M_n, n \in \mathbb{N})$ la séquence $M_{\nu\wedge n}$ arrêtée à un T. A. est aussi une martingale du même genre.

Cette propriété étant utile pour la suite, nous la démontrons :

La v.a. $M_{\nu\wedge n}$ est $\forall n$ $\mathcal{B}_n$ mesurable car $M_{\nu\wedge n} = M_n 1_{\{\nu \geq n\}} + \sum_{m<n} M_m 1_{\{\nu = m\}}$

Evaluons ensuite $E^{\mathcal{B}_n}[M_{\nu\wedge n+1}]$ $\forall n$, on a :

$$E^{\mathcal{B}_n}[M_{\nu\wedge n+1}] = 1_{\{\nu > n\}} E^{\mathcal{B}_n}[M_{n+1}] + \sum_{m \leq n} M_m 1_{\{\nu = m\}}$$

$$= 1_{\{\nu > n\}} M_n + \sum_{m \leq n} M_m 1_{\{\nu = m\}} = M_{\nu\wedge n} \quad \text{C.Q.F.D}$$

b) Notons par contre, que la martingale M_n elle-même n'est pas forcément régulière. Il est effectivement possible de concevoir une martingale représentant une stratégie convergent Q p.s. vers 0. Pour s'en convaincre, il suffit d'envisager

(* Référence Neveu : Martingales à temps discret).

l'exemple numérique simple suivant : considérons un espace d'état fini constitué d'un ensemble à trois éléments $E = \{x_0, x_1, x_2\}$ ainsi que de la tribu de toutes ses parties. Munissons le dès lors de deux probabilités distinctes q et p. La première est la probabilité indifférente qui attribue une masse $1/3$ à chaque état, tandis que la seconde charge les points de la façon suivante :

$$p(x_0) = 1/5 \; ; \; p(x_1) = 0 \; ; \; p(x_2) = 4/5 .$$

L'absolue continuité de p par rapport à q est manifeste puisque cette dernière distribution est strictement positive. Soient Q et P, les probabilités puissances infinies respectivement de q et p définies sur l'espace produit $A^{\mathbb{N}}$ (où $A = \{x_0, x_1\}$) muni de la tribu engendrée par les applications coordonnées. A chaque instant, P possède naturellement une densité par rapport à Q qui vaut :

$$\frac{p(x_0, x_1)}{q(x_0, x_1)} = \frac{3}{10}$$

Il en résulte finalement une martingale $M_n = (3/10)^n$ qui converge Q p.s. vers 0 comme terme général d'une série géométrique convergente. L'existence d'une martingale de la collection $\mathcal{M}$ convergeant Q. p.s. vers 0 étant acquise, procédons à présent à un raisonnement par l'absurde. Si une telle martingale était régulière, elle convergerait également en moyenne vers la même limite c'est-à-dire 0. La suite des espérances étant constante (découle de la définition de martingale), la martingale (M_n) serait alors identiquement nulle. Ce qui est évidemment contradictoire ne fut-ce qu'avec le fait que $M_0 = 1$. ∎

VIII. Martingale représentant une stratégie.

- Jusqu'à présent, on a montré que les stratégies pouvaient s'interpréter en terme de martingales relativement remarquables : on a effectivement établi une correspondance de l'ensemble des stratégies de comportement vers $\mathcal{M}$.

où $\mathcal{M}$: { Martingales (M_n) positives, sommables, $\mathcal{G}_n$-mesurables, de moyenne unité et tel que $\forall\, \nu$ T.A. fini

$$E_q[M_\nu] = 1 \}$$

- L'objectif de cette première partie, étant de ramener notre problème d'optimisation sur des stratégies, à l'étude de la borne supérieure d'espérances de gain sur une telle classe de martingales, il nous faut encore garantir que la martingale obtenue en résolvant ce dernier problème représentera une "behaviour strategy".
- Plus précisément, nous allons montrer que la correspondance précédemment énoncée, est biunivoque.
- Considérons $(M_n) \in \mathcal{M}$; on définit sans ambiguïté une fonction d'ensemble

$$\mathbb{P} : \bigcup_{n} \underline{\underline{B}}_n \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$A \longmapsto \int_A M_p \, dq \qquad \text{où } A \in \underline{\underline{B}}_p .$$

La compatibilité est assurée : en effet, on prouve aisément que

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall A \in \underline{\underline{B}}_n \ (\text{et donc} \in \underline{\underline{B}}_p \ \ \forall p \geq n) \\[2ex] \text{on a } \displaystyle\int_A M_n \, dq = \int_A M_p \, dq \qquad \forall p \geq n. \end{array}}$$

Justification :

$$\int_A M_n \, dq = \int_A E^{\underline{\underline{B}}_n}(M_p)\, dq \qquad \text{(définition VI - 2, de martingale)}$$

$$\forall p \geq n$$

$$= \int_A M_p \, dq \qquad (A \in \underline{\underline{B}}_n \text{ ; définition de } E^{\underline{\underline{B}}_n}(.))$$

C.Q.F.D.

Il est clair, que chacune des restrictions de P à $\underline{\underline{B}}_n$ est σ- additive.
(En vertu de la σ- additivité de l'intégrale d'une fonction donnée)

D'autre part, on constate aisément que :

$$\boxed{\begin{array}{c} P(\Omega) = E_q[M_\nu] \\ \forall \text{ Temps d'arrêt fini.} \end{array}}$$

En effet, $\Omega \in \underline{\underline{B}}_n \;\forall n$ d'où $P(\Omega) = \int_\Omega M_n \, dq = E_q[M_n] = 1 \quad \forall n.$

Dès lors, un critère fondamental (Référence : Neveu : " Martingales à temps discret " proposition III - 1 - 1) de la théorie des martingales, assure que P est σ- additive sur l'algèbre de Borel $\bigcup_n \underline{\underline{B}}_n$ et admet un prolongement σ- additif unique à la tribu $\sigma[\bigcup_n \beta_n] = a$, (Carathéodory) que nous désignerons abusivement encore par P. En outre, notons aussi que cette dernière mesure est telle que $P = M_\nu . q$ sur $\underline{\underline{B}}_\nu$ la tribu des événements antérieurs à l'instant ν. (ν fini).

- Il en résulte l'existence d'une probabilité sur (Ω, a). Afin de conclure, il reste à montrer deux résultats fondamentaux : d'une part qu'il est possible de reconstituer à partir de celle - ci, des probabilités de transition $p_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sur l'espace d'état produit $E^{n}\times\mathcal{E}$ et d'autre part que ces dernières définissent bien une stratégie de comportement (c'est à dire que à chaque instant, p_n détermine l'action future à prendre)

Il suffit de poser :

$$p_0(x_0; dx_1) = P[\{X_1 \in dx_1\} \mid \{X_0 = x_0\}]$$

$$p_1(x_0, x_1; dx_2) = P[\{X_2 \in dx_2\} \mid \{X_0 = x_0\}, \{X_1 = x_1\}]$$

etc...

$$p_n(x_0, x_1, \dots, x_n; dx_{n+1}) = P[\{X_{n+1} \in dx_{n+1}\} \mid \{X_0 = x_0\}, \dots, \{X_n = x_n\}]$$

(où les X_i sont les applications coordonnées introduites au paragraphe V).

- Remarquons que ces probabilités conditionnelles ne sont pas toujours définies, (l'événement par lequel on conditionne doit être de probabilité > 0) si l'espace E n'est pas discret. Néanmoins on généralise facilement au cas des espaces d'états usuels « continus » qui s'avèrent suffisamment « convenables » (c'est-à-dire qui satisfont aux conditions suffisantes d'existence du théorème de Jirina qui exige pratiquement que l'espace d'état soit polonais).

- Observons ensuite, que la martingale étant $\mathcal{G}_n$-mesurable, le rapport $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} 1_{\{M_{n-1} > 0\}}$ dépend uniquement des variables

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, a_n$. (Théorème de la v.a. associée multidimensionnel).*

D'où
$$p_n(x_0, \dots, x_n; dx_{n+1}) = \frac{P[\{X_{n+1} \in dx_{n+1}\} \cap \{X_0 = x_0\} \cap \dots \cap \{X_n = x_n\}]}{P[\{X_0 = x_0\}, \{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}]}$$

$$= \frac{M_{n+1} \circ g}{M_n \circ g}$$

En vertu de la définition de $P(\circ)$ et du fait que les événements appartiennent respectivement à $\underline{B}_{n+1}$ et $\underline{B}_n$

Ce qui entraîne que en réalité les (p_n) dépendent $\forall n$ de x_{n+1} par l'intermédiaire de la première application projection pr_1,

* Référence : « Bases mathématiques du calcul des probabilités, th II - 2 - 5 ».

et que par conséquent ils constituent évidemment une stratégie de comportement.

Remarque :

Examinons maintenant l'allure des martingales associées à deux types particuliers de stratégies extrêmement importantes.

a) On dit qu'une stratégie est stationnaire si, à chaque instant la probabilité servant à déterminer l'action à prendre est fonction uniquement du dernier état visité. Il s'en suit assez naturellement que la martingale correspondante a la forme suivante :

$$\boxed{M_n = f_1(x_0; a_1)\, f_2(x_1; a_2) \cdots f_n(x_{n-1}, a_n)}$$

b) On appelle stratégie purement stationnaire toute stratégie stationnaire indépendante de l'instant actuel

$$(\Pi : S \longrightarrow \{\text{probabilités sur } A\})$$

La martingale associée étant évidemment :

$$\boxed{M_n = f(x_0; a_1)\, f(x_1; a_2) \cdots f(x_{n-1}; a_n)}$$

N.B. Pour une étude systématique des probabilités conditionnelles régulières ainsi qu'une démonstration du théorème de Jirina, se rapporter à Hennequin : « Théorie des probabilités et quelques applications ». chap V - § 21-2.

IX Borne essentielle supérieure.

1. Préliminaires.

La recherche conduisant à la solution du problème examiné, repose sur l'introduction du concept d'enveloppe essentielle supérieure d'une famille - pas nécessairement dénombrable - de variables aléatoires. C'est pourquoi, on se propose d'analyser préalablement ce nouvel outil de travail.

On sait que si $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable et $(X_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de variables aléatoires réelles sur cet espace, il existe une et une seule v.a.r. notée « $\sup_{i \in I} X_i$ » possédant les deux propriétés suivantes:

a) être plus grande que chacune des X_i

b) être la plus petite vérifiant la condition a)

Qu'advient-il si on considère une famille quelconque de X_i ? Dans ces conditions, on sait que $\sup_{i \in I} X_i$ n'est plus nécessairement une variable aléatoire (non dénombrable). Transformons alors « légèrement » le problème en supposant qu'il y a maintenant une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Dès lors on peut affirmer l'existence et l'unicité d'une v.a. désignée par « $\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} X_i$ » satisfaisant (aux inégalités p.s. près) aux deux clauses énoncées précédemment.

2. Théorème d'existence et d'unicité.

a) Existence :

Lemme : $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe à $[-1,+1]$

Il est immédiat de voir que l'application suivante constitue une bijection bicontinue de $\overline{\mathbb{R}}$ vers $[-1,+1]$

(Elle est même croissante)

$$\overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\ h\ } [-1,+1]$$

$$x \longmapsto h(x)$$

$$\text{si} \begin{cases} x = +\infty & h(x) = +1 \\ x = -\infty & h(x) = -1 \\ x \in \mathbb{R} & h(x) = \dfrac{x}{1+|x|} \end{cases}$$

Conséquemment, les mesurabilités (continuité) et inégalités ($\nearrow$) se conservant il suffit d'envisager une famille de v. a. à valeurs dans $[-1,+1]$

Construction :

Soit $\mathcal{C}$ la collection des parties dénombrables de I et pour chaque $J \in \mathcal{C}$, définissons la v. a. r Y_J intégrable (car bornée) par :

$$Y_J = \sup_{i \in J} X_i \ , \quad \text{et posons } \alpha_J = E[Y_J]$$

Soit $\alpha = \sup\limits_{J \in \mathcal{C}} \alpha_J$.

Il est toujours possible de l'approcher :

$$\exists\ (J_m)_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ J_m \in \mathcal{C}}} \ \Big| \ \alpha = \lim_{m \to \infty} \alpha_{J_m}$$

Désignons par $I_0 = \bigcup\limits_{\mathbb{N}} J_m$ - encore dénombrable - et montrons que Y_{I_0} possède les propriétés requises :

a) $\boxed{Y_{I_0} \geq X_i \quad P\text{ p.s.} \quad \forall i \in I}$

En effet, il suffit d'établir que $Y_{I_0} \underset{p.s.}{\overset{?}{=}} Y_{I_0 \cup \{i\}} \quad \forall i \in I$

c'est à dire : $\begin{cases} Y_{I_0} \leq Y_{I_0 \cup \{i\}} \text{ p.s. (évident)} \\ E[Y_{I_0}] \overset{?}{\geq} E[Y_{I_0 \cup \{i\}}] \end{cases}$

ce dernier résultat est aussi évident si on prouve que $\alpha = E[Y_{I_0}]$

Il nous reste à montrer que :

$$E[Y_{I_0}] \overset{?}{=} \alpha$$

1) $E[Y_{I_0}] \leq \alpha$ par définition de α

2) $E[Y_{I_0}] \geq \alpha$ car,

$$E[Y_{I_0}] = E[\sup_{i \in \bigcup_n J_n} X_i]$$

$$\geq E[\sup_{i \in J_n} X_i],$$

$$\geq \alpha_{J_n} \qquad \forall n$$

Un passage à la limite achève d'établir l'assertion.

b) $\boxed{\forall Z \overset{p.s.}{\geq} X_i \implies Z \overset{p.s.}{\geq} Y_{I_0} \qquad \forall i \in I}$

Trivial en vertu du fait que l'hypothèse implique notamment :

$$Z \overset{p.s.}{\geq} X_i \iff Z \overset{p.s.}{\geq} Y_{I_0}$$

$$\forall i \in I_0$$

C.q.F.D.

b) Unicité

Soit Y' une autre v.a.r qui satisfait aux deux clauses.

Alors, en vertu des secondes clauses :

$$Y' \underset{p.s.}{\geq} Y_{I_0} \qquad \text{et} \qquad Y_{I_0} \underset{p.s}{\geq} Y'$$

C.q.F.D.

Exemple. Considérons la famille de v.a.r. suivante :

$X_i = 1_{\{i\}} \qquad i \in [a, b]$.

$$\begin{cases} \operatorname{ess\,sup} X_i = 0 \quad i \in I \\ \qquad\qquad \text{car } X_i = 0 \text{ p.s. et } P = \text{mesure de Lebesgue sur } \mathbb{R} \\ \sup X_i = 1_{[a,b]} \quad i \in I. \end{cases}$$

Cet exemple a l'avantage de faire la distinction entre ces 2 types de borne sup.

3. Caractérisation.

Proposition IX

> Si la famille est filtrante croissante, (c'est-à-dire $\forall i_1, i_2 \in I$, $\exists i_3 \mid$ $X_{i_3} \overset{p.s.}{\geq} X_{i_1}$ et $X_{i_3} \overset{p.s.}{\geq} X_{i_2}$) il est possible d'en extraire une suite (X_{i_n}) croissante convergeant vers $\underset{i \in I}{\operatorname{ess\,sup}} X_i$.

Démonstration:

De sa construction, il découle que $\underset{i \in I}{\operatorname{ess\,sup}} X_i$, n'est rien d'autre que $\underset{n \in \mathbb{N}}{\sup} X_n$ pour une certaine suite, (I_0 étant identifié à $\mathbb{N}$) extraite de la famille.

Associons lui une autre séquence définie par récurrence montante : De la façon suivante :

$X'_0 = X_0$

$X'_{n+1}\ E(X_i)_{i\in I} \mid \geq X'_n$ (légitime car on a une famille

$\geq X_{n+1}$ filtrante croissante).

Etant croissante et majorée par $\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i$, elle est convergente.

De plus :

$$\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i = \sup_{n\in \mathbb{N}} X_n \leq \lim \uparrow X'_n \leq \operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i$$

C.q.F.D.

Corollaires :

1\. - $\underline{\underline{B}}$ étant une sous-tribu de $\mathcal{A}$.

- Quelle que soit la famille filtrante croissante $(X_i)_{i\in I}$ telle qu'il existe $i_0 \in I$ pour lequel $E^{\underline{\underline{B}}}[X_{i_0}] \underset{p.s.}{\geq} -\infty$

On a la formule suivante :

$$\boxed{E^{\underline{\underline{B}}}[\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i] \underset{p.s.}{=} \operatorname{ess\,sup}_{i\in I} E^{\underline{\underline{B}}}(X_i)} \quad (\text{IX}-1)$$

Démonstration :

a) $\geq$ évident car,

$$\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i \underset{p.s.}{\geq} X_i \Rightarrow E^{\underline{\underline{B}}}[\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i] \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{\underline{B}}}[X_i]$$

D'où

$$E^{\underline{\underline{B}}}[\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i] \underset{p.s.}{\geq} \operatorname{ess\,sup}_{i\in I} E^{\underline{\underline{B}}}(X_i).$$

b) $\leq$ Ce résultat résulte du théorème de convergence monotone formulé dans le cadre des espérance conditionnelles *

$$E^{\underline{\underline{B}}}[\operatorname{ess\,sup}_{i\in I} X_i] \underset{p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}}[\lim \uparrow X_{i_n'}] \underset{p.s.}{=} \lim \uparrow E^{\underline{\underline{B}}}[X_{i_n'}]$$

* Référence : « Great expectations: the theory of optimal stopping » par Chow - Robbins - Siegmund p 7

or, $E^{\mathcal{B}}[X_{i_n'}] \underset{p.s.}{\leq} \operatorname{ess\,sup}_{i \in I} E^{\mathcal{B}}(X_i)$

$\forall i_n.$

Un passage à la limite achève la démonstration.

2) Supposons à présent que la famille $E^{\mathcal{B}}(X_i)_I$ soit filtrante croissante et qu'il existe un i_0 tel que $E[X_{i_0}^-] < +\infty$

Sous ces conditions, on peut affirmer que :

$$\boxed{E[\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} E^{\mathcal{B}}(X_i)] = \sup_{i \in I} E[X_i]} \quad (\text{IX}-2)$$

Démonstration :

a) $\geq$ C'est immédiat :

$$E^{\mathcal{B}}(X_i) \leq \operatorname{ess\,sup} E^{\mathcal{B}}(X_i) \quad \forall i \in I$$

$$\Downarrow$$

$$E[X_i] \leq E[\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} E^{\mathcal{B}}(X_i)]$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{i \in I} E[X_i] \leq E[\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} E^{\mathcal{B}}(X_i)]$$

b) $\leq$ Une application similaire à celle du corollaire précédent, du théorème de convergence monotone pour des espérances ordinaire, établit le résultat.

$$E[\operatorname{ess\,sup}_{i \in I} E^{\mathcal{B}}(X_i)] = E[\lim \uparrow E^{\mathcal{B}}(X_{i_n})]$$

$$= \lim \uparrow E[X_{i_n}]$$

$$\leq \operatorname{Sup} E[X_i] \quad i \in I$$

C.Q.F.D.

Remarques :

Il importe de souligner que :

a) L'existence du sup $E(\cdot)$, est toujours garantie puisqu'on travaille dans $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Contrairement au corollaire précédent, la présence du symbole « p.s. » n'est pas fondée puisqu'il s'agit dans ce dernier cas d'inégalité numérique.

c) Les hypothèses de régularité $\left(E^{\underline{B}}(X^-) < +\infty \iff E^{\underline{B}}(X) > -\infty \right)$ sont indispensables pour pouvoir commuter les signes « somme » et « espérance » car les v.a.r. ne sont pas supposées positives.

X Problème d'optimisation sur des martingales (sans contraintes)

X. 1. Dans une première approche de la solution, nous avons supprimé la contrainte et nous nous proposons d'étudier la borne supérieure $\sup E_Q[\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n M_n]$ ainsi que l'existence de martingales qui réalisent ce maximum.

Rappelons à cet effet, que $\mathcal{M}$ désigne la classe des martingales positives, sommables, $\mathcal{G}_n$ - mesurables et d'espérance unité pour tout temps d'arrêt fini, tandis qu'on a posé $V_n = \beta^{n-1} r(s_{n-1}, a_{n-1}, s_n)$ pour chaque $n \geq 1$ et $V_0 = 1$. On en déduit immédiatement que le processus aléatoire (V_n) est adapté (c'est à dire que $\forall n$, V_n est $\mathcal{B}_n$ mesurable) et que la série fonctionnelle associée $\sum_{\mathbb{N}} V_n$ est absolument convergente, en vertu du critère de majoration de Weierstrass, β étant < 1).

Il importe de remarquer que nous avons transformé le problème d'optimisation initial, en introduisant la martingale (M_n) et en procédant à un changement de distribution. Sous sa forme primitive, il se formulait :

$$\sup_{\{\pi \text{ stratégies}\}} E_{P[\pi, x_0]}\Big[\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n\Big]$$

Mais la fonction objectif peut encore s'écrire :

$E_P[\sum_{\mathbb{N}} V_n] = \sum_{\mathbb{N}} E_P[V_n]$ (en vertu du théorème de convergence dominée appliqué à la suite $U_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ qui est telle que $\forall n$ $|\sum_{k=0}^{n} V_k| \leq M$ puisque la série est A.C. ; M désignant la borne de $\sum_{k\in\mathbb{N}} |V_k|$).

En utilisant la définition de M_n pour chaque terme, on obtient

$$E_p\Big(\sum_{\mathbb{N}} V_n\Big) = \sum_{\mathbb{N}} E_q(V_n\, M_n)$$

Une nouvelle interversion des signes « somme » et « espérance », terminerait la démonstration de l'assertion. Or celle-ci est légitime puisque :

$$\forall n \quad \Big|\sum_{k=0}^{n} V_k\, M_k\Big| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |V_k|\, M_k,$$

et que la v.a. majorante appartient à $L^1(\Omega, a, q)$

En effet,

$$E_q\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} |V_k|\, M_k\Big] = \sum_{k\in\mathbb{N}} E_q(|V_k|\, M_k)$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} E_p(|V_k|)$$

$$= E_p\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} |V_k|\Big) \leq M.$$

Les séries étant cette fois à termes positifs, le théorème de convergence monotone croissante leur est applicable. ∎

X. 2. Comme nous l'avons laissé entendre précédemment, l'analyse du problème posé, s'appuie sur l'introduction d'un processus stochastique auxiliaire (X_n)

$$X_n \underset{q.p.s.}{=} \text{ess sup } E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\, M_k\Big]$$

où pour chaque instant n, l'enveloppe supérieure essentielle est prise sur $\{$ martingales $\in \mathcal{M}$ t.q. $M_n = 1\}$ que nous désignerons par $\mathcal{M}_n$.

Cela signifie que la v.a. X_n représente la borne supérieure des espérances conditionnelles du gain à l'instant n, si on se restreint aux stratégies n'agissant pas avant ce moment. (La définition de martingale implique effectivement que $M_p = 1 \quad \forall p \leq n$)

Voici quelques remarque qu'il s'avère nécessaire d'indiquer à ce stade de l'exposé :

a) d'abord on voit sans peine que la collection de martingales considérée n'est pas forcément dénombrable : d'où la nécessité d'une borne essentielle.

b) Ensuite, soulignons que les égalités et inégalités qui apparaissent dans ce paragraphe doivent être prises au sens « q.p.s. » de manière à écarter toute confusion avec celles relatives à la probabilité P.

c) Il est enfin manifeste que les $(\mathcal{M}_n)$ constitue une suite décroissante d'ensembles.

X. 3. <u>Lemme</u> :

En vue d'utiliser la caractérisation signalée dans le paragraphe consacré à l'étude de la borne essentielle, nous allons démontrer que

$$\boxed{\text{La famille } E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k \in \Pi} V_k\, {}^iM_k\Big] \text{ est filtrante croissante } (n \text{ fixé}) \quad \text{avec } {}^iM \in \mathcal{M}_n.}$$

Pour ce faire, il suffit de prouver qu'elle est stable pour l'opération « sup »

Soient $\begin{cases} E^{\mathcal{B}_n}\big[\sum V_k\, {}^1M_k\big] \\ E^{\mathcal{B}_n}\big[\sum V_k\, {}^2M_k\big] \end{cases}$ avec ${}^1M$ et ${}^2M \in \mathcal{M}_n$

deux représentants de cette famille.

Montrons qu'il existe une martingale ${}^qM \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^{0}M_k\right) \overset{p.s.}{=} \sup\left(E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^{1}M_k\right), E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^{2}M_k\right)\right)$$

• Grâce à ${}^1M$ et ${}^2M$, on peut construire par recollement une nouvelle martingale ${}^0M$ vérifiant cette égalité,

où $\forall k \quad {}^0M_k = 1_B\, {}^1M_k + 1_{B^c}\, {}^2M_k$.

$$\text{avec } B = \left\{ E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^2M_k\right) < E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^1M_k\right) \right\}$$

• En effet, en multipliant chacune de ces égalités par V_k et en sommant membre à membre, il vient :

$$\Sigma V_k\, {}^0M_k = 1_B\, \Sigma V_k\, {}^1M_k + 1_{B^c}\, \Sigma V_k\, {}^2M_k$$

ou encore

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^0M_k\right) = 1_B\, E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^1M_k\right) + 1_{B^c}\, E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^2M_k\right)$$

(l'événement B et par conséquent B^c appartiennent à $\underline{\underline{B}}_n$)

$$= \sup\left(E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^1M_k\right), E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\Sigma V_k\, {}^2M_k\right)\right)$$

D'autre part on constate aisément que ${}^0M \in \mathcal{M}_n$ car :

1) ${}^0M_n = 1_B\, {}^1M_n + 1_{B^c}\, {}^2M_n = 1_B + 1_{B^c} = 1_\Omega = 1$

2) $E[{}^0M_k] = E[{}^0M_0] = P(\Omega) = 1$

3) $\mathcal{G}_n$ mesurable car :

→ $\forall k \leq n \quad M_k = 1$

→ $\forall k > n$ Remarquons d'abord que l'événement B appartient trivialement à $\underline{\underline{B}}_n$. De la définition de la suite intermédiaire $\mathcal{G}_n$, il résulte que $\underline{\underline{B}}_n \subseteq \mathcal{G}_k \quad \forall k > n$, ce qui termine la démonstration.

Suit à présent une caractérisation fondamentale de ces bornes essentielles supérieures.

X. 4. Proposition:

> (X_n) est le plus petit processus adapté positif satisfaisant aux deux inégalités suivantes:
>
> 1) $X_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}[\sum_{\mathbb{N}} V_k]$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathcal{M}$.
>
> 2) $X_n M_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1} M_{n+1})$

Notons que la seconde partie exprime que $(X_n M_n)$ pour toute martingale dans $\mathcal{M}$ constitue une surmartingale positive.

Démonstration :

a) Montrons d'abord que le processus (X_n) satisfait effectivement à chacune des inégalités.

1) $\boxed{X_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}[\sum_{\mathbb{N}} V_k]}$

Par définition de l' « ess sup »

$$X_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}[\sum V_k\, {}^iM_k] \qquad \forall\, {}^iM \in \mathcal{M}_n$$

à fortiori

$$X_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}[\sum V_k]$$

(puisque la constante $(1)_n \in \mathcal{M}_n$)

2) $\boxed{X_n M_n \underset{q.p.s.}{\geqslant} E^{\mathcal{B}_n}[X_{n+1} M_{n+1}] \quad \forall M \in \mathcal{M}.}$

Soit ${}^oM$ une martingale extraite arbitrairement de $\mathcal{M}$. Sans nuire à la généralité de la proposition, on peut toujours $\forall n$ fixé, supposer que ${}^oM \in \mathcal{M}_n$.

Si tel n'était pas le cas il suffirait de considérer la nouvelle martingale $^{\circ}M^*$ définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} {}^{\circ}M_i^* = \dfrac{{}^{\circ}M_i}{{}^{\circ}M_n} 1_{\{{}^{\circ}M_n > 0\}} & \forall i \geq n \\ {}^{\circ}M_i^* = 1 & \forall i < n \end{cases}$$

Il s'agit de vérifier que :

a) $\underline{\forall i \geq n-1 :}$ $\quad {}^{\circ}M_i^* = E^{\underline{B}_i}[{}^{\circ}M_{i+1}^*]$

Or, $E^{\underline{B}_i}[{}^{\circ}M_{i+1}^*] = E^{\underline{B}_i}\left[\dfrac{{}^{\circ}M_{i+1}}{{}^{\circ}M_n} 1_{\{{}^{\circ}M_n > 0\}}\right]$

(définition de $^{\circ}M^*$)

$= \dfrac{1_{\{{}^{\circ}M_n > 0\}}}{{}^{\circ}M_n} E^{\underline{B}_i}[M^{\circ}_{i+1}]$

(Propriété de moyenne puisque $\underline{B}_n \subset \underline{B}_i$)

$= \dfrac{1_{\{{}^{\circ}M_n > 0\}}}{{}^{\circ}M_n} {}^{\circ}M_i$

($^{\circ}M$ étant une martingale)

$= {}^{\circ}M_i^*$ (définition de $^{\circ}M^*$)

b) $\underline{\forall i < n-1 :}$

Découle immédiatement de la définition de $^{\circ}M^*$.

Conséquemment, si nous montrons que cette martingale normalisée satisfait à l'inégalité suivante :

$$X_n \geq E^{\underline{B}_n}[X_{n+1} \, {}^{\circ}M_{n+1}^*]$$

il en résultera dès lors de ce qui précède que la martingale primitive $^{\circ}M$ vérifiera l'inégalité annoncée. (puisque $^{\circ}M_{n+1}^* = \dfrac{{}^{\circ}M_{n+1}}{{}^{\circ}M_n}$)

En vue d'alléger les notations, nous désignerons encore par $^{\circ}M$ la martingale normalisée.

Développons le second membre de l'assertion, il vient successivement :

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}[\,{}^{\circ}M_{n+1}\, X_{n+1}\,] = E^{\underline{\underline{B}}_n}[\,{}^{\circ}M_{n+1} \operatorname{ess\,sup}_{M \in \mathcal{M}_{n+1}} E^{\underline{\underline{B}}_{n+1}}[\sum_{\overline{n}} V_k\, M_k\,]]$$

$$= E^{\underline{\underline{B}}_n}[\,{}^{\circ}M_{n+1} \lim_{j \to +\infty} \uparrow E^{\underline{\underline{B}}_{n+1}}[\sum_{\overline{n}} V_k\, {}^{j}M_k]]$$

où $({}^{j}M) \in \mathcal{M}_{n+1}$.

Compte tenu de la proposition IX appliquée à la famille filtrante croissante $E^{\underline{\underline{B}}_{n+1}}[\,\Sigma\, V_k \,\cdot\,]$

$$= E^{\underline{\underline{B}}_n}[\lim_{j \to +\infty} \uparrow {}^{\circ}M_{n+1}\, E^{\underline{\underline{B}}_{n+1}}[\sum_{\overline{n}} V_k\, {}^{j}M_k\,]]$$

car ${}^{\circ}M_{n+1} \geq 0$

$$= E^{\underline{\underline{B}}_n}[\lim_{j \to +\infty} \uparrow E^{\underline{\underline{B}}_{n+1}}[\sum_{\overline{n}} V_k\, {}^{j}M_k\, {}^{\circ}M_{n+1}\,]]$$

$[({}^{j}M) \in \mathcal{M}_{n+1}]$ (En vertu du théorème de la moyenne appliqué à ${}^{\circ}M_{n+1}$).

$$= \lim_{j \to +\infty} \uparrow E^{\underline{\underline{B}}_n}[\sum_{\overline{n}} V_k\, {}^{j}M_k\, {}^{\circ}M_{n+1}\,] \quad ({}^{j}M) \in \mathcal{M}_{n+1}.$$

Par application du théorème de convergence monotone, étant entendu que le processus (X_n) peut sans restriction être supposé positif. En effet, comme nous l'avons explicitement mentionné par la suite (remarque p 48) on peut toujours associer à (V_k) un autre processus du même genre V_k conduisant à un problème d'optimisation strictement équivalent au problème initial. Or, $\forall j$ fixé, on peut faire correspondre à ${}^{j}M$, une autre martingale ${}^{j}M'$ qui appartient à $\mathcal{M}_n$ en posant :

a) ${}^{j}M'_k = 1 \qquad \forall k \leq n$

b) ${}^{j}M'_k = {}^{j}M_k\, {}^{\circ}M_{n+1} \qquad \forall k > n$.

La justification est analogue à celle présentée précédemment (p 40). Dès lors, en décomposant la sommation en deux tranches, on peut écrire que :

$$E^{\mathcal{B}_n}[\,{}^{o}M_{n+1}\,X_{n+1}] = \lim_j \uparrow \Big(E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k=0}^{n} V_k\,{}^{o}M_{n+1}\Big] + E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k>n} V_k\,{}^{j}M_k\,{}^{o}M_{n+1}\Big]\Big)$$

(puisque ${}^{j}M \in \mathcal{M}_{n+1} \Rightarrow {}^{j}M_k = 1 \quad \forall k \leq n$)

$$= \lim_j \uparrow \Big[\sum_{k=0}^{n} V_k\, E^{\mathcal{B}_n}({}^{o}M_{n+1}) + E^{\mathcal{B}_n}\Big(\sum_{k>n} V_k\,{}^{j}M_k\,{}^{o}M_{n+1}\Big)\Big]$$

(linéarité de $E^{\mathcal{B}_n}(\cdot)$ et (V_n) adapté)

$$= \lim_j \uparrow \Big[\sum_{k=0}^{n} V_k\,{}^{o}M_n + E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k>n} V_k\,{}^{j}M_k\,{}^{o}M_{n+1}\Big]\Big]$$

or, ${}^{o}M \in \mathcal{M}_n$ (par hypothèse) d'où il résulte que :

$$E^{\mathcal{B}_n}[\,{}^{o}M_{n+1}\,X_{n+1}] = \lim_j \uparrow \; E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\,{}^{j}M'_k\Big]$$

$$\forall j \quad {}^{j}M'_k \in \mathcal{M}_n .$$

$$\leq X_n \quad \text{(par définition de supremum essentiel).}$$

Ce qui achève la démonstration de la première partie du théorème.

b) Assurons à présent que (X_n) est le plus petit processus adapté possédant ces deux propriétés. A cet effet, considérons arbitrairement une autre suite (X'_n) satisfaisant aux dites conditions, c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n$

$$X'_n \underset{q\,p.s.}{\geq} E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum V_k\Big] \qquad (1)$$

$$X'_n \geq E^{\mathcal{B}_n}[\,X'_{n+1}\,M_{n+1}] \qquad (2)$$

et montrons que $X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\mathcal{B}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\,M_k\Big]$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n \qquad \forall n,$$

de telle sorte qu'en s'appuyant alors sur la définition de supremum essentiel on puisse en déduire que $X'_n \underset{p.s.}{\geq} X_n \quad \forall n$.

Supposons pour commencer que la suite (V_n) est tronquée à l'ordre N. (c'est-à-dire que $V_n \underset{p.s.}{=} 0 \quad \forall n > N$).

a) Dans ce cas, nous pouvons d'abord recourir à une démonstration par récurrence descendante lorsque $n \leq N$.

Montrons d'abord que l'hypothèse de récurrence est légitime :

c'est-à-dire que : $X'_N \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_N}\left[\sum_{k=0}^{N} V_k\right]$ (puisque $\forall M \in \mathcal{M}_N$ on a $M_n = 1 \; \forall n \leq N$)

Ce qui résulte immédiatement de l'inégalité (1) pour $n = N$.

En vertu du principe de récurrence, il reste à prouver que :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} X'_{n+1} \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_{n+1}}\left[\sum_0^N V_k M_k\right] & \Longrightarrow & X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[\sum_0^N V_k M_k\right] \\ \forall M \in \mathcal{M}_{n+1} \text{ où } n+1 < N & & \forall M \in \mathcal{M}_n. \end{array}}$$

Fixons préalablement ${}^1M$ une martingale choisie arbitrairement dans $\mathcal{M}_n$, et transformons successivement la thèse :

$$X'_n \geq E^{\underline{B}_n}\left[\sum_0^N V_k \, {}^1M_k\right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[\sum_0^n V_k\right] + E^{\underline{B}_n}\left[\sum_{n+1}^N V_k \, {}^1M_k\right]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[\sum_0^n V_k \, {}^1M_{n+1}\right] + E^{\underline{B}_n}\left[\sum_{k=n+1}^N V_k \, {}^1M_k\right]$$

(puisque $\sum_{k=0}^{n} V_k$ est $\underline{B}_n$-mesurable et que ${}^1M_n = 1$)

Ce qui équivaut encore à l'expression suivante où $({}^1M')$ est une martingale auxiliaire dérivée de ${}^1M$. (Utiliser un argument similaire à celui tenu antérieurement p40) qui visiblement se trouve dans la classe $\mathcal{M}_{n+1}$:

$$X'_n \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[\sum_{k=0}^N V_k \, {}^1M'_k \, {}^1M_{n+1}\right]$$

avec $\quad {}^1M'_i \begin{cases} = 1 & \forall i \leq n \\ = \dfrac{{}^1M_i}{{}^1M_{n+1}} \, 1_{\{{}^1M_{n+1} > 0\}} & \forall i \geq n+1 . \end{cases}$

Il reste à observer que cette dernière formule, découle directement des hypothèses de base et de récurrence :

En effet de l'hypothèse de récurrence il résulte que :

$$X'_{n+1} \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_{n+1}} \left[\sum_{k=0}^{N} V_k \, {}^1M'_k \right]$$

D'autre part en appliquant l'hypothèse de base (1) à la martingale ${}^1M \in \mathcal{M}_n$ il vient :

$$X'_n \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n} \left[X'_{n+1} \, {}^1M_{n+1} \right]$$

Le résultat attendu s'obtient dès lors, en combinant ces deux inégalités et en notant que $E^{\underline{B}_n}\left[E^{\underline{B}_{n+1}}(\cdot) \right] = E^{\underline{B}_n}(\cdot)$, puisque la suite $(\underline{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par construction.

b) <u>Examinons maintenant la situation où n dépasse strictement N</u>

Dans ce cas la thèse peut s'écrire :

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[\sum_0^N V_k \right] \quad \left(\text{puisque } \forall k \leq N < n \, ; \, M_k = 1 \quad \forall M \in \mathcal{M}_n \right)$$

Ce qui n'est rien d'autre que l'hypothèse de base (1)

C.Q.F.D.

Dans le cas d'un processus V_n non arrêté, la démonstration repose sur des arguments de la théorie des martingales. C'est pourquoi la justification pour une suite tronquée a le double mérite suivant : d'une part de montrer que grâce à de tels arguments on peut réaliser en quelque sorte des "récurrences infinies" et d'autre part de rendre intuitives les considérations du cas général traité ci-dessous.

Il s'agit donc de prouver, compte tenu des hypothèses formulées précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k M_k\Big]$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n .$$

Pour ce faire, nous fixons un instant n arbitraire ainsi qu'une martingale M de la classe $\mathcal{M}_n$ et nous allons montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ on a :

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k M_k\Big] - \varepsilon .$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_n .$$

Un passage à la limite (pour $\varepsilon \searrow 0$) achevant dès lors la démonstration.

La justification suivante est basée sur la généralisation de la définition de martingale au cas d'instants aléatoires et l'introduction pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ d'un temps d'arrêt fini noté T_ε construit de manière à ce que le résidu de la série tronquée à cet instant aléatoire fini (correspondant au N du cas réduit) soit négligeable.

a) <u>Lemme 1</u>.

Associons à la suite $(\underline{B}_n)$ croissante de sous-tribus, le temps d'arrêt défini $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ par :

$$T_\varepsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\omega \longmapsto \min\Big\{ j \geq n \;\Big|\; E^{\underline{B}_j}\Big[\sum_{k\geq j} V_k M_k\Big] \leq \varepsilon \Big\}$$

On constate en effet facilement que $\forall m$ l'événement $\{T_\varepsilon = m\}$ qui peut encore s'écrire $\Big\{E^{\underline{B}_m}\Big[\sum_{k\geq m} V_k M_k\Big] \leq \varepsilon\Big\} \cap \Big\{E^{\underline{B}_\ell}\Big[\sum_{k\geq \ell} V_k M_k\Big] > \varepsilon\Big\}_{n \leq \ell < m}$

se trouve dans la tribu $\underline{B}_m$.

C'est grâce au théorème de convergence * que nous énonçons ci-dessous,

---

*(Référence : Séminaire de probabilités III, 08, université de Strasbourg 1969)

que nous déduirons que $\forall n$, il existe effectivement un tel instant j, et que par conséquent T_ε étant fini, la définition prend tout son sens:

> Soient . $(\underline{\underline{B}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-tribus
>
> . $\underline{\underline{B}}_\infty = \sigma[\bigcup_{\mathbb{N}} \underline{\underline{B}}_n]$ la tribu engendrée par les $\underline{\underline{B}}_n$.
>
> (N.B: dans notre contexte, $\underline{\underline{B}}_\infty$ coïncide avec la tribu produit a)
>
> . $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. convergeant Q p.s. vers Y et dominée en ce sens que il existe Z v.a. $\in L^1(\Omega, a, Q)$ tel que: $\forall n \quad |Y_n| \leq Z$
>
> Alors:
>
> $$E^{\underline{\underline{B}}_n}(Y_n) \xrightarrow{Q.\ p.s.} E^{\underline{\underline{B}}_\infty}(Y).$$

Il s'agit en fait, d'une extension du théorème de Lévy* qui rappelons le assure la convergence p.s. de $E^{\underline{\underline{B}}_n}(Y)$ vers $E^{\underline{\underline{B}}_\infty}(Y) \quad \forall Y \in L^1(\Omega, a, Q)$ et dont la justification repose sur un théorème de convergence de martingales.

Considérons à présent la suite $\left(\sum_{k \geq j} V_k M_k\right)$

α) <u>Elle converge manifestement p.s. vers 0 lorsque $j \to +\infty$</u>

En effet, soient . F = l'ensemble de divergence ponctuelle de la martingale (M_n)

et . $G = \{\omega \in \Omega \mid M_\infty(\omega)$ ne soit pas fini$\}$.

Comme nous l'avons mentionné au paragraphe VII ces deux ensembles sont Q négligeables: il en résulte dès lors que leur réunion que nous désignerons par H l'est également. De telle sorte qu'il suffit, en vertu de la définition de convergence d'une suite de vérifier hormis sur H que:

* Référence: Chow - Robbins - Siegmund: "Great expectations: the theory of optimal stopping" th I-4

$$\forall \eta \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists N(\eta) \mid \forall j \geq N(\eta) \qquad \left| \sum_{k \geq j} V_k M_k \right| \leq \eta .$$

1. Le critère de Cauchy appliqué à la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} V_k$ nous amène à écrire que :

$$\forall \eta_1 \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists N_1(\eta_1) \mid \forall j \geq N_1(\eta_1) \qquad \left| \sum_{k \geq j} V_k \right| \leq \eta_1 .$$

2. D'autre part la convergence p.s. de la martingale (M_n) vers M_∞ entraîne que :

$$\forall \eta_2 \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists N_2(\eta_2) \mid \forall j \geq N_2(\eta_2) \qquad M_j \leq M_\infty + \eta_2 .$$

Fixons η_1 et η_2 et posons $N(\eta) = \sup\left(N_1\left(\frac{\eta}{M_\infty + \eta}\right), N_2(\eta)\right)$

La thèse s'obtient dès lors en combinant les deux relations ci-dessus

C.q.F.D.

β) <u>En outre, cette suite est dominée par la v.a. sommable $\sum_{k \in \mathbb{N}} |V_k| M_k$.</u>

Pour s'en assurer il suffit de se conférer à la démonstration explicite présentée au début de ce paragraphe. ■

Les hypothèse du théorème étant réalisées, on en conclut donc que :

$$E^{\mathcal{B}_j}\left[\sum_{k \geq j} V_k M_k\right] \xrightarrow[q.p.s.]{} 0$$
$$j \to +\infty$$

et par conséquent que T_ε $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ et $\forall n$ est fini.

C.q.F.D.

b) <u>Lemme 2.</u>

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall k \leq T_\varepsilon \\[1em] M_k \underset{p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_k}[M_{T_\varepsilon}] \end{array}}$$

Du lemme précédent il résulte immédiatement que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+$ $E_q[M_{T_\varepsilon}] = 1$ et par conséquent que les deux membres de l'égalité ont même espérance mathématique. Il subsiste donc à démontrer que $\forall k \leq T_\varepsilon$: $M_k \underset{p.s.}{\geq} E^{\mathcal{B}_k}[M_{T_\varepsilon}]$

Mais ce résultat est une simple conséquence du théorème de convergence des martingales positives* appliqué à la suite $(M_{T_\varepsilon \wedge k})$ arrêtée au temps d'arrêt T_ε. En effet, comme cette dernière martingale converge p.s. vers M_{T_ε} (T_ε étant fini) on a $\forall k$: $M_{T_\varepsilon \wedge k} \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_k}[M_{T_\varepsilon}]$

Il s'ensuit donc en particulier sur l'événement $\{T_\varepsilon \geq k\}$ que

$$M_k \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_k}[M_{T_\varepsilon}] \quad \text{c.q.F.D.}$$

<u>Remarque</u> :

En ce qui concerne la démonstration du théorème qui nous intéresse, il est essentiel de s'apercevoir que le processus adapté (X_n) peut toujours être supposé positif. Si tel n'était pas le cas il suffirait d'envisager la nouvelle suite adaptée (U_n) définie comme suit :
$$\begin{cases} U_0 = M+1 \\ U_n = V_n \qquad \forall n > 0, \end{cases}$$

où M représente la borne supérieure de l'application $|\Sigma V_k|$ supposée par hypothèse appartenir à l'espace de Banach $L^\infty(\Omega, a, Q)$ des classes de v.a. bornées en mesure, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel qu'on ait $|\Sigma V_k(\omega)| \leq M$ Q.p.p. Dans ce cas, si on reprend la formulation primitive du problème, il s'agit de déterminer une loi de distribution P dans une classe suffisamment remarquable, qui maximise l'espérance de la fonction $1 + \sum_{n>0} V_n$. Il va de soi que la substitution de U_n à V_n dans cette dernière, n'altère en rien la solution optimale ; c'est-à-dire que ces deux problèmes sont strictement équivalents au sens qu'ils atteignent leur maximum pour la même probabilité P^*. De plus, on voit sans peine que la convergence de ΣU_n et la non négativité de la suite X_n formulée ci-après sont à nouveau garanties. $\forall n$ $X_n = \operatorname{ess\,sup}_{P \in D} E_P^{\underline{B}_n}[\Sigma U_k] = M + \operatorname{ess\,sup}_{P \in D} E_P^{\underline{B}_n}[\Sigma V_k]$

puisque $\forall P$ $\quad |E_P^{\underline{B}_n}(\Sigma V_k)| \leq E_P^{\underline{B}_n}|\Sigma V_k| \leq M \qquad \Sigma V_k \in L^1(\Omega, a, Q)$ ∎

Venons-en maintenant à la démonstration proprement dite de l'inégalité annoncée :

---

* Référence : Neveu : "Martingales à temps discret" - théorème II.2.9)

plus exactement on se propose d'établir quel que soit l'instant n préalablement choisi que :

$$\boxed{X'_n \geq E^{\underline{B}_n}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k M_k\right] - \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+, \forall M \in \mathcal{M}_n .}$$

1) La seconde hypothèse entraîne d'abord que $(X'_n M_n)$ constitue une surmartingale positive. Dès lors, en faisant appel à l'inégalité des surmartingales positives *1 exprimées pour les temps d'arrêt T_ε et constant on peut écrire que :

$$X'_n \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[X'_{T_\varepsilon} M_{T_\varepsilon}\right] \quad (\text{car } T_\varepsilon \geq n \text{ par construction})$$

M_n valant l'unité $\forall M \in \mathcal{M}_n$. ■

2) D'autre part, de la première hypothèse découle que :

$$X'_{T_\varepsilon} \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_{T_\varepsilon}}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\right]$$

En effet, en vertu de la définition de la v.a. X'_{T_ε} associée à un temps d'arrêt fini et d'une propriété importante *2 du conditionnement d'une v.a. par rapport à la tribu des événements antérieurs à l'instant T_ε, il suffit de prouver que :

$$X'_h \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_h}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\right] \text{ sur chaque événement du type } \{T_\varepsilon = h\},$$

ce qui est légitime par hypothèse. ■

En comparant ces deux inégalités on en déduit que :

$$X'_n \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\underline{B}_n}\left[E^{\underline{B}_{T_\varepsilon}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} V_k\right) M_{T_\varepsilon}\right]$$

En décomposant cette sommation en deux parties, il vient compte tenu que $\sum_{k<T_\varepsilon} V_k$ est $\underline{B}_{T_\varepsilon}$ mesurable que :

*1 : Référence : Neveu "Martingales à temps discret" : théorème II . 2 . 13 .

*2 : " " " " : " II . 1 . 3 .

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k<T_\varepsilon} V_k M_{T_\varepsilon}\Big] + E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[E^{\underline{\underline{B}}_{T_\varepsilon}}\Big(\sum_{k=T_\varepsilon}^{\infty} V_k M_{T_\varepsilon}\Big)\Big].$$

Sachant que le processus (V_n) peut être supposé positif il s'ensuit à fortiori :

$$X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k<T_\varepsilon} V_k M_{T_\varepsilon}\Big]$$

a) <u>Développons d'abord le second membre de cette inégalité</u> :

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k=0}^{T_\varepsilon-1} V_k M_{T_\varepsilon}\Big] = E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_{T_\varepsilon}\Big]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} E^{\underline{\underline{B}}_n}\big[V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_{T_\varepsilon}\big]$$

(Suite à la remarque, le théorème de convergence monotone justifie l'interversion des signes Σ et $E^{\underline{\underline{B}}_n}(\cdot)$)

Evaluons à présent le terme général de cette série en prenant toutefois la précaution de distinguer deux cas :

1) <u>$\forall k<n$</u> : Dans ces conditions, V_k est $\underline{\underline{B}}_n$ - mesurable et T_ε toujours $> k$

D'où $E^{\underline{\underline{B}}_n}[V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_{T_\varepsilon}] = V_k \cdot M_n = V_k M_k$

puisque $\forall k \leq n \quad M_k = 1$

2) <u>$\forall k \geq n$</u> : On peut toujours intercaler un conditionnement auxiliaire par rapport à la tribu $\underline{\underline{B}}_k$ puisque $\forall k \geq n$ $\underline{\underline{B}}_n \subseteq \underline{\underline{B}}_k$.

Il en résulte que :

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}[V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_{T_\varepsilon}] = E^{\underline{\underline{B}}_n}[E^{\underline{\underline{B}}_k}(V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_{T_\varepsilon})]$$

$$= E^{\underline{\underline{B}}_n}[V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} E^{\underline{\underline{B}}_k}(M_{T_\varepsilon})]$$

$$= E^{\underline{\underline{B}}_n}[V_k 1_{\{k<T_\varepsilon\}} M_k]$$

(en vertu du lemme 2)

En reconstituant la somme il vient :

$$\boxed{X'_n \underset{p.s.}{\geq} E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k<T_\varepsilon} V_k M_k\Big]} \qquad (I)$$

B) Assurons nous ensuite que le reste de la série est inférieur à ε.

- La définition de T_ε entraîne que :

$$E^{\underline{\underline{B}}_{T_\varepsilon}}\Big[\sum_{k\geq T_\varepsilon} V_k M_k\Big] \underset{p.s.}{\leq} \varepsilon$$

- D'autre part, T_ε étant par construction toujours $\underset{p.s.}{\geq} n$ on constate sans peine que les traces* des événements antérieurs à l'instant n sur chaque événement du type $\{T_\varepsilon = k\}$ avec $k \geq n$ appartiennent à la sous-tribu $\underline{\underline{B}}_k$. Il s'ensuit dès lors que $\underline{\underline{B}}_n \subseteq \underline{\underline{B}}_{T_\varepsilon}$ et par conséquent que $\boxed{E^{\underline{\underline{B}}_n}\Big[\sum_{k\geq T_\varepsilon} V_k M_k\Big] \underset{p.s.}{\leq} \varepsilon}$ (II)

Il reste finalement à sommer les relations (I) et (II) et à faire parcourir $\mathbb{R}_0^+$ à ε pour obtenir le résultat proposé.

C.Q.F.D.

(* Pour des précisions supplémentaires sur la tribu associée à un temps d'arrêt, se conférer par exemple au paragraphe III.6 de "Bases mathématiques du calcul des probabilités" J Neveu).

X.5. Proposition.

$$\boxed{E_q[X_n] = \sup_{M\in\mathcal{M}_n} E_q\left[\sum_0^\infty V_k M_k\right] \qquad \forall n\in\mathbb{N}.}$$

Autrement dit, il faut vérifier que $\forall n$ fixé,

$$E_q\left[\operatorname*{ess\,sup}_{M\in\mathcal{M}_n} E^{\mathcal{B}_n}\left[\sum_0^\infty V_k M_k\right]\right] = \sup_{M\in\mathcal{M}_n} E_q\left[\sum_0^\infty V_k M_k\right]$$

Cette égalité étant une conséquence immédiate du corollaire 2 (p 31) appliqué à la famille $E^{\mathcal{B}_n}\left(\sum_0^\infty V_k M_k\right)_{M\in\mathcal{M}_n}$ en se souvenant qu'elle est filtrante croissante et en tenant compte du fait que:

$$E_q\left[\left(\sum_0^\infty V_k\right)^-\right] \leq E_q\left[\left|\sum_0^\infty V_k\right|\right] \leq M.$$

(la martingale constante unité se trouvant dans $\mathcal{M}_n$ $\forall n$).

Corollaire:

Compte tenu que $\mathcal{M}_0$ coïncide avec $\mathcal{M}$, il résulte notamment du théorème précédent que:

$$E_q[X_0] = \sup_{M\in\mathcal{M}_n} E_q\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} V_n M_n\right].$$

Il est à remarquer, que la seconde assertion du théorème X.4 traduit en particulier que le processus stochastique adapté (X_n) est une surmartingale positive puisque comme on l'a déjà indiqué à plusieurs la martingale constante unité se trouve dans $\mathcal{M}$. Dès lors, le théorème de convergence des surmartingales, assure l'existence d'une limite p.s. que nous baptisons X_∞. La proposition cruciale suivante n'a d'autre ambition que d'identifier la dite limite.

I.6. Proposition.

$$(X_n) \xrightarrow{q.p.s.} \sum_{\mathbb{N}} V_k$$

lorsque $n \to \infty$.

- Caractérisons pour commencer la v.a.r. $\sum_{\mathbb{N}} V_k$; on constate clairement qu'elle jouit des propriétés suivantes :

1) $\sum_{\mathbb{N}} V_k$ est $\mathcal{B}_\infty$ mesurable en tant que limite p.s. de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} V_k\right)$ composée de v.a. $\mathcal{B}_\infty$-mesurables.

2) $\sum_{\mathbb{N}} V_k$ étant bornée par M, appartient à $L^1(\Omega, a, Q)$

- Un passage à la limite (lorsque $n \to \infty$) dans la première inégalité de la proposition I-4 combiné avec une application légitime du théorème de Doob en vertu des remarques ci-dessus, nous conduit alors à écrire que :

$$X_\infty \geq \sum_{\mathbb{N}} V_k \quad q.p.s.$$

- Il reste pour achever la démonstration à montrer que :

$$E[X_\infty] \leq E_Q[\sum_{\mathbb{N}} V_k].$$

Or, le même théorème de convergence des surmartingales positives affirme également que :

$$\forall n \quad X_n \geq E^{\mathcal{B}_n}[X_\infty] \quad q.p.s.$$

Il s'ensuit donc :

$$E_Q[X_\infty] \leq E_Q[X_n] \quad \forall n.$$

D'autre part, en s'appuyant sur le théorème I-5 il vient :

$$E_Q[X_\infty] \leq \sup_{M \in \mathcal{M}_n} E_Q[\sum_{\mathbb{N}} V_k M_k] \quad \forall n \qquad (1)$$

- Etablissons finalement, que la suite numérique décroissante $\left(\sup_{M \in \mathcal{M}_n} E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k M_k\right]\right)_n$

que nous désignerons dès à présent par L_n en vue d'alléger le formalisme, converge vers $\sup_{M \in \bigcap_{\mathbb{N}} \mathcal{M}_n} E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k M_k\right]$ qui n'est rien d'autre que $E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right]$,

cette dernière classe étant constituée de l'unique martingale unité.

Autrement dit, de par la définition de convergence, il faut vérifier que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \quad \exists L_{n(\varepsilon)} \text{ tel que : } L_n \leq E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right] + \varepsilon.$$

Or, quel que soit ε fixé dans $\mathbb{R}_0^+$, le critère de Cauchy appliqué à la série absolument convergente $\sum_{k \in \mathbb{N}} V_k$, assure l'existence d'un $N_1(\varepsilon/3)$ tel que

$\forall p \geq N_1(\varepsilon/3)$ on ait $\left|\sum_{N_1}^{p} V_k\right| \leq \varepsilon/3$. D'autre part, une application du théorème de Lebegue à la suite $\left(\sum_{0}^{n} V_k\right)$ permise pour des raisons similaires à celles exprimées au début du paragraphe X entraîne qu'il existe $N_2(\varepsilon/3)$ tel que $\forall n > N_2(\varepsilon/3)$ on ait: $E_Q\left[\sum_{0}^{n-1} V_k\right] \leq E_Q\left[\sum_{0}^{\infty} V_k\right] + \varepsilon/3$.

Posons $N(\varepsilon) = \sup\left[N_1(\varepsilon/3), N_2(\varepsilon/3)\right]$

Notons que l'indépendance de N par rapport à ω résulte de la convergence uniforme de $\sum_{\mathbb{N}} V_k$ (critère de Weierstrass).

Faisons choix de ce N et attachons nous à présent de démontrer que:

$$\sup_{M \in \mathcal{M}_N} E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k M_k\right] \leq E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right] + \varepsilon.$$

ce qui équivaut encore à prouver que

$$\forall M \in \mathcal{M}_N \quad E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k M_k\right] \leq E_Q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right] + \varepsilon \qquad (2)$$

A cet effet, considérons une martingale quelconque de $\mathcal{M}_N$: soit ${}^{\circ}M$ et associons lui le temps d'arrêt fini T'_ε, analogue du T_ε déjà introduit, défini de la façon suivante: $T'_\varepsilon : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{N}}$

$$\omega \longmapsto \inf\left\{P > N \mid E^{\mathcal{B}_P}\left[\sum_{k \geq P} V_k {}^{\circ}M_k\right] \leq \frac{\varepsilon}{3}\right]$$

Décomposons maintenant la sommation du premier membre de l'inégalité (2) en trois tranches ; il vient :

$$E_q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] = E_q\left[\sum_{0}^{N-1} V_k\right] + E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] + E_q\left[\sum_{k\geq T'_\varepsilon} V_k\,{}^{\circ}M_k\right]$$

Procédons à des majorations successives de chacun de ces termes :

a) On constate d'abord clairement que : $E_q\left[\sum_{k=0}^{k=N-1} V_k\right] \leq E_q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right] + \varepsilon/3 \quad \forall N$ (a)

b) Ensuite, le temps d'arrêt T'_ε étant fini, un raisonnement analogue à celui tenu dans le développement de la démonstration du lemme 2 p47. nous amène au résultat suivant :

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{M} \text{ et } \forall k \leq T'_\varepsilon \qquad M_k \underset{q.p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}_k}[M_{T'_\varepsilon}]}$$

Il s'ensuit dès lors que :

$$E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] = E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\; E^{\underline{\underline{B}}_k}({}^{\circ}M_{T'_\varepsilon})\right]$$

La « propriété de moyenne » de l'espérance conditionnelle combinée avec la $\underline{\underline{B}}_k$ mesurabilité de $V_k \quad \forall k$ donne ;

$$E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] = E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} E^{\underline{\underline{B}}_k}(V_k\,{}^{\circ}M'_{T_\varepsilon})\right]$$

Un double application de la linéarité de l'espérance mathématique entraîne alors que : $E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] = E_q\left[\left(\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\right){}^{\circ}M_{T'_\varepsilon}\right]$

Compte tenu de la définition de T'_ε et du choix de N et de la propriété d'espérance unité sur tout temps d'arrêt fini dont jouissent les martingales de la collection $\mathcal{M}$ on conclut que :

$$E_q\left[\sum_{k=N}^{T'_\varepsilon-1} V_k\,{}^{\circ}M_k\right] \leq \varepsilon/3 \qquad (b)$$

c) Enfin, en insérant un conditionnement auxilliaire par rapport à la tribu associée au temps d'arrêt T'_ε ainsi qu'en faisant à nouveau appel à la définition du dit temps d'arrêt on peut écrire que :

$$E_q\left[\sum_{k\geq T_\varepsilon'} V_k \,{}^\circ M_k\right] = E_q\left[E^{\mathcal{B}_{T_\varepsilon'}}\left(\sum_{k\geq T_\varepsilon'} V_k \,{}^\circ M_k\right)\right] \leq \varepsilon/3 \qquad (c)$$

De telle sorte, qu'en ajoutant membre à membre les inégalités (a), (b) et (c) on obtienne :

$$E_q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k \,{}^\circ M_k\right] \leq E_q\left[\sum_{\mathbb{N}} V_k\right] + \varepsilon .$$

Un passage à la limite lorsque $n \to \infty$ dans la relation (1) termine dès lors la démonstration. ■

<u>Remarque</u> : Il importe de souligner, qu'il n'est pas exact en général, que la suite décroissante des bornes supérieures d'une fonction numérique quelconque prises sur une suite décroissante de domaines converge vers la borne supérieure de la dite fonction sur l'intersection des domaines. C'est grâce aux propriétés remarquables propres aux martingales représentants des stratégies de comportement, que dans notre contexte, on peut garantir la véracité de cette assertion. Pour s'en persuader, il suffit d'examiner le contre - exemple suivant :

Soient . la suite décroissante d'ensembles $A_n =]1 - \frac{1}{n}, 1]$ avec $\bigcap_{\mathbb{N}} A_n = \{1\}$

. une fonction f numérique réelle définie sur $\bigcup_{\mathbb{N}} A_n$ définie comme suit :

$$f(x) = 1 \qquad \text{si } x \in]1 - \tfrac{1}{n}, 1]$$
$$= 0 \qquad \text{si } x = 1$$

Il en résulte que $\sup_{A_n} f(x) = 1$ tandis que

$$\sup_{\bigcap_{\mathbb{N}} A_n} f(x) = 0$$

La proposition suivante, apporte quelques précisions supplémentaires sur la v.a. X_S construite à partir d'un temps d'arrêt S quelconque et du processus probabiliste composé d'enveloppes supérieures essentielles X_n. Toutefois si le t.a considéré n'est pas nécessairement fini, la définition énoncée au paragraphe VII, n'est plus à priori satisfaisante puisque dans ce cas X_S n'est pas définie sur l'événement $\{S = +\infty\}$.

C'est pour remédier à cet état de fait, qu'il nous semble opportun de compléter la dite notion en prolongeant dès à présent X_S par la v.a. ΣV_k sur $\{S = \infty\}$.

Cette extension est naturelle si l'on tient compte de la convergence q.p.s. de la surmartingale X_n vers ΣV_k établie au cours du théorème précédent.

De manière analogue on va associer à S la classe $\mathcal{M}_S$ comprenant toutes les martingales positives, sommables, d'espérance unité et tel que $M_S = 1$. Observons à ce propos que cette classe n'est pas vide étant donné que la martingale constante unité en fait partie. Ces définitions étant posées, on peut maintenant s'attacher – et c'est là l'objectif de la proposition ci-dessous –, à étendre l'expression formulée à l'alinéa X-2 au cas d'instants aléatoires. Plus exactement, nous allons démontrer que, quel que soit le t.a. S, la v.a. X_S peut également s'interpréter en tant qu'un « es sup » portant sur la classe $\mathcal{M}_S$.

Cependant, la démonstration de ce théorème repose essentiellement sur un résultat intéressant en lui-même, que nous établissons préalablement sous forme de lemme.

<u>Lemme:</u> Quel que soit l'instant n fixé ; à toute martingale de la collection $\mathcal{M}_S$, on peut faire correspondre une martingale

de $\mathcal{M}_n$ coïncidant avec la première sur l'événement $\{S=n\}$ et réciproquement.

Démonstration.

1. Pour toute martingale dans $\mathcal{M}_S$ la suite adaptée (M_k^*) définie explicitement ci-dessous constitue une martingale appartenant à la classe $\mathcal{M}_n$.

$$\begin{cases} M_k^* = 1 & \forall k \leq n \\ M_k^* = M_k \, 1_{\{S=n\}} + 1_{\{S \neq n\}} & \forall k > n. \end{cases}$$

En effet, d'après la définition de martingale, il convient d'observer que $\forall k \in \mathbb{N} : M_k^* = E^{\underline{B}_k}[M_{k+1}^*]$

a) $\forall k \leq n-1$: l'égalité des martingales est trivialement vérifiée compte tenu que la suite est constante.

b) $\forall k > n$: en prenant l'espérance conditionnelle de M_{k+1}^*, il vient successivement,

$$\begin{aligned} E^{\underline{B}_k}[M_{k+1}^*] &= E^{\underline{B}_k}[M_{k+1} \, 1_{\{S=n\}} + 1_{\{S \neq n\}}] \\ &= 1_{\{S=n\}} \, E^{\underline{B}_k}[M_{k+1}] + 1_{\{S \neq n\}} \\ &= 1_{\{S=n\}} \, M_k + 1_{\{S \neq n\}} \\ &= M_k^* . \end{aligned}$$

c) D'autre part, il faut aussi s'assurer que le recollement est correct, c'est-à-dire que $M_n^* = E^{\underline{B}_n}[M_{n+1}^*]$

$E^{\underline{B}_n}[M_{n+1}^*]$ peut s'écrire $1_{\{S=n\}} \, M_n + 1_{\{S \neq n\}}$

or, la définition de M_S entraîne que $M_S = M_n$ sur $\{S=n\}$

d'où : $E^{\underline{B}_n}[M_{n+1}^*] = 1_{\{S=n\}} \, M_S + 1_{\{S \neq n\}}$

$= 1 .$

Enfin, de par sa construction, la martingale M^* coïncide avec M sur l'événement $\{S = n\}$ et jouit de toutes les bonnes propriétés propres à la collection $\mathcal{M}_n$.

2. Une technique fort semblable à celle utilisée dans la première partie de la démonstration, s'appuyant sur des calculs peut être un peu plus élaborés, nous conduit à démontrer la réciproque. Il suffit à cet effet de faire correspondre à toute martingale ${}^\circ M \in \mathcal{M}_n$ la martingale ${}^*M$ formulée ci-dessous :

$$\begin{cases} {}^*M_k = {}^\circ M_k & \text{sur } \{\tau < k\} \cap \{\tau = n\} \\ {}^*M_k = 1 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

avec ${}^\circ M \in \mathcal{M}_n$.

On établit dès lors sans peine la :

Proposition X-7 :

$$\boxed{X_S = \underset{M \in \mathcal{M}_S}{\text{ess sup}}\ E^{\mathcal{B}_S}\left[\sum_{k=0}^{\infty} V_k M_k\right]}$$

Démonstration :

Désignons par X_S^* la borne essentielle supérieure ci-dessus et montrons que $X_S = X_S{}^*$.

Pour ce faire, remarquons d'abord que la suite d'événement $\{S = n\}$ - $n \in \overline{\mathbb{N}}$ - découpe Ω en sous-ensembles mutuellement disjoints. Si bien, qu'il suffit de vérifier cette égalité sur un événement arbitraire du type $\{S = n\}$ avec $n \in \overline{\mathbb{N}}$, en prenant soin de distinguer deux cas.

1. Si l'instant n est $+\infty$: Moyennant la définition complétée de X_S et en se rappelant que la classe $\mathcal{M}_\infty$ ne comprend que l'unique martingale

unité, on obtient immédiatement l'égalité de thèse.

2. Si l'instant n est fini

Etablissons d'abord que :

$\boxed{X_S \geq X_{S^*}}$ sur l'événement $\{S = n\}$.

Dans ces conditions, il faut voir que :

$$X_n \geq E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k] \quad ; \forall M \in \mathcal{M}_S.$$

Faisons choix d'une martingale $M \in \mathcal{M}_S$; le lemme nous permet dès lors de lui associer une martingale $M^* \in \mathcal{M}_n$ telle que :

$$E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k] = E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k^*] \text{ sur } \{S = n\}$$; ce qui achève la démonstration de l'inégalité.

Enfin, il nous reste à voir que

$\boxed{X_{S^*} \geq X_S}$ sur $\{S = n\}$.

Nous devons montrer que $X_{S^*} \geq E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k]$, $\forall M \in \mathcal{M}_n$.

Fixons $M^o \in \mathcal{M}_n$; de par la réciproque du lemme on peut lui associer $M^* \in \mathcal{M}_S$ tel que : $E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k^o] = E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k^*]$.

Et comme $X_{S^*} \geq E^{\underline{\underline{B}}_n}[\Sigma V_k M_k^*]$, la proposition est donc entièrement démontrée. ∎

La proposition ci-après, fait usage, des principaux résultats établis au cours de ce paragraphe et exprime une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une martingale admissible donnée (il faut entendre par là, rappelons le, une martingale appartenant à $\mathcal{M}_0$) soit optimale. En outre, elle offre l'avantage de mettre en évidence le célèbre principe d'optimalité de Bellman.

Au vu de la proposition X-4, on sait déjà, que pour toute martingale fixée dans $\mathcal{M}_0$, $X_n M_n$ vérifie les relations des surmartingales. Nous allons à présent démontrer qu'une martingale est optimale si et seulement si, elle donne l'égalité dans chacune de ces inégalités :

Proposition X-8 :

> Une martingale admissible M est optimale
>
> $\Longleftrightarrow$
>
> le processus $X_n M_n$ est lui-même une martingale,
>
> c'est-à-dire si :
>
> $$\forall n \quad X_n M_n \underset{q.p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_n}(X_{n+1} M_{n+1})$$

1) Condition nécessaire :

Considérons ${}^*M$ une martingale optimale. Au vu du corollaire de la proposition X.5, on sait déjà qu'elle satisfait l'égalité suivante :

$$E_q[X_0] = E_q[\Sigma V_k {}^*M_k]$$

Supposons la régulière, c'est-à-dire qu'il existe une v.a. $\in L^1(\Omega, \mathcal{Q}, q)$ en l'occurence ${}^*M_\infty$ telle que $\forall k$, ${}^*M_k \underset{q.p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_k}({}^*M_\infty)$.

Sous cette hypothèse supplémentaire, relativement commode, on va désormais s'occuper à prouver que :

$$\forall n \quad X_n {}^*M_n \underset{q.p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_n}[X_{n+1} {}^*M_{n+1}] \quad (a).$$

Pour ce faire, on va recourir à une récurrence ascendante étroitement liée aux relations de la programmation dynamique de Bellman, et de ce fait assez particulière.

Démontrons donc l'égalité de thèse pour $n=0$.

Dans ce cas, une simplification est apportée, par le fait que ${}^*M_0 = 1$.

La thèse s'écrit $X_0 \underset{q.p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_0}[X_1 {}^*M_1]$ (b)

Une inégalité étant déjà acquise par la proposition X - 4, il suffit pour établir l'inégalité inverse, d'utiliser un argument de la théorie de l'intégration par rapport à une mesure, devenu désormais classique, qui consiste à montrer que : $E_q[X_0] \leq E_q[X_1 {}^*M_1]$

Evaluons à cet effet l'espérance de X_0. Compte tenu de la régularité de M^t et de quelques propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle, celle-ci s'écrit successivement :

(c) $E_q[X_0] = E_q[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k {}^*M_k] = E_q[\sum V_k E^{\mathcal{B}_k}({}^*M_\infty)] = E_q[\sum E^{\mathcal{B}_k}(V_k {}^*M_\infty)] = E_q[(\sum V_k) {}^*M_\infty]$

en se souvenant que la double interversion des signes somme et espérance a été justifiée en début de paragraphe.

Par ailleurs, les théorèmes de convergence des surmartingales positives et X - 6, nous permettent d'écrire que :

$$X_1 {}^*M_1 \underset{q.p.s.}{\geq} E^{\mathcal{B}_1}[X_\infty {}^*M_\infty] \underset{q.p.s.}{=} E^{\mathcal{B}_1}[(\sum V_k) {}^*M_\infty]$$

Un passage à l'espérance dans cette dernière relation achève dès lors la démonstration de l'assertion (b). ∎

De cette assertion, résulte immédiatement l'expression du principe de Bellman relative à l'instant $n=1$.

Mais, nul doute qu'à ce stade de la démonstration, un bref rappel de ce principe de base de la programmation dynamique serait profitable.

De manière générale, il s'énonce comme suit :

« toute stratégie optimale, est telle que quelque soit l'instant où on se place, toutes les décisions ou actions à venir constituent également une sous politique ou stratégie optimale. »

Clairement, dans notre formalisme « martingaliste », il s'exprime par les relations suivantes :

$$\forall n \quad E_q[X_n] = \sup_{M \in \mathcal{M}_n} E_q[\Sigma V_k M_k] = E_q[\Sigma V_k {}^*M_k^{(n)}]$$

où, $\forall n$ les ${}^*M^{(n)}$ ne sont rien d'autre que la martingale optimale globale ${}^*M$ normalisée grâce à ${}^*M_n$, c'est-à-dire plus précisément que :

$$\begin{aligned} {}^*M_k^{(n)} &= 1 \quad \forall k \leq n \\ &= \frac{{}^*M_k}{{}^*M_n} \quad \forall k > n \end{aligned}$$

Pour davantage de détails concernant l'existence q.p.s. ainsi que l'interprétation en terme de densité de ces rapports, se rapporter au paragraphe VII, aliéna e.

Abordons dès à présent la démonstration proprement dite de la relation d'optimalité consécutive à l'instant initial :

La confrontation des relations (b) et (c) donne :

$$E_q[X_1 {}^*M_1] = E_q[(\Sigma V_k) {}^*M_\infty]$$

Mais, le théorème de convergence des surmartingales positives et la proposition X-6, entraîne à nouveau que :

$$X_1 {}^*M_1 \geq E^{\mathcal{B}_1}[(\Sigma V_k) {}^*M_\infty] \quad q.p.s.$$

Si bien, que :

$$X_1 {}^*M_1 = E^{\mathcal{B}_1}[(\Sigma V_k) {}^*M_\infty] \quad q.p.s.$$

D'où il s'ensuit :

$$X_1 \underset{q.p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}_1}\left[\frac{(\Sigma V_k)\,{}^*M_\infty}{{}^*M_1} \right]$$

et donc à fortiori que :

$$E_q[X_1] = E_q\left[(\Sigma V_k)\frac{{}^*M_\infty}{{}^*M_1} \right] = E_q\left[\Sigma V_k \; E^{\underline{\underline{B}}_k}\left(\frac{{}^*M_\infty}{{}^*M_1} \right)\right]$$

Afin de conclure, il suffit seulement de montrer que, $\forall k$:

$${}^*M_k^{(1)} \underset{q.p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}_k}\left[\frac{{}^*M_\infty}{{}^*M_1} \right]$$

De manière plus générale, nous allons prouver que si ${}^*M$ est régulière et de limite p.s. ${}^*M_\infty$, alors pour chaque n, la martingale ${}^*M^{(n)}$ l'est aussi et admet $\dfrac{{}^*M_\infty}{{}^*M_n}$ comme limite p.s.

En effet ;

<u>$\forall k \geq n$</u> : de par sa définition et de la régularité de ${}^*M$, la martingale ${}^*M^{(n)}$ s'écrit : ${}^*M_k^{(n)} = \dfrac{{}^*M_k}{{}^*M_n} = \dfrac{E^{\underline{\underline{B}}_k}[{}^*M_\infty]}{{}^*M_n} = E^{\underline{\underline{B}}_k}\left[\dfrac{{}^*M_\infty}{{}^*M_n}\right]$

<u>$\forall k \leq n$</u> on observe que :

$$E^{\underline{\underline{B}}_k}\left(\frac{{}^*M_\infty}{{}^*M_n}\right) = E^{\underline{\underline{B}}_k}\left[E^{\underline{\underline{B}}_n}\left(\frac{{}^*M_\infty}{{}^*M_n}\right)\right] \underset{q.p.s}{=} 1.$$

Il en résulte dès lors que ${}^*M^{(1)}$ est optimale dans $\mathcal{M}_1$ c'est-à-dire que

$$E_q[X_1] = E_q\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} V_k\, {}^*M_k^{(1)}\right]$$

Une simple transposition d'indice $(0 \to 1)$ dans les raisonnements tenus nous conduirait alors à établir que :

$$X_1\,{}^*M_1 \underset{q.p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}_1}[X_2\,{}^*M_2] \text{ , puis : } E_q[X_2] = E_q[\Sigma V_k\,{}^*M_k^{(1)}],$$

et ainsi de suite.

En répétant successivement cette justification, on obtient finalement l'expression annoncée du principe de Bellman ainsi que les égalités des martingales pour $(X_n\ M_n)$.

2) Condition suffisante.

Soit $\hat{M}$ une martingale toujours supposée régulière, appartenant à $\mathcal{M}_0$ et satisfaisant à chaque instant l'égalité :

$$X_n \hat{M}_n = E^{\underline{B}_n} (X_{n+1} \hat{M}_{n+1})$$

On se propose de montrer que $\hat{M}$ est optimale, c'est-à-dire qu'on a, compte tenu du théorème X - 5 :

$$E_q [X_0] \leq E_q [\Sigma V_k \hat{M}_k]$$

a) A cet effet, on remarquera d'abord que le processus produit $(X_n \hat{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi régulier.

D'après la proposition IV - 2 - 3*, la façon la plus commode de le voir, est de vérifier que $(X_n M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la condition d'équi-intégrabilité, formulée ci-dessous :

$$\sup_{\mathbb{N}} \int_{\{X_n \hat{M}_n > a\}} X_n \hat{M}_n \, dq \longrightarrow 0$$
$$a \rightarrow +\infty$$

La présence des modules est superflue, car comme on l'a déjà signalé auparavant la surmartingale X_n peut, bien sûr être supposée positive.

Mais d'autre part, cette dernière est bornée en mesure.

En effet : $\forall n$, $\forall P \in \mathcal{D}$ $\quad | E_P^{\underline{B}_n} (\Sigma V_k) | \underset{p.p.}{\leq} E_P^{\underline{B}_n} | \Sigma V_k | \underset{p.p.}{\leq} \| \Sigma V_k \|_\infty$.

En se souvenant que $\Sigma V_k \in L^\infty (\Omega, \mathcal{a}, q)$ et que l'uniformité est assurée par le fait bien connu qu'une réunion dénombrable d'ensembles q négligeable l'est également, on en déduit alors sans complications que :

---

* Référence : J. Neveu : « Martingales à temps discret. »

$$\sup_{M} \int_{\{X_n \hat{M}_n > a\}} X_n \hat{M}_n \, dq \leq \| \Sigma V_k \|_\infty \sup_{M} \int_{\{X_n \hat{M}_n > a\}} \hat{M}_n \, dq$$

$$\leq \| \Sigma V_k \|_\infty \sup_{M} \int_{\{ \hat{M}_n > \frac{a}{\| \Sigma V_k \|_\infty} \}} \hat{M}_n \, dq.$$

Sachant que la fonctionnelle $\int_{\bullet} \hat{M}_n \, dq$ est croissante en vertu de la positivité de M_n, un passage à la limite lorsque $a \to +\infty$ dans les deux membres achève la démonstration de cette propriété, puisque $\hat{M}_n$ était supposé régulière.

b) La régularité du processus produit $(X \hat{M})_n$ implique notamment que :

$$X_0 \underset{q.p.s}{=} E^{B_0}[X_\infty \hat{M}_\infty]$$

d'où $E_q[X_0] = E_q[(\Sigma V_k) \hat{M}_\infty]$ (1)

Mais des transformations élémentaires analogues à celles utilisées dans la démonstration de la condition nécessaire, donneraient

$$E_q[(\Sigma V_k) \hat{M}_k] = E_q[(\Sigma V_k) \hat{M}_\infty] \quad (2)$$

La thèse s'ensuit dès lors de la confrontation des relations (1) et (2). ∎

Voici une autre justification de cette propriété, qui a le mérite de ne pas faire appel à la régularité du processus stochastique produit $(XM)_n$ et qui de ce fait conduit plus rapidement au résultat annoncé.

En vertu de la proposition X - 6 et d'une application (permise puisque X_n, $\forall n$ est positive) du lemme de Fatou, il vient successivement :

$$E_q[X_0] \leq \underline{\lim}\, E_q[X_n \hat{M}_n]$$

$$\leq E_q[\underline{\lim}\, X_n \hat{M}_n]$$

$$\leq E_q [\lim X_n \hat{M}_n]$$

$$\leq E_q [(\sum_{k=0}^{\infty} V_k) \hat{M}_\infty]$$

$$\leq E_q [\sum_{k \in \mathbb{N}} V_k \hat{M}_k] . \blacksquare$$

Remarques:

a) On trouvera une étude approfondie et détaillée de l'équi-intégrabilité au § II-5 de « Bases mathématiques du calcul des probabilités » de J. Neveu.

b) Notons, que dans le cas particulier, extrêmement fréquent où le processus extrêmement fréquent où le processus est à horizon fini (c'est-à-dire que $\exists N \mid \forall k > N \quad V_k = 0$) la première partie de la proposition X-8 met à jour un procédé de récurrence fini permettant de construire sans peine la solution optimale ${}^*M$.

On substitue en réalité $N-1$ problèmes d'optimisation partiels portant sur une seule variable aléatoire ; au problème global qui lui nécessitait la détermination d'un vecteur aléatoire à $N-1$ dimensions.

Formellement, les équations de récurrence de la programmation dynamique s'écrivent :

$$E_q [X_{N-1}] = E_q [\sum_0^{N-1} V_k] + \mathrm{Max}\, E_q [V_N M] \qquad M \in V$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E_q [X_n] = E_q [\sum_0^{n} V_k] + \mathrm{Max}\, E_q [\sum_{n+1}^{N-1} V_k \, E^{\mathcal{B}_k}(M) + V_N M]$$

où V représente l'ensemble des v.a. ≥ 0, sommable ; $E[\cdot] = 1$, et $\mathcal{G}_n$-mesurable.

c) On pourrait à présent s'interroger pour savoir ce qui se passe lorsqu'on fait abstraction de toute hypothèse de régularité dans la proposition X-8. Le théorème ci-après, apporte un élément de réponse, puisque dans ce contexte plus général, il nous fournit des solutions ε-optimales.

Proposition X - 9.

Pour toute martingale $\hat{M}$ admissible satisfaisant $\forall n$ à la condition $X_n \hat{M}_n \underset{q.p.s.}{=} E^{\underline{\underline{B}}_n}(X_{n+1} \hat{M}_{n+1})$, la nouvelle martingale $(\hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon})_{k \in \mathbb{N}}$ obtenue en arrêtant $\hat{M}$ à l'instant aléatoire fini σ_ε défini explicitement ci-dessous, constitue une solution ε-optimale.

Démonstration.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_0^+ \qquad \sigma_\varepsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\omega \longmapsto \inf\{ n \mid X_n \leq E^{\underline{\underline{B}}_n}(\sum_{\mathbb{N}} V_k) + \varepsilon \}$$

Une décomposition de l'événement $\{\sigma_\varepsilon = l\}$, $l \in \mathbb{N}$, similaire à celle déjà exposée auparavant dans ce paragraphe X, permettrait de garantir le bien fondé de cette définition, c'est-à-dire que : $\forall l \; \{\sigma_\varepsilon = l\} \in \underline{\underline{B}}_l$.
De plus, de la convergence de la surmartingale positive X_n vers $\sum_{\mathbb{N}} V_k$ établie à l'aliéna X-6, résulte immédiatement que la borne inférieure intervenant dans la formulation de σ_ε est effectivement atteinte.
Cette définition posée, il s'agit à présent de démontrer, choix ayant été fait d'un ε dans $\mathbb{R}_0^+$, qu'on a :

$$E_q \Big[\sum_{k \in \mathbb{N}} V_k \hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon} \Big] \geq E_q[X_0] - \varepsilon.$$

a) La caractérisation g du paragraphe VII entraîne d'abord que la martingale $\hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon}$ est régulière.

Par suite, $E_q[\sum V_k \hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon}] = E_q[(\sum V_k) \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}]$ (10)

En se rappelant que le t.a. σ_ε est fini et que par conséquent la martingale $\hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon}$ converge q.p.s. vers $\hat{M}_{\sigma_\varepsilon}$

b) D'autre part, de par la définition du t.a. σ_ε, il s'ensuit que :

$$X_{\sigma_\varepsilon} \underset{q.p.s.}{\leq} E^{\underline{\underline{B}}_{\sigma_\varepsilon}}[\sum_{\mathbb{N}} V_k] + \varepsilon$$

ou encore, en multipliant les deux membres de l'inégalité par la v.a. positive $\hat{M}_{\sigma_\varepsilon}$:

$$X_{\sigma_\varepsilon} \hat{M}_{\sigma_\varepsilon} \underset{q.p.s.}{\leq} E^{\underline{\underline{B}}_{\sigma_\varepsilon}}[(\Sigma V_k) \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}] + \varepsilon \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}.$$

En appliquant ensuite l'opérateur espérance conditionnelle relatif à la sous-tribu $\underline{\underline{B}}_0$ aux deux membres on a :

$$E^{\underline{\underline{B}}_0}(X_{\sigma_\varepsilon} \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}) \underset{q.p.s.}{\leq} E^{\underline{\underline{B}}_0}[(\sum_{\mathbb{N}} V_k) \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}] + \varepsilon E^{\underline{\underline{B}}_0}(\hat{M}_{\sigma_\varepsilon})$$

Mais, comme la martingale $\hat{M}_{k \wedge \sigma_\varepsilon}$ est régulière, on peut à nouveau faire usage de l'assertion établie au cours de la proposition X-8, et en déduire que le processus produit arrêté $(X\hat{M})_{k \wedge \sigma_\varepsilon}$ (qui n'est signalons le, rien d'autre que le produit des suites composantes $X_{k \wedge \sigma_\varepsilon} \cdot M_{k \wedge \sigma_\varepsilon}$) est une martingale régulière.

Si bien que : $X_0 \underset{q.p.s.}{\leq} E^{\underline{\underline{B}}_0}[X_{\sigma_\varepsilon} \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}]$

D'où, finalement $X_0 \underset{q.p.s.}{\leq} E^{\underline{\underline{B}}_0}[(\Sigma V_k) \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}] + \varepsilon E^{\underline{\underline{B}}_0}(\hat{M}_{\sigma_\varepsilon})$

Et, en passant à l'espérance, se souvenant que $E_q[\hat{M}_{\sigma_\varepsilon}] = 1$

$$E_q[X_0] - \varepsilon \leq E_q[(\Sigma V_k) \hat{M}_{\sigma_\varepsilon}] \qquad (11)$$

Enfin, une comparaison des relations (10) et (11) achève la démonstration. ■

La proposition suivante, résout le problème d'optimisation libre, dans le cas particulier où la suite $(\mathcal{G}_n)$ de sous-tribus coïncide avec $(\underline{\underline{B}}_n)$, qui est une suite moins fine.

Proposition X – 10

> Dans ces conditions, la martingale régulière $^*M$ définie ci-après est optimale.
>
> $$^*M_k = E^{\underline{\underline{B}}_k}(Y) \qquad \forall k$$
>
> $$\text{où } Y = \frac{1_{\{\Sigma V_k = \|\Sigma V_k\|_\infty^*\}}}{q\{\Sigma V_k = \|\Sigma V_k\|_\infty\}}$$
>
> On suppose évidemment aussi que l'événement $\{\Sigma V_k = \|\Sigma V_k\|_\infty\}$ est de probabilité q strictement positive.

Démonstration.

1) On observe d'abord facilement, que la martingale $^*M$ est positive, sommable, d'espérance unité et $\mathcal{G}_n$ adaptée et donc admissible.

2) Attachons nous à présent à établir son optimalité c'est-à-dire que $E_q[X_0] \leq E_q[\Sigma V_k {}^*M_k]$.

a) Pour ce faire, évaluons succintement l'espérance du second membre de l'assertion.

$$E_q[\Sigma V_k {}^*M_k] = E_q[\Sigma V_k E^{\underline{\underline{B}}_k}(Y)] = E_q[\Sigma E^{\underline{\underline{B}}_k}(V_k Y)]$$

$$= E_q[(\Sigma V_k) Y] = \frac{1}{q[\Sigma V_k = \|\Sigma V_k\|_\infty]} \int_{\{\Sigma V_k = \|\Sigma V_k\|_\infty\}} (\Sigma V_k)\, dq$$

$$= \|\Sigma V_k\|_\infty \quad (\mathrm{I})$$

---

* Rappelons qu'il faut entendre par $\|\Sigma V_k\|_\infty$ l'inf $\{M \in \mathbb{R}^+ \mid |\Sigma V_k| \underset{q.p.s}{\leq} M\}$

b) Par ailleurs, on sait que la suite X_n est uniformément bornée par $\| \Sigma V_k \|_\infty$

D'où $E_q [X_0] \leq \| \Sigma V_k \|_\infty$ (II)

Un rapprochement des relations (I) et (II) achève la démonstration. ■

Conclusions et perspectives d'avenir.

- L'analyse du problème envisagé, repose sur un certain nombre de résultats fondamentaux établis au cours de ce dernier paragraphe, et représentant en quelque sorte les principales étapes qui nous ont finalement amenés à mettre en évidence, sous l'hypothèse que le processus produit $(X\hat{M})_{M \in \mathcal{M}}$ est une martingale :
  . d'abord que cette dernière condition est nécessaire et suffisante pour garantir l'optimalité d'une martingale admissible, dans le cas particulier où on se restreind à un contexte de régularité.
  . ensuite, que d'une manière générale, elle permet de construire les solutions ε-optimales.
- Cependant, il est vraisemblable, et cela fera sans doute ultérieurement l'objet d'un travail de recherche, qu'en réalité la dite dite condition conduise, abstraction faite de toute hypothèse de régularité, à la solution optimale.

  Réciproquement, on peut aussi s'attendre à ce que cette condition sur le processus produit soit nécessairement satisfaite par toute solution optimale.
- Nul doute, qu'un argument semblable à celui de la technique des multiplicateurs de Lagrange, doit permettre d'étendre tous ces résultats au cas d'un problème d'optimisation avec contrainte.