

math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

Turanov teorem

[klika](#) [multipartitan graf](#) [Turánov graf](#) [Turánov teorem](#)

Sažetak Svrha ovoga članka je predstaviti jedan of fundamentalnih rezultata iz teorije grafova poznat pod nazivom Turánov teorem te prezentirati pet dokaza koristeći pritom alate iz različitih grana matematike. Prva tri dokaza se uglavnom oslanjaju na teoriju grafova i metode prebrojavanja, a preostala dva na matematičku analizu, algebru i vjerojatnost.

Ključne riječi multipartitan graf, klika, Turánov graf, Turánov teorem

Turán's theorem

Abstract The purpose of this article is to present one of the fundamental results in graph theory known as Turán's theorem and present five proofs by using tools from various branches of mathematics. First three rely almost exclusively on graph theory and counting methods, while the other two rely on mathematical analysis, algebra, and probability.

Keywords multipartite graph, clique, Turán graph, Turán's theorem

1 Uvod

grafova, ali i raznih drugih grana matematike. Tome je pridonijela i plodna suradnja s velikim matematičarom Paulom Erdősom: trajala je 46 godina i rezultirala s 28 zajedničkih znanstvenih radova! Pál Turán je rođen 18. kolovoza 1910. u Budimpešti. Učiteljsku diplomu iz matematike i znanosti dobio je na Sveučilištu u Budimpešti 1933., a doktorirao je pod vodstvom Leopolda Fejéra 1935. godine na Eötvös Loránd Sveučilištu. Skoro trideset godina je radio zajedno s Fejérom, što je vidljivo iz brojnih zajedničkih radova iz matematičke analize, no najviše je bio privučen teoriji brojeva i u tom području je ostvario rezultat međunarodnog značaja. Brojni matematičari iz cijeloga svijeta dolazili su kod Turána pisati disertacije pod njegovim vodstvom. S prijateljima je volio raspravljati o matematici i matematičkim istraživanjima. Govorio je kako napredak u matematici dolazi kroz rješavanje otvorenih problema: ispočetka dokaz može biti vrlo kompliciran, no prije ili kasnije bit će pronađene lakše metode. Metoda i elegancija dokaza su sekundarni.

Ovaj rad je usredotočen na Turánov doprinos teoriji grafova, konkretno na iznimno važan teorem koji danas nosi njegovo ime: Turánov teorem. Radi se o jednom od fundamentalnih rezultata koji služi kao početna točka u istraživanju raznih drugih problema. Navest ćemo dokaze koji su otkriveni i ponovno otkriveni, od kojih se neki ne oslanjaju samo na teoriju grafova, nego i na druge grane matematike poput algebre i vjerojatnosti.

2 Osnovni pojmovi i definicije

Broj elemenata danog skupa A označit ćemo s $|A|$ i zvati ga *kardinalitetom* skupa A . Zatim ćemo s $\binom{n}{k}$ označiti broj svih k -članih podskupova skupa od n elemenata.

Definicija 1. *Jednostavan neusmjeren graf je uređen par $G = (V, E)$, gdje je $\emptyset \neq V = V(G)$ konačan skup vrhova, a $E = E(G)$ je konačan skup različitih dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo bridovi. Svaki brid $e \in E$ spaja neka dva vrha $u, v \in V$ koje zovemo krajevima od e .*

U ovome radu ćemo pod pojmom grafa podrazumijevati jednostavan neusmjereni graf. Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Za neka dva vrha kažemo da su *susjedni* ako su krajevi istog brida. U nastavku ćemo s ij ili ji označavati brid kojemu su i i j krajevi.

Za graf G kojemu su svaka dva vrha spojena bridom kažemo da je *potpun* i označavamo ga s K_n , gdje je n broj vrhova. Graf K_3 se još zove i trokut.

Za graf $G' = (V', E')$ kažemo da je podgraf grafa G ako vrijedi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$, pri čemu krajevi svih

File failed to load: /extensions/MathZoom.js i u skupu V' . K – *klika* u G je potpun podgraf od G s k vrhova i

označavamo ga s $K_{(k)}$.

Stupanj $d(v)$ vrha v u grafu G je broj bridova kojima je v jedan od krajeva. Prema definiciji grafa, stupanj vrha jednak je broju njegovih susjeda. *Izolirani vrh* je vrh stupnja nula. Graf G je $\{k\text{-regularan}\}$ ako su mu svi vrhovi stupnja k . Ukoliko nije potrebno istaknuti koliki je stupanj vrha u takvom grafu, koristit ćemo naziv *regularan graf*.

Neka je k prirodan broj i neka $k \geq 2$. Graf G je $\{k\text{-partitan}\}$ ako mu se skup vrhova V može particionirati u k podskupova tako da nijedan brid nema oba kraja u istom podskupu. Za $k = 2$ takve grafove još zovemo i *bipartitnim grafovima*. *Potpun k -partitan graf* je jednostavan k -partitan graf u kojemu je svaki par vrhova iz različitih skupova k -particije spojen bridom. Ako su V_1, \dots, V_k skupovi k -particije od V i $|V_i| = n_i, i = 1, \dots, k$, tada potpun k -partitan graf označavamo s K_{n_1, n_2, \dots, n_k} . Za graf kažemo da je *potpun multipartitan* ako je potpun k -partitan za neko $k \geq 2$.

Slijedi tvrdnja koja će nekoliko puta biti korištena u ovom članku.

Teorem 2. [(Cauchyjeva nejednakost)[6]] Za realne brojeve a_1, \dots, a_n i b_1, \dots, b_n vrijedi

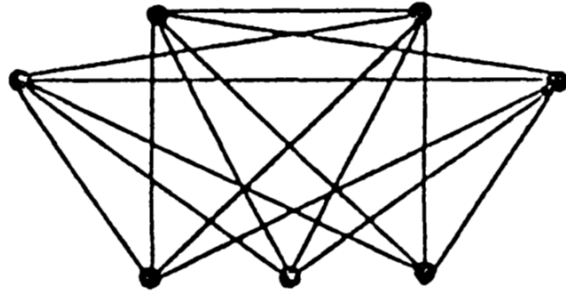
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (2.1)$$

Ako je $a_i \neq 0$ za barem jedan i , onda u (2.1) stoji znak jednakosti ako i samo ako postoji realan broj λ takav da je

$$b_k = \lambda a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

3 Turánov graf i njegova svojstva

Proučavajući grafove, Turán je tražio odgovor na sljedeće pitanje: koliko najviše bridova može imati graf s $n \geq 2$ vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$? Označimo traženi broj s $t(n, k)$. Vrijedi $t(n, 2) = 0$ i $t(n, k)$ je rastuća funkcija po k . Primjer grafa s n vrhova koji sadrži $t(n, k)$ bridova je potpun $(k - 1)$ -partitan graf $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$, $n = n_1 + \dots + n_{k-1}$, pa će formula za $t(n, k)$ biti glavni rezultat kojim ćemo se intenzivno baviti u ovome radu. Na slici 1 prikazan je $K_{2,2,3}$.



Slika 3.1: Slika 1. Potpun 3-partitan graf $K_{2,2,3}$ [1].

Graf $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ sadrži $\sum_{i < j} n_i n_j$ bridova. Članovi ove sume mogu se dobiti iz jednakosti

$$(n_1 + \dots + n_{k-1})^2 = \sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 + 2 \sum_{i < j} n_i n_j,$$

odnosno vrijedi

$$\sum_{i < j} n_i n_j = \frac{1}{2} \left(n^2 - \sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 \right). \quad (3.1)$$

Problem maksimizacije sume na lijevoj strani jednakosti (3.1) ekvivalentan je problemu minimizacije sume na desnoj strani iste jednakosti uz uvjet $\sum_{i=1}^{k-1} n_i = n$. Prema Cauchyjevoj nejednakosti primjenjenoj na brojeve n_1, \dots, n_{k-1} i $k - 1$ jedinica $1, \dots, 1$ dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot 1 \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} 1^2 \right),$$

iz čega proizlazi

$$\sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 \geq \frac{n^2}{k-1}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $n_i = \frac{n}{k-1}$, $i = 1, \dots, k-1$. Zaključujemo da graf $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ sadrži najveći mogući broj bridova ako i samo ako su mu svi skupovi particije jednakobrojni, odnosno $n_1 = n_2 = \dots = n_{k-1} = \frac{n}{k-1}$. No, Turánovo pitanje podrazumijeva proizvoljno zadane brojeve n i k pa je jednakobrojnost skupova particije moguća ako i samo ako je n djeljiv s $k-1$. U suprotnom je dovoljno zahtijevati da kardinaliteti skupova particije budu približno jednaki, odnosno $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$.

Vratimo se na slučaj kada $k-1$ dijeli n . Iz (3.1) tada dobivamo

$$\sum_{i < j} n_i n_j = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{k-2}{k-1} \quad (3.2)$$

pa je ovo najveći mogući broj bridova proizvoljnog jednostavnog grafa s n vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$.

Općenito, grafovi $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ za koje vrijedi $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$, zovu se *Turánovi grafovi* i označeni su s $T(n, k)$. Sada smo u mogućnosti iskazati Turánov teorem i navesti nekoliko različitih dokaza.

4 Turánov teorem

Teorem 3. [(*Turánov teorem, 1941.*)] Neka je $G = (V, E)$ graf s n vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$. Tada vrijedi

$$|E| \leq \frac{(k-2)n^2}{2(k-1)}. \quad (4.1)$$

Preciznija varijanta ovog teorema sadrži i tvrdnju da je graf $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ za koji vrijedi $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \dots, k-1, i \neq j$, jedinstven graf bez klike $K_{(k)}$ s najvećim brojem bridova $t(n, k)$. Otuda i naziv za takav graf: *Turánov graf*. Mi ćemo se usredotočiti na dokazivanje nejednakosti (4.1), ali ćemo u nekim dokazima pokazati da jednakost u (4.1) vrijedi ako i samo ako $G = T(n, k)$ za proizvoljan k .

Godine 1907. nizozemski matematičar Willem Mantel dokazao je tvrdnju da graf bez trokuta sadrži najviše $n^2/4$ bridova, a graf za koji se postiže gornja granica je $K_{n/2, n/2}$ za n paran, odnosno $K_{(n-1)/2, (n+1)/2}$ za n neparan [9]. Danas je ta tvrdnja u literaturi poznata kao *Mantelov teorem*. Time je dokaz Turánova

Mantelov teorem ovdje nećemo dokazati. Navedimo još neke pojmove i tvrdnje koje će nam trebati u nastavku članka. Ukoliko s d_i označimo stupanj vrha i u grafu s n vrhova, vrijedi

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2|E|. \quad (4.2)$$

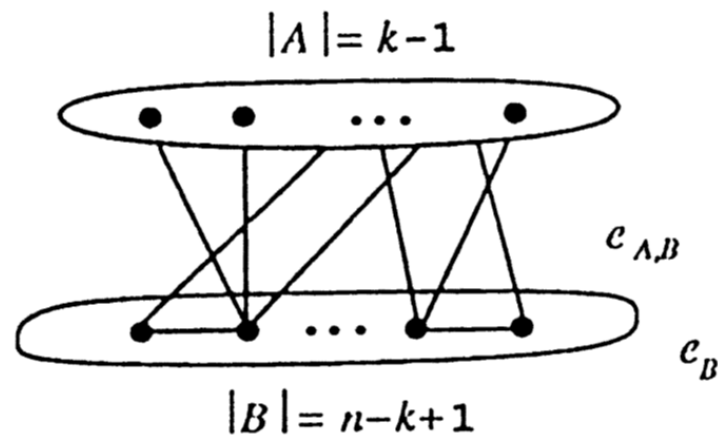
Skup $A \subseteq V$ vrhova u grafu zovemo *nezavisnim* ako ne sadrži susjedne vrhove. Primjerice, skup V_i particije skupa vrhova u grafu $K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$ je nezavisan za svaki $i = 1, \dots, k-1$. Broj $\alpha(G) = \max\{|U| : U \subseteq V, U \text{ nezavisan}\}$ naziva se *broj nezavisnosti* grafa G .

U nastavku ćemo navesti pet različitih dokaza Turánovog teorema za proizvoljan k .

4.1 Prvi dokaz: Turán 1941.

Koristimo jaku indukciju po broju n . Ona se od obične indukcije razlikuje jedino u pretpostavci, tj. ako smo u bazi jake indukcije dokazali da tvrdnja vrijedi za $k = 1$, onda pretpostavka jake indukcije glasi da tvrdnja vrijedi za sve $k < n$ pa u koraku jake indukcije treba dokazati da tvrdnja vrijedi za $k = n$.

Nejednakost (4.1) trivijalno vrijedi za sve prirodne brojeve manje od n . Neka je G graf sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$ koji ne sadrži k -klike, a ima najveći mogući broj bridova. Tada G sadrži $(k-1)$ -klike jer bismo u suprotnom mogli dodati bridove u G . Neka je A skup vrhova $(k-1)$ -klike i $B = V \setminus A$, $|B| = n - k + 1$ (slika 3).



Slika 4.2: Slika 3. [1]

Znamo da $(k-1)$ -klike sadrži $\binom{k-1}{2}$ bridova. Slijede gornje granice za broj bridova e_B koji spajaju vrhove u B i broj bridova $e_{A,B}$ između A i B . Prema pretpostavci indukcije znamo da vrijedi

$$e_B \leq \frac{(k-2)}{2(k-1)}(n-k+1)^2.$$

S obzirom da G ne sadrži k -klike, svaki $j \in B$ je susjed s najviše $k-2$ vrhova u A pa dobivamo $e_{A,B} \leq (k-2)(n-k+1)$. Slijedi

$$|E| \leq \binom{k-1}{2} + \frac{k-2}{2(k-1)}(n-k+1)^2 + (k-2)(n-k+1) = \frac{k-2}{2(k-1)}n^2.$$

4.2 Drugi dokaz: Erdős 1970.

Ovaj dokaz koristi strukturu Turánovih grafova. Neka je $m \in V$ vrh najvećeg stupnja u grafu G , odnosno $d_m = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$. Označimo sa S susjede od m , $|S| = d_m$ i stavimo $T = V/S$. Kako G ne sadrži k -klike i

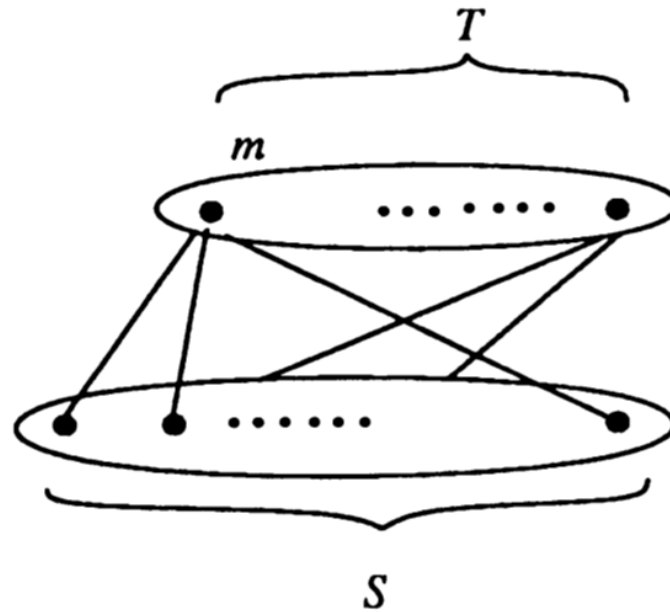
svi vrhovi iz S su susjedi vrhu m , to S ne sadrži $(k-1)$ -klike. Konstruirajmo graf H na skupu V (slika 4). Graf H odgovara grafu G na S i sadrži sve bridove između S i T (dakle, u H je svaki vrh iz S spojen bridom sa svakim vrhom iz T), ali ne i bridove među vrhovima iz T . Skup T je nezavisan u H te H ne sadrži k -klike. Neka je d'_j stupanj vrha j u H . Ako je $j \in S$, tada iz konstrukcije grafa H vrijedi $d'_j \geq d_j$.

Ako je $j \in T$, tada imamo $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$ prema izboru vrha m . Vidimo da je $|E(H)| \geq |E|$ i

zaključujemo da od svih grafova s najvećim brojem bridova, jedan mora biti oblika kakvog je H . Koristeći indukciju na skupu S , zaključujemo da se među grafovima s najvećim brojem bridova nalazi graf

$K_{n_1, \dots, n_{k-1}}$. Preciznije, graf H na S ima najviše bridova koliko i Turánov graf $K_{n_1, \dots, n_{k-2}}$ na S . Slijedi

$$|E| \leq K_{n_1, \dots, n_{k-1}}, \text{ pri čemu } n_{k-1} = |T|, \text{ odnosno } |E| \leq \sum_{i < j} n_i n_j, \text{ što implicira (4.1).}$$



Slika 4.3: Slika 4. [1]

Navedeni dokaz se odnosi na precizniju varijantu teorema 3, odnosno uključuje i dokaz da jednakost u (4.1) vrijedi ako i samo ako $G = T(n, k)$.

4.3 Treći dokaz: Moon-Moser 1962.

Ovaj dokaz generalizira ideju prvog dokaza za slučaj $k = 3$ i daje procjenu broja h -klika. Neka je G proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$ i označimo s \mathcal{C}_h skup h -klika u G , pri čemu $|\mathcal{C}_h| = C_h$. Primjerice, imamo $C_1 = n$, $C_2 = |E|$, a C_3 je broj trokuta u G . Za $A \in \mathcal{C}_h$ označimo s $d(A)$ broj $(h + 1)$ -klika koje sadrže A . Brojeći na dva načina, dobivamo

$$\sum_{A \in \mathcal{C}_h} d(A) = (h + 1)C_{h+1}, \quad h \geq 1 \tag{4.3}$$

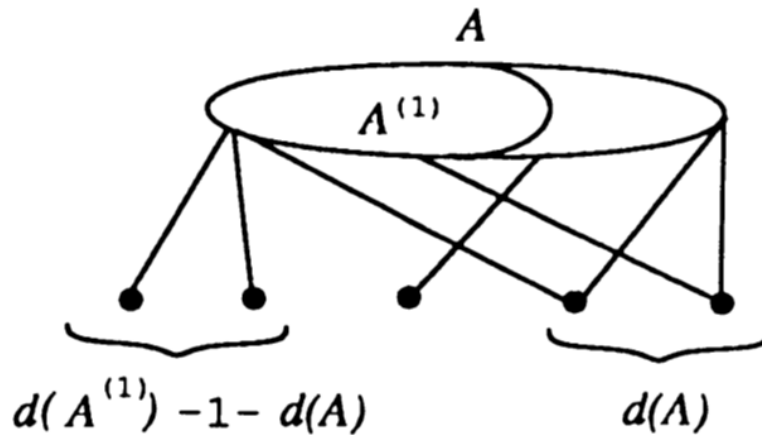
i ovo je poopćenje jednakosti (4.2). Neka je $h \geq 2$. Za $A \in \mathcal{C}_h$ označimo s $A^{(1)}, \dots, A^{(h)}$ $(h - 1)$ -klike sadržane u A (takvih klika je ukupno h jer je broj $(h - 1)$ -klika u h -klici jednak broju načina da od ukupno h vrhova odaberemo njih $h - 1$).

Tvrdnja 4. Vrijedi

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{1}{h^2 - 1} \left(h^2 \frac{C_h}{C_{h-1}} - n \right), \quad h \geq 2. \quad (4.4)$$

Uzmimo $A \in \mathcal{C}_h$, $B = V \setminus A$, $|B| = n - h$. Među vrhovima skupa B postoji točno $d(A)$ vrhova koji su susjedni svim vrhovima u A . Svaki od preostalih vrhova u B je susjed najviše jednoj $(h - 1)$ -klici $A^{(i)}$, tvoreći h -kliku (slika 5). Dobivamo (primijetimo da se pojavljuje -1 zbog $A^{(i)} \subseteq A$)

$$\sum_{i=1}^h (d(A^{(i)}) - 1 - d(A)) + d(A) \leq n - h,$$



Slika 4.4: Slika 5. [1]

odnosno

$$\sum_{i=1}^h d(A^{(i)}) - (h - 1)d(A) \leq n.$$

Sumiranjem po svim $A \in \mathcal{C}_h$ dobivamo

$$\sum_{A \in \mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^h d(A^{(i)}) - (h - 1) \sum_{A \in \mathcal{C}_h} d(A) \leq n C_h. \quad (4.5)$$

$$\sum_{ij \in E(G)} (d(i) + d(j)) = \sum_{i=1}^n d(i)^2 \leq n|E(G)|,$$

zaključujemo

$$\sum_{A \in \mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^h d(A^{(i)}) = \sum_{B \in \mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2, \quad (4.6)$$

te prema (4.3) imamo

$$(h-1) \sum_{A \in \mathcal{C}_h} d(A) = (h^2 - 1)C_{h+1}. \quad (4.7)$$

Uvrštavanjem (4.6) i (4.7) u (4.5) dobivamo

$$\sum_{B \in \mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2 \leq nC_h + (h^2 - 1)C_{h+1}. \quad (4.8)$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti (2.1) na sve brojeve $d(B)$ iz skupa \mathcal{C}_{h-1} te na C_{h-1} jedinica, dobivamo

$$nC_h + (h^2 - 1)C_{h+1} \geq \sum_{B \in \mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2 \geq \frac{1}{C_{h-1}} \left(\sum_{B \in \mathcal{C}_{h-1}} d(B) \right)^2 = \frac{h^2 C_h^2}{C_{h-1}},$$

što je ekvivalentno (4.4).

Da bismo dokazali (4.1), moramo naći vezu između nejednakosti (4.4) i broja bridova $|E|$. Stavimo

$$|E| = \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \frac{n^2}{2}, \quad \vartheta \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

S obzirom da desna strana od (4.9) raste po ϑ , moramo dokazati da vrijedi $\vartheta \leq k - 1$ za grafove bez k -klika (jer se desna strana nejednakosti (4.1) može zapisati ovako: $\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$).

Tvrđnja 5. Neka je $h \geq 1$. Vrijedi

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{\vartheta - h}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h+1}. \quad (4.10)$$

Za $h = 1$ imamo $C_1 = n$ i $C_2 = |E|$ pa vrijedi (4.10) pri čemu jednakost vrijedi iz definicije ϑ . Koristeći (4.4) i indukciju po h , zaključujemo

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{1}{h^2 - 1} \left(h^2 \cdot \frac{\vartheta - h + 1}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h} - n \right) = \frac{1}{h^2 - 1} \cdot \frac{(\vartheta - h)(h - 1)n}{\vartheta} = \frac{\vartheta - h}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h + 1},$$

što je i trebalo dokazati. Ako G ne sadrži k -klike, onda vrijedi $C_k = 0$ i zaključujemo $\vartheta \leq k - 1$ iz (4.10) za $h + 1 = k$.

Primjer 6. Promotrimo nejednakost (4.4) za $h = 2$. U ovom slučaju za proizvoljan graf s n vrhova vrijedi

$$C_3 \geq \frac{|E|}{3} \cdot \left(\frac{4|E|}{n} - n \right) = \frac{|E|}{3n} (4|E| - n^2).$$

Zaključujemo da graf G s parnim brojem vrhova i brojem bridova $|E| = n^2/4 + 1$ ne sadrži samo jedan trokut (kako vrijedi prema Turánovom teoremu), nego više od $n/3$ trokuta. Ako dodamo jedan brid u $K_{n/2, n/2}$, dobivamo $n/2$ trokuta i onda se lako pokaže da ovo vrijedi za proizvoljan graf s $n^2/4 + 1$ bridova.

Do sada su se dokazi Turánova teorema oslanjali na razne metode prebrojavanja. Sljedeća dva dokaza koriste potpuno drugačije tehnike.

4.4 Četvrti dokaz: Motzkin-Straus 1965.

Neka je G proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$. S $\omega = \omega(G)$ označimo broj vrhova u najvećoj kliku od G . Nadalje, svakom vrhu $i \in V$ pridružimo realnu varijablu x_i i promatramo funkciju $f(x_1, \dots, x_n) = 2 \sum_{ij \in E} x_i x_j$.

Tvrđnja 7. Vrijedi

$$1 - \frac{1}{\omega} = \max \left\{ 2 \sum_{ij \in E} x_i x_j : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (4.11)$$

S obzirom da je f neprekidna funkcija na kompaktnom skupu

$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ (K je tetraedar u \mathbb{R}^n omeđen

hiperravninom $x_1 + \dots + x_n = 1$ i koordinatnim osima $x_i, i = 1, \dots, n$, to postoji vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ u kome f ima najveću vrijednost (vidi [15]). Među takvim vektorima x odaberemo onoga koji ima najviše nul komponenti. (Primijetimo da ako f postiže najveću vrijednost na rubu od K , tada je barem jedna komponenta x_i jednaka nuli.) Neka je $C = \{i \in V : x_i > 0\}$. Pokažimo najprije da je C skup vrhova klike. Pretpostavimo suprotno, tj. bez smanjenja općenitosti, uzmimo $1, 2 \in C$, ali $12 \notin E$. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi $-x_1 \leq t \leq x_2$ vektor $x_t = (x_1 + t, x_2 - t, x_3, \dots, x_n)$ zadovoljava uvjete u (4.11) i dodatno je $f(x_t)$ linearna funkcija u varijabli t jer se produkt $(x_1 + t)(x_2 - t)$ ne pojavljuje u $f(x_t)$ zbog $12 \notin E$. Zbog odabira x , $f(x_t)$ postiže maksimum u $t = 0$. Slijedi da je $f(x_t)$ konstanta za svaki t . Za $t = x_2$, $\bar{x} = (x_1 + x_2, 0, x_3, \dots, x_n)$ dobivamo $f(\bar{x}) = f(x)$, što je u kontradikciji s izborom vektora x . Možemo pretpostaviti da $f(x)$ ima najveću vrijednost za vektor x za koji je $C = \{i \in V : x_i > 0\}$ skup vrhova klike. Budući da je

$$1 = (x_1 + \dots + x_n)^2 = 2 \sum_{i,j \in C, i < j} x_i x_j + \sum_{i \in C} x_i^2,$$

zaključujemo da je $f(x)$ najveći ako i samo ako je $\sum_{i \in C} x_i^2$ najmanji, a to je uz pretpostavku $\sum_{i \in C} x_i = 1$

onda kada je $x_i = 1/|C|$ te dobivamo

$$f(x) = 1 - \sum_{i \in C} x_i^2 = 1 - \frac{1}{|C|} \leq 1 - \frac{1}{\omega},$$

pri čemu vrijedi jednakost za $|C| = \omega$, što smo i htjeli dokazati. Nejednakost (4.1) odmah slijedi.

Postavljanjem $x_i = 1/n$ imamo $f(x) = 2|E|/n^2$ i zbog toga dobivamo

$$\frac{2|E|}{n^2} = f(x) \leq 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}$$

jer G ne sadrži $K_{(k)}$.

4.5 Peti dokaz: Alon-Spencer 1992.

Zadnji dokaz koristi alate iz područja teorije vjerojatnosti. Neka je G proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$.

Tvrdnja 8. *Vrijedi*

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_i}. \quad (4.12)$$

S jednakom vjerojatnošću $1/n!$ biramo permutaciju (π_1, \dots, π_n) skupa V i konstruiramo skup C na sljedeći način: stavimo π_i u C ako i samo ako je π_i susjedan svim π_j , $j < i$. Prema definiciji C je klika u

G . Neka je $X = |C|$ odgovarajuća slučajna varijabla. Imamo $X = \sum_{i=1}^n X_i$, gdje je $X_i = 1$ ako $i \in C$, a

$X_i = 0$ ako $i \notin C$. Sada zaključujemo da je $i \in C$ s obzirom na permutaciju (π_1, \dots, π_n) ako i samo ako se i pojavljuje prije svih $n - 1 - d_i$ ne-susjeda od i , odnosno ako je i prvi među i i njegovim ne-susjedima. Zaključujemo da je očekivanje slučajne varijable X_i dano s $EX_i = 1/n - d_i$ i nadalje vrijedi

$$E(|C|) = EX = \sum_{i=1}^n EX_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n - d_i},$$

zbog linearnosti očekivanja. Posljedično, mora postojati klika C s najmanje $E(|C|)$ vrhova, što je tvrdnja (4.12). Da bismo iz (4.12) došli do tvrdnje Turánovog teorema, koristimo Cauchyjevu nejednakost oblika

$$n^2 = \left(\sum \sqrt{x_i} \sqrt{x_i^{-1}} \right)^2 \leq \sum x_i \cdot \sum x_i^{-1},$$

pri čemu $x_i = n - d_i$. Uistinu, (4.12) i (4.2) impliciraju

$$\omega(G) \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (n - d_i)} = \frac{n^2}{n^2 - 2|E|}. \quad (4.13)$$

Ako G ne sadrži $K_{(k)}$, onda $\omega(G) \leq k - 1$ i (4.13) se svodi na (4.1).

Napomena 9. *Nejednakost (4.12) je prvi puta dokazana u [16] uzastopnim uklanjanjem vrhova, slično kao u drugom dokazu.*

Bibliografija

- [1] M. Aigner, *Turán's Graph Theorem*, Am. Math. Mon., 102 (1995), 808–816.
- [2] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.
- [3] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, Academic Press, New York, 1978.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [5] P. Erdős, *On the graph theorem of Turán (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok 21 (1970), 249–251.
- [6] N. Krička, *Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, 2012.
- [7] SY. R. Li, W.-C. W. Li, *Independence numbers of graphs and generators of ideals*, Combinatorica 1 (1981), 55–61.
- [8] L. Lovász, *Stable sets and polynomials*, Discrete Math. 124 (1994), 137–153.
- [9] W. Mantel, *Problem 28*, Wiskundige Opgaven 10 (1906), 60-61.
- [10] J. W. Moon, L. Moser, *On a problem of Turán*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 7 (1962), 283–286.
- [11] T. S. Motzkin, E. G. Straus, *Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán*, Canad. J. Math. 17 (1965), 533–540.
- [12] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Element, Zagreb, 1996.
- [13] M. Simonovitz, *On Paul Turán's influence on graph theory*, J. Graph Theory, 1(2006), 102–116.
- [14] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok 48 (1941), 436–452.
- [15] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2002.
- [16] V. K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Bell Lab. Tech. Mem. 81-11217-9, (1981).



File failed to load: /extensions/MathZoom.js