

Para Além do Binário: Lógica Fuzzy na Modelação de Problemas Complexos

Cecilia Castro

CMAT Universidade do Minho

18 de Outubro de 2023

- Motivação - um problema real: Lúpus Eritematoso Sistémico (LES)
- Observações nítidas versus observações difusas
- Fundamentos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy
- Regressão Logística em Contextos Fuzzy
- Método dos mínimos quadrados para dados difusos
- Qualidade de Ajustamento
- Modelo fuzzy para diagnóstico do LES
- Conclusão
- Limitações

Um exemplo clínico real

Lúpus Eritematoso Sistémico

O lúpus é uma doença autoimune crónica em que o sistema imunológico, por razões desconhecidas, cria anticorpos que, em vez de protegerem o corpo contra bactérias e vírus, atacam tecidos normais. Tal resulta em sintomas como fadiga extrema, dores nas articulações, dores musculares, anemia, etc. O Lúpus Eritematoso Sistémico (LES) é um tipo de lúpus que afeta múltiplos sistemas no corpo, incluindo a pele, articulações, sangue, pulmões, rins, coração, cérebro e sistema nervoso. A doença geralmente desenvolve-se lentamente e evolui ao longo do tempo, podendo levar meses, ou até anos, para que os sintomas apareçam.

- Não existe um único teste de diagnóstico para LES.
- Utilização de uma lista de 11 critérios para ajudar no diagnóstico.

Criteria for the Classification of Systemic Lupus Erythematosus

1. Eritema malar (vermelhidão em “asa de borboleta” sobre as maçãs do rosto).
2. Lesões cutâneas discoides (lesões na pele em forma de disco).
3. Fotossensibilidade (sensibilidade anormal à luz solar).
4. Úlceras orais ou nasais (úlceras na boca ou no nariz).
5. Artrite não erosiva (inflamação das articulações sem destruição óssea).
6. Pleurite ou pericardite (inflamação da pleura ou do pericárdio).
7. Nefrite (inflamação nos rins) ou proteinúria (presença de proteína na urina).
8. Distúrbios neurológicos (por exemplo, convulsões ou psicose).
9. Anemia hemolítica ou leucopenia ou linfopenia ou trombocitopenia (redução de células sanguíneas).
10. Resultados positivos de testes de anticorpos antinucleares (ANA).
11. Teste de anticorpo antifosfolipídico positivo (anticorpos que podem afetar a coagulação do sangue).

A Complexidade do Diagnóstico do LES



Figure: Jovem com Lúpus Eritematoso Sistêmico (LES)

A incerteza está relacionada com a falta de clareza e especificidade nos critérios de diagnóstico e na severidade da doença. A incerteza não se deve a fatores aleatórios ou probabilísticos, mas sim à complexidade e à falta de uma fronteira nítida para determinar o diagnóstico e a gravidade da doença.

Incerteza devido à ambiguidade

- O uso de critérios que exigem que uma pessoa satisfaça pelo menos 4 dos 11 critérios para ser diagnosticada com a doença introduz uma certa ambiguidade, uma vez que pode haver casos limítrofes em que a pessoa não atenda a todos os critérios, mas ainda assim tenha a doença.
- Além disso, a questão sobre se uma pessoa com 3 sintomas é considerada saudável e se a severidade da doença é a mesma em pacientes com diferentes números de critérios introduz incerteza quanto à interpretação e à tomada de decisão médica.

Classificação Difusa

A fronteira entre doente e saudável, bem como as fronteiras entre os graus da doença, não devem ser consideradas nítidas (crisp, cristalinas) em casos como o diagnóstico do LES.

Observações Difusas (Fuzzy)

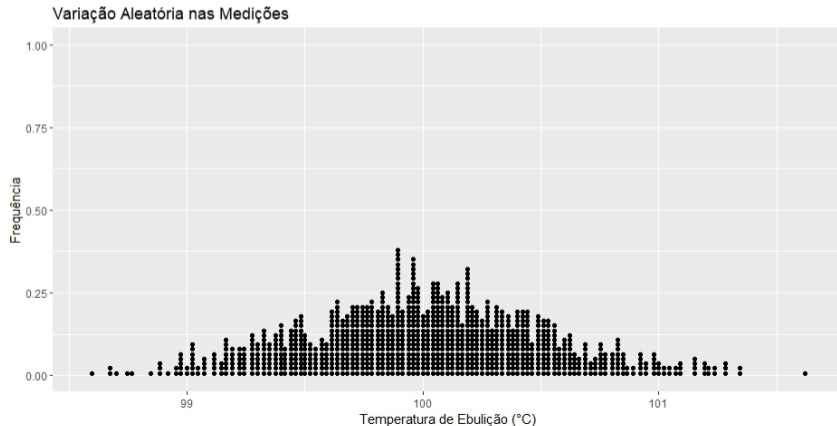
Existem dados resultantes da observação de variáveis em que a precisão ou clareza são questionáveis. Isso ocorre tanto em variáveis quantitativas quanto em variáveis qualitativas, com razões variadas que exigem uma compreensão aprofundada.

Variáveis Quantitativas

- As imprecisões (erros sistemáticos) podem ocorrer devido a limitações dos instrumentos de medição, como um termómetro mal calibrado.
- A imprecisão pode ser devida à variabilidade natural do fenómeno, frequentemente descrita por distribuições de probabilidade.

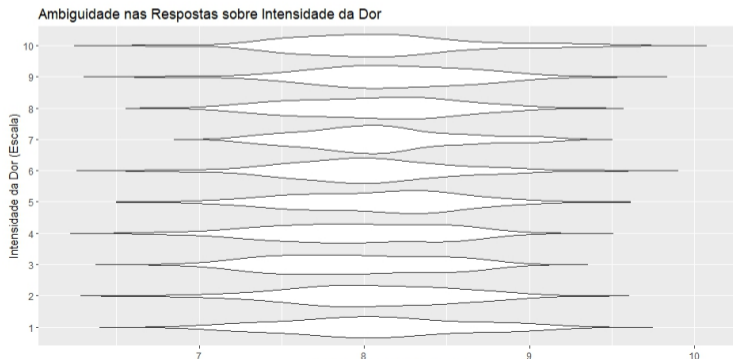
Aleatoriedade

A aleatoriedade refere-se à variabilidade inerente e imprevisibilidade presente em muitos fenômenos. As distribuições de probabilidade são utilizadas para modelar essa incerteza, pressupondo que as ocorrências são resultado de um processo estocástico.



Ambiguidade

A ambiguidade surge quando há imprecisão ou incerteza sobre a classificação ou caracterização de um estado. Ao contrário da aleatoriedade, a ambiguidade é menos sobre a "sorte do sorteio" e mais sobre a nebulosidade das fronteiras que definem os conceitos. O que significa realmente "8" na escala de dor? As respostas podem variar significativamente de pessoa para pessoa.



Desafio na Quantificação

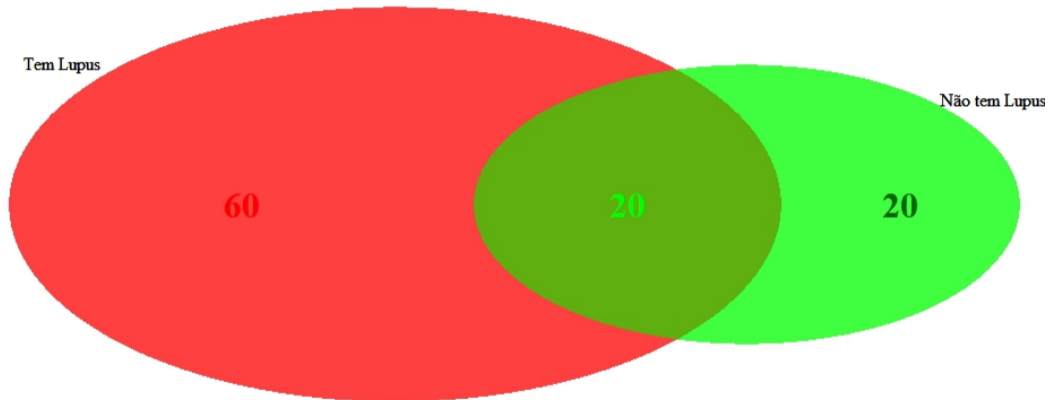
O real desafio não é apenas a incerteza estatística (aleatoriedade), mas a incerteza na própria definição e interpretação dos dados observados. Esta ambiguidade nas observações exige uma abordagem diferente, que possa abraçar a imprecisão e fornecer um meio significativo de interpretá-la.

Observações difusas

- O diagnóstico de lupus é complexo e pode envolver incerteza significativa.
- Ilustra a incerteza e ambiguidade em diagnósticos médicos.

Devido à complexidade e à variedade de sintomas, o diagnóstico de lupus pode ser ambíguo. Por exemplo, é possível para um paciente ter um grau de pertença de 80% à classe "Ter lupus" e, simultaneamente, um grau de pertença de 40% à classe "Não ter lupus".

Essa sobreposição de graus de pertença ilustra a incerteza e a ambiguidade inerentes ao diagnóstico, desafiando os modelos probabilísticos e a lógica clássica.



Limitações dos Métodos Tradicionais

Os Métodos estatísticos têm limitações ao lidar com observações difusas.

- **Suposição de Precisão na Medição:** Os métodos estatísticos esperam números claros e precisos. No entanto, na vida real, muitas coisas não são tão claras. Por exemplo, como medimos o quão "feliz" alguém está em uma escala de 1 a 10? A lógica fuzzy aceita essa incerteza e trabalha com ela, não contra ela.
- **Incapacidade de Capturar Incerteza Complexa:** Em situações onde são adequados múltiplos graus de pertença, os métodos tradicionais falham em capturar a complexidade da incerteza.
- **Análises Binárias Simplistas:** Em situações onde uma variável pode pertencer a múltiplas categorias até certo grau, os métodos estatísticos clássicos, que geralmente binarizam variáveis, mostram-se inadequados.

Fundamentos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy

Definição de um Conjunto Fuzzy u

Seja E um espaço de funções. Um conjunto fuzzy $u \in E$ é caracterizado por uma função de pertença $\mu_u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz os seguintes requisitos:

1. normalidade: $\mu_u(x_0) = 1$ para algum $x_0, -\infty < x_0 < +\infty$;
2. μ_u define um conjunto fuzzy convexo, ou seja,

$$\mu_u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_u(x), \mu_u(y)\}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1;$$

3. μ_u é superiormente semicontínua, ou seja,

$$\limsup_{x \rightarrow t} \mu_u(x) = \mu_u(t), \quad -\infty < t < +\infty;$$

4. $(\mu_u)_0 = \text{fecho}\{t | t \in \mathbb{R}, \mu_u(t) > 0\}$ é compacto.

1. Na definição anterior o domínio \mathbb{R} , é designado universo de discurso. Um universo de discurso descreve todos os elementos possíveis que são relevantes num determinado contexto. Na teoria dos conjuntos, o universo de discurso é o conjunto universal.
2. A função de pertença μ_u define o grau de pertença de cada elemento $x \in \mathbb{R}$ ao conjunto fuzzy u .

A soma dos graus de pertença de x em diferentes conjuntos fuzzy pode ser superior a 1, refletindo a possibilidade de ambiguidade e incerteza na classificação de x .

Na lógica fuzzy, um universo de discurso é o conjunto de valores em que os graus de pertença a um conjunto fuzzy são avaliados.

Normalidade - significado

Normalidade nos conjuntos fuzzy

Indica que existe pelo menos um elemento no universo de discurso para o qual o grau de pertença é igual a 1.

Se o conjunto for normal para todos os pontos, deixa de ser um conjunto fuzzy útil, transformando-se num conjunto "nítido". Portanto, é "para algum" e não "para todo" que o conjunto é normal neste contexto. A normalidade assegura que o conjunto fuzzy não é vazio, pois há pelo menos um ponto no qual a pertença é completa. Isso ajuda a distinguir conjuntos fuzzy de outros tipos de conjuntos que podem não ter essa característica.

Conjunto fuzzy convexo

Um conjunto é convexo se os graus de pertença aos pontos intermédios entre dois pontos quaisquer são pelo menos tão grandes quanto os graus de pertença mais baixos dos dois pontos. Isso garante uma certa "suavidade" no conjunto, evitando lacunas ou "buracos".

Função superiormente semicontínua

Para qualquer ponto de interesse, o valor da função nesse ponto é o limite superior de todos os pontos próximos. Em termos práticos, significa que não podemos ter "saltos" abruptos para valores mais altos quando nos aproximamos de um ponto, o que garante uma certa coerência ao conjunto. Essa característica ajuda a prevenir a imprevisibilidade e a arbitrariedade no comportamento do conjunto, o que seria problemático ao lidar com incertezas e ambiguidades.

Fecho

O fecho de um conjunto $(u)_0$ ser compacto garante que o conjunto está contido num espaço finito. Para conjuntos fuzzy, isto assegura que a "fuzziness" é limitada e não se estende indefinidamente.

Informalmente, um conjunto compacto é "pequeno" de certa forma. Mais tecnicamente, é um conjunto onde a partir de qualquer coleção de pontos que "cobre" o conjunto, conseguimos uma subcoleção finita que ainda cobre todo o conjunto.

Isso limita o quão "espalhado" o conjunto pode ser.

Desfuzificação

Na teoria de conjuntos clássica, os elementos pertencem ou não a um conjunto, sem espaço para ambiguidade. No entanto, a realidade muitas vezes desafia essa clareza binária, especialmente com conceitos vagos ou subjetivos. Por exemplo, como podemos categorizar precisamente se uma pessoa é "alta" ou uma fruta é "doce"?

Os conjuntos fuzzy abordam essa complexidade, permitindo graus variados de pertença, um reflexo da incerteza e ambiguidade inerentes ao mundo real. Contudo, surge um desafio: como tomar decisões claras com base em informações que não são precisas, nem pretas, nem brancas?

Os cortes α são a solução para 'desembaçar' esses conjuntos, transformando áreas cinzentas em respostas binárias. Estabelecem um "limite de clareza", acima do qual consideramos algo como verdadeiro e abaixo do qual, falso ou indefinido. Essa abordagem facilita a tomada de decisões onde a dualidade verdadeiro ou falso, sim ou não, se mostra insuficiente.

Cortes- α ou Conjuntos de nível- α

Dado $u \in E$ e $\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$, temos que:

$$(u)_\alpha = \begin{cases} \{t \mid u(t) \geq \alpha\}, & 0 < \alpha \leq 1, \\ \{t \mid u(t) > 0\}, & \alpha = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Os conjuntos de nível- α , para um α fixo, compreendem todos os pontos t com um grau de pertença de pelo menos α . Eles proporcionam uma “fotografia” dos diferentes níveis de incerteza dentro de um conjunto, ilustrando a estrutura do conjunto fuzzy de uma maneira mais tangível.

Esses cortes funcionam como delimitadores que segmentam um conjunto fuzzy em categorias mais definidas. O valor de α , situado entre 0 e 1, atua como um limiar discriminatório. Isso categoriza os elementos em dois grupos: aqueles com graus de pertença iguais ou superiores a α e os que estão abaixo desse critério.

O Papel dos Cortes α

- Os cortes α transformam informações fuzzy em conceitos nítidos, estabelecendo um limite de pertença que facilita a transição de dados incertos para decisões claras.
- Eles não eliminam a incerteza, mas oferecem uma estrutura para manipular informações fuzzy de maneira eficaz, permitindo a operação e análise dentro de um contexto convencional.
- Os cortes α facilitam a categorização em termos convencionais, essenciais para análise e tomada de decisão.
 - Por exemplo, ao analisar a altura em uma população com dados representados fuzzily, um corte α de 0.7 pode distinguir claramente indivíduos "altos". Aqueles com um grau de pertença acima de 0.7 seriam categorizados como "altos", proporcionando uma base concreta para comparação e análise.

Uma Ponte Entre o Vago e o Preciso

- Frequentemente, encontramos a necessidade de aplicar operações matemáticas a conceitos que são naturalmente imprecisos ou vagos. Como podemos realizar cálculos em termos como "ligeiramente frio" ou "bastante alto"?
- Para essa finalidade, recorreremos ao **Princípio da Extensão** de Zadeh, uma pedra angular na teoria dos conjuntos fuzzy. Este princípio orienta a aplicação de funções matemáticas em conjuntos fuzzy, permitindo manipulações consistentes e significativas.
- Por exemplo, se temos conjuntos fuzzy representando 'saúde' e 'exercício', podemos querer integrá-los para formular uma noção de 'bem-estar'. O Princípio da Extensão facilita-nos esse processo, estendendo operações matemáticas convencionais para acomodar a natureza incerta desses conceitos.

Princípio da Extensão: Funcionamento

Queremos quantificar como 'alimentação saudável' e 'exercício regular' afetam a 'longevidade', usando os conjuntos fuzzy correspondentes a cada um desses termos. Como fazer isso de forma matemática?

O Processo

1. Escolhemos uma função f , que neste caso poderia ser uma relação teórica baseada em estudos médicos, por exemplo, $f(\textit{saudável}, \textit{exercício}) = \textit{saudável} \times \textit{exercício}$. Ela representa a ideia de que a combinação de uma alimentação saudável e exercício regular aumenta a longevidade.
2. Avaliamos todas as combinações de valores de 'alimentação saudável' e 'exercício regular' dentro de seus respectivos conjuntos fuzzy e aplicamos a função f .

1. Para cada resultado, selecionamos o menor valor de pertinência de 'alimentação saudável' e 'exercício regular'. Isto é, se f produz um valor baseado num grau de pertinência de 0.7 para alimentação saudável e 0.5 para exercício regular, consideramos 0.5 como valor de referência para essa combinação.
2. O novo conjunto fuzzy para 'longevidade' é então criado, compilando todos esses valores mínimos de pertinência para cada combinação possível, formando um conjunto que representa matematicamente a incerteza e a variabilidade da 'longevidade' baseada em nossa função f .

Resultado

O que obtemos é um método matematicamente sólido para explorar e representar conceitos vagos de uma maneira que nos permite fazer previsões e tomar decisões informadas, apesar das incertezas inerentes a esses conceitos.

Princípio da Extensão: definição

Sejam m_1, m_2, \dots, m_n conjuntos fuzzy definidos nos universos de discurso X_1, X_2, \dots, X_n , respetivamente.

Defina-se $f : X \rightarrow Y$ como uma função que mapeia elementos de $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ para um universo de discurso Y .

O Princípio da Extensão permite definir um novo conjunto fuzzy l em Y , e correspondente função de pertença $l(y)$, da seguinte forma:

$$l(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min(m_1(x_1), m_2(x_2), \dots, m_n(x_n)) & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Integração de Cortes- α com o Princípio da Extensão

- Os cortes- α permitem uma compreensão mais refinada do comportamento de uma função em diferentes níveis de incerteza.
- Fazendo vários cortes- α dos conjuntos fuzzy de entrada, obtemos "fatias" que refletem o comportamento de f com base em diferentes graus de certeza.
- Aplicando f a essas "fatias" (conjuntos crisp) usando o Princípio da Extensão, pode observar-se como diferentes níveis de certeza influenciam os resultados.
- Esta análise combinada proporciona uma visão rica da influência da incerteza nas variáveis de entrada sobre a saída.
- O método não apenas respeita a natureza imprecisa dos dados, mas também realça a relação entre incerteza e decisão em sistemas complexos.

Modelação Fuzzy em Contextos de Decisão

Mudança de Paradigma

Quando abordamos a modelação em ambientes com dados vagos ou imprecisos, como contextos clínicos, mudamos do domínio da incerteza probabilística para a incerteza de vaga ou ambiguidade.

1. O modelo logístico clássico é fundamentado em probabilidades condicionais e assume que os dados têm distribuições de probabilidade subjacentes.
2. Os métodos de modelação fuzzy, por outro lado, utilizam graus de pertença em vez de probabilidades. Não se fazem suposições sobre erros probabilísticos ou distribuições de probabilidade, mas sim na incerteza associada à imprecisão dos dados.

Teoria subjacente ao Modelo de Regressão Logística Fuzzy

A relação entre uma variável de resposta binária e um conjunto de variáveis explicativas é capturada a partir de um conjunto de observações representado da seguinte forma:

$$(x_{i0}, x_{i1}, \dots, x_{in}, \tilde{Y}_i), \quad 1 \leq i \leq m,$$

Aqui, x_{ij} para $j = 0, 1, \dots, n$ são valores nítidos, e \tilde{Y}_i é uma observação fuzzy que reflete o estado de cada caso em relação às categorias de resposta binária.

Quantificação da incerteza

A probabilidade de sucesso $P(Y_i = 1) = \pi_i$ não pode ser calculada de forma precisa devido às fronteiras flexíveis das categorias da variável resposta.

Uma estratégia alternativa é considerar o grau de pertença ao sucesso em vez da probabilidade de sucesso.

O grau de pertença ao sucesso é dado por $\mu(Y_i \approx 1) = \mu_i$

Grau de pertinência de Sucesso

Para cada $i = 1, \dots, m$, pode definir-se o grau de pertinência de sucesso, $\mu_i = \text{pert}(Y_i \approx 1)$ de duas formas alternativas:

1. Como um valor real, $\mu_i \in \mathbb{R} : 0 \leq \mu_i \leq 1$,
2. Como termo linguístico, $\mu_i \in \{\dots, \text{baixo}, \text{médio}, \text{alto}, \dots\}$.

É fundamental que a combinação dos suportes desses termos linguísticos abranja todo o intervalo $[0, 1]$ para garantir que se possa capturar toda a gama de possíveis "níveis de sucesso", sem deixar lacunas. A razão

$$\frac{\mu_i}{1 - \mu_i}, \quad i = 1, \dots, m,$$

representa as **odds fuzzy** do i -ésimo caso, que quantificam o grau de pertinência de sucesso face ao grau de pertinência de insucesso.

Termos Linguísticos

- Os termos linguísticos são mapeados para números difusos usando funções de pertinência adequadas, para que possam ser incorporados nos modelos matemáticos. Estas funções são usualmente decididas por especialistas no domínio específico em questão.

$$\begin{aligned}
 \text{Muito Baixo}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{0.02-x}{0.01} & 0.01 \leq x \leq 0.02 \\ 1 - \frac{x-0.02}{0.18} & 0.02 < x \leq 0.18 \end{cases} \\
 \text{Baixo}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{0.25-x}{0.15} & 0.1 \leq x \leq 0.25 \\ 1 - \frac{x-0.25}{0.15} & 0.25 < x \leq 0.4 \end{cases} \\
 \text{Médio}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{0.5-x}{0.15} & 0.35 \leq x \leq 0.5 \\ 1 - \frac{x-0.5}{0.15} & 0.5 < x \leq 0.65 \end{cases} \\
 \text{Alto}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{0.75-x}{0.15} & 0.6 \leq x \leq 0.75 \\ 1 - \frac{x-0.75}{0.15} & 0.75 < x \leq 0.9 \end{cases} \\
 \text{Muito Alto}(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{0.98-x}{0.18} & 0.8 \leq x \leq 0.98 \\ 1 - \frac{x-0.98}{0.01} & 0.98 < x \leq 0.99 \end{cases}
 \end{aligned}$$

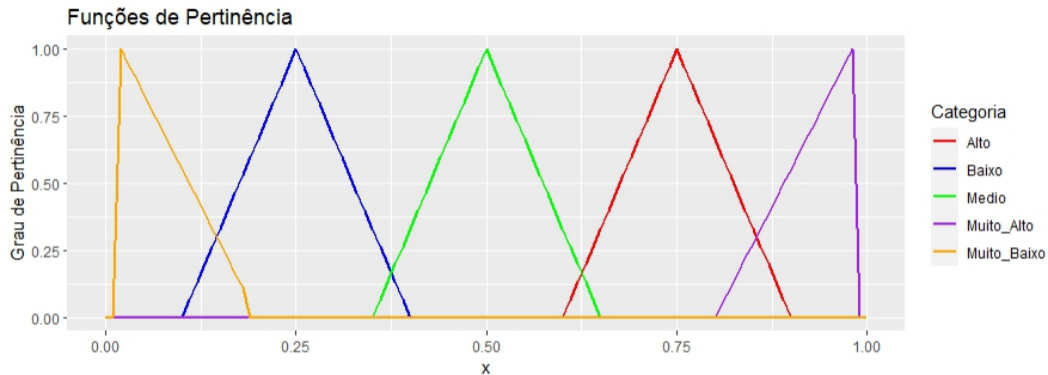


Figure: Exemplo de mapeamento: números difusos triangulares

Modelo Logístico Fuzzy Generalizado

O modelo proposto é formulado da seguinte forma:

$$\tilde{W}_i = \ln \left(\frac{\tilde{\mu}_{i,\text{sucesso}}}{\tilde{\mu}_{i,\text{insucesso}}} \right) = A_0 + A_1 x_{i1} + \dots + A_n x_{in}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

onde $A_0, A_1, \dots, A_n \in E$, os coeficientes do modelo, são conjuntos fuzzy. E é o espaço dos números fuzzy. Esses coeficientes podem ser interpretados como “graus de importância” das variáveis independentes na determinação da variável dependente.

Simplificação para Garantir Unicidade

Para garantir que exista uma única solução para cada valor de γ do modelo, opta-se por simplificar a relação entre os graus de pertença para “sucesso” e “insucesso”, adotando a seguinte relação complementar:

$$\tilde{\mu}_{i,\text{insucesso}} = 1 - \tilde{\mu}_{i,\text{sucesso}}.$$

Essa simplificação permite focar a modelação do grau de pertença ao “sucesso”, enquanto o grau de pertença ao “insucesso” é automaticamente determinado.

Pertença das Saídas Observadas

A função de pertinência das saídas observadas é determinada através da função de pertinência de $\tilde{\mu}_i$ e do princípio de extensão:

$$\tilde{w}_i(\gamma) = \sup_{\forall x: \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=\gamma} \tilde{\mu}_i(\mathbf{x}),$$

Dado que $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $0 < x < 1$ é bijetiva, existe um único $x \in (0, 1)$ que satisfaz $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = \gamma$.

Distância Difusa e Sua Aplicação

A técnica de mínimos quadrados difusos estende o método clássico de mínimos quadrados a cenários que envolvem números fuzzy. Essa extensão é feita através de uma métrica no espaço dos números fuzzy, denominada “distância difusa”.

Distância difusa

A distância difusa $d(u, v)$ entre quaisquer dois elementos $u, v \in E$ é calculada usando uma função de ponderação $f(\alpha)$:

$$d(u, v) = \left[\int_0^1 f(\alpha) d^2((u)_\alpha, (v)_\alpha) d\alpha \right]^{1/2}, \quad (3)$$

Esta métrica é utilizada para quantificar o quão bem o modelo fuzzy se ajusta aos dados observados, permitindo uma análise mais robusta em cenários incertos ou ambíguos.

Métrica de Distância Difusa

Cortes- α dos números difusos u e v

$$(u)_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] \text{ e } (v)_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$$

1. **Cortes- α $(u)_\alpha$ e $(v)_\alpha$:** Representam “fatias” do número difuso em diferentes níveis α . Estes cortes são intervalos de números reais, o que facilita o cálculo da distância usando técnicas matemáticas convencionais.
2. **Função de ponderação $f(\alpha)$:** Esta função dá peso aos diferentes cortes- α dos números difusos. O termo α varia entre 0 e 1 e ajuda a explorar os diferentes “níveis” do número difuso.
3. **Cálculo da distância $d^2((u)_\alpha, (v)_\alpha)$:** Para cada nível α , calculamos um valor que representa o “quadrado da distância” entre os cortes $(u)_\alpha$ e $(v)_\alpha$ usando operações em intervalos.
4. **Integração:** Finalmente, a integração é usada para agregar todas essas “distâncias quadradas” ponderadas numa única medida de distância $d(u, v)$.

Estimação dos Parâmetros do Modelo

Para ajustar um modelo ótimo minimiza-se a soma dos erros quadrados (SSE) entre os valores observados \tilde{w}_i e os valores estimados \tilde{W}_i para $i = 1, \dots, m$.

Para quantificar o erro, utilizamos a métrica de distância d como definida pela equação (3):

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^m d(\tilde{w}_i, \tilde{W}_i)^2 \quad (4)$$

Sem perda de generalidade, considera-se que $A_j = (a_j, s_j)^T$ para $j = 1, \dots, m$, em que a_j representa o valor central do coeficiente fuzzy A_j , e s_j representa o grau de fuzziness ou a largura da função de pertinência associada ao coeficiente.

$$(\tilde{W}_i)_\alpha = [(\alpha - 1)f_i(s) + f_i(a), (1 - \alpha)f_i(s) + f_i(a)]$$

Para calcular $(\tilde{w}_i)_\alpha$ com base em $(\mu_i)_\alpha = [b_1, b_2]$, tem-se:

$$d^2((\tilde{w}_i)_\alpha, (\tilde{W}_i)_\alpha) = \left[\ln \frac{b_1}{1 - b_1} - (\alpha - 1)f_i(s) - f_i(a) \right]^2 + \left[\ln \frac{b_2}{1 - b_2} - (1 - \alpha)f_i(s) - f_i(a) \right]^2 \quad (5)$$

Substituindo (5) em (4), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{SSE} = \sum_{i=1}^m \int_0^1 f(\alpha) & \left[\left(\ln \frac{b_1}{1 - b_1} - (\alpha - 1)f_i(s) - f_i(a) \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\ln \frac{b_2}{1 - b_2} - (1 - \alpha)f_i(s) - f_i(a) \right)^2 \right] d\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

Esta função depende dos coeficientes do modelo apenas por meio de $f_i(a)$ e $f_i(s)$.

O processo de minimização inclui definir as derivadas parciais de SSE em relação a a_j e s_j como zero.

$$\frac{\partial SSE}{\partial a_j} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial SSE}{\partial s_j} = 0$$

Tal leva às seguintes equações, para $j = 0, 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_0^1 2\alpha x_{ij} \left[2f_i(a) - \ln \frac{b_1}{1-b_1} - \ln \frac{b_2}{1-b_2} \right] d\alpha \right) = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\int_0^1 2\alpha(1-\alpha)x_{ij} \left[2(1-\alpha)f_i(s) + \ln \frac{b_1}{1-b_1} - \ln \frac{b_2}{1-b_2} \right] d\alpha \right) = 0, \quad (8)$$

As quantidades em (7) e (8) dependem da definição de possibilidade de sucesso (μ_i) atribuída em cada caso i pelo especialista.

Calculando os integrais envolvidos, obtém-se as seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^m x_{i0} x_{ij} + a_1 \sum_{i=1}^m x_{i1} x_{ij} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_{in} x_{ij} &= \sum_{i=1}^m z_i x_{ij}, \\ s_0 \sum_{i=1}^m x_{i0} x_{ij} + s_1 \sum_{i=1}^m x_{i1} x_{ij} + \dots + s_n \sum_{i=1}^m x_{in} x_{ij} &= \sum_{i=1}^m k_i x_{ij}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_{i0} = 1, i = 1, \dots, m.$$

Os valores z_i, k_i são os resultados da cálculo do integral para cada caso i .

Note-se que o sistema (9) pode ser representado na forma matricial:

$$Aa = Z, \quad As = K \quad (10)$$

em que $A = X'X$, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$, $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T$,

$$Z = \left(\sum_{i=1}^m z_i x_{i0}, \sum_{i=1}^m z_i x_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m z_i x_{in} \right)^T,$$

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_n)^T,$$

$$K = \left(\sum_{i=1}^m k_i x_{i0}, \sum_{i=1}^m k_i x_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^m k_i x_{in} \right)^T.$$

Se $\text{Rank}(X) = n + 1$, então a matriz A é positiva definida e A^{-1} é computável. (11)

Portanto, se $A^{-1}K \geq 0$, então o problema de minimização tem uma solução única, dada por

$$a = A^{-1}Z, s = A^{-1}K. \quad (12)$$

A condição $A^{-1}K \geq 0$ garante que a dispersão dos parâmetros difusos, isto é, s_i , $i = 1, \dots, m$ é não negativa. No entanto, é possível encontrar condições em que $A^{-1}K < 0$. Nesse caso, podem-se definir as dispersões negativas como zero e considerar os coeficientes correspondentes como nítidos (cristalinos).

Critérios de Qualidade de Ajustamento

Avaliação da qualidade do ajustamento entre os valores observados e os valores estimados.

Índice de Capacidade

O índice de capacidade entre $u \in E$ e $v \in E$ é definido por como

$$I_{UV} = \frac{\text{Card}(u \cap v)}{\text{Card}(u \cup v)},$$

onde $\text{Card}(u)$ é dado por

$$\begin{cases} \int u(t)dt & \text{caso contínuo} \\ \sum tu(t) & \text{caso discreto} \end{cases}$$

Utiliza-se o operador “min” para a interseção de dois conjuntos difusos e o operador “max” para a sua união.

Sejam $u, v \in E$. Então,

1. $0 \leq I_{UI}(u, v) \leq 1$ [Normalização: o índice pode ser usado como uma medida normalizada de alguma forma de "similaridade" ou "ajuste"]
2. $u = v \iff I_{UI}(u, v) = 1$ [Identidade: 1 indica uma correspondência perfeita]
3. $I_{UI}(u, v) = I_{UI}(v, u)$ [Simetria]
4. $u \subseteq v \subseteq w \Rightarrow I_{UI}(u, w) \leq \min\{I_{UI}(u, v), I_{UI}(v, w)\}$ [Monotonia]

A média do índice de capacidade é uma medida da qualidade de ajustamento do modelo:

$$MCI = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{UI}(\tilde{w}_i, \tilde{W}_i),$$

com $0 \leq MCI \leq 1$, de modo que um MCI maior corresponde a uma melhor qualidade de ajustamento.

Modelo Fuzzy para diagnóstico do LES

Neste estudo considera-se um conjunto de dados relativo à observação de várias variáveis (fatores de risco, preditores) observadas em 15 mulheres com idades entre 18 e 40 anos com suspeita de LES.

Para cada caso, um especialista atribui um grau de pertença de doença usando termos linguísticos como “Very low”, “Low”, “Medium”, “High” e “Very high”. Os preditores considerados são as variáveis binárias exposição ao sol (X_1) e histórico familiar (X_2) juntamente com os resultados quantitativos de alguns exames de sangue, como o teste anti-nuclear, ANA (*teste negativo* ≤ 25 U/ml), teste Anti-DNA (*normal* ≤ 25 U/ml) e ainda a taxa de sedimentação eritrocitária, ESR (*normal*: Masculino $\leq \frac{\text{Idade}}{2}$ e Feminino $\leq \frac{\text{Idade}+5}{2}$) classificada também de forma binária (Tabela 1).

Dados

Table: Observações binárias difusas na doença LES e os valores de fatores de risco relacionados.

ID	X_1 (yes/no)	X_2 (yes/no)	ANA test	Anti-DNA test	ESR test	pert $\tilde{\mu}_i$
1	1	1	112	105	1	High
2	1	0	80	23	0	Medium
3	1	0	115	15	0	High
4	1	0	105	107	1	High
5	0	0	89	150	1	Medium
6	1	1	160	10	1	Very high
7	1	0	100	23	0	Medium
8	0	0	100	85	1	High
9	1	0	48	83	0	Low
10	0	1	15	19	1	Very low
11	0	0	50	91	0	Low
12	1	0	59	200	1	Medium
13	1	0	83	20	1	Low
14	0	0	15	200	0	Low
15	0	1	85	15	1	Medium

Modelo

o modelo proposto para descrever o grau de pertença da doença, em termos das variáveis observadas é dado por:

$$\tilde{W}_i = \ln \left(\frac{\tilde{\mu}_i}{1 - \tilde{\mu}_i} \right) = A_0 + A_1 x_{i1} + A_2 x_{i2} + A_3 (\text{ANA})_{i3} + A_4 (\text{Anti-DNA})_{i4} + A_5 (\text{ESR})_{i5},$$

onde $i = 1, \dots, 15$, com parâmetros $A_j = (a_j, s_j)^T, j = 0, 1, \dots, 5$. Para os estimar considera-se o sistema de equações $Aa = Z, As = K$ com

$$A = X'X = \begin{pmatrix} 15 & 4 & 9 & 1216 & 1146 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 372 & 149 & 4 \\ 9 & 2 & 9 & 862 & 586 & 5 \\ 1216 & 372 & 862 & 119564 & 78864 & 808 \\ 1146 & 149 & 586 & 78864 & 149738 & 711 \\ 9 & 4 & 5 & 808 & 711 & 9 \end{pmatrix}_{6 \times 6}$$

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_5)^T, \quad Z = (-0.0258, 0.9532, 4.3698, 730.1350, -109.6486, 2.1182)^T$$

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_5)^T, \quad K = (13.2, 5.0, 7.5, 1044.6, 891.8, 8.7)^T$$

Como $\text{Rank}(X) = 6$, o sistema de equações acima tem uma solução única, dada por:

$$a = A^{-1}Z = (-3.8591, 0.4248, -0.1309, 0.0431, 0.0091, -0.6083)^T$$

$$s = A^{-1}K = (1.1617, 0.3832, 0.0366, -0.0043, -0.0019, 0.1451)^T$$

Modelo

$$\tilde{W} = \ln \left(\frac{\tilde{\mu}}{1 - \tilde{\mu}} \right) = (-3.8591, 1.1617)^T + (0.4248, 0.3832)^T x_1 + (-0.1309, 0.0366)^T x_2$$

$$+ 0.0431 \text{ Teste Anti ANA}_3 + 0.0091 \text{ Teste Anti DNA}_4 + (-0.6083, 0.1451)^T \text{ Teste ESR}_5$$

Previsão

Para um novo caso com informações como

$x_1 = 1, x_2 = 0$, Teste ANA = 110, Teste Anti-DNA = 87, ESR = 0, as odds possibilísticas estimadas de doença pelo nosso modelo proposto são:

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{\text{new}} &= (-3.8591, 1.1617)^T + (0.4248, 0.3832)^T \times 1 + (-0.1309, 0.0366)^T \times 0 \\ &\quad + 0.0431 \times 110 + 0.0091 \times 87 + (-0.6083, 0.1451)^T \times 0 \\ &= (1.4901, 1.5449)^T = (1.49, 1.54)^T \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left(\mu_{\text{new}} \frac{1 - \mu_{\text{new}}}{x} \right) = \exp(\tilde{W}_{\text{new}}(x)) = \begin{cases} \tilde{W}_{\text{new}}(\ln x), & x > 0 \\ 0, & \text{o.v.} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{1.49 - \ln x}{1.54}, & -0.05 \leq \ln x \leq 1.49 \Rightarrow 0.95 \leq x \leq 4.44 \\ 1 - \frac{\ln x - 1.49}{1.54}, & 1.49 \leq \ln x \leq 3.03 \Rightarrow 4.44 < x \leq 20.80 \end{cases}$$

$$\mu_{\text{new}}(x) = \tilde{W}_{\text{new}} \left(\ln \frac{x}{1-x} \right) \quad (15)$$

$$= \begin{cases} 1 - \frac{1.49 - \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1.54}, & 0.49 \leq x \leq 0.82 \\ 1 - \frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1.49}{1.54}, & 0.82 < x \leq 0.95 \end{cases} \quad (16)$$

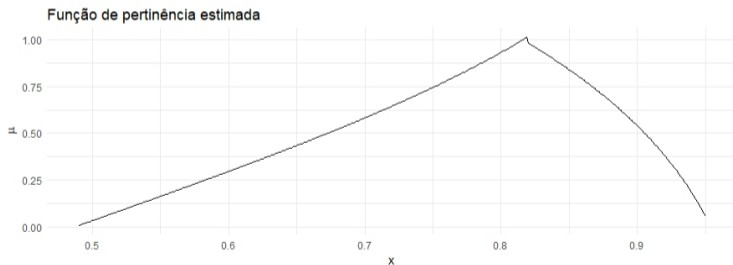


Figure: Previsão

Avaliação do modelo

O valor do índice de qualidade de ajustamento proposto é

$$\text{MCI} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{UI}(\tilde{w}_i, \tilde{W}_i) = \frac{1}{15}(7.860) = 0.52$$

revelando um ajustamento moderado aos dados.

Conclusões

- **Complementaridade e Flexibilidade da Lógica Fuzzy:** A lógica fuzzy complementa os métodos clássicos, proporcionando flexibilidade no tratamento de informações imprecisas e incertas. Tal permite modelações que refletem mais de perto a complexidade e a ambiguidade do mundo real, indo para além das limitações dos modelos binários ou lógicos estritos.
- **Diversidade de Aplicações Práticas:** Os conceitos da lógica fuzzy têm mostrado a sua versatilidade numa ampla gama de áreas, evidenciando a sua adaptabilidade e eficácia. Esta abrangência vai desde sistemas de controle complexos até a interpretação de comportamentos e decisões humanas não-determinísticas.
- **Desafios na Implementação:** A implementação da lógica fuzzy também apresenta desafios. Estes incluem a subjetividade na definição dos termos fuzzy, a complexidade na manipulação computacional e a importância de dados detalhados e abrangentes para a validação dos modelos.

Perspetivas Futuras

- **Sinergia e Inovação Futura:** A integração da lógica fuzzy com outras técnicas estatísticas e de aprendizagem automática abre caminho para a inovação, possibilitando o desenvolvimento de sistemas híbridos robustos que capitalizam os pontos fortes de cada metodologia.

A lógica fuzzy representa um avanço significativo na forma como abordamos a imprevisibilidade e a complexidade do mundo real. Ao enfrentar desafios e superar limitações, esta abordagem inovadora complementa a teoria das probabilidades, que tem sido o pilar tradicional da matemática na gestão da incerteza. Agora, estamos a caminho de um paradigma onde a matemática, além de lidar com a aleatoriedade, acolhe também a ambiguidade e os matizes de cinza inerentes à cognição humana e aos fenómenos complexos. Isso marca uma era de maior adaptabilidade e inovação contínua.

O futuro não é a preto e branco; é difuso!

Agradecimentos

Obrigada pela vossa atenção!

Perguntas?