

Estado de la publicación: No informado por el autor que envía

Gen-FW: Una generalización del problema de Fermat-Weber con aplicaciones al procesamiento de datos

Pablo Soto-Quiros, Geovanni Figueroa-Mata, Nelson Zamora-Villalobos

<https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.6725>

Enviado en: 2023-09-01

Postado en: 2023-09-11 (versión 1)

(AAAA-MM-DD)

La moderación de este preprint recibió lo endoso de:

Dagoberto Arias-Aguilar (ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3056-9172>)

Gen-FW: Una generalización del problema de Fermat-Weber con aplicaciones al procesamiento de datos

Autores:

Pablo Soto-Quiros

Escuela de Matematica

Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica

jusoto@tec.ac.cr

<https://orcid.org/0000-0003-2903-3116>

Geovanni Figueroa-Mata

Escuela de Matematica

Instituto tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica

gfigueroa@tec.ac.cr

<https://orcid.org/0000-0003-3788-3786>

Nelson Zamora-Villalobos

Escuela de Ingeniería Forestal

Instituto tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica

nzamora@tec.ac.cr

<https://orcid.org/0000-0002-4358-6123>

Resumen

El proyecto "*Gen-FW: Una generalización del problema de Fermat-Weber con aplicaciones al procesamiento de datos*" fue un proyecto vinculado a la Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE) del Instituto Tecnológico de Costa Rica durante los años 2020-2022. Este proyecto propone una generalización del conocido problema de Fermat-Weber, o simplemente problema FW, además de estudiar aspectos computacionales y aplicaciones en el procesamiento de imágenes. El problema FW calcular un vector que minimice la suma de distancias ponderadas respecto a otros vectores dados en un espacio vectorial, donde el vector a optimizar se representa mediante una transformación lineal. El problema FW ha sido objeto de un creciente interés debido a sus valiosas aplicaciones en diversas áreas de la ingeniería, por ejemplo, en el diseño de algoritmos de navegación y en el establecimiento de la conectividad de redes móviles con sensores inalámbricos, entre otras aplicaciones relevantes.

En este artículo, proporcionaremos un conciso, pero completo desarrollo de las contribuciones obtenidas durante el desarrollo de dicho proyecto. El proyecto Gen-FW ofrecen una nueva perspectiva en el ámbito del procesamiento de datos y representan un avance notable en la resolución de problemas complejos con aplicaciones prácticas en diversas áreas de la ingeniería.

Palabras Claves: Problema Fermat-Weber, Optimización, Procesamiento de Imágenes

Abstract

The project "Gen-FW: A Generalization of the Fermat-Weber Problem with Applications to Data Processing" was a project affiliated with the *Vicerrectoría de Investigación y Extensión (VIE)* of the *Instituto Tecnológico de Costa Rica* during the years 2020-2022. This project proposes a generalization of the well-known Fermat-Weber problem, or simply the FW problem, in addition to studying computational aspects and applications in image processing. The FW problem calculates a vector that minimizes the sum of weighted distances with respect to other given vectors in a vector space, where the vector to be optimized is represented by a linear transformation. The FW problem has garnered growing interest due to its valuable applications in various engineering fields, such as in navigation algorithm design and establishing connectivity in mobile networks with wireless sensors, among other relevant applications.

In this article, we will provide a concise yet comprehensive overview of the contributions obtained during the development of this project. The Gen-FW project offers a new perspective in the field of data processing and represents a significant advancement in solving complex problems with practical applications in various engineering areas.

Keywords: Fermat-Weber Problem, Optimization, Image Processing

1. Introducción

El problema de Fermat-Weber (o simplemente, problema FW) data del siglo XVII, cuando el matemático Pierre de Fermat propuso el problema de encontrar un vector que minimiza la suma de distancias ponderadas a otros vectores dados [1]. El problema FW se formula matemáticamente de la siguiente manera: Calcular el vector $x \in \mathbb{R}^n$, tal que minimice el siguiente problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^P \|A_i x - b_i\|_2$$

donde $\|\cdot\|_2$ es la norma euclidiana, $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ son matrices fijas y $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ son vectores de anclajes. En el problema FW, podemos interpretar la operación $A_i x$ como una transformación lineal de un vector en el espacio \mathbb{R}^n a otro vector en el espacio \mathbb{R}^{m_i} , es decir, las funciones f_i se define como $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}$ tal que $f_i(x) = A_i x$.

Aunque el problema FW y los algoritmos que le dan solución han sido estudiado ampliamente, existe una necesidad de proponer un modelo matemático que generalice al problema FW con el fin de mejorar la precisión en los resultados obtenidos, ya que en varias ocasiones la precisión numérica de la solución al problema FW no es satisfactoria.

En este proyecto "*Gen-FW: Una generalización del problema de Fermat-Weber con aplicaciones al procesamiento de datos*" (o simplemente proyecto Gen-FW), el cual estuvo vinculado a la VIE en los años 2020-2022, se propone desarrollar un nuevo modelo matemático que generalice el problema FW. Este nuevo enfoque amplía el modelo presentado en el problema FW en dos aspectos.

- Primero, se consideran transformaciones no lineales (es decir, $f_i(x) \neq A_i x$), a diferencia del problema FW que solo considera transformaciones lineales (es decir, $f_i(x) = A_i x$).
- En segundo lugar, se calcula la transformación óptima utilizada. Dicha transformación pertenece a un conjunto de transformaciones con una estructura predeterminada. Note que el problema FW no realiza dicho proceso de optimización.

Los aspectos mencionados anteriormente permitirán que el error numérico obtenido en el modelo propuesto sea menor que el error obtenido en el problema FW y, por lo tanto, mejore la estimación numérica producida en el problema FW. En cada caso, se desarrolla la prueba teórica que justifica la mejora en la estimación numérica. Además, se realizará la implementación computacional de cada modelo matemático utilizando un software de cálculo numérico (por ejemplo, Matlab).

Adicionalmente, en el proyecto Gen-FW proponemos una nueva aplicación del problema FW en el procesamiento de imágenes. Específicamente en la escogencia de una imagen representativa de un conjunto de imágenes. Se entenderá como imagen representativa de un conjunto se refiere a una única imagen seleccionada para capturar la esencia o características principales de un conjunto más grande de imágenes. En otras palabras, es una imagen que simboliza o resume visualmente el contenido o tema del conjunto en su conjunto.

En la siguiente sección, explicaremos las contribuciones obtenidas en el proyecto *Gen-FW*.

2. Contribuciones del Proyecto Gen-FW.

2.1 Desarrollo de un paquete computacional para el problema FW

Antes de empezar con la generalización del problema FW, se llevó a cabo un exhaustivo estudio de los aspectos computacionales relacionados con dicho problema, así como un análisis detallado de los algoritmos de solución más relevantes documentados en la literatura. Esta investigación incluye presentaciones de pseudocódigos, análisis de convergencia, implementaciones computacionales y simulaciones numéricas para todos los métodos identificados.

Cabe destacar que todas las implementaciones computacionales fueron desarrolladas en el entorno MATLAB, lo que permitió crear un paquete computacional completo y coherente llamado como *FW toolbox*. Este paquete, fundamental para la investigación, ha sido puesto a disposición del público y está disponible para investigadores y estudiantes en el siguiente repositorio de GitHub: https://github.com/jusotoTEC/fermat_weber.

Para brindar un enfoque más completo, en el artículo científico [2] se presenta una explicación detallada de la teoría subyacente al problema FW, donde se discute en profundidad el análisis de las implementaciones computacionales realizadas y se ofrece una guía exhaustiva sobre el uso y funcionamiento del paquete computacional *FW toolbox*.

Este trabajo representa un avance significativo en la comprensión y aplicación del problema FW, ofreciendo una base sólida para futuras investigaciones en el campo y permitiendo a la comunidad científica aprovechar eficazmente las herramientas desarrolladas en esta investigación. Con esta contribución, se espera fomentar el intercambio de conocimientos y facilitar la resolución de problemas prácticos en diversas áreas aplicadas.

2.2 Generalización del problema FW

El artículo científico [3], se desarrolló una generalización del problema FW. En este caso se considera el siguiente problema: Calcular el vector $x \in \mathbb{R}^n$ y las matrices $A_i \in \mathbb{R}_{r_i}^{m_i \times n}$, tal que minimice

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}_{r_i}^{m_i \times n}} \sum_{i=1}^p \|A_i x - b_i\|_2^2$$

donde $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ son vectores de anclajes y $\mathbb{R}_{r_i}^{m_i \times n}$ es el conjunto de matrices de tamaño $m_i \times n$ con rango matricial menor o igual a r_i . Este problema, conocido como minimización de una suma de normas euclidianas al cuadrado con restricción de rango (o simplemente MSEN-RC, de sus siglas en inglés), es diferente al problema FW, ya que considera los siguientes aspectos:

- En primer lugar, el problema MSEN-RC encuentra el vector óptimo x y las matrices A_i con restricciones de rango matricial, mientras que el problema FW encuentra solo el vector óptimo x . Esta modificación indica que se utilizara una función objetivo $f_i(A_i, x) = A_i x$, el cual no es una función lineal.
- En segundo lugar, el problema MSEN-RC considera un problema de mínimos cuadrados en lugar de un problema de mínimos absolutos como en el problema MSEN. Esta adaptación nos permite obtener una solución estable debido a que la función objetivo en el problema MSEN-RC es diferenciable, a diferencia de la función objetivo en el problema MSEN.

Además, en [3] se presenta un algoritmo basado en el método de mínimos cuadrados alternados regularizado (RALS) para resolver el problema MSEN-RC. Se demuestra matemáticamente que, debido a la existencia de puntos críticos del método de mínimos cuadrados alternados, los puntos límite de las secuencias convergentes del RALS son los puntos críticos de la función objetivo. Esta demostración es de gran importancia para entender la estabilidad y convergencia del algoritmo propuesto. La demostración completa de la convergencia del método RALS se encuentran en los Teoremas 10 y 11 en [3].

Finalmente, en el Teorema 1 en [3] se demostró que el problema MSEN-RC tiene un error igual a cero, independiente del valor de los vectores b_i . Sabiendo que el problema FW no siempre tiene un

error igual a cero, se concluye que el error asociado al problema MSSEN-RC es menor o igual al error del problema FW. Por lo tanto, podemos concluir que la precisión del problema MSSEN-RC es mejor que la del problema FW.

2.3 Aplicación del problema FW en la obtención de una imagen representativa de un conjunto de imágenes

En el artículo científico [4], consideramos el problema de seleccionar una imagen representativa de un conjunto de datos. Se entenderá como imagen representativa de un conjunto a una única imagen seleccionada para capturar la esencia o características principales de un conjunto más grande de imágenes.

Nuestro enfoque propuesto introduce un método novedoso que involucra el problema FW y la teoría de matrices, específicamente la descomposición en valores singulares, para obtener una imagen representativa.

El método para identificar la imagen representativa de un conjunto de imágenes, denotado por M , involucra los siguientes pasos:

- Paso 1 - Cálculo de una imagen representativa teórica: Utilizando el conjunto M y el problema FW, se calcula la imagen I_T . Esta imagen, referida como la "imagen representativa teórica", aproxima la mejor representación numérica de M basada en una en el problema. Es decir, si b_i es la representación vectorizada de una imagen $I_i \in M$, entonces se calcula \tilde{x} tal que

$$\tilde{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^P \|x - b_i\|_2^2$$

Finalmente, definimos $I_T = \text{vec}^{-1}(\tilde{x})$, donde vec^{-1} es el operador que transforma un vector en una matriz.

- Paso 2 - Selección de la imagen representativa práctica: En general, el comportamiento de I_T puede no corresponder necesariamente a una imagen distintiva y, por lo tanto, no puede considerarse como la imagen representativa final del conjunto M . Para abordar esto, empleamos una base ortogonal B que abarca el conjunto de imágenes vectorizadas en M , donde B se obtiene mediante el proceso de descomposición en valores singulares. Al minimizar la distancia entre las coordenadas de I_T en B y las de cada imagen en M , determinamos la imagen representativa práctica. En este artículo, definimos la imagen representativa práctica I_p como la imagen representativa del conjunto de datos M .

Una explicación matemática más detallada se presenta en el documento [4]. Para concluir esta sección, proporcionaremos una representación gráfica paso a paso de cómo determinar la imagen representativa, basada en los pasos explicados anteriormente. Esta representación visual será de gran ayuda para comprender mejor el proceso y los resultados obtenidos en nuestra investigación.

1. Considere un conjunto M de 12 imágenes de rostros, como se muestra en la imagen 1. Estas imágenes se tomaron de la base de datos de rostros FEI (Ver [5] para más detalles de la base de datos FEI).

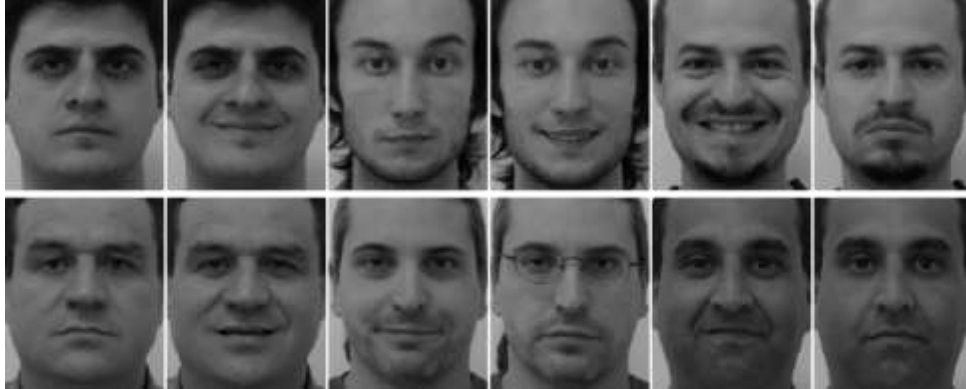


Imagen 1: Las 12 imágenes de la base de datos M .

2. Calcular la imagen representativa teórica I_T , utilizando las imágenes de la base de datos M como vectores de anclajes, y el problema FW. El resultado se presenta en la imagen 2.



Imagen 2: Imagen representativa teórica I_T de la base de datos M

3. Posteriormente, buscamos las distancias de las coordenadas de las imágenes de la base de datos M con las coordenadas de la Imagen representativa teórica I_T . Una representación gráfica de este proceso se muestra en la imagen 3.

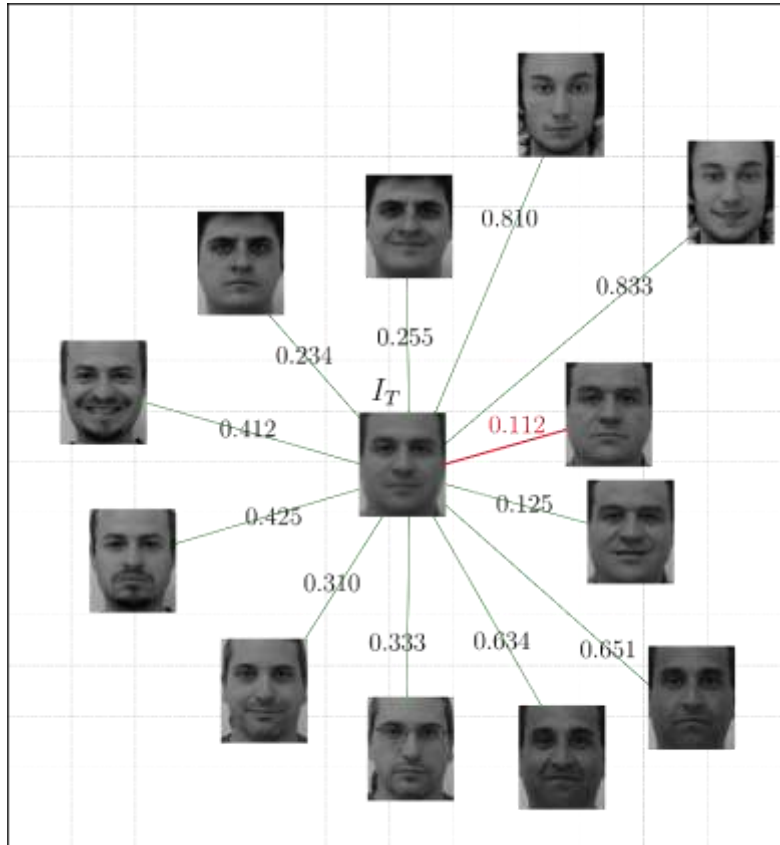


Imagen 3: Representación gráfica del cálculo de las distancias de las coordenadas de I_T con las coordenadas de cada una de las imágenes de la base de datos M .

4. Finalmente, la distancia más pequeña entre las coordenadas de I_T con las coordenadas de cada una de las imágenes de la base de datos M indicará cual es la imagen representativa del conjunto M . La imagen 3 indica con una línea roja cual es la menor distancia, y por ende, la imagen representativa I_P . En la imagen 4, presentamos la imagen representativa del conjunto M .



Imagen4: Imagen representativa I_P del conjunto M .

2.4 Otros contribuciones

Durante el desarrollo del proyecto, se obtuvieron otros resultados valiosos que, aunque no son directamente relacionadas al problema FW, están muy vinculados a dicho problema. A continuación, enumeramos dichas contribuciones:

- Se presentó un método para eliminar el ruido de imágenes a color y audio, utilizando datos de entrenamiento. Este trabajo se desarrolló utilizando el concepto de tensores de tercer orden, que es una generalización de las matrices, pero en tres dimensiones. Este trabajo se desarrolló en [6].
- Se propuso un método rápido para estimar la inversa de Moore-Penrose para matrices de rango numérico bien determinadas basadas en la regularización de Tikhonov. Este nuevo método permite realizar el cálculo de la inversa de Moore-Penrose más rápido que el algoritmo que tiene implementado MATLAB. Este trabajo se desarrolló en [7].
- En el trabajo desarrollado en [8], se hizo la recolección de una base de datos de imágenes de corteza del árbol *inga exalata*, que se encuentra en la Costa Pacífica de Costa Rica, específicamente en la estación experimental Horizontes en Guanacaste. Esta base de datos se utilizó en [4], como ejemplo para determinar la imagen representativa de la corteza del árbol *inga exalata*. En la imagen 5, se presenta una muestra de las imágenes de la base de datos de la corteza del árbol *inga exalata* obtenidas.

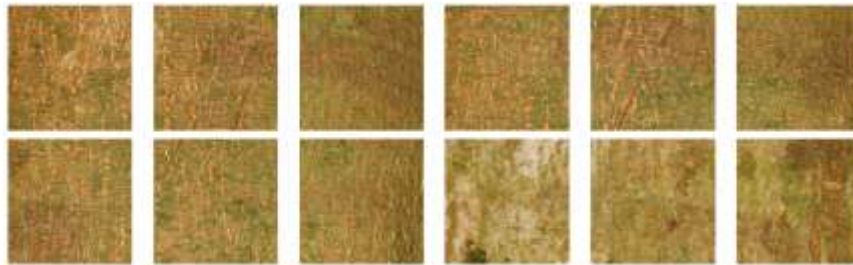


Imagen 5: Muestra de 12 imágenes de la base de datos de cortezas de madera *inga exalata*.

3. Conclusiones

El proyecto denominado "*Gen-FW: Una generalización del problema de Fermat-Weber con aplicaciones al procesamiento de datos*" fue un proyecto vinculado a la VIE que permitió estudiar a profundidad el conocido problema de Fermat-Weber. En dicho proyecto, se pudo desarrollar un estudio teórico y computacional del problema FW, además de realizar una generalización de este. Adicionalmente, se pudo aplicar el problema FW en una de la vida real como lo es la escogencia de una imagen representativa de un conjunto de imágenes. Los resultados obtenidos ejemplifican los avances alcanzados, además de su importancia en el campo de la optimización numérica y en el procesamiento de imágenes.

Contribuciones de los autores

- Pablo Soto-Quiros: conceptualización, metodología, análisis, discusión y redacción.
- Geovanni Figueroa-Mata: análisis y discusión.
- Nelson Zamora-Villalobos: análisis y discusión.

Conflicto de Intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses y asume la plena responsabilidad por el contenido del artículo

Referencias

- [1] Beck, A., & Sabach, S. (2015). Weiszfeld's method: Old and new results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 164, 1-40.
- [2] Soto-Quiros, P. (2022). Computational Aspects of the Fermat-Weber Problem and its Solution Algorithms. In *SciELO Preprints*. <https://doi.org/10.1590/SciELOPreprints.4669>
- [3] Soto-Quiros, P. (2022). A Regularized Alternating Least-Squares Method for Minimizing a Sum of Squared Euclidean Norms with Rank Constraint. *Journal of Applied Mathematics*, 2022.
- [4] Soto-Quiros, P., & Figueroa-Mata, G., & Zamora-Villalobos, N. (2022). A method for selecting a representative image of a dataset based on the singular value decomposition. (En revisión para presentarse en una conferencia)
- [5] Image Processing Laboratory in Centro Universitario da FEI. FEI Face database. Disponible en <https://fei.edu.br/~cet/facedatabase.html>
- [6] Soto-Quiros, P. (2022). A Least-Squares Problem of a Linear Tensor Equation of Third-Order for Audio and Color Image Processing. In *2022 45th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)* (pp. 59-65). IEEE.
- [7] Soto-Quiros, P. (2022). A fast method to estimate the Moore-Penrose inverse for well-determined numerical rank matrices based on the Tikhonov regularization. (En revisión en una revista científica)
- [8] Figueroa-Mata, G., Mata-Montero, E., Valverde-Otárola, J. C., Arias-Aguilar, D., & Zamora-Villalobos, N. (2022). Using deep learning to identify costa rican native tree species from wood cut images. *Frontiers in Plant Science*, 13, 789227.

Este preprint fue presentado bajo las siguientes condiciones:

- Los autores declaran que son conscientes de que son los únicos responsables del contenido del preprint y que el depósito en SciELO Preprints no significa ningún compromiso por parte de SciELO, excepto su preservación y difusión.
- Los autores declaran que se obtuvieron los términos necesarios del consentimiento libre e informado de los participantes o pacientes en la investigación y se describen en el manuscrito, cuando corresponde.
- Los autores declaran que la preparación del manuscrito siguió las normas éticas de comunicación científica.
- Los autores declaran que los datos, las aplicaciones y otros contenidos subyacentes al manuscrito están referenciados.
- El manuscrito depositado está en formato PDF.
- Los autores declaran que la investigación que dio origen al manuscrito siguió buenas prácticas éticas y que las aprobaciones necesarias de los comités de ética de investigación, cuando corresponda, se describen en el manuscrito.
- Los autores declaran que una vez que un manuscrito es postado en el servidor SciELO Preprints, sólo puede ser retirado mediante solicitud a la Secretaría Editorial deSciELO Preprints, que publicará un aviso de retracción en su lugar.
- Los autores aceptan que el manuscrito aprobado esté disponible bajo licencia [Creative Commons CC-BY](#).
- El autor que presenta el manuscrito declara que las contribuciones de todos los autores y la declaración de conflicto de intereses se incluyen explícitamente y en secciones específicas del manuscrito.
- Los autores declaran que el manuscrito no fue depositado y/o previamente puesto a disposición en otro servidor de preprints o publicado en una revista.
- Si el manuscrito está siendo evaluado o siendo preparando para su publicación pero aún no ha sido publicado por una revista, los autores declaran que han recibido autorización de la revista para hacer este depósito.
- El autor que envía el manuscrito declara que todos los autores del mismo están de acuerdo con el envío a SciELO Preprints.