

**PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DEL PERÚ**

Escuela de Posgrado



Propuesta didáctica basada en el ETM: análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía

Tesis para obtener el grado académico de
Maestra en Enseñanza de las Matemáticas
que presenta:

Iris Inés Huaccan Condori de Tapia

Asesora:

Jesús Victoria Flores Salazar


Lima, 2023

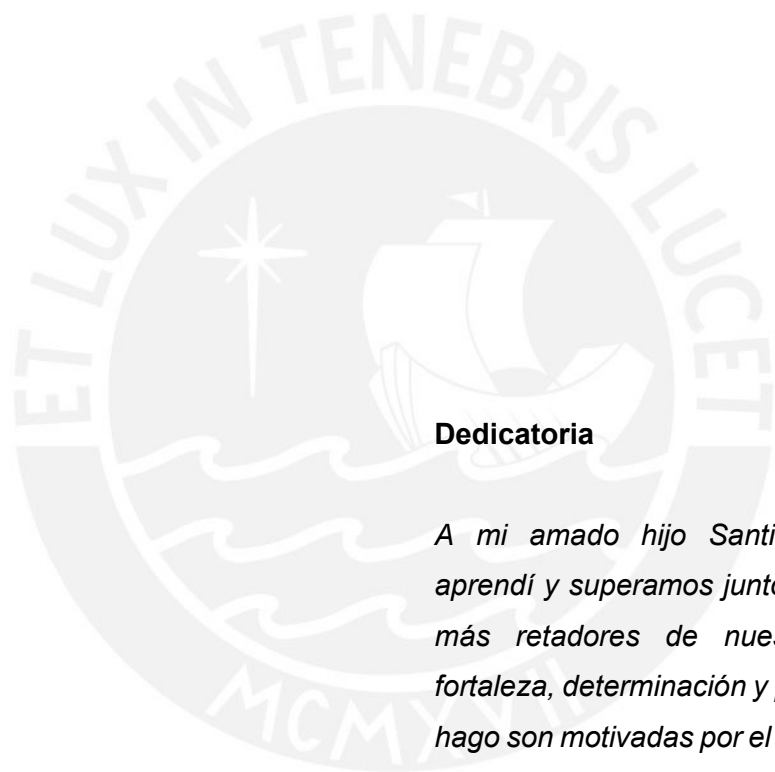
Informe de Similitud

Yo, Jesús Victoria Flores Salazar, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesora de la tesis de investigación titulada: PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN EL ETM: ANÁLISIS CUALITATIVO DE SISTEMAS DE EDO NO LINEALES PARA ESTUDIANTES DE ECONOMÍA, de la autora Iris Inés Huaccan Condori, dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 18%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 17/05/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis o Trabajo de Suficiencia Profesional, y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 21 de mayo de 2023

Apellidos y nombres de la asesora:	
Flores Salazar, Jesús Victoria	
DNI: 08342853	Firma
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0036-140X	



Dedicatoria

A mi amado hijo Santiago, con quien aprendí y superamos juntos los momentos más retadores de nuestras vidas. Mi fortaleza, determinación y pasión por lo que hago son motivadas por el amor a mi familia y por mí.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios por bendecirme cada día y sostenerme para continuar con mi proceso de aprendizaje y formación académica.

Quiero agradecer, especialmente, la valiosa orientación recibida de parte de la Dra. Jesús Flores Salazar, quién me animó desde el primer momento en que inicié este camino, por su paciencia las veces que nos reunimos y conversamos para el desarrollo de la tesis. Sus comentarios y guía fueron indispensables para concretar la presente investigación. Estoy muy contenta y agradecida por todo lo compartido y aprendido durante esta etapa de investigación.

Mi agradecimiento a la Dra. Carolina Henríquez con quien tuve la oportunidad de reunirnos y recibir sus comentarios, lo cual enriqueció de forma exponencial mi aprendizaje y fue clave para el desarrollo de la presente investigación. Gracias por haber aceptado formar parte de mi jurado e inspirar mi creatividad. También, quiero agradecer a la Dra. Verónica Neira por haber aceptado formar parte de mi jurado. Gracias por la disposición y el tiempo que dedicaron para leer la presente investigación y mejorarlo con sus valiosos comentarios.

Agradezco a los profesores de la maestría en Enseñanza de las Matemáticas, por las lecciones compartidas durante las sesiones de clase. Hago mención especial a la Dra. Cecilia Gaita por sus enseñanzas y sabios consejos durante esta etapa de formación académica.

Agradezco a la línea de investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática (TecVEM) de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en especial a la Dra. Katia Vigo por los comentarios sobre mi trabajo de investigación en los inicios de las exposiciones de seminario de tesis.

Me gustaría agradecer a los profesores investigadores de la PUCP, Dr. Alejandro Lugón, Dr. Johel Beltran por la inmediatez y excelente comunicación en los inicios de la investigación.

Me gustaría agradecer a los profesores investigadores de la Universidad del Pacífico, Dr. Javier Zuñiga y Mag. Daniel Proleón, por el valioso apoyo brindado y las sugerencias durante el desarrollo de la presente investigación.

Quiero agradecer a mi esposo Carlos Tapia por acompañarme en los momentos de catarsis y alentarme, con sus ocurrencias que alegraron mi alma, en todo este proceso de aprendizaje.

Finalmente, quiero reconocer y agradecer el continuo soporte a mi vida académica de parte de mis amados padres Emilio Huaccan Tanta y Vicenta Condori Canchari.

Resumen

La presente investigación está motivada por el hecho que diversos modelos de Economía, en particular los que están asociados a sistemas de EDO no lineales, donde no es posible obtener soluciones explícitas o bien solo es de interés la estabilidad del sistema respectivo, como por ejemplo el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, pueden ser *analizados cualitativamente*. En ese sentido, realizar dicho análisis significa determinar ciertas características sobre el comportamiento de las soluciones de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales asociados a dichos modelos económicos. Por ello, una herramienta eficaz en la carrera de Economía es el *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*. Su estudio fortalece la base teórica de un sistema de EDO no lineal y propicia la interpretación de los resultados matemáticos que se obtienen en relación con los modelos económicos, cuyo análisis está asociado a sistemas de EDO no lineales. Estos dos permitirán centrar las bases brindando las herramientas matemáticas suficientes para el estudio de nociones como el proceso de control óptimo en un curso de Macroeconomía en la carrera de Economía.

El objetivo de la investigación es analizar una propuesta didáctica dirigida a la carrera de Economía de una Universidad privada de Lima, orientada al *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*. Para lograr este objetivo, se plantea la propuesta de desarrollar el análisis cualitativo a través de tres tareas las cuales se proponen de manera secuencial. En ese sentido, se propone la tarea **T1** sobre la descripción matemática del *análisis cualitativo*. Se propone la tarea **T2**, a través del uso de las herramientas tecnológicas como MatLab, Wolfram y Bluffton. Finalmente, pensando en el vínculo con los temas y cursos posteriores en la carrera de Economía, se propone la tarea **T3** sobre un modelo de Economía, que tiene asociado un sistema de EDO no lineal, el cual será *analizado cualitativamente*.

La investigación se sustenta en la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y analiza el trabajo matemático que promueven las tareas de la propuesta didáctica, en las que se van a reconocer los paradigmas del análisis que se podrían privilegiar e identificar la activación de las génesis y planos verticales, con una metodología de tipo cualitativa. Todos ellos son aspectos relevantes en el ETM para el proceso de aprendizaje y enseñanza. Entre las principales conclusiones de este trabajo de investigación, se tiene que la propuesta didáctica favorece el análisis de ciertos modelos de Economía, haciendo uso del *análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal* y la tecnología digital, ambas como herramientas de análisis.

Palabras clave: EDO, Sistema de EDO no lineal, singularidades, diagrama de fase, análisis cualitativo, herramienta tecnológica, modelo económico, tarea, ETM.

Abstract

The present research is motivated by the fact that several models of economics, particularly those associated with nonlinear ODE systems, where it is not possible to obtain explicit solutions or only the stability of the respective system is of interest, such as the Ramsey-Cass-Koopmans model, can be analyzed qualitatively. In this sense, performing such analysis means determining certain characteristics about the behavior of the solutions of the systems of nonlinear Ordinary Differential Equations (ODE) associated with these economic models. Therefore, an effective tool in Economics is the qualitative analysis of nonlinear ODE systems. Its study strengthens the theoretical basis of a nonlinear ODE system and facilitates the interpretation of the mathematical results obtained in relation to the economic models whose analysis is associated with nonlinear ODE systems. These two will allow to focus the bases providing sufficient mathematical tools for the study of notions such as the optimal control process in a course of Macroeconomics in the degree of Economics.

The objective of the research is to analyze a didactic proposal addressed to the Economics course of a private University of Lima, oriented to the qualitative analysis of nonlinear ODE systems. To achieve this objective, the proposal is to develop the qualitative analysis through three tasks which are proposed sequentially. In this sense, task **T1** is proposed on the mathematical description of the qualitative analysis. Task **T2** is proposed through the use of technological tools such as MatLab, Wolfram and Bluffton. Finally, thinking about the link with the subsequent topics and courses in the Economics career, task **T3** is proposed on a model of Economics, which has a nonlinear ODE system associated with it, which will be analyzed qualitatively.

The research is based on the Mathematical Workspace theory (MWS) and analyzes the mathematical work promoted by the tasks of the didactic proposal, in which the paradigms of analysis that could be privileged will be recognized and the activation of the genesis and vertical planes will be identified, with a qualitative methodology. All of them are relevant aspects in the ETM for the learning and teaching process. Among the main conclusions of this research work, we have that the didactic proposal favors the analysis of certain models of Economics, making use of the qualitative analysis of a nonlinear ODE system and digital technology, both as analysis tools.

Keywords: ODE, nonlinear ODE system, singularities, phase diagram, qualitative analysis, technological tool, economic model, task, ETM.

Résumé

La présente recherche est motivée par le fait que plusieurs modèles économiques, en particulier ceux associés à des systèmes d'EDO non linéaires, pour lesquels il n'est pas possible d'obtenir des solutions explicites ou seule la stabilité du système concerné est intéressante, comme le modèle de Ramsey-Cass-Koopmans, peuvent être analysés qualitativement. En ce sens, effectuer une telle analyse signifie déterminer certaines caractéristiques du comportement des solutions des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires (ODE) associées à ces modèles économiques. L'analyse qualitative des systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires est donc un outil efficace en économie. Son étude renforce la base théorique d'un système d'EDO non linéaire et facilite l'interprétation des résultats mathématiques obtenus par rapport aux modèles économiques dont l'analyse est associée à des systèmes d'EDO non linéaires. Ces deux éléments permettront de focaliser les bases fournissant des outils mathématiques suffisants pour l'étude de notions telles que le processus de contrôle optimal dans un cours de macroéconomie en licence d'économie.

L'objectif de la recherche est d'analyser une proposition didactique destinée au cours d'économie d'une université privée de Lima, orientée vers l'analyse qualitative des systèmes d'EDO non linéaires. Afin d'atteindre cet objectif, la proposition consiste à développer l'analyse qualitative à travers trois tâches qui sont proposées de manière séquentielle. Dans ce sens, la tâche **T1** sur la description mathématique de l'analyse qualitative est proposée. La tâche **T2** est proposée à travers l'utilisation d'outils technologiques tels que MatLab, Wolfram et Bluffton. Enfin, en pensant au lien avec les matières et les cours ultérieurs du diplôme d'économie, la tâche **T3** est proposée sur un modèle d'économie, auquel est associé un système EDO non linéaire, qui sera analysé qualitativement.

La recherche est basée sur la théorie de l'espace de travail mathématique (MWT) et analyse le travail mathématique promu par les tâches de la proposition didactique, dans laquelle les paradigmes d'analyse qui pourraient être privilégiés seront reconnus et l'activation des plans de genèse et verticaux sera identifiée, avec une méthodologie qualitative. Tous ces aspects sont importants dans l'ETM pour le processus d'apprentissage et d'enseignement. Parmi les principales conclusions de ce travail de recherche, la proposition didactique favorise l'analyse de certains modèles d'économie, en utilisant l'analyse qualitative d'un système EDO non linéaire et la technologie numérique, tous deux comme outils d'analyse.

Mots clés : EDO, système EDO non linéaire, singularités, diagramme de phase, analyse qualitative, outil technologique, modèle économique, tâche, MWT.

Índice

Resumen	v
Índice	viii
Lista de tablas	ix
Lista de figuras	x
Introducción	12
Capítulo I: Problemática de la investigación	14
1.1 Investigaciones de referencia.....	14
1.2 Justificación	33
1.3 Espacio de Trabajo Matemático.....	41
1.4 Pregunta y objetivos de la investigación	47
1.5 Metodología y procedimientos metodológicos.....	48
Capítulo II: Análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales	55
2.1 Aspectos históricos del Análisis Cualitativo de las EDO.....	55
2.2 Aspectos matemáticos y didácticos de sistemas de EDO lineales y el <i>Análisis Cualitativo de sistemas de EDO no lineales</i>	57
Capítulo III: Propuesta didáctica	78
3.1 Organización de la propuesta didáctica	78
3.2 Descripción de las tareas de la propuesta.....	81
3.3 Análisis de las tareas de la propuesta desde el ETM	94
Conclusiones	135
Referencias	143
Anexos	147

Lista de tablas

Tabla 1. Investigaciones relacionadas con el análisis cualitativo de EDOs	23
Tabla 2. Investigaciones que usan Tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	28
Tabla 3. Cursos en donde se estudian Sistemas de EDO no lineales.....	35
Tabla 4. Cursos en donde se usa como herramienta los Sistemas de EDO no lineales	36
Tabla 5. Protocolo para el análisis de las tareas en el ETM.....	53
Tabla 6. Contenido del capítulo IV del libro de Matemáticas para la Economía Dinámica	58
Tabla 7. <i>Contenido del capítulo V del libro de Matemáticas para la Economía Dinámica</i>	59
Tabla 8. Clasificación del punto de equilibrio en un sistema de EDO lineal	65
Tabla 9. Clasificación del punto de equilibrio de un sistema de EDO no lineal.....	73
Tabla 10. Estructura de la propuesta didáctica	79
Tabla 11. Síntesis de la estructura de las tareas, objetivos y procedimiento.....	93
Tabla 12. Síntesis del análisis de T1 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan	111
Tabla 13. Síntesis del análisis de T1 desde el ETM: paradigmas presentes.....	112
Tabla 14. Síntesis del análisis de T1 desde el ETM.....	113
Tabla 15. Síntesis del análisis de T2 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan	125
Tabla 16. Síntesis del análisis de T3 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan	132
Tabla 17. Síntesis del análisis de T3 desde el ETM: paradigmas presentes.....	133

Lista de figuras

Figura 1. Plan de estudios de la carrera de Economía de la Universidad del Pacífico.....	37
Figura 2. Modelo económico de Ramsey-Cass-Koopmans	39
Figura 3. Diagrama de Fase del Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.....	39
Figura 4. Articulación de los Planos Epistemológico y Cognitivo	43
Figura 5. Planos Verticales en el ETM.....	44
Figura 6. Características, proceso y fortalezas de la investigación cualitativa	48
Figura 7. Procesos de la investigación cualitativa	49
Figura 8. Esquema de los procedimientos metodológicos	50
Figura 9. Diagrama de Fase.....	62
Figura 10. Diagrama de Fase: Punto silla.....	63
Figura 11. Clasificación del punto de equilibrio en el plano ($trA, detA$).....	67
Figura 12. Diagrama de fase - Movimiento en el plano (y, y').....	70
Figura 13. Diagramas de fase y estabilidad.....	71
Figura 14. Curvas de fase y campo de vectores.....	75
Figura 15. Tarea 1: Análisis Cualitativo de un sistema de EDO no lineal.....	81
Figura 16. Tarea 2: Uso de la tecnología digital en el análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal	82
Figura 17. Ventana de MatLab	83
Figura 18. Entrada del sistema y restricciones al MatLab.....	84
Figura 19. Salida del Diagrama de fase generado por MatLab.....	85
Figura 20. Trayectorias generadas por MatLab	85
Figura 21. Ventana de Bluffton: EDO de primer orden	86
Figura 22. Opción System en Bluffton	87
Figura 23. Ventana de Bluffton: Sistema de EDO.....	87
Figura 24. Entrada del sistema y restricciones en Bluffton	88
Figura 25. Diagrama de fase generado por Bluffton	89
Figura 26. Trayectorias generadas por Bluffton.....	89
Figura 27. Ventanas de WolframAlpha y Wolfram Mathematica	90
Figura 28. Ventanas de inicio de Wolfram Mathematica.....	91
Figura 29. Entrada de las funciones y el sistema en Wolfram Mathematica	91
Figura 30. Tarea 3: Aplicación del análisis cualitativo: Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans ..	92
Figura 31. Solución esperada de la P1.....	96

Figura 32. Solución esperada: Curva de fase.....	97
Figura 33. Solución esperada: Esbozo de las curvas de fase.....	98
Figura 34. Solución esperada de la P2.....	99
Figura 35. Clasificación del punto de equilibrio en el plano $(trA, detA)$	102
Figura 36. Solución esperada de la P3.....	102
Figura 37. Clasificación esperada de singularidades en el plano $(trA, detA)$	103
Figura 38. Clasificación de singularidades en el plano $(trA, detA)$	103
Figura 39. Solución esperada de la P4.....	104
Figura 40. Solución esperada de la P5.....	106
Figura 41. Solución esperada: Curvas de fase.....	107
Figura 42. Identificación de las regiones que separan el plano cartesiano	108
Figura 43. Análisis de signos de los componentes horizontales del vector tangente	108
Figura 44. Análisis de signos de los componentes verticales del vector tangente	109
Figura 45. <i>Identificación de los componentes del vector tangente en el plano</i>	109
Figura 46. Solución esperada: Esbozo de trayectorias.....	110
Figura 47. Campo de vectores visualizado en el MatLab	115
Figura 48. Esbozo de trayectorias visualizado en el MatLab	116
Figura 49. Campo de vectores visualizado en Bluffton	117
Figura 50. Esbozo de trayectorias visualizado en Bluffton.....	118
Figura 51. Algoritmo para el análisis cualitativo en Wolfram.....	119
Figura 52. Linealización en Wolfram	120
Figura 53. Tipo de singularidad del sistema linealizado.....	121
Figura 54. Tipo de singularidad del sistema no lineal y Diagrama de fase en Wolfram.....	122
Figura 55. Curvas de fase en Wolfram	122
Figura 56. Componentes de los vectores tangentes a las soluciones en Wolfram.....	123
Figura 57. Campo de vectores y esbozo de trayectorias visualizado en Wolfram.....	124
Figura 58. Cálculo de Singularidades del modelo de Ramsey.....	127
Figura 59. Linealización del modelo de Ramsey	128
Figura 60. Tipo de singularidad del sistema lineal asociado al modelo de Ramsey	129
Figura 61. Tipo de singularidad del sistema no lineal del modelo de Ramsey	130
Figura 62. Diagrama de fase del modelo de Ramsey	131

Introducción

Esta investigación tiene su origen durante la labor docente de la autora en el curso de Matemáticas III de las carreras de Economía y Finanzas en la Universidad del Pacífico.

El curso de Matemáticas III requiere de conocimientos básicos del álgebra lineal y cálculo diferencial, los cuales son desarrollados en los cursos de Matemáticas previos (Matemáticas I y Matemáticas II), lo que en muchas ocasiones puede generar desafíos en los estudiantes, ya sea por la propia complejidad de los contenidos que se presentan y por la dificultad en la adquisición de los conocimientos previos junto con el requerimiento de la madurez que debieron ir adquiriendo desde los primeros cursos de Matemáticas para un buen desarrollo y desempeño en el curso.

Entre los distintos conceptos matemáticos del curso de Matemáticas III, el *análisis cualitativo de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales, que estudia el comportamiento de la solución de una EDO sin necesidad de una solución explícita*, tiene una fuerte relación con diversos modelos económicos. En ese sentido, las aplicaciones económicas reales también tienen un rol importante en el curso, como el de producción y polución, extracción de peces, modelo depredador-presa, modelo IS-LM, la “q” de Tobin, modelo de Ramsey-Cass-Koopmans entre otros, muchos de estos vistos con mayor detalle en los escritos de Bonifaz y Winkelried donde, además, los investigadores, para evitar tratar temas más complejos de optimización dinámica han considerado dos variables dinámicas (caso bidimensional). Por todo ello, Matemáticas III puede ser considerado como un curso retador para un futuro economista. Lo que justifica iniciar una investigación que contribuya el hacer uso de la matemática como herramienta de análisis para diversos modelos de Economía.

Así, la presente investigación tiene por objetivo analizar una propuesta didáctica basada en el ETM que propicia el *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales* para estudiantes de Economía. Para lograr este objetivo se presenta primero el diseño de la propuesta, orientada al *análisis cualitativo* a través de tres tareas que conecten con los conceptos previos y que hagan uso de las herramientas tecnológicas (artefacto de tipo software). Luego, se realiza el análisis a priori de la propuesta lo cual significa analizar el trabajo matemático, desde el ETM, que promueven las tareas que conforman la propuesta didáctica.

. La elección de esta teoría (ETM) es por el interés en los posibles procesos cognitivos que surgirían en los estudiantes al desarrollar las tareas, los cuales podrían gestionarse para favorecer su aprendizaje. Consideramos importante el análisis previo que pueda caracterizar el

posible trabajo matemático de los estudiantes y así saber en qué medida el proceso de desarrollo de las tareas de la propuesta propiciarían el *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*. En ese sentido, la elección de la teoría ETM es relevante pues, de acuerdo con Kuzniak (2011), permite caracterizar el trabajo matemático que el estudiante pone en práctica cuando resuelve una tarea lo cual es importante en la investigación.

La organización de la investigación consta de tres capítulos:

En el primer capítulo, haremos una revisión bibliográfica en relación con el estudio del análisis cualitativo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales y el uso de la tecnología digital en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto de estudio. Presentaremos la relevancia de esta investigación en la carrera de Economía. En este capítulo también desarrollaremos aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) en la que se fundamenta la propuesta didáctica. Seguido de esto, presentaremos la pregunta y los objetivos de investigación y finalizaremos con la metodología y procedimientos metodológicos que guiarán nuestra investigación.

En el segundo capítulo, presentaremos un estudio matemático que considera algunos aspectos históricos del análisis cualitativo de las EDO; otro estudio epistemológico y didáctico, donde presentaremos y analizaremos un libro de Economía para ver cómo se aborda la noción del *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales* para estudiantes de Economía.

En el tercer capítulo, presentaremos la organización de la propuesta didáctica, la descripción de las tareas que conforman la propuesta y su respectivo análisis a priori, a la luz del ETM.

Finalmente presentaremos las conclusiones y perspectivas futuras del trabajo de investigación.

Capítulo I: Problemática de la investigación

En este capítulo, presentaremos las investigaciones de referencia que están relacionadas con el *análisis cualitativo de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales* y el uso de la tecnología digital en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este objeto de estudio. También presentaremos la justificación académica sobre la base de las investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio y la justificación profesional basada en las sumillas de la carrera de Economía. Luego, desarrollaremos aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que será la base teórica en la que se enmarcará la propuesta didáctica. Seguido de esto, presentaremos la pregunta y los objetivos de investigación y finalizamos con la metodología y procedimientos metodológicos de la investigación.

1.1 Investigaciones de referencia

Iniciamos esta investigación haciendo una revisión bibliográfica de diversas fuentes que ofrecen información relacionada con los procesos de enseñanza y de aprendizaje del *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*, investigaciones que hacen uso de la tecnología digital en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la Educación Superior e investigaciones sobre Educación Virtual. Finalmente, se realiza una revisión detallada de la publicación reciente del libro *Mathematical Work in Educational Context* y se considera algunos aspectos relevantes que darán el sustento teórico didáctico a nuestra investigación.

Se realizaron búsquedas en diversas bases de datos como bibliotecas virtuales de diferentes universidades de Perú, Brasil, Chile, Colombia, México y Francia, donde consideramos tesis de doctorado y maestría, artículos y actas de Simposios las cuales están relacionadas y/o próximas con la enseñanza y aprendizaje del *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales* con el uso de la tecnología digital y con el ETM. Iniciamos la búsqueda en bibliotecas virtuales de diversas instituciones de nivel superior dentro de los últimos 5 años y se encontraron las siguientes tesis: *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique* de Reyes; *Un enfoque del Multiplicador de Lagrange por medio de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en estudiantes de Economía* de Proleón; y *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* de Javaroni. Consideramos que aún eran pocas y ampliamos la búsqueda en los últimos 10 años y, al no haber encontrado investigaciones relacionadas con nuestro trabajo, nos obliga a seguir con la búsqueda dentro de los últimos 15

años, donde se encontró la tesis de Barros, *Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática*. Debido a que no se encontraron investigaciones que contemplen el *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*, fue necesario ampliar nuestra búsqueda 5 años más y se encontró la tesis de Arslan: *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S: ¿est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?*, la cual es la más próxima a nuestro objeto de estudio. Agotamos la búsqueda en tesis y, en seguida, buscamos artículos en base de datos de revistas indexadas donde encontramos el artículo de Collantes y Vigo, *Un repaso de las investigaciones producidas en torno a la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*; el artículo de Sin, Bongiovanni y Faner, *De la Educación a Distancia a la Educación Virtual*; y, finalmente, las actas de simposios de ETM, donde se encontraron investigaciones que sustentan nuestro trabajo, las cuales consideraremos en la sección 1.3.

Por lo descrito anteriormente, consideramos imprescindibles las investigaciones de referencia presentadas en este trabajo, pues además son las más próximas con nuestra investigación.

Para organizar la presentación de las investigaciones, se consideran los siguientes criterios: Agrupar los temas abordados en **orden cronológico** y considerar aspectos relacionados al estudio, tales como **objetivos**, **marco teórico** y **metodologías**, además de algunos resultados y **conclusiones** principales que son relevantes para nuestra investigación.

A continuación, presentamos investigaciones sobre el *análisis cualitativo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)*; para ello consideramos tres tesis doctorales como la de Arslan, donde se propone el *análisis cualitativo* para introducir la noción de las EDO porque genera nociones de análisis y se centra en la interpretación de soluciones de las EDO. Dicha investigación también fue considerada en la de Barros, quién realizó una investigación para el estudio de las EDO enfatizando en el *análisis cualitativo* haciendo uso, al mismo tiempo, de la Modelación Matemática. Además, se considera la investigación de Javaroni, la cual realiza una investigación sobre las EDO a partir del *análisis cualitativo* de algunos modelos matemáticos con el apoyo de la tecnología digital.

Investigaciones sobre el Análisis Cualitativo de las EDO lineales y no lineales

Presentaremos, a continuación, tres tesis doctorales: la de Arslan, Javaroni y Barros, las cuales sustentan la presente investigación, y se centran en la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, lineales y no lineales, a través del **análisis cualitativo**, el cual *consiste en estudiar el comportamiento de la solución de una EDO sin necesidad de una solución explícita*. Adicionalmente, Javaroni y Barros, en sus respectivas investigaciones, hacen uso de la tecnología digital.

La investigación realizada por Arslan tiene como objetivo estudiar la viabilidad de la enseñanza de las EDO mediante el análisis cualitativo en una clase de Terminal S (alumnos del bachillerato que escogieron llevar los cursos científicos) en Francia, donde ya se enseñaban mediante un enfoque algebraico y numérico. Arslan hace un estudio en el que muestra el desuso de la enseñanza de EDO basado en la resolución algebraica. Esto lo justifica por las razones didácticas y tecnológicas.

El investigador explica la innovación con *análisis cualitativo*; una de las razones es porque genera nociones de análisis y se centra en la interpretación de soluciones de las EDO. También justifica la necesidad de cambiar la enseñanza tradicional (enseñanza con enfoque algebraico) en la que se presentan las EDO y de realizar una evaluación rigurosa al respecto. Además, asume que “actualmente somos capaces de realizar esta innovación, principalmente gracias a la disponibilidad de herramientas tecnológicas y didácticas” (pág.9). Además, el autor se cuestiona por la integración de la resolución cualitativa en la educación secundaria en Francia y menciona que esta integración se practica desde hace algún tiempo en el nivel superior. En dicha investigación, se introduce la enseñanza de EDO mediante el *análisis cualitativo*, incluso antes de plantear la resolución algebraica.

Para tal fin, el investigador se fundamenta sobre la base de la teoría de Registros de Representación Semiótica (TRSS) de Duval y, como método de investigación, utiliza la Ingeniería Didáctica de Artigue. Para el éxito de la implementación de este *análisis cualitativo*, el investigador considera necesario tener en cuenta las dimensiones señaladas por Artigue; las cuales son analizadas y clasificadas en tres grupos: dimensiones epistemológicas, dimensiones cognitivas y dimensiones didácticas.

Al respecto, el investigador tiene en cuenta las limitaciones de este enfoque en la enseñanza, tal como afirma “vamos más allá de los programas: el enfoque que estamos proponiendo trae una ruptura con la docencia actual y la educación que planeamos proporcionar no aporta en “nada” al respecto del Bachillerato” (Arslan, 2005, pág. 54). Esto ocasiona una falta de interés de parte del estudiante, ya que ellos tienen como objetivo llegar al bachillerato, por lo que el investigador fija sus objetivos en la reducción de las limitaciones de naturaleza cognitiva.

La investigación de Arslan (2005) indica que se requiere de un fácil manejo entre las diferentes representaciones de una función y su derivada, para lo cual es importante la noción de registro semiótico. Por ello, plantea dos hipótesis. La primera, llamada hipótesis de trabajo, establece que es posible mitigar esta restricción debido al conjunto de registros, ya que este puede proporcionar una ayuda eficaz para integrar el enfoque cualitativo en EDO, así como el fortalecimiento de las relaciones existentes entre función y su derivada. A base de esta hipótesis, Arslan desarrolla la segunda, donde establece que un *análisis cualitativo* de las EDO en la educación secundaria es viable. El investigador afirma que la introducción a las EDO se puede realizar utilizando el *análisis cualitativo* antes que se enseñe la resolución algebraica.

El investigador realizó la experimentación con un grupo de estudiantes, entre 17 y 18 años (repitentes y no repitentes), del último grado de secundaria, próximos a culminar el bachillerato, en la que pudo observar, por un lado, la viabilidad del *análisis cualitativo* en estudiantes que aún no tenían conocimiento de la resolución del tipo algebraica (con estudiantes no repitentes) y, por otro lado, le permitió analizar (con estudiantes repitentes) el impacto del conocimiento de la resolución algebraica en la enseñanza del *análisis cualitativo* de las EDO.

La investigación se encuentra estructurada en cuatro partes. En la primera parte, el investigador realiza un breve estudio histórico, para luego presentar los tres modos principales de resolución: algebraico, numérico y cualitativo; aquí se justifica la priorización sobre la resolución cualitativa. En seguida, sobre la base de investigaciones anteriores, en particular los de Artigue, se consideran las limitaciones que se oponen a la integración de este modo de resolución. En la segunda parte, realiza un análisis de planes de estudio y libros de texto con el objetivo de examinar el conocimiento de los estudiantes de educación secundaria. Para esto, en la tercera parte, se ejecuta un experimento en cierta institución, donde se presenta un análisis a priori y a posteriori al respecto. Finalmente, en la última parte, se dan las conclusiones y perspectivas.

Como conclusión de Arslan (2005), el investigador destaca que se puede introducir un *análisis cualitativo* en la educación secundaria debido al conjunto de registros. En este enfoque, destaca también la necesidad de la integración de enfoques distintos al algebraico, en particular el *análisis cualitativo*. Según el investigador, señala que una posible extensión de esta investigación, en un grupo de estudiantes de cierta clase especial, disminuiría la limitación del tiempo de duración, además de ser viable en el contexto de un sistema de apoyo para un profesor (o un equipo de profesores) manteniendo su continuidad. Además, resalta que esto se podría potenciar mediante la integración de algún software en geometría dinámica.

Otra investigación de referencia es la de Javaroni, en la que se realiza un estudio que tuvo como objetivo analizar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje de la introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) a partir del análisis cualitativo de algunos modelos matemáticos con el apoyo de la tecnología digital.

Javaroni (2007) señala que la enseñanza de las EDO, en los cursos de graduación, se da a través de la presentación de distintos métodos de resolución de tipos de EDO integrables con la presentación de listas de ejercicios que pueden ser resueltos por los métodos presentados; con lo que la enseñanza se vuelve elemental. En este enfoque, que privilegia los aspectos algebraicos, el énfasis de la disciplina consiste en la determinación de la solución analítica, lo que muchas veces minimiza el proceso de Modelación Matemática en lo que respecta a la interpretación y al comportamiento de la solución del modelo analizado.

De esta forma, la investigadora sugiere que se añada a la enseñanza de las EDO un enfoque cualitativo para que no solamente el enfoque algebraico sea enfatizado. En este sentido, realiza una descripción general del enfoque cualitativo en la enseñanza de EDO a través del concepto de campos de direcciones, con lo que la autora hace notar que el enfoque cualitativo permite analizar un modelo por medio de su propia ecuación y no por sus soluciones analíticamente explícitas.

Los procedimientos metodológicos empleados en la investigación van de la mano con los supuestos del paradigma de la investigación cualitativa y van en concordancia con que el conocimiento es producido por la interacción de seres humanos con un medio y tecnología otorgados.

Conforme a lo señalado por el procedimiento metodológico en Javaroni (2007), el escenario para la recolección de datos fue el Laboratorio de Informática y Educación Matemática de la Universidad Estadual Paulista (UNESP). Tres parejas y un trío de estudiantes del curso de Licenciatura en Matemática del Instituto de Geociencias y Ciencias Exactas (IGCE) participaron voluntariamente en la investigación. Así, se dictó un curso de extensión llamado “Modelación y Métodos Computacionales en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias”, al cual los alumnos fueron invitados a estudiar los modelos de objetos en caída, de crecimiento poblacional de Malthus, de crecimiento poblacional de Verhulst y la ley de enfriamiento, para lo cual emplearon la tecnología digital. Además de esto, los estudiantes contaban con cuadernos en los que realizaban anotaciones, cálculos y bosquejos de las representaciones geométricas que eran parte de las actividades de la investigación.

La investigadora utilizó el software Camtasia, especializado también para la captura de imágenes del computador, para registrar los datos hechos por los estudiantes, en los cuales los detalles más importantes de interacción entre ellos y la investigadora pudieron ser capturados. En Javaroni, Camtasia sirvió para capturar las imágenes realizadas por los estudiantes en el computador resolviendo las actividades dadas y sus respectivas conversaciones, además de capturar las imágenes de cada subgrupo de estudiantes. También utilizó otro medio para recolectar información, los cuales fueron las “notas de campo”; es decir, tomaba nota de los puntos que consideraba más importantes en las interacciones entre los estudiantes de cada pareja de estudiantes y realizaba filmaciones de los estudiantes trabajando en las computadoras.

Al inicio del Curso de Extensión Universitaria fueron aplicados dos cuestionarios: el primero, constituido por 11 estudiantes; y el segundo, por nueve estudiantes. El primero de ellos tuvo como norte delinear el perfil de los estudiantes. El segundo cuestionario fue elaborado con preguntas teóricas de contenido específico de las EDO y fue aplicado nuevamente al final del curso con el objetivo de evidenciar la actuación de los resultados del curso en la formación de los estudiantes.

La investigadora, con la finalidad de responder a la pregunta de investigación y a partir de las notas de campo y del análisis de los videos, construye episodios, historias que cuenta a partir de los hechos que ocurrieron en el ambiente de la sala de clase del curso de extensión. Los datos recolectados fueron presentados de forma descriptiva y analítica, para lo cual la investigadora construyó algunos episodios denominados “Objeto de caída”, “Modelo Poblacional de Malthus,” “Modelo Poblacional de Verhulst”, “Campos de direcciones” y “Ley de enfriamiento”.

En Javaroni (2007), se clasificó el análisis inicial en la importancia del desarrollo del proceso de la Modelación Matemática, la coordinación de varios medios utilizados, la elaboración y verificación de conjeturas, además de la interacción entre estudiantes y los diferentes medios. Al profundizar estos análisis, surgen los siguientes temas: proceso de visualización en actividades de investigación con apoyo de la tecnología digital, enfoque algebraico y geométrico con la tecnología digital y el conocimiento como red de significados.

En relación con el primer tema, la investigadora muestra que el proceso de visualización sobre diversas perspectivas es esencial para el entendimiento de los aspectos dinámicos de un curso introductorio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), ya que en muchas situaciones los estudiantes no vieron lo que la investigadora observó, por lo que este hecho se torna como una dificultad presentada. Así, la investigadora evidencia que existía una necesidad de transitar por las representaciones visuales y analíticas de un mismo modelo y constata que esa habilidad de manipular las distintas representaciones puede ser un proceso lento y tormentoso para el alumno.

Con respecto al segundo tema, enfoque algebraico y geométrico con el uso de la tecnología digital, la investigadora advierte que estos no tienen por qué verse por separado, sino que son actividades complementarias en el proceso de aprendizaje matemático. Explica que, en el medio matemático en el que prevalece el “lápiz y el papel”, el enfoque algebraico cobra más fuerza. Por otro lado, la autora afirma que, si en el medio matemático, además del “lápiz y papel”, se incluye la tecnología digital, aparte del enfoque algebraico, también se tendría el enfoque geométrico, lo cual hace que el aprendizaje sea más significativo.

En el último tema, conocimiento como red de significados, la investigadora afirma que, para que para el aprendizaje ocurra, este debe ser de forma dinámica y significativa, para que favorezca el surgimiento de un mayor número de conexiones, y que, para que un nuevo concepto sea aprendido, se necesita lo anterior y construir así una red.

La investigadora, en sus consideraciones, señala que observar el gráfico de los campos de direcciones de una EDO lleva a obtener informaciones que no son percibidas sobre las curvas soluciones de la ecuación, aunque no se disponga de la solución algebraica; además, concluye que la interacción entre los estudiantes y los softwares computacionales usados generó nuevas posibilidades para el enfoque cualitativo de los modelos estudiados. Siendo así, sugirió la

necesidad de repensar la enseñanza de las EDO de forma que se enfatice en el aspecto geométrico de los modelos matemáticos, además del aspecto algebraico.

Otra investigación de referencia es la de Barros, donde se desarrolla un estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) en estudiantes de Ingeniería, teniendo en cuenta el *análisis cualitativo* de las soluciones.

La metodología que emplea el estudio es la Ingeniería Didáctica, cuyo objetivo principal es investigar el potencial de una secuencia de situaciones (serie de preguntas propuestas y presentadas en un orden determinado con el fin de estructurar y ampliar el conocimiento de los estudiantes en cada actividad) relacionando problemas en el contexto de Modelación Matemática, en la perspectiva de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) de Duval y de la Teoría de Cambios de Dominio (TCD) de Douady, en la conducción del proceso de aprendizaje de las EDO para cursos de Ingeniería.

En los análisis preliminares, Barros (2017) afirma que la enseñanza y el aprendizaje de las EDO se centran en un enfoque algebraico, lo que privilegia el empleo de las distintas técnicas de resolución, lo cual no beneficia el empleo de los diferentes registros de representación o el uso de herramientas de otros dominios matemáticos. Además, constata que los libros didácticos también favorecen el enfoque algebraico y que las actividades dichas de la Modelación Matemática conducen al uso de las fórmulas ya implantadas.

La investigadora en mención, para el estudio de las EDO, considera un enfoque cualitativo implica un cambio del punto de vista del problema analizado, lo que lleva a la formulación de nuevas preguntas y al uso de herramientas que antes no estaban disponibles. Por lo tanto, la investigadora elaboró y aplicó una secuencia de situaciones en un curso de extensión, con duración de 27 horas, en una universidad pública del estado de Paraná (Brasil), en la que participaron 15 estudiantes de las carreras de Ingeniería (Ambiental, Alimentos, Civil y Electrónica) que estaban matriculados en el curso de Ecuaciones Diferenciales.

La secuencia de situaciones estaba compuesta por un cuestionario inicial de nueve actividades que trabajaban el concepto de EDO, utilizando diferentes registros de representación semiótica y por tres problemas en el contexto de Modelación Matemática, en los cuales los estudiantes deberían estudiar situaciones reales, cuyos análisis demandarían una comprensión de las EDO. Dichas actividades fueron analizadas en la fase 1 y tuvieron como objetivo introducir la noción de campo de vectores, estudiar el comportamiento de las soluciones y comportamiento

asintótico, asociar el campo de vectores con una EDO, analizar la unicidad de las soluciones y comprender el concepto de tasa de variación y el de problema de valor inicial. En la fase 2, la secuencia de actividades fue constituida por tres problemas de Modelación Matemática, los cuales fueron los siguientes: el decaimiento radiactivo, en el cual los estudiantes realizaron un estudio sobre el accidente que ocurrió en la ciudad de Goiânia que involucró al elemento radiactivo Cesio 37; la variación de temperatura de una gaseosa dejada en el medio ambiente; los datos recogidos fueron utilizados para el desarrollo del problema; y un tema libre que cada grupo debería escoger y realizar un estudio matemático de la situación utilizando una EDO, y presentar este estudio a los demás estudiantes del curso.

Con respecto a los resultados obtenidos en dichas actividades, Barros (2017) destaca que inicialmente los estudiantes presentaban dificultades en relacionar las unidades significativas del Registro Simbólico Algebraico (RSA) con las variaciones simultáneas para las soluciones del Registro de Lengua Natural de Uso Especializado (RLNE).

En la Actividad 2, se evidencia que no presentaron la noción de familia de soluciones, mientras que en la Actividad 3, las informaciones sobre la EDO dada sólo podrían ser obtenidas por el análisis del campo de vectores del Registro Gráfico (RG), lo que hizo que los estudiantes comenzaran a identificar las variables visuales del RG y las utilicen para responder la actividad. No obstante, en la dificultad de relacionar esas variables visuales con las variables significativas de los otros registros (RSA y RLNE), los estudiantes utilizaron el RG para conseguir información de las soluciones de las EDO y no solamente como forma de representar la familia de soluciones. En la Actividad 4, tenía por finalidad un estudio del comportamiento de las soluciones de una EDO sin conocer, de forma explícita, la expresión algebraica de la función o de su derivada; en la que los estudiantes usaron la noción de infinitas soluciones y la relación entre derivada y función para responder lo que fue solicitado, lo que indica que fueron capaces de obtener informaciones utilizando el signo de la derivada sin la necesidad de recurrir a la solución algebraica.

La investigadora señala que algunos de los estudiantes realizaron una conversión de RSA (ecuación) para el RG (campo de vectores) y además de obtener informaciones por medio de este registro, estos lo coordinaron con el RSA, por lo que consiguieron identificar y relacionar las unidades significativas del RSA (ecuación) con las unidades visuales del RG (campo de vectores). A partir de la experiencia con esta secuencia de actividades en el curso de extensión, la utilización en paralelo de los registros RG y RSA permitió que los estudiantes reconozcan qué

cambios en el signo de la derivada de la función provocaron cambios en el campo de vectores y viceversa. De esta forma, los participantes comenzaron a establecer nexos entre la EDO y su campo de vectores, entre derivada y función y entre la EDO y su familia de soluciones; es decir, un aprendizaje que no está enfocado solamente en la aplicación de técnica algebraicas de resolución. Barros (2017), con respecto al uso del GeoGebra y Maple, explica que se evidenció que el uso de la tecnología digital fue importante y necesario para el desarrollo de la secuencia de actividades por parte de los estudiantes. La construcción del campo de vectores, sin el auxilio de la tecnología digital, demandaría mucho tiempo y volvería inviable su utilización. A continuación, presentamos la Tabla 1 que sintetiza lo descrito anteriormente.

Tabla 1

Investigaciones relacionadas con el análisis cualitativo de EDOs

Autor y año	Objetivo	Aplicado a	Teoría / Metodología	Conclusiones	Tecnología digital
Arslan, S. (2005)	Investigar las posibilidades de desarrollar un abordaje cualitativo de las EDOs en estudiantes que utilizaban el abordaje algebraico y numérico	Estudiantes de educación secundaria en Francia.	Teoría de Registros de Representación Semiótica / Ingeniería Didáctica	La introducción de las EDOs podría hacerse por medio del abordaje cualitativo antes de ser enseñada la resolución algebraica.	Maple
Barros, M. C. (2007)	Investigar el potencial de una secuencia de situaciones, involucran problemas en el contexto de Modelación Matemática en el proceso de aprendizaje de las EDOs	Estudiantes de graduación de carreras de Ingeniería en Brasil	Teoría de Registros de Representación Semiótica – Teoría de Cambios de Dominio / Ingeniería Didáctica	La utilización en paralelo de los registros gráficos y algebraicos permitió que los participantes crearan nexos entre la EDO y su campo de vectores, entre la EDO y su familia de soluciones	GeoGebra y Maple
Javaroni, S. L. (2017)	Analizar las posibilidades de enseñanza y aprendizaje de la introducción a las EDOs a partir del abordaje cualitativo de algunos modelos matemáticos, con el apoyo de las TIC	Estudiantes de un curso de Licenciatura en Matemática en Brasil	Ingeniería Didáctica	Si en el medio matemático, además del lápiz y papel, se incluyen las TIC, aparte del abordaje algebraico también se tendría el abordaje geométrico, lo cual hace que el aprendizaje sea más significativo	Camtasia, Maple, Excel y Winplot

Es importante resaltar que, de las referencias bibliográficas presentadas, todas realizaron su estudio con estudiantes de Educación Superior, a excepción de la investigación de Arslan, que considera estudiantes de la Escuela Terminal S en Francia.

Estas investigaciones las consideramos pertinentes para nuestro trabajo pues son próximas a nuestro objeto de estudio *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*, donde además se relacionan con modelos matemáticos y al mismo tiempo hace uso de la tecnología digital.

A continuación, presentamos las investigaciones de Zapata (*Recursos educativos digitales: conceptos básicos*) y las ya mencionadas de Proleón, Reyes, quienes hacen uso de la tecnología digital en sus respectivas investigaciones. Por otro lado, por su parte, Collantes y Vigo, realizan una investigación bibliográfica del tipo Estado del Arte, en la cual, de las 11 investigaciones que fueron analizadas, siete de ellas utilizaron tecnología digital para el desarrollo de las actividades; cinco dieron importancia a la Modelación Matemática, al uso de la tecnología digital y el análisis cualitativo.

Investigaciones sobre el uso de la Tecnología Digital en la Educación Superior

Con respecto al uso de la tecnología, García afirma que:

“Los materiales digitales se denominan Recursos Educativos Digitales cuando su diseño tiene una intencionalidad educativa, cuando apuntan al logro de un objetivo de aprendizaje y cuando su diseño responde a unas características didácticas apropiadas para el aprendizaje. Están hechos para informar sobre un tema, ayudar en la adquisición de un conocimiento, reforzar un aprendizaje, remediar una situación desfavorable, favorecer el desarrollo de una determinada competencia y evaluar conocimientos” (García, 2010 citado en Zapata, 2012, pág. 1).

De acuerdo con Zapata (2012), el uso de la tecnología digital en educación implica la creación, búsqueda y selección de Recursos Educativos Digitales de acuerdo con el nivel de desarrollo cognitivo que se desea.

En ese sentido, en la investigación de Proleón, se hace uso de la herramienta digital GeoGebra, la cual propicia la coordinación de los Registros de Representación Semiótica durante el aprendizaje del Multiplicador de Lagrange en estudiantes de Economía. La metodología que se emplea en este estudio es el de los aspectos de la Ingeniería Didáctica.

Proleón (2018) realiza su estudio con estudiantes de la carrera de Economía de la Universidad del Pacífico en el curso de Matemáticas II, que abarca el cálculo diferencial de una variable y el cálculo diferencial sobre varias variables. El interés por el estudio del Multiplicador de Lagrange radica en el hecho de que la mayoría de los estudiantes resuelven los ejercicios de manera algebraica, sin transitar por el registro gráfico y sin entender cuál es el funcionamiento del Teorema de Lagrange (Teorema por el cual se formaliza el uso del Multiplicador de Lagrange).

El objetivo de la investigación es analizar la coordinación de los registros de representación semiótica que realizan los estudiantes de Economía en el aprendizaje del objeto matemático. Con respecto al marco teórico, el investigador consideró utilizar aspectos de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas para comprender el concepto del objeto matemático.

Para la fase experimental, el autor consideró dos parejas de estudiantes, en donde cada pareja debía resolver una situación problema relacionado con la optimización con restricciones, dado en registro natural. Las preguntas propuestas fueron conduciendo a cada grupo al uso del GeoGebra. El uso apropiado de este software en la resolución del problema mostró que es posible que dichos alumnos puedan realizar tratamiento de representaciones en el registro gráfico y conversiones de representaciones en el registro algebraico a representaciones en el registro gráfico.

Con respecto a lo realizado por uno de los grupos analizados, se muestra una conversión de la representación de la isocuanta del registro algebraico $y = \frac{80}{x}$ a su representación en el registro gráfico del GeoGebra. Asimismo, dicho grupo realizó conversiones de la representación de los isocostos, representados en el registro algebraico por $y = \sqrt{\frac{k-25x^2}{16}}$ a representaciones en el registro gráfico del GeoGebra. Además, los estudiantes realizaron conversiones de representaciones en el registro algebraico para el registro gráfico y viceversa, logrando de esta forma, la coordinación de dichos registros.

Dentro de las conclusiones de la investigación, el investigador reconoce que el uso de herramientas tecnológicas, como el GeoGebra, permitió a los estudiantes realizar transformaciones y conversiones en las representaciones de los diversos objetos matemáticos involucrados con el Multiplicador de Lagrange.

Por su parte, para tener una visión de las investigaciones producidas respecto a la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), Collantes y Vigo identifican las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las EDO en el área de Educación Matemática. Collantes y Vigo (2019) mencionan que el problema es la falta de un documento que les permita observar las distintas investigaciones respecto al aprendizaje de las EDO realizados en el área de Educación Matemática.

Por lo tanto, los autores consideran pertinente realizar una investigación bibliográfica del tipo Estado del Arte, donde se plasma una estructura de las diversas investigaciones realizadas durante los últimos 15 años en universidades de Perú, Brasil, Colombia y Chile, dirigidas a niveles de Educación Superior y, en Francia, a nivel de Educación Secundaria en Terminale S (último grado de secundaria). Para ello, realizan un fichaje de las tesis de doctorado y de maestría, seguido de artículos de investigación y resúmenes de congresos, para luego elaborar las respectivas reseñas críticas.

Los resultados de la investigación muestran que, de las 11 investigaciones analizadas, en la que todas dieron importancia a la Modelación Matemática, siete de ellas utilizaron tecnología para el desarrollo de las actividades; seis desarrollaron actividades en relación con el *análisis cualitativo de una EDO*; cinco dieron importancia a la Modelación Matemática, tecnología y análisis cualitativo.

Por lo tanto, los autores concluyen que se da más importancia a la Modelación Matemática. Con respecto al uso de la tecnología digital, los autores destacan que el uso de un software adecuado favorece la visualización, facilita la gráfica del campo de direcciones y posibilita hallar y graficar soluciones de una EDO.

Otra investigación que consideramos es de Reyes, donde es indispensable analizar en qué medida la modelización matemática de los fenómenos del movimiento influyen en el desarrollo y en el significado de la noción de función.

La investigación se realizó con estudiantes de la Escuela Nacional Preparatoria (ENP) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Dichos estudiantes fueron elegidos por la UNAM luego de un concurso de selección y cursaban los tres últimos años de educación secundaria bajo un programa diseñado por la mencionada casa de estudio.

La investigadora tiene por objetivo abordar la noción de función a través de la Modelación Matemática de los ciclos de los fenómenos de movimiento, lo que generó en los estudiantes no sólo las nociones de curva, función, ecuaciones paramétricas y derivadas, sino también los conceptos de distancia, trayectoria, velocidad tangencial, velocidad angular, aceleración y aceleración centrípeta. La investigación de Reyes se enmarca en el Espacio de Trabajo Matemático, bajo la premisa de que es posible generar un espacio de trabajo en donde se desarrolle la noción de función al realizar actividades de modelado cinemático. La metodología que se aplica a lo largo de la investigación es la Ingeniería Didáctica.

Respecto a los resultados de la investigación, un aporte fundamental para el desarrollo de las actividades fue el uso de la tecnología digital Tracker, el cual es un Software gratuito que combina videos y Modelación en computadora, diseñado para la enseñanza de la Física. En este sentido, Tracker permitió la transición del entorno físico al entorno matemático. Los estudiantes realizaron la filmación de un movimiento físico, el cual fue importado al Tracker, y se creó una tabla de valores y una curva, lo cual no necesariamente era una función real de variable real; esto permitió visualizar las variables físicas y sus relaciones entre valores numéricos y gráficos. Debido a que Tracker no genera expresiones algebraicas, el estudiante importa los datos obtenidos por el Tracker al GeoGebra, en donde obtiene, de forma explícita, las funciones y representaciones gráficas y algebraicas de las curvas generadas originalmente por el Tracker.

La investigadora concluye que las actividades realizadas haciendo uso de la tecnología digital propiciaron la coordinación entre los diferentes conceptos teóricos como las nociones de curva, función, ecuaciones paramétricas y derivadas, también los conceptos de distancia, trayectoria, velocidad tangencial, velocidad angular, aceleración y aceleración centrípeta. Todo ello realizadas por los estudiantes durante el proceso de modelado de los fenómenos de movimiento.

A continuación, sintetizamos toda esta información en la Tabla 2, donde presentamos las investigaciones en orden cronológico, el objetivo, teoría y metodología, tecnología digital usada y además las conclusiones relevantes con nuestra investigación.

Tabla 2

Investigaciones que usan Tecnología digital en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Autor y año	Objetivo	Aplicado a	Teoría / Metodología	Conclusiones	Tecnología digital
Proleón, D. (2018)	Analizar la coordinación de los registros de representación semiótica en el aprendizaje de los multiplicadores de Lagrange.	Estudiantes de Economía.	Teoría de Registros de Representación Semiótica / Aspectos de la Ingeniería Didáctica.	El uso de la tecnología digital permitió a los estudiantes realizar transformaciones y conversiones en las representaciones de los diversos objetos matemáticos involucrados con el Multiplicador de Lagrange.	GeoGebra
Collantes y Vigo (2019)	Realizar un mapeo de los diferentes trabajos de investigación efectuados sobre la enseñanza y aprendizaje de la EDO en el área de Educación Matemática.	Estudiantes de Educación Superior y, en Francia, en estudiantes de Educación secundaria.	- / Estado del Arte	Se da más importancia a la Modelación Matemática. Con respecto al uso de la tecnología digital, el uso de un software adecuado favorece la visualización, facilita la gráfica del campo de direcciones y posibilita hallar y graficar soluciones de una EDO.	
Reyes, C. (2021)	Abordar la noción de función a través de la Modelación Matemática de los ciclos de los fenómenos de movimiento.	Estudiantes de Escuela Nacional Preparatoria.	Espacio de Trabajo Matemático / Ingeniería Didáctica.	Las actividades realizadas con el uso de la tecnología digital propiciaron la coordinación entre los diferentes conceptos teóricos como las nociones de curva, función, ecuaciones paramétricas y derivadas.	Tracker, GeoGebra

Las investigaciones mencionadas en la tabla anterior son pertinentes para nuestro trabajo, pues Proleón relaciona la matemática en Educación Superior haciendo uso de la tecnología digital; y Reyes, además de hacer uso de la tecnología digital, se sustenta en la teoría del ETM, el cual también consideraremos como sustento teórico para nuestra investigación. Asimismo, el artículo de Collantes y Vigo es pertinente, ya que nos brinda un panorama de las diversas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las EDO en el área de Educación Matemática que se apoyan en la tecnología digital.

A continuación, presentamos dos investigaciones ligadas al tema de la Educación virtual, de Martínez; y Sin, Bongiovanni y Faner.

Investigaciones sobre Educación Virtual

Según Martínez (2008), el avance de la tecnología de la información y la comunicación permitió la incorporación de la tecnología digital en la modalidad a distancia y en la presencial, lo que ha producido cambios en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esta educación a distancia se usa tanto en las instituciones educativas como en el sector empresarial, como educación virtual o e-learning, y se ha tenido el objetivo de capacitar al personal con diversas metodologías empleadas.

En cuanto a la educación a distancia, la autora señala que es un sistema de comunicación multidireccional, que se puede aplicar en cualquier momento y en cualquier lugar, que fusiona las plataformas digitales con las tecnológicas, que dispone de espacios virtuales y que busca lugares de acercamiento como el aula virtual.

En cuanto a la segunda investigación de referencia que consideramos, Sin, Bongiovanni y Faner (2019) aseguran que las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) posibilitan la Educación Virtual y, sobre las Generaciones de la Educación a Distancia (EaD), "(...) según sus características, clasifican a este tipo de educación en generaciones claramente diferenciadas" (p.2).

La EaD de cuarta generación son los sistemas de educación a distancia que fundamentalmente están apoyados por el uso del Internet, donde los estudiantes reciben materiales multimedia en formato digital a través de Internet, junto con el libre acceso a bibliotecas digitales, y permiten modelos de interacción del tipo profesor-alumno y entre los alumnos, sincrónica como asincrónicamente, por medio de correo electrónico, videoconferencias,

entre otros. Se caracteriza por la integración de las TIC y contribuye a una comunicación más directa y fluida entre el docente y sus estudiantes. A este tipo de EaD se le denomina educación virtual o educación en línea (Sin, Bongiovanni y Faner, 2019, p.3).

Investigaciones que contienen aspectos relevantes sobre ETM, Trabajo matemático, Tareas, Paradigma, Diseño de tareas, ETM idóneo.

La importancia de investigar al respecto de la teoría de Espacios de Trabajo Matemático (ETM), se sustentará en el libro de Kuzniak, *Mathematical Work in Educational Context*, con la revisión y descripción de aspectos relevantes para la tesis.

En él, se realiza una investigación en la teoría de ETM donde se ocupa de manera general en la descripción, comprensión y formación del trabajo matemático. Además, trata no sólo informar de los fenómenos existentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino también pretende influir en su evolución.

De acuerdo con los autores el objetivo de la teoría de ETM es el estudio didáctico del trabajo matemático en el que los estudiantes y profesores están efectivamente comprometidos.

El trabajo matemático debe entenderse como un trabajo intelectual de producción, cuyo desarrollo y finalidad están definidos y sustentados por las matemáticas.

Pero, además, afirman que el componente humano del trabajo implica la necesidad de considerar una dimensión cognitiva, que también debe estar relacionada con la dimensión epistemológica.

El trabajo matemático considera dos aspectos, epistemológico y cognitivo, el cual se puede visualizar a través de la acción de resolución de problemas.

En la teoría de ETM, las tareas son el medio para la resolución de problemas. De Sierpinska (2004) y Nechache (2017) (citado en Kuzniak et al. (2022))

Una “tarea matemática” se refiere a cualquier tipo de ejercicio, pregunta o problema matemático, con suposiciones y preguntas claramente formuladas, que se sabe que los estudiantes pueden resolver de manera oportuna en un espacio de trabajo matemático bien definido (pág. 8).

Al abordar problemas, los estudiantes aplican técnicas y conocimientos de acuerdo con el paradigma respectivo.

En la teoría de ETM, la noción de **paradigma** es crucial ya que ayuda a caracterizar el trabajo matemático realizado.

De acuerdo con Kuhn (1966) (citado en Kuzniak et al. (2022))

Un paradigma representa una combinación de creencias, convicciones, técnicas, métodos y valores compartidos por una comunidad científica; el contexto del libro se da en comunidades educativas.

Para Kuhn, los paradigmas no pueden cohabitar. Sin embargo, en el contexto de las matemáticas, los paradigmas pueden coexistir y apoyar diversos enfoques para resolver problemas y así mejorar la comprensión de diversos conceptos matemáticos. Al respecto de paradigma, esto se revisará más detalladamente en la sección 1.3.

Así, Kuzniak et al. (2022) afirman que un espacio de trabajo matemático (**ETM**) se refiere a una **estructura abstracta organizada**, de tal manera que **genera trabajo matemático** y permite a las personas **realizar tareas** en un dominio matemático específico

Los autores además afirman que la investigación sobre la **formación o transformación del trabajo matemático** tiene como objetivo construir una nueva estructura para el plano epistemológico del trabajo o proporcionar una nueva estructura para el plano cognitivo. Es decir, transformar el trabajo es equivalente a modificarlo y moldearlo detalladamente para hacerlo más adecuado a las expectativas educativas, los requerimientos epistemológicos y las competencias cognitivas de los sujetos; ello está fuertemente relacionado con el diseño de tareas.

Al respecto del **diseño de tareas**, los autores consideran la investigación de Reyes quién utilizó los Kinematics Working Spaces (KWS) y ello le permitió obtener una visión clara de los procesos cognitivos generados por los estudiantes. La investigadora se centró en cómo utilizan las propiedades, las representaciones semióticas y los artefactos asociados con el concepto de función durante la realización de tareas. El objetivo de dichas tareas es estudiar los fenómenos de movimiento.

Resaltamos el hecho de que dichas tareas están diseñadas de tal manera que para resolverlas es necesario movilizar representaciones semióticas, artefactos y propiedades del referencial teórico asociado a la noción en cuestión. Esto es un punto importante y que tomamos como referencia en la presente investigación, pues se basa en el **diseño de tareas utilizando la teoría de ETM**. Es decir, estas tareas están diseñadas específicamente para que cada componente del plano epistemológico, así como las génesis, sean movilizados por los estudiantes durante la realización de estas tareas. Es así como en la investigación de Reyes (2020), la teoría ETM se usa tanto para formar el trabajo como para analizar cómo se completó el trabajo.

Kuzniak et al. (2022) consideran que se deben realizar **dos tipos de análisis** para estudiar el trabajo matemático según la teoría de ETM. El primero es un análisis del **trabajo matemático potencial** y esperado que nos ayuda a anticipar y prever cómo se elaborará potencialmente este trabajo. Una segunda es la del **trabajo matemático real**, es decir, el análisis del trabajo realmente producido por un individuo (o grupo de individuos) durante la ejecución de una tarea.

De acuerdo con los investigadores, el **ETM idóneo** puede verse como una estructura de conexión (entre el ETM de referencia y el ETM personal) diseñada e implementada por un actor-diseñador (docente o investigador) para ayudar a los estudiantes a construir su ETM personal.

Tiene por objetivo **investigar la forma en que el trabajo matemático se diseña, afina y desarrolla** progresivamente en un contexto educativo de una institución determinada. Las investigaciones sobre ETM idóneo se basan en el análisis de cómo se organizan los componentes y procesos cognitivos del ETM de acuerdo con los contenidos y dominios matemáticos enseñados.

De acuerdo con Kuzniak et al. (2022), el término **idóneo** significa que el ETM respectivo tiene como objetivo adaptarse a las distintas limitaciones y dificultades de la enseñanza. Dicho proceso de adaptación requiere identificar la función de cada actor involucrado en la enseñanza y aprendizaje del trabajo matemático. Es decir, los docentes son los responsables del diseño e implementación del ETM y los estudiantes son los destinatarios, pero a través de su actividad y compromiso, también participan en su construcción. Así, definen dos **tipos de ETM idóneo**, el primero es **potencial** y se refiere a la concepción a priori del ETM (aún son sólo posibles y no

han sido realmente implementados hasta ese momento), el segundo es **actual** y depende de la implementación que se lleve a cabo en una clase.

Kuzniak et al. (2022) afirman que el **ETM idóneo potencial** es la primera parte del trabajo matemático idóneo en la escuela. Participan en la reflexión anticipada sobre la implementación efectiva y dependen en gran medida del propósito y motivación del “diseñador-actor” del ETM idóneo. También depende de la cómo los docentes interactúan con los recursos disponibles.

A continuación, para poder justificar la validez de nuestra investigación, presentamos la relevancia académica y profesional en la siguiente sección.

1.2 Justificación

Para iniciar la justificación de la presente investigación, realizamos la justificación académica sobre la base de las investigaciones relacionadas con nuestro estudio, y justificación profesional basadas en las sumillas de la carrera de Economía en diversas universidades del Perú como son la Universidad de Pacífico (UP), Universidad Mayor de San Marcos (UNMSM), Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP), Universidad Nacional del Callao (UNAC) y Universidad de la Escuela Superior en Administración de Negocios (UESAN).

En cuanto a la **relevancia académica**, conviene reconocer que hemos identificado, de manera global, las dificultades que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), y, a su vez, se identificaron investigaciones que realizaron actividades en relación con el análisis cualitativo. Además, la pertinencia del uso de la tecnología digital que se evidencia en la mayoría de las investigaciones.

En las tres tesis doctorales presentadas en las investigaciones de referencia, Arslan (2005), Javaroni (2007) y Barros (2017) concluyen que existe la necesidad de la integración de enfoques distintos al algebraico, en particular, el cualitativo para una mejor comprensión de las EDO; sin embargo, estas referencias muestran también que existen dificultades en la integración del enfoque cualitativo; pero que, con el apoyo de la tecnología digital, es posible su integración. Sobre la base de estas investigaciones, examinaremos el enfoque cualitativo en nuestra investigación.

El rol importante que tiene la tecnología digital en la integración del análisis cualitativo en el estudio de una EDO y un sistema de EDO se justifica por las investigaciones revisadas de

Javaroni y Barros, las cuales las utilizan como una herramienta importante en el estudio de las EDO.

Dentro de las investigaciones que se aplicaron en la Educación Superior, destacamos la investigación de Proleón, quien tiene como sujetos de estudio alumnos de Economía de una Universidad privada del Perú, para el cual se apoyó en el uso de la tecnología digital para el aprendizaje del objeto matemático los multiplicadores de Lagrange, que corresponden a un segundo ciclo de dicha Universidad. En la presente investigación consideramos como objeto matemático a los sistemas de EDO no lineales que corresponden al tercer ciclo también de la misma Universidad privada del Perú.

Por otro lado, el autor hace uso apropiado del GeoGebra junto con una situación problema, mostrando que es posible que dichos alumnos puedan realizar tratamientos de representaciones en el registro algebraico y tratamientos en el registro gráfico. Además, los estudiantes realizaron conversiones de representaciones en el registro algebraico para el registro gráfico y viceversa, logrando de esta forma, la coordinación de dichos registros.

Por otro lado, Reyes (2021) afirma que es importante el uso de la tecnología digital en la enseñanza del movimiento cinemático, todo esto bajo el marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Consideramos pertinente la investigación de la autora porque usaremos el mismo marco teórico en alumnos de Educación Superior, además que también hace uso de la tecnología digital en su estudio.

Así, en la presente investigación, al respecto del uso del uso de la tecnología digital, Kuzniak et al. (2022) sustentan que la enseñanza de las matemáticas se ha visto trastornada por la necesidad de estar alineada con el mundo actual, en primer lugar, para cumplir mejor sus funciones como disciplina de servicio y en segundo lugar para adaptarse mejor al nivel cognitivo real de los alumnos jóvenes que necesitan manipular la realidad con herramientas para construir los objetos abstractos sobre los que se practican las matemáticas. Dicho esto, se justifica el uso de la tecnología digital pues nos brinda una herramienta poderosa en la propuesta didáctica orientada al análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales.

Tomando como referencia a Kuzniak et al., en la presente investigación consideraremos el ETM idóneo potencial, el cual desarrollaremos más adelante en el capítulo III, el cual está orientado al diseño y adaptación de tareas con el objetivo de la formación del trabajo matemático.

Además, porque de acuerdo con los autores, es importante evaluar el impacto de una tarea (puede ser nueva) diseñada específicamente para abordar un concepto. En esta parte, así los autores consideran como la acción más importante el especificar y refinar la secuencia de tareas elegidas o diseñadas para garantizar la enseñanza y el aprendizaje de una noción matemática específica.

En cuanto a la **relevancia profesional**, en la Tabla 3, hemos adaptado la información del Plan de estudios de la carrera de Economía de algunas universidades del Perú en el presente año. La siguiente tabla presenta únicamente los cursos obligatorios en donde se dicta sistemas de EDOs no lineales.

Tabla 3

Cursos en donde se estudian Sistemas de EDO no lineales

Curso	Carrera	Universidad
Matemáticas III	Economía	Universidad del Pacífico (UP)
Matemática para Economía IV	Economía	Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM)
Matemáticas para Economistas	Economía	Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)
Matemática para Economistas II	Economía	Universidad Nacional del Callao (UNAC)
Matemática para Economistas	Economía	Universidad de la Escuela de Administración de Negocios (UESAN)

Fuente: Adaptado del Plan de estudios de la carrera de Economía de la UP, UNMSM, PUCP, UNAC, UESAN del año 2022

De la tabla anterior el tema de Sistema de EDO no lineales se imparte, en su gran mayoría, en cursos del cuarto ciclo, salvo en la Universidad del Pacífico, en donde se imparte en el tercer ciclo.

La importancia del estudio de Sistema de EDO no lineales también se evidencia en los cursos que se encuentran contenidos en cada plan de estudio y sílabo de la carrera de

Economía de las respectivas universidades mencionadas en la Tabla 3. Además, estos cursos son, a su vez, requisitos de cursos superiores dentro de esta carrera profesional.

Para tener una referencia sobre cómo se desarrolla la conexión de los cursos mencionados en la Tabla 3 con los de los siguientes ciclos, sintetizamos esta información en la Tabla 4, en la cual se muestran los cursos previos y superiores de la carrera profesional de Economía de las distintas universidades seleccionadas.

Tabla 4

Cursos en donde se usa como herramienta los Sistemas de EDO no lineales

Universidad	Tercer ciclo	Cuarto ciclo	Quinto ciclo	Sexto ciclo
Universidad del Pacífico (UP)	Matemáticas III		Macroeconomía II	Macroeconomía III
Universidad Nacional Mayor de San Marcos (UNMSM)		Matemáticas para Economía IV	Macroeconomía III	
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)		Matemáticas para Economistas 3	Macroeconomía I	Macroeconomía II
Universidad Nacional del Callao (UNAC)		Matemáticas para Economistas II	Teoría Macroeconómica III	
Universidad de la Escuela de Administración de Negocios (UESAN)		Matemáticas para Economistas	Macroeconomía II	

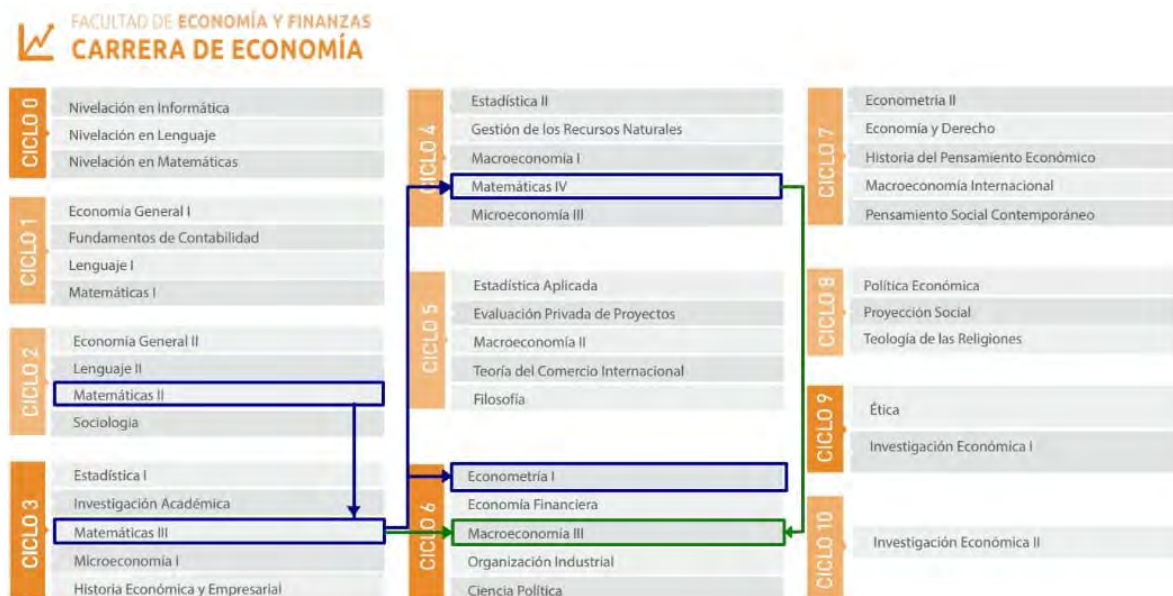
Fuente: Adaptado del plan de estudios de la carrera de Economía de la UP, UNMSM, PUCP, UNAC, UESAN 2022

En la Tabla 4, observamos que los primeros cursos en los cuales se estudia los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales son Matemáticas III, Matemática para Economía IV, Matemática para Economistas 3, Matemáticas para Economistas II y Matemática para

Economistas. En particular, el plan de estudios de la carrera de Economía en la Universidad del Pacífico se puede observar en la siguiente Figura 1.

Figura 1

Plan de estudios de la carrera de Economía de la Universidad del Pacífico



Fuente: Universidad del Pacífico. Carrera de Economía.

De la Figura 1, es importante mencionar que, en la Universidad del Pacífico (UP), Matemáticas III es un curso obligatorio para las carreras de Economía y de Finanzas, ya que tiene como requisito Matemáticas II y sirve como requisito para los cursos de Matemáticas IV y Econometría I. Además, estos cursos a su vez sirven como requisito para los cursos de Macroeconomía. Específicamente nuestro objeto de estudio es de mucha utilidad en el curso de Macroeconomía III.

Los métodos matemáticos que se emplean y desarrollan en este curso de Matemáticas III son muy útiles también en otras áreas del Análisis Económico. Su manejo resultará particularmente significativo para los alumnos a la hora de cursar otras disciplinas como la Macroeconomía y la Econometría. Además, en los cursos donde se realice el estudio de control óptimo.

De acuerdo con el sílabo del curso de Matemática III de la UP (ver Anexo 1), esta asignatura proporciona a los estudiantes conceptos claves de álgebra matricial y de cálculo multivariado, con el propósito de incorporarlos plenamente en el instrumental matemático más utilizado en el análisis económico estático y en el desarrollo de técnicas econométricas. Además, introduce a los estudiantes al análisis dinámico continuo y discreto, univariado y multivariado, y sus aplicaciones en las teorías económicas, financieras y econométricas.

En la Unidad 4, en el sílabo de Matemática III de la UP, se aborda las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), donde inicialmente se estudian las EDO de primer orden; luego pasan a la estabilidad y análisis cualitativo; diagramas de fase y linealización; y ecuaciones no lineales de primer orden. Estos temas se amplían con el tema de ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de ecuaciones lineales, análisis cualitativo de sistemas diferenciales no lineales, diagramas de fase y linealización y caracterización de equilibrios. Siempre se pondrá especial énfasis en las diversas aplicaciones a modelos económicos, como, por ejemplo, modelos de mercado con diferentes tipos de expectativas, modelos de ciclo económico, modelos de crecimiento, modelos de poblaciones, entre otros.

De acuerdo con el sílabo, al finalizar el curso de Matemáticas III en la UP, el alumno será capaz de formular y resolver problemas matemáticos vinculados a modelos económicos y financieros, tanto estáticos como dinámicos, utilizando los conceptos de álgebra lineal y cálculo multivariado. Además, será capaz de analizar cuantitativa y cualitativamente la estabilidad de las soluciones a sistemas de ecuaciones, tanto estáticos como dinámicos (ver Anexo 1).

Luego de una revisión de los sílabos de las distintas universidades, encontramos que nuestro objeto matemático sirve como insumo a los cursos de Macroeconomía, de donde destacan dos aplicaciones: el modelo de desbordamiento (“overshooting”) del tipo de cambio de Dornbusch y el modelo de Ramsey de crecimiento económico.

Actualmente, los estudiantes de Economía necesitan de herramientas matemáticas para la comprensión de diversas aplicaciones en los cursos superiores de Economía como la Macroeconomía. El estudio del análisis cualitativo de una EDO y un sistema de EDO es una herramienta importante y fundamental en la teoría económica.

A continuación, mostramos uno de estos modelos económicos en la Figura 2 y su respectivo Diagrama de Fase en la Figura 3.

Figura 2

Modelo económico de Ramsey-Cass-Koopmans

El [modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans](#) establece las siguientes relaciones dinámicas entre el stock de capital per cápita de una economía, k , y el consumo per cápita, c :

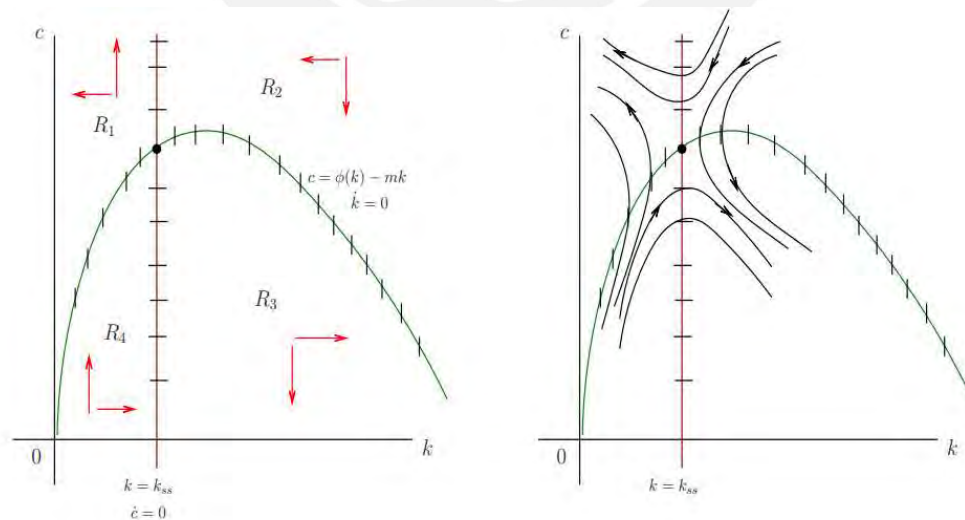
$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \quad \text{y} \quad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m + \rho) \quad (*)$$

La primera ecuación es una regla de acumulación de capital e indica que el capital per cápita se incrementa siempre que la inversión en nuevo capital, que es igual al ahorro $y - c$ donde $y = \phi(k)$ es el nivel de ingreso (producción), supere a la cantidad necesaria para reponer el capital depreciado, mk . La función ϕ es cóncava, $\phi' > 0$ y $\phi'' < 0$. La segunda ecuación (llamada [ecuación de Euler](#)) es el resultado de un problema de optimización dinámico, donde $\rho \in]0, 1[$ es la tasa de descuento de los hogares.

Este es uno de los modelos económicos importantes que se presentan en el curso de Matemática III. Se observa que la función Φ es estrictamente cóncava, con lo cual las ecuaciones determinan un sistema no lineal. A pesar de no tener soluciones explícitas para este sistema, se puede hacer un análisis cualitativo para obtener un esbozo de las trayectorias, tal como se muestra en la Figura 3.

Figura 3

Diagrama de Fase del Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans



Al respecto, existe una variedad de procedimientos que permiten determinar las soluciones analíticas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); sin embargo, en muchos casos, las soluciones cuantitativas no se pueden obtener o bien no son de interés.

En relación con este tema, consideramos la investigación de Bonifaz y Winkelried, pues dichos autores desarrollan un libro para los alumnos de la carrera de Economía, sujetos para los que está orientada esta investigación, de manera particular material que fue elaborado como apuntes de estudio en la Universidad privada donde orientamos nuestra investigación y además es un libro base para los docentes de dicha universidad, donde además se aborda nuestro objeto matemático de manera detallada y con la inserción de diversos modelos propios de la Economía, el cual es un plus a diferencia de otros materiales que tratan el mismo objeto de estudio. Es importante mencionar que este libro será considerado en el análisis del libro didáctico en el Capítulo II.

Los investigadores afirman que ejemplos de estos casos se dan cuando la expresión de la EDO es desconocida. Cuando un sistema es no lineal o cuando el foco de atención solo se concentra en la estabilidad de la EDO o del sistema de EDO y no en su solución explícita. Así, los autores consideran relevante aproximar las trayectorias o realizar un análisis cualitativo sobre la dinámica interior de la EDO.

En lo que concierne a los Sistemas de EDO, estos pueden clasificarse como lineales y no lineales. Chiang y Wainwright (2006) afirman que, en el caso de los sistemas de EDO lineales, las soluciones son cuantitativas y existen aplicaciones como el modelo de inflación desempleo. Para el caso de los Sistemas de EDO no lineales, existe la técnica de los diagramas de fase para el análisis de las soluciones, ya que, por medio de esta técnica, se puede responder preguntas cualitativas: las relacionadas con la ubicación y la estabilidad dinámica de los equilibrios Inter temporales.

Una de las aplicaciones de los sistemas no lineales es el modelo de la inflación y la regla monetaria de Obst, la cual muestra la ineficacia del tipo convencional de regla de política monetaria contra cíclica (de ahí la necesidad de una nueva) cuando está funcionando un mecanismo de ajuste de la inflación. Otra técnica cualitativa para analizar un Sistema de EDO no lineal es realizar una aproximación lineal de dicho sistema mediante una expansión de Taylor alrededor de su equilibrio.

Por lo expuesto, en la formación del futuro economista, vemos pertinente realizar una propuesta didáctica para el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales y con el uso de la tecnología digital.

Como estamos interesados en que la propuesta didáctica propicie el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, consideramos que debe tener como características principales el uso de **representaciones** semióticas en relación con un sistema de EDO no lineal para favorecer la identificación de sus respectivas singularidades (puntos de equilibrio). Además, en la propuesta se debe utilizar **herramientas matemáticas** para determinar el tipo de singularidad y **tecnología** para esbozar el comportamiento de sus respectivas soluciones.

Finalmente, la propuesta debe hacer uso del **referencial teórico** lo que va a permitir justificar el tipo de comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal.

Por ello, la teoría que sustenta el desarrollo de esta investigación es la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) propuesto por Kuzniak. Además, de acuerdo con Montoya y Vivier (2016), la teoría ETM se puede utilizar para realizar un análisis previo, análisis de situaciones de clase y trabajo individual del alumno.

A continuación, describiremos aspectos teóricos del ETM que son relevantes en nuestra investigación.

1.3 Espacio de Trabajo Matemático

Respecto a la noción de ETM, Kuzniak (2011) afirma que se basa en algunas características que fueron obtenidas por estudios previos sobre Espacio de Trabajo Geométrico, la cual fue introducida por Houdement y Kuzniak en el año 2006, y que surge con la necesidad de profundizar en otros dominios de la Matemática.

Por su parte, Kuzniak y Richard (2014) han afirmado lo siguiente:

“Esta noción se precisa con el objetivo de comprender mejor lo que, desde el punto de vista didáctico, se pone en juego alrededor del **trabajo matemático** en un marco escolar. El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos”.

Al respecto, Kuzniak y Richard (2014) afirman que el trabajo matemático está en el corazón de la evolución, lo que lleva lógicamente a proporcionar a esta noción un lugar central en la didáctica de las Matemáticas. El trabajo al que se refiere está basado en una actividad racional orientada hacia un objetivo particular, que puede apoyarse o no en el uso de un cierto

número de instrumentos y artefactos específicos. En Matemáticas, el objetivo de esta actividad estará centrado en los objetos estudiados por los matemáticos.

Kuzniak (2011) define el **ETM** como un ambiente organizado para favorecer la construcción de un conocimiento matemático en un nivel y dominio (Geometría, Álgebra, Análisis, Probabilidades, entre otros) específico. Es decir, uno de los objetivos principales es construir conocimiento durante la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

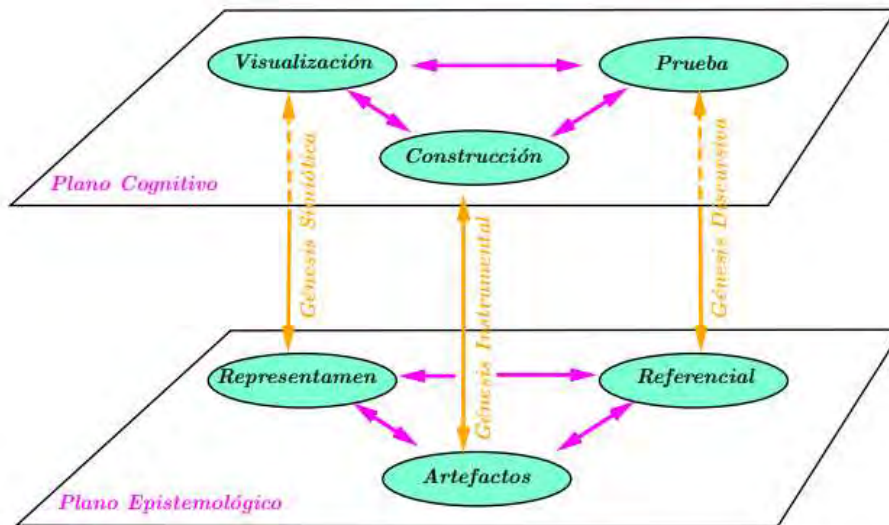
El ETM es estructurado por dos planos fundamentales: el **plano epistemológico**, que tiene que ver con los contenidos matemáticos y que deben organizarse con un propósito determinado, que va a depender del dominio matemático en el que se encuentre; y el **plano cognitivo**, relacionado con los procesos de visualización que son vinculados con la representación, un proceso de construcción que es determinado por los instrumentos utilizados y un proceso discursivo que produce argumentos y pruebas.

La articulación de estos planos se activa mediante tres génesis: una **génesis semiótica**, asociada a los signos en el sentido de Peirce, a las representaciones de los objetos matemáticos en el sentido de Duval y los procesos de visualización; una **génesis instrumental** que permite a los artefactos en el sentido de Rabardel operar en el proceso de construcción, es decir, empleado como un medio para la acción; y una **génesis discursiva** que hace uso de los elementos que pertenecen al referencial teórico de la Matemática para sustentar el razonamiento matemático (Kuzniak, 2011 citado en Henríquez y Montoya, 2015).

Se puede sintetizar y visualizar todo lo descrito hasta el momento en la Figura 4.

Figura 4

Articulación de los Planos Epistemológico y Cognitivo



Fuente: Adaptado de Kuzniak (2011, p. 20)

Los articuladores que vemos en la Figura 4 permiten describir el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) para reconocer los conocimientos que una persona tiene, además de diseñar una situación de aprendizaje en un ámbito de Investigación.

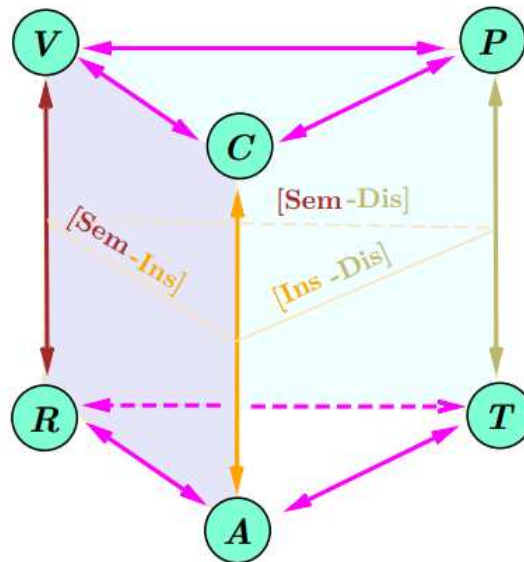
Dichos articuladores nos permiten considerar tres tipos de **planos verticales** estrechamente relacionados: planos Semiótico Instrumental [Sem-Ins], Semiótico Discursivo [Sem-Dis], e Instrumental Discursivo [Ins-Dis].

En términos generales, dichos planos actúan sobre la base de ciertas génesis y sus relaciones con el plano epistemológico y cognitivo (Kuzniak, 2011 citado en Hernández, 2017).

En Hernández, (2017), la autora propone un diagrama en el que se ha abreviado como “V” a la visualización, “R” al representamen, “C” a la construcción, “A” artefacto, “P” correspondiente a la prueba y “T” al referencial, que se puede visualizar en la Figura 5.

Figura 5

Planos Verticales en el ETM



Fuente: Adaptado de Hernández (2017, p. 43)

Los planos que visualizamos en la Figura 5: el primer plano Semiótico Instrumental [Sem-Ins] está sustentado por las génesis semiótica e instrumental; el segundo plano Semiótico Discursivo [Sem-Dis] está sustentado bajo las génesis semiótica y discursiva y, finalmente, el tercer plano Instrumental Discursivo [Ins-Dis], que se basa en las génesis instrumental y discursiva (Kuzniak, 2011 citado en Hernández, 2017).

A su vez, los tres planos están relacionados por las distintas génesis, por ejemplo, el plano [Sem-Dis] y [Ins-Dis] están conectados mediante génesis discursiva; los planos [Sem-Dis] y [Sem-Ins], mediante la génesis semiótica, entre otros.

Por otro lado, cuando un individuo (estudiante o profesor) se enfrenta a un problema determinado, dependiendo de la función de la reflexión de este, se identifican los tipos de Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

En ese sentido, acudimos a la explicación que ofrecen Henríquez y Montoya (2015), donde se describen los tres tipos de ETM: un **ETM de referencia**, que tiene que ver con los criterios matemáticos; un **ETM idóneo**, que es un espacio definido en términos de la enseñanza en una institución dada con una función definida; y un **ETM personal**, que está

definido como un espacio propio de cada individuo y la forma en que este afronta un problema matemático, de acuerdo a la reflexión de sus conocimientos matemáticos.

Al respecto, Kuzniak y Richard (2014) afirman que la elección y la organización de las tareas propuestas a los alumnos por los profesores son esenciales en la constitución del ETM idóneo. Ofrece la posibilidad de resolver, de manera adecuada, lo que se les propone. Es decir, conforme a las expectativas institucionales descritas de manera más o menos explícita en el ETM de referencia. Estas elecciones y la gestión de las actividades dependen, en gran parte, del ETM personal del profesor.

En esta investigación, nos concentraremos de manera particular en el análisis que están relacionados principalmente al ETM idóneo. Frente a esta orientación, Kuzniak y Richard (2014) afirman que, en una institución escolar dada, la resolución de un problema supone que un ETM idóneo se puede organizar para permitir a un estudiante comprometerse en la resolución del problema. De acuerdo con los investigadores, este **ETM idóneo** debe necesariamente cumplir dos condiciones: por una parte, posibilitar el trabajo en el paradigma correspondiente a la problemática considerada y; por otra parte, estar «bien construido», en el sentido en que sus diferentes componentes están organizados con criterios de validez. El diseñador desempeña un rol parecido al del arquitecto que diseña un espacio de trabajo para usuarios potenciales.

Es importante señalar que los aspectos teóricos descritos hasta este momento son de manera general; es decir, fueron considerados aspectos del ETM en un marco general. Al respecto, en esta investigación, nos sustentaremos de acuerdo con el ETM en el dominio del análisis, por lo que definiremos algunos aspectos que lo constituyen.

Sobre los Paradigmas de acuerdo con Kuzniak y Richard (2014), en el marco teórico de los Espacio de Trabajo Matemático (ETM), la noción de **paradigma** orienta y estructura la organización de los componentes, por lo que, debido a sus diferentes funciones, actúan en la especificidad de los diversos paradigmas en juego. Un paradigma se instituye cuando una comunidad de individuos acuerda formular problemas, así como organizar sus soluciones, priorizando ciertas herramientas o formas de pensamiento.

Sobre el **ETM en el Análisis**, en nuestra investigación precisamente la propuesta didáctica se encuentra principalmente en el **Dominio del Análisis** pues en las tareas de la propuesta se espera utilicen herramientas de Álgebra (pues hay procesos operatorios con polinomios, matrices), seguidas de herramientas de Análisis (pues bajo ciertas condiciones se

hace uso de un teorema para determinar el tipo de singularidad. Además, hay un estudio de los signos de las componentes del vector tangente para el esbozo de las trayectorias).

Montoya y Vivier, como parte del proyecto C13H03, propusieron tres **paradigmas en el Dominio del Análisis**, con el fin de caracterizar el trabajo de análisis. Estos paradigmas los identificaron teniendo en cuenta perspectivas históricas y Matemáticas, considerando los planes de estudio y datos chilenos, así como datos franceses; sin embargo, el objetivo de su estudio fue establecer paradigmas para analizar los datos y currículum de cualquier país.

Los autores describen el trabajo matemático y que este es guiado por paradigmas que caracterizan los diferentes Espacios de Trabajo Matemático (ETM). En una institución determinada, el uso de un paradigma de trabajo puede interpretarse como un elemento del contrato didáctico; sin embargo, muchos paradigmas diferentes pueden coexistir más o menos explícitamente en una sola institución.

Los investigadores describen los tres paradigmas existentes:

Análisis-Geométrico/Aritmético (AG), que permite interpretaciones con supuestos implícitos, basados en la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.

Análisis-Calculatorio (AC), donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos, explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.

Análisis-Real (AR), caracterizado por un trabajo que considera la aproximación y abiertos, incluso lo topológico; definiciones y propiedades son establecidas teóricamente permitiendo un "trabajo ϵ " (tipo de trabajo o pensamiento que se utiliza, incluso de manera informal, para hablar de cantidades pequeñas insignificantes).

Según Hernández (2017), esto es, sin recurrir necesariamente al análisis no estándar o a los infinitésimos del análisis provisto con la topología usual de los reales) específico de este paradigma cotas, desigualdades, "lo despreciable".

Montoya y Vivier (2016) afirman que, en una institución determinada, por la naturaleza del objeto matemático considerado y por los niveles en el cual los docentes enseñan, es probable que se pueda observar la presencia de varios paradigmas en una misma actividad matemática.

Es importante mencionar que, en las tareas de la propuesta didáctica de la presente investigación, el trabajo matemático se identificaría en los tres paradigmas del análisis y el

trabajar en más de un paradigma ayudaría a evitar errores, tal como afirman Montoya y Vivier (2016).

A continuación, como estamos interesados en que la propuesta didáctica propicie el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales y teniendo en cuenta las características principales que consideramos en la propuesta, para entender este trabajo presentaremos la pregunta de investigación, la cual trataremos de responder con base a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM).

1.4 Pregunta y objetivos de la investigación

A continuación, planteamos la siguiente pregunta y objetivos de la investigación.

Pregunta de investigación

¿Cómo una propuesta didáctica basada en el ETM propicia el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía?

Objetivo general

Analizar una propuesta didáctica basada en el ETM que propicia el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía.

Objetivos específicos

Para alcanzar el objetivo general, consideramos seguir los siguientes objetivos específicos:

Diseñar una propuesta didáctica conformada por una secuencia de tareas orientada al análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía.

Reconocer los paradigmas del Dominio del análisis que emergen en la solución esperada de las tareas de la propuesta didáctica.

Analizar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva en la solución esperada que propician las tareas de la propuesta didáctica.

Analizar la activación de los planos verticales en la solución esperada que propician las tareas de la propuesta didáctica.

En la siguiente sección, presentaremos la dirección metodológica de la investigación y los procedimientos metodológicos describiendo cada una de las etapas que la configuran.

1.5 Metodología y procedimientos metodológicos

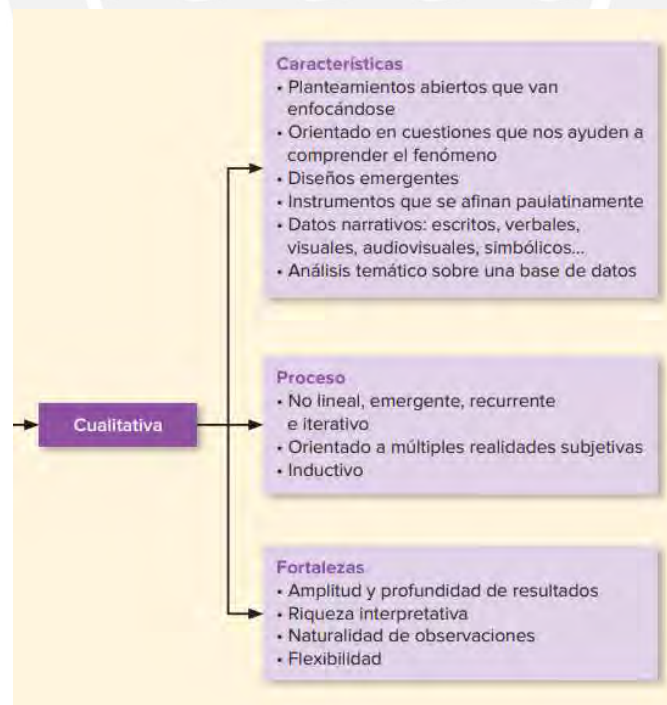
La metodología que seguiremos a lo largo de esta investigación es de tipo cualitativa.

Al respecto, Hernández y Mendoza (2018) afirman que la información útil para alcanzar tus metas proviene de las personas involucradas en los procesos y programas más importantes de la organización y que conversando con ellas es factible obtener esta información. Sin embargo, como una alternativa a lo anterior, se puede hacer uso de la investigación cualitativa con el propósito de saber qué acciones funcionan adecuadamente y por qué, sistematizarla y profundizarla, y principalmente para responder el por qué determinadas acciones funcionan mejor.

Este tipo de investigación tal como afirman los autores, brindará un panorama completo y detallado de lo que piensan todos los sujetos en relación (si están motivados para el cambio, si se encuentran escépticos, si tienen sugerencias específicas de mejora, etc.) y con ello, que las sugerencias sean más realistas y pertinentes (pág. 390). Para un mejor entendimiento al respecto mostramos la Figura 6 con las características, proceso y fortalezas de la investigación cualitativa.

Figura 6

Características, proceso y fortalezas de la investigación cualitativa



Fuente: Hernández y Mendoza (2018, pág.3)

De acuerdo con los autores, la investigación cualitativa le puede servir al docente o maestro a comprender completamente el impacto que tiene su enseñanza en los alumnos, es decir que además de determinar las acciones que funcionan, conocer los procesos que surgen de dichas acciones, así como los obstáculos que podrían percibir sus alumnos para lograr desarrollar de manera óptima dichos procesos.

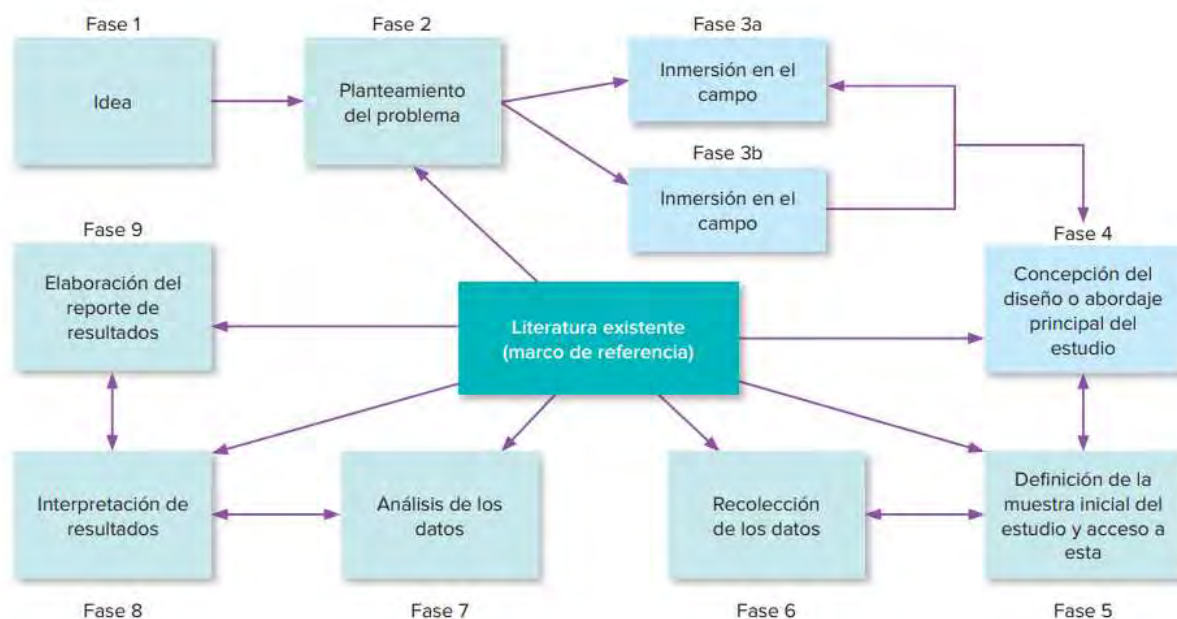
Hernández y Mendoza (2018) han afirmado lo siguiente:

Las investigaciones cualitativas suelen producir preguntas antes, durante o después de la recolección y análisis de los datos. La acción indagatoria se mueve de manera dinámica entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien “circular” en el que la secuencia no siempre es la misma, puede variar en cada estudio. (pág. 8)

El proceso que mencionan los autores se representa en la siguiente Figura 7, el cual afirman puede ser flexible.

Figura 7

Procesos de la investigación cualitativa

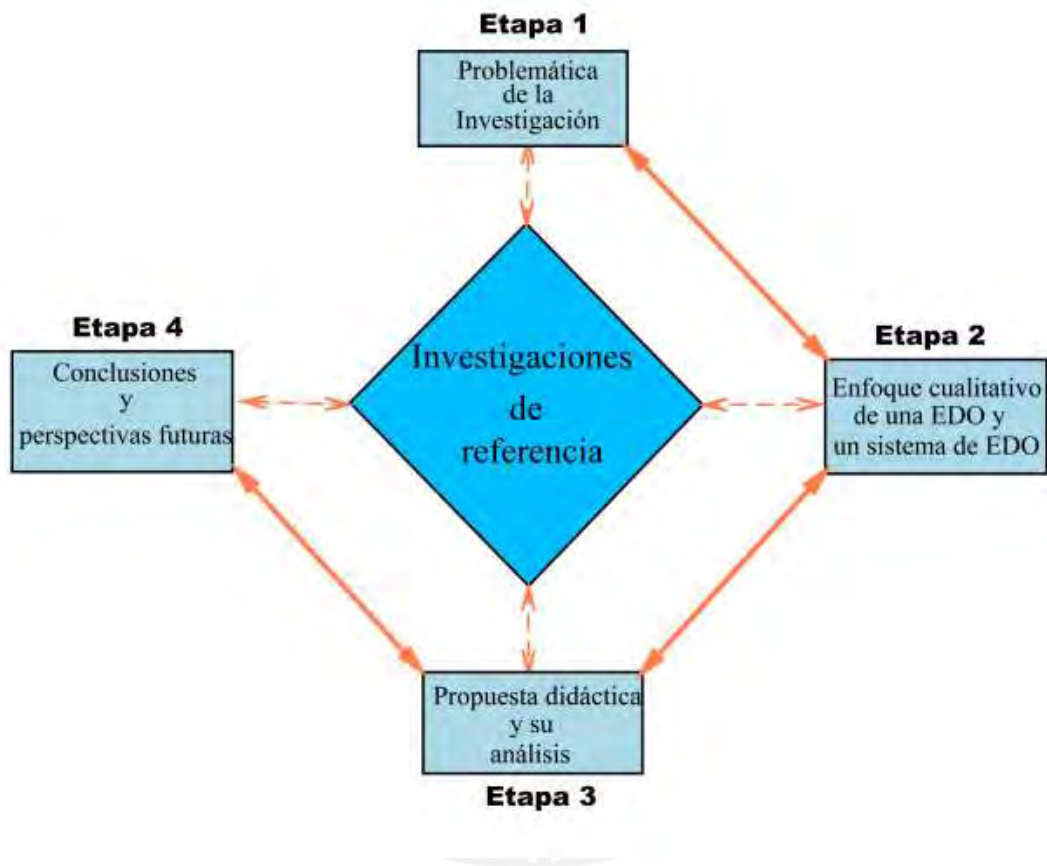


Fuente: Hernández y Mendoza (2018, pág. 8)

En ese sentido, hemos estructurado los procesos metodológicos que guiarán nuestra investigación, que es desarrollada en cuatro etapas, y que lo sintetizamos a través de un esquema que se puede ver en la siguiente Figura 8.

Figura 8

Esquema de los procedimientos metodológicos



Fuente: Adaptado de Hernández y Mendoza (2018, pág. 8)

A continuación, se describen cada una de las cuatro etapas de la presente investigación:

Etapa 1: Problemática de la investigación

Esta etapa desarrollada en el capítulo I, donde se realizó una revisión de las investigaciones de referencia segmentadas en cuatro grupos: un primer grupo de investigaciones que están referidas al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y su análisis cualitativo; el segundo grupo, que está conformado por investigaciones que hacen uso de la tecnología digital para favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje

en la Educación Superior; un tercer grupo, que trata de investigaciones sobre Educación Virtual, y, el cuarto grupo, que trata Investigaciones que contienen aspectos relevantes sobre ETM, trabajo matemático, tareas, paradigma, diseño de tareas y ETM idóneo, el cual es el referente teórico que sustentará nuestra investigación.

Seguidamente, se realizó la justificación en dos aspectos: una justificación académica, sobre la base de investigaciones relacionadas con nuestro estudio, y justificación profesional, basados en las sumillas de la carrera de Economía en diversas universidades del Perú.

Luego, se describieron aspectos de la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM) y se pone en manifiesto los conceptos teóricos relevantes para esta investigación. Seguido de esto, se planteó la pregunta y los objetivos de investigación.

Para el desarrollo de la investigación, se consideró la metodología del tipo cualitativa y se describieron los procedimientos metodológicos que guiaron la investigación. Además, se realizó una entrevista a docentes universitarios sobre los conceptos matemáticos en relación con nuestro objeto de estudio.

Etapa 2: El análisis cualitativo de una EDO y un Sistema de EDO

Esta etapa es desarrollada en el capítulo II y como es de nuestro interés identificar luego las características de las tareas de la propuesta didáctica sobre análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía. Por ello, se presentó dos aspectos con respecto al objeto de estudio: aspecto epistemológico y aspecto didáctico.

Primero, desde un aspecto epistemológico, se estudia sistemas de EDO lineal, pues para realizar el respectivo análisis cualitativo se realiza la linealización del sistema de EDO no lineal. Además, se realiza el estudio del Diagrama de Fase como herramienta fundamental para este tipo de análisis cualitativo, haciendo uso de la herramienta tecnológica como Matlab, Bluffton y Wolfram. También, se presentan algunas aplicaciones a la Economía a través de los modelos económicos. Este estudio se realizó desde un aspecto epistemológico,

Luego, se presenta un análisis de la organización del estudio de este análisis cualitativo realizado por dos autores en un libro de Economía, elegido por la pertinencia que tienen, que son usualmente consultadas y referenciadas en los cursos (Matemática III, Macroeconomía, Matemática avanzada) que contienen este objeto matemático para la carrera de Economía en la Universidad del Pacífico (UP).

Etapa 3: Propuesta didáctica y su análisis

Este trabajo de investigación es un estudio cualitativo y en esta etapa, que es desarrollada en el capítulo III, se muestra primero el diseño de una propuesta didáctica y luego los análisis a priori. En términos del ETM idóneo potencial (análisis a priori), el trabajo de investigación está posicionada desde una perspectiva de enseñanza, el cual tiene que ver con el diseño de propuesta y con el análisis a priori de la propuesta.

La propuesta didáctica está conformada por tres **tareas**, las cuales tienen las siguientes intenciones:

Tarea 1: Intención netamente disciplinar, está estructurada de esa manera con el propósito de integrarlos al uso de la herramienta matemática como herramienta de análisis en la Economía.

Tarea 2: Tiene relación con el uso de la tecnología, aquí nos pasamos de una situación disciplinar a una situación que utiliza tecnología. Se planteó así con el propósito de que los alumnos manipulen las distintas representaciones del objeto matemático, permitiendo que entre el sujeto y el objeto matemático se logre una interacción directa.

Tarea 3: Intención interdisciplinar con la Economía, aquí articulamos con esta disciplina porque de acuerdo con Doig et al. (2019), los estudios empíricos han demostrado que la serie de prácticas interdisciplinarias, tienen un impacto positivo en las actitudes de los docentes y en la de los alumnos hacia estas prácticas innovadoras, las cuales involucran a las disciplinas que ayudan a los alumnos a resolver problemas de indagación en el aula. Creemos importante la interdisciplinariedad en el aula, en nuestra tesis la aplicación a la Economía se realizará a través del Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, lo que favorecerá de manera positiva el aprendizaje de los estudiantes.

El **tiempo** destinado para cada una de las tareas es de la siguiente manera: **T1** y **T2** es de 50 minutos cada una, mientras que para la tarea **T3** es de 100 minutos aproximadamente.

Respecto al **análisis** (a priori), este considera cuatro fases:

Fase 1: Descripción de la tarea.

Fase 2: Presentación del enunciado de la tarea.

Fase 3: Solución esperada

Fase 4: Análisis teórico desde el ETM.

Respecto al uso del ETM para el análisis del trabajo matemático, que promueven dichas tareas de la propuesta didáctica, se hace uso de un protocolo (ver Tabla 5), el cual fue una adaptación del protocolo usado en Henríquez et al. (2021).

Tabla 5

Protocolo para el análisis de las tareas en el ETM

	Criterio	Componentes Articuladores	Descripción	
ETM	Génesis	Semiótica	Representamen	Tiene que ver con los procesos de visualización y cómo se representan esos elementos en matemática. Por ejemplo, en el dominio del cálculo manejamos en el registro algebraico símbolos, letras que representan cierto significado a nivel cognitivo.
			Visualización	
		Instrumental	Artefacto	La génesis instrumental se activa cuando el artefacto va a tomar el rol de instrumento. Es decir, va a ayudar a responder una determinada tarea cuando hacemos uso de ese artefacto. Dicho artefacto puede ser material (regla y compás, etc.), tecnológico (GeoGebra, Matlab, etc.) o simbólico (fórmulas, trazos, etc.).
		Construcción		
	Discursiva	Referencial	Tiene que ver con que el sujeto necesita una justificación, un argumento para dar respuesta a una tarea. La génesis discursiva se activa porque para realizar una prueba está haciendo uso de elementos que pertenecen al referencial teórico de la matemática.	
		Prueba		
Planos Verticales	[Sem – Ins]	Génesis Semiótica	La activación del plano vertical [Sem – Ins] se da cuando las génesis Semiótica e instrumental se activan en el proceso de responder alguna tarea.	
		Génesis Instrumental		
	[Ins – Dis]	Génesis Instrumental	La activación del plano vertical [Ins – Dis] se da cuando las génesis instrumental y discursiva se activan en el proceso de responder alguna tarea.	
		Génesis Discursiva		
	[Sem – Dis]	Génesis Semiótica	La activación del plano vertical [Sem – Dis] se da cuando las génesis Semiótica y discursiva se activan en el proceso de responder alguna tarea.	
		Génesis Discursiva		

Fuente: Adaptado de Henríquez et al. (2021, p. 129)

La propuesta didáctica que se propone puede ser aplicada en la modalidad presencial, así como en la modalidad virtual.

Etapas 4: Conclusiones y perspectivas futuras

Con el análisis de los resultados, se presenta las conclusiones y reflexiones que se puedan extraer de la investigación, desde el ETM, así como recomendaciones para futuras investigaciones como producto de este trabajo.

En el siguiente capítulo, describiremos sistemas de EDO lineales y el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales desde dos aspectos: un contexto matemático, donde se realizará un estudio epistemológico y otro didáctico con relación a la Economía.



Capítulo II: Análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales

En este capítulo, se desarrolla dos tipos de estudio con respecto al objeto matemático: el primero corresponde a un estudio matemático que considera algunos aspectos históricos del análisis cualitativo de las de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); el segundo considera un estudio epistemológico y didáctico, esto debido a la gran conexión que existe entre el contenido y sus aplicaciones a la Economía.

En esta parte, se trata de presentar la Matemática e identificar lo que se enseña y cómo se enseña en los libros de textos sobre este análisis cualitativo de las EDO para la carrera de Economía.

2.1 Aspectos históricos del Análisis Cualitativo de las EDO

Para presentar el origen y evolución del análisis Cualitativo de las EDO, consideraremos el análisis histórico que Arslan realiza sobre las ecuaciones diferenciales.

Manifiesta que, a finales del siglo XVIII, con los trabajos de Abel (1802-1829) y E. Galois (1811-1832), se anunciaron que algunas ecuaciones diferenciales, especialmente las ecuaciones no lineales, no tenían soluciones que puedan describirse mediante fórmulas. Liouville demostró, en 1841, que no era posible resolver algunas ecuaciones diferenciales incluso de orden inferior, como $y' = x^2 + y^2$.

Los teoremas de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden solo se establecieron en 1876 por R. Lipschitz (1832-1903). Por lo tanto, el siglo XIX fue dominante, no solo por el estudio de la existencia y unicidad de soluciones y funciones de variables complejas, sino también por el nacimiento de la resolución digital.

Frente a todas estas dificultades que existían, los matemáticos desarrollaron un método sencillo, económico y eficaz para abordar las soluciones de una ecuación diferencial: esta es la resolución aproximada. Algunas de las contribuciones de Euler, en 1840, llevaron a un método conocido hoy en día como "el método de Euler", sin embargo, si los primeros métodos digitales datan del siglo XIX, el desarrollo del análisis numérico de estos métodos solo se llevó a cabo desde 1950, simultáneamente con la aparición de las primeras computadoras electrónicas que permiten la implementación efectiva de los algoritmos construidos.

En la última mitad del siglo XX, muchos matemáticos e informáticos aplicaron métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales y con el desarrollo de la informática condujo a la generación con una armadura completa de métodos digitales. Hoy, la magnitud de estos métodos es tan amplia que nos permiten probar el teorema de existencia.

Siguiendo en la línea de las ecuaciones diferenciales no lineales, a principios del siglo XIX, se evidenció sobre otra línea de investigación, comenzando por Cauchy, cuyos pasos fueron seguidos entre otros por C. Briot (1817-1882), JC Bouquet (1819-1885) y LI Fuchs (1833-1902). Los matemáticos comenzaron a estudiar las propiedades de las curvas integrales en la vecindad de un punto.

A base de estos resultados, Henri Poincaré (1854-1912), al tiempo que introducía nuevas funciones trascendentes, se embarcó en el estudio de comportamientos globales de las curvas solución y se rompió con el punto de vista local iniciado por sus predecesores. Con ello, se inauguró así la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. El principal objetivo de esta teoría es estudiar cualitativamente las curvas representativas de las soluciones, los puntos singulares y la forma de la curva en las proximidades de un punto singular.

En ese sentido, Javaroni (2007) afirma que los fundamentos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se desarrollaron a finales del siglo XIX por Henry Poincaré (1854-1912) y por Alexander Liapunov (1857-1918).

Poincaré hizo un amplio uso de métodos geométricos con respecto a las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales como curvas en un espacio apropiado. Un nuevo enfoque para determinar soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales, que gobierna el movimiento planetario, la estabilidad de los planetas y las órbitas de los satélites fue iniciada por él.

Las ecuaciones para el movimiento de tres cuerpos no se pueden resolver explícitamente en términos de funciones elementales conocidas. Por tanto, el problema de la estabilidad no se pudo resolver examinando la solución analítica, ya que esta no podía ser explicitada, por lo que sugirió un método en el que se podría resolver el problema examinando las ecuaciones diferenciales en sí mismas. La teoría se llamó, inicialmente, teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.

Este enfoque permite analizar el modelo a través de su propia ecuación y no a través de sus soluciones analíticamente explícitas. De esta forma, se creó una teoría general del comportamiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden y, con

ello, hace posible resolver una serie de problemas fundamentales dependiendo de las soluciones en parámetros.

Liapunov, por su parte, fundó la teoría moderna de la estabilidad del movimiento, la teoría de la estabilidad. De acuerdo con Javaroni (2007), para un estudio en profundidad del tema, uno puede dirigirse a las investigaciones de Kline (1972)

Aún en la actualidad, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) siguen siendo estudiadas, ya que, para comprender fenómenos como variación de temperatura en un cuerpo, la capitalización continua, el decaimiento radiactivo, entre otros, se hace uso de una EDO.

Bassanezi (2011) afirma que, debido a las múltiples aplicaciones en las diversas áreas de conocimientos como la Economía, Ingeniería, Física, Química, Biología, entre otras, las EDO conforman un objeto bastante amplio de la Matemática y este puede ser enfocado de diferentes formas, dependiendo del centro de atención.

La revisión de estos aspectos históricos del análisis cualitativo de las EDO permite estimular y ampliar nuestros canales de percepción sobre el origen de este concepto, en qué ámbito se presentó, bajo qué circunstancias y cómo fue su desarrollo, además de su evolución hasta la actualidad.

En ese sentido, para profundizar en la comprensión de lo que llamamos análisis cualitativo en las EDO, propuesto por Poincaré, a continuación, abordaremos algunos aspectos epistemológicos del análisis cualitativo de un sistema de EDO lineal y no lineal. Para ello, presentaremos algunos conceptos matemáticos que están relacionados con la noción de EDO y el análisis cualitativo. Aquí se presenta la Matemática e identifica lo que se enseña y cómo se enseña en un libro de texto sobre el análisis cualitativo de las EDO para la carrera de Economía.

2.2 Aspectos matemáticos y didácticos de sistemas de EDO lineales y el *Análisis Cualitativo de sistemas de EDO no lineales*

Estudiar el caso lineal es necesario, ya que, en el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, bajo las condiciones del Teorema de Grobman-Hartman, el comportamiento de las soluciones cerca al punto de equilibrio es equivalente al comportamiento de las soluciones del sistema linealizado (asociado al no lineal) cerca al $(0,0)$. De allí, la importancia de estudiar el caso lineal como un previo. Es así como nuestro análisis relevante se desarrolla teniendo en cuenta estos previos.

Para la carrera de Economía, dada la conexión implícita que existe entre las aplicaciones económicas y nuestro objeto matemático, se presenta el estudio formal del análisis cualitativo de sistemas de EDO lineales y no lineales. En este último, será en el que nos centraremos.

Con ello, se brindará la base teórica de un sistema de EDO no lineal y la interpretación de los resultados matemáticos obtenidos en relación con los modelos económicos estudiados en la carrera de Economía. Por ello, para el análisis de un libro de texto de Economía, donde nuestro objeto matemático de estudio está contenido, se considera el libro didáctico Matemáticas para la Economía Dinámica de Bonifaz y Winkelried, que es utilizado como material de referencia en el curso de Matemáticas III de la Universidad del Pacífico.

El tema de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineales que consideraremos (en esta investigación) como nociones previas, se desarrollan en el capítulo IV y las secciones que lo conforman se pueden observar en la Tabla 6.

Tabla 6

Contenido del capítulo IV del libro de Matemáticas para la Economía Dinámica

IV. Ecuaciones diferenciales I	
4.1 Introducción	4.4 EDO lineales de orden superior
4.2 EDO lineales de primer orden	4.5 Sistemas de EDO lineales
4.3 EDO lineales de segundo orden	Ejercicios

Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico.

Como podemos observar en la Tabla 6, el lector del texto podrá hacer la revisión de los conocimientos básicos sobre ecuaciones diferenciales. Es importante mencionar que, para el cierre del capítulo, se propone una serie de ejercicios, modelos económicos, demostraciones.

En términos puntuales, consideramos parte importante de los conocimientos previos relevantes a la última sección 4.5, que aborda el tema de sistemas de EDO lineales, y la consideraremos como punto de partida para el análisis del libro didáctico, para luego, en el siguiente capítulo, contemplar los sistemas de EDO no lineales. Nuestro análisis del libro

didáctico se enfoca precisamente en la última parte del capítulo IV y en la primera parte del capítulo V.

El texto contiene, en el capítulo V, el tema de las EDO no lineales y el análisis cualitativo. En la Tabla 7, se muestran las secciones y temas que están contenidas en este capítulo.

Tabla 7

Contenido del capítulo V del libro de Matemáticas para la Economía Dinámica

V. Ecuaciones diferenciales II	
5.1 Introducción	5.4 Métodos Dinámicos en Economía
5.2 Análisis Cualitativo	Ejercicios
5.3 Métodos de series de potencia	

Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico.

De la tabla anterior, es importante destacar que las dos primeras secciones, tanto 5.1 así como la 5.2, son las de nuestro interés para el análisis.

Es importante destacar que, Bonifaz y Winkelried, además de incluir las herramientas matemáticas más importantes para la iniciación en el mundo de la dinámica económica, a diferencia de los textos clásicos de Matemáticas, incluye aplicaciones económicas reales.

A continuación, mostramos cómo son presentados los temas de los capítulos seleccionados del libro didáctico mencionado al inicio.

Sistema de EDO lineales

En el capítulo IV, sección 4.5, se destaca la importancia de considerar la noción de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), ya que estos pueden estar presentes en muchos problemas que requieren la formulación de un conjunto de ecuaciones diferenciales y que estas deben ser resueltas de manera simultánea.

En esta sección, en particular, los autores consideran el caso lineal. Además, conviene mencionar que, en esta sección, se hace uso de las nociones previas desarrolladas en secciones anteriores, lo que permitirá conectar e identificar su generalización.

Ciertamente, se introduce la definición de sistemas de EDO lineales en lenguaje natural y, en seguida, presentan la definición de manera formal, tal como:

Un sistema de m ecuaciones diferenciales de orden n viene dado por

$$\begin{aligned} F_1 &= (t, y_1, \dots, y_m; y'_1, \dots, y'_m; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0 \\ F_2 &= (t, y_1, \dots, y_m; y'_1, \dots, y'_m; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0 \\ &\vdots \\ F_m &= (t, y_1, \dots, y_m; y'_1, \dots, y'_m; \dots; y_1^{(n)}, \dots, y_m^{(n)}) = 0 \end{aligned}$$

donde $F_j = (j = 1, \dots, m)$ denota alguna forma funcional e $y_j = f_j(t)$. La solución o integral del sistema consiste en las funciones de la variable independiente que, introducidas en él, convierten sus ecuaciones en identidades.

Sistemas lineales de primer orden

A continuación, se presenta sistemas de EDO lineales de primer orden, en donde los autores presentan la solución general como la suma de una solución complementaria (homogénea) y una solución particular. Esto se justifica en el Teorema del principio de superposición expuesto en la sección 4.3.

Consideremos el sistema de primer orden de dos variables

$$\begin{aligned} y'_{1t} &= a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + \mathbf{P}_{1t} \\ y'_{2t} &= a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + \mathbf{P}_{2t} \end{aligned}$$

donde $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ son constantes. En notación matricial, el sistema puede ser expresado como

$$Y' = AY_t + P_t$$

donde

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad P_t = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Se muestra la ecuación característica (de un sistema de EDO lineal de primer orden), que es parte del proceso para hallar la solución complementaria, a partir de resolver el sistema homogéneo, determinando los **valores propios** (raíces de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$) de la matriz A de coeficientes asociada al sistema de EDO lineales, lo que equivale a solucionar

$$\begin{aligned} r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) &= 0 \\ r^2 - \text{tr}(A) + \det(A) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\text{tr}(A)$ es la traza y $\det(A)$ es el determinante de la matriz A .

Para hallar la solución particular del sistema, se puede aplicar el método de coeficientes indeterminados presentado en la sección 4.3., y otra alternativa para esta solución es partir del **estado estacionario** del sistema (punto donde todas las derivadas se anulan), donde los términos independientes del sistema son constantes y bajo la condición de

$$Y' = 0 \text{ y } \det(A) \neq 0,$$

esta solución particular estaría dada por:

$$Y_p = -A^{-1}P,$$

donde A es la matriz de coeficientes del sistema y P es la matriz columna de términos independientes del sistema lineal (relacionando con la Figura 9, $P_t = P$).

Para finalizar esta parte, muestran y dan ejemplos de las distintas soluciones complementarias del sistema de EDO lineales, a partir de la naturaleza de los valores propios de la matriz de coeficientes del sistema.

Análisis gráfico y estabilidad

Para el análisis, gráfico y estabilidad, se discuten los principales aspectos en relación con las soluciones de sistemas de EDO homogéneo (con dos variables y dos ecuaciones), lo que implica el desarrollo de una ecuación característica (de grado dos).

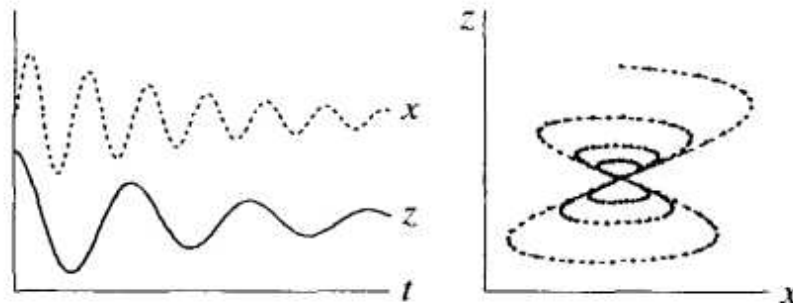
Para ello, se introduce el concepto de **diagrama de fase** como la representación gráfica de la dinámica de dos trayectorias en el plano definido por estas.

La utilidad de los diagramas de fase radica en que permiten analizar la interacción de las trayectorias considerando un equilibrio común (Figura 9). Conviene aclarar que, en el capítulo V, detallarán y analizarán esto con mayor rigurosidad.

Precisamente, la noción de diagrama de fase se introduce en lenguaje natural como la representación gráfica de dos trayectorias en el plano (y_1, y_2) , lo que permite visualizar la dinámica interna en un sistema.

Figura 9

Diagrama de Fase



Trayectorias

Diagrama de fase

Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p165.

Como se puede observar en la Figura 9, se presentan las trayectorias de las variables x y z ; al lado se presenta el diagrama de fase de las dos trayectorias en el plano (x, z) . En el sistema homogéneo $Y'(t) = AY(t)$ donde A es una matriz constante, $(y_1, y_2) = (0,0)$ es un punto de equilibrio o un estado estacionario; esto pues $y_1' = y_2' = 0$.

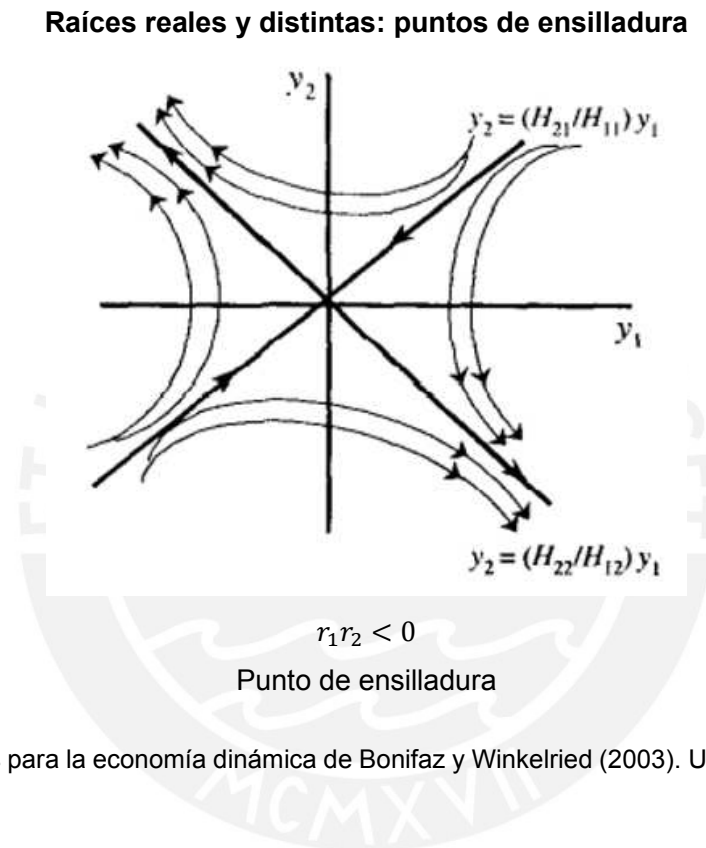
El comportamiento dinámico de la solución del sistema homogéneo, es decir, la clasificación de la singularidad del sistema de EDO lineales (clasificación del punto de equilibrio o singularidad) depende de la naturaleza de los valores propios de la matriz de coeficientes.

En esta parte, los autores desarrollan y presentan cinco posibles resultados al respecto (Foco estable, foco inestable, nodo estable, nodo inestable y silla, ver Figura 11).

A continuación, sólo describiremos uno de los posibles resultados, que es el caso en que el comportamiento dinámico de la solución es una silla, lo cual mostramos en la Figura 10.

Figura 10

Diagrama de Fase: Punto silla



Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p167.

De la Figura 10, el punto de equilibrio $(0,0)$ es denominado **punto de ensilladura**. Para el vector propio asociado al valor propio negativo, la recta que pasa por el punto de equilibrio y en la dirección de este vector propio es llamada **senda de ensilladura**.

Toda trayectoria que empieza en la senda de ensilladura es estable y converge al punto de equilibrio.

A continuación, los autores presentan algunos aspectos analíticos de la teoría de estabilidad.

Estabilidad: aspectos analíticos

Dado el análisis gráfico presentado en la sección anterior, Bonifaz y Winkelried (2003) concluyen cuatro condiciones sobre el comportamiento de las trayectorias de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineales, las cuales son las siguientes:

El punto de equilibrio (0,0) en el sistema de EDO lineal homogéneo es globalmente estable si y solo si la parte real de ambas raíces es negativa.

El punto de equilibrio es un nodo si y solo si las raíces del sistema son reales y del mismo signo.

El punto de equilibrio es un punto de ensilladura si y solo si las raíces del sistema son reales y de signos opuestos.

El punto de equilibrio es un foco si las raíces son complejas conjugadas.

Se presenta la relación entre los autovalores y los conceptos de traza (suma de autovalores) y determinante (producto de autovalores) de A, que es la matriz de coeficientes asociada a un sistema de EDO lineal homogéneo.

Es necesario notar que, de (1) se tiene que

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\text{tr}(\mathbf{A}) \pm \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A})^2 - 4 \det(\mathbf{A})} \right]$$

Asimismo, por propiedad,

$$r_1 + r_2 = \text{tr}(\mathbf{A}) \quad r_1 r_2 = \det(\mathbf{A}) \quad (2)$$

Luego, las condiciones mencionadas líneas arriba pueden traducirse en las siguientes:

El punto de equilibrio de un sistema es globalmente estable si $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$ y $\det(\mathbf{A}) > 0$.

El equilibrio es un nodo si $\det(\mathbf{A}) > 0$.

El equilibrio es un punto de ensilladura si $\det(\mathbf{A}) < 0$.

El equilibrio es un foco si $\text{tr}(\mathbf{A})^2 < 4 \det(\mathbf{A})$.

El equilibrio es un vórtice si $\text{tr}(\mathbf{A})$ es cero y $\det(\mathbf{A}) > 0$.

Luego haciendo uso de lo anterior, se presenta una clasificación del punto de equilibrio, ahora en términos de traza y determinante, como se puede ver en la Tabla 8.

Tabla 8*Clasificación del punto de equilibrio en un sistema de EDO lineal*

$\det(A)$	$\text{tr}(A)$	$\det(A)^2 - 4\text{tr}(A)$	Tipo de equilibrio	Valores propios de A
< 0		> 0	Ensilladura	$r_1 > 0 > r_2$
> 0	> 0	> 0	Nodo inestable	$r_1 > r_2 > 0$
> 0	< 0	> 0	Nodo estable	$r_2 < r_1 < 0$
> 0	> 0	$= 0$	Nodo propio inestable	$r_1 = r_2 > 0$
> 0	< 0	$= 0$	Nodo propio estable	$r_1 = r_2 < 0$
> 0	> 0	< 0	Foco (espiral) inestable	$\rho > 0$
> 0	< 0	< 0	Foco (espiral) estable	$\rho < 0$
> 0	$= 0$	< 0	Vértice	$\rho = 0$
$= 0$	> 0	> 0	Sin equilibrio o equilibrios múltiples inestables	$r_1 > r_2 = 0$
$= 0$	< 0	> 0	Sin equilibrio o equilibrios múltiples estables	$r_1 < r_2 = 0$

Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p172.

En esta tabla, se muestra un esquema que sintetiza la clasificación del punto de equilibrio de dos maneras: por un lado, haciendo uso de la traza y determinante de A (matriz de coeficientes asociada al sistema de EDO lineal homogéneo) y, por otro lado, se puede observar también la clasificación en relación con los autovalores de A .

Por lo visto anteriormente, se afirma que la clasificación del punto de equilibrio del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineal homogéneo depende de la $\text{tr}(A)$, $\det(A)$ y $di(A)$. Así, en el plano x - y consideran como

$$x = \text{tr}(A) \text{ e } y = \det(A)$$

y se obtiene

$$di(A) = x^2 - 4y.$$

A partir de ello, en el plano $(trA, detA)$, se grafica la parábola de ecuación

$$y = \frac{x^2}{4}$$

(obtenida a partir de $di(A) = 0$), la cual, junto con los ejes, dividen el plano en regiones que determinan el tipo de singularidad.

Es importante mencionar aquí el caso en el cual el

$$di(A) > 0,$$

es decir, la región se encuentra por debajo de la parábola y por encima del eje x pues

$$y < \frac{x^2}{4}.$$

Un análisis similar sucede para el caso

$$di(A) < 0,$$

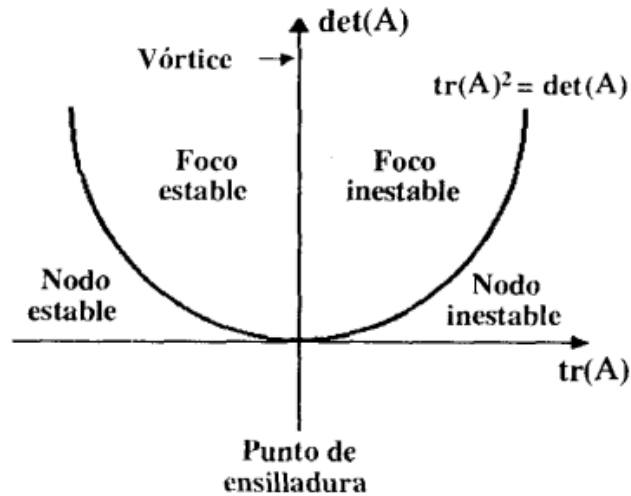
la región se encuentra por encima de la parábola pues

$$y > \frac{x^2}{4}.$$

De lo anterior, si consideramos el plano de coordenadas $(trA, detA)$, se obtiene el siguiente gráfico, el cual se muestra en la Figura 11, la cual es de mucha ayuda para recordar de una manera más eficiente la tabla anterior (Tabla 8).

Figura 11

Clasificación del punto de equilibrio en el plano $(\text{tr}A, \text{det}A)$



Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacifico, p173.

Una consideración final, que es de gran utilidad para el siguiente capítulo, es que una EDO de orden n se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden. Esto es posible considerando ciertos cambios de variables y manipulaciones algebraicas y se obtiene así un sistema equivalente.

A continuación, se muestra, en términos generales, como una EDO de tercer orden es expresada como un sistema de EDO lineal de primer orden:

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0 = b(t)$$

puede ser expresada por sustitución, como

$$y' = x_1 \quad y'' = x_2 = x'_1 \quad y''' = x'_2$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

En seguida, se muestra un ejemplo para ilustrar como una EDO de segundo orden es expresada como un sistema de EDO lineal de primer orden.

Ejemplo. La EDO $y'' + 3y' - 4y = 0$ es equivalente al sistema

$$y' = x \quad y'' = x'$$

$$\begin{bmatrix} y' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 4(4)} \right],$$

es decir $r_1 = 4$ y $r_2 = 1$. Luego,

$$y_t = C_1 e^{4t} + C_2 e^t.$$

El capítulo culmina con una propuesta de ejercicios, en seguida mostramos uno de estos ejercicios propuestos que trata de un Modelo de crecimiento económico.

Modelo de crecimiento económico. Considere el modelo siguiente de crecimiento económico de un país de desarrollo:

$$X_{(t)} = \sigma K_{(t)} \quad K' = \alpha X_{(t)} + H_{(t)} \quad N' = \rho N$$

donde todos los parámetros son positivos, X es la producción total anual, K el stock de capital, H el flujo anual de inversión extranjera y N el tamaño de la población. Asimismo, se tienen como condiciones iniciales K_0 y N_0 para el capital y la población, respectivamente.

Suponga que la inversión extranjera crece a tasa de crecimiento constante igual a μ . Halle la trayectoria de K si $\alpha\sigma \neq \mu$.

Halle una expresión para la producción per cápita $x_t = X_t/N_t$.

Suponga que $H = 0$, es decir, no existe inversión extranjera. Considere $\sigma = 0.3$ y $\rho = 0.03$ (usual en países como el Perú) y halle cuánto debe ascender la tasa de ahorro α para que la producción per cápita crezca con el tiempo.

Se presentan diversos ejercicios de aplicaciones económicas reales. Como acabamos de observar, se presenta una de estas aplicaciones, la cual trata de un sistema de EDO no lineal que modela el crecimiento económico de cierto país.

Es importante aclarar que, en este capítulo, se han tratado diversos procedimientos que permiten determinar soluciones analíticas de una Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO); sin embargo, los autores consideran importante reconocer que, en muchos casos, las soluciones cuantitativas no se pueden obtener o no son de interés.

Así, los casos que se pueden presentar, como ejemplo, son cuando la EDO es desconocida, cuando un sistema es no lineal o cuando se está interesado solo en la estabilidad de la EDO o del sistema de EDO y no en su solución de forma explícita. Para entender la importancia de estos casos, en el siguiente capítulo del texto, se presentan tres enfoques al respecto.

Conviene mencionar que es de nuestro interés abordar un enfoque o análisis cualitativo sobre la solución a largo plazo de una EDO o un sistema de EDO, cuya herramienta fundamental es el diagrama de fase.

Análisis Cualitativo

Después de esta introducción, Bonifaz y Winkelried (2003) definen en el capítulo V, sección 5.2, la noción de análisis cualitativo, cuyo objetivo se destaca por determinar ciertas características sobre el comportamiento de la solución de una EDO o de un sistema de EDO.

Ciertamente, según los autores; la característica principal de esta solución está relacionada a su estabilidad o convergencia. Conviene recordar que el uso de diagramas de fase posibilita que se aborde dicho aspecto. Por lo tanto, en esta sección, se estudia esta herramienta gráfica, dividiendo la teoría en dos subsecciones: 5.2.1, en donde se analiza el caso Unidimensional y 5.2.2, el caso Bidimensional.

Caso unidimensional

La primera subsección comienza con la presentación del diagrama de fase para una ecuación diferencial autónoma

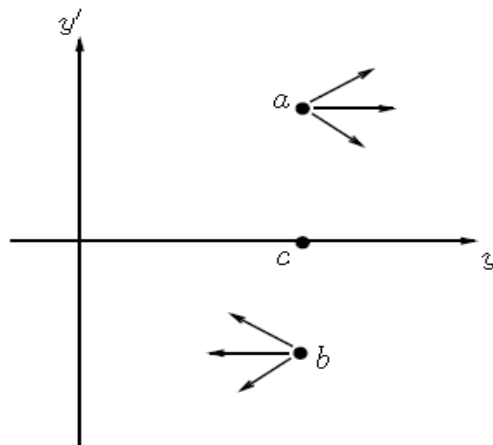
$$y' = f(y),$$

en donde se declara que este tipo de ecuaciones posee como variable independiente al tiempo. Supone, además, que f debe ser continuamente diferenciable, que puede ser lineal o no lineal y es posible graficarla en el plano cartesiano con ejes y e y' .

A continuación, la Figura 12 muestra el movimiento de los diversos puntos implicados, que ayudará a explicar el mecanismo dinámico que presenta un diagrama de fase.

Figura 12

Diagrama de fase - Movimiento en el plano (y, y')



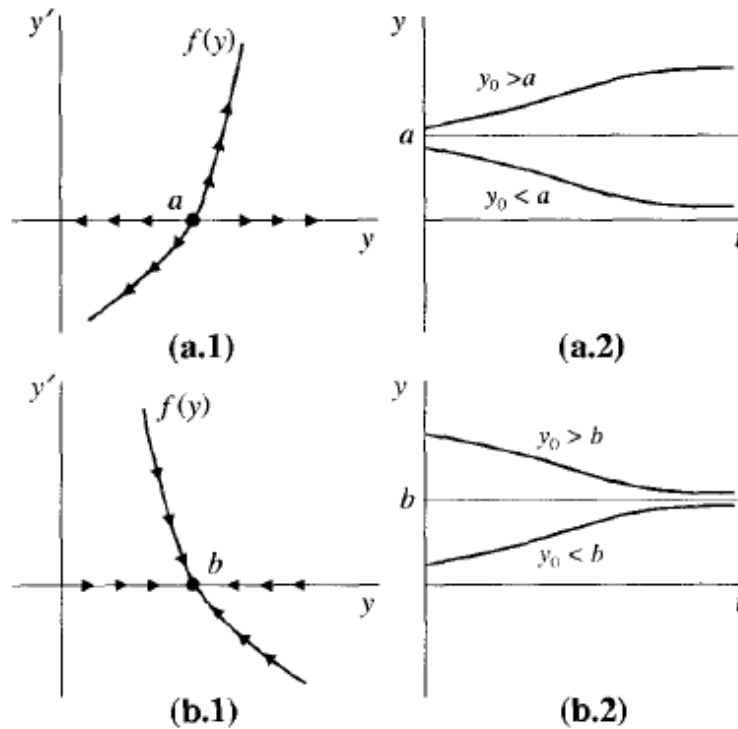
Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p192.

Sobre el movimiento en el plano yy' , que observamos en la figura anterior, los puntos del primer (y segundo) cuadrante describen movimientos hacia la dirección donde y crece ya que en esta región la tasa de cambio de y es positiva. Por su parte, los puntos ubicados en el cuarto (y tercer) cuadrante se desplazan en dirección donde y decrece ya que en esta región la tasa de cambio de y es negativa. Finalmente, los puntos sobre el eje horizontal son estáticos porque $y' = 0$.

Para un mayor entendimiento de cómo se comporta las soluciones en el tiempo, tenemos la siguiente Figura 13. Cada diagrama de la derecha recolecta información del lado izquierdo. Así por ejemplo, para realizar el bosquejo (a.2) se requiere del análisis gráfico en (a.1). De manera análoga para (b.1) y (b.2).

Figura 13

Diagramas de fase y estabilidad



Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p193.

Caso bidimensional

A continuación, hacemos el análisis cualitativo de un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales de la forma (3), tal como lo definen los autores, donde f y g son funciones de clase C^2 (si para cada (x, y) de su dominio existen todas las segundas derivadas parciales y son continuas).

$$x' = f(x, y) \quad (3)$$

$$y' = g(x, y)$$

Por lo general es imposible encontrar soluciones explícitas para (3). Lo que se hace es encontrar una relación local entre soluciones de (3) y soluciones de un sistema lineal, todo esto alrededor de puntos llamados puntos de equilibrio. Esto nos permite tener un diagrama de fase de (3) alrededor de cada uno de estos puntos.

Decimos que (x_{ss}, y_{ss}) es **punto de equilibrio** de (3) si resuelve el sistema (4).

$$f(x_{ss}, y_{ss}) = 0 \quad (4)$$

$$g(x_{ss}, y_{ss}) = 0$$

Por otro lado, llamamos al sistema (5) sistema linealizado, asociado al sistema (3), alrededor de (x_{ss}, y_{ss}) .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(x_{ss}, y_{ss}) & f_y(x_{ss}, y_{ss}) \\ g_x(x_{ss}, y_{ss}) & g_y(x_{ss}, y_{ss}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ y - y_{ss} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Haciendo $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, J la **matriz jacobiana** de F en (x_{ss}, y_{ss}) , “ $z_1 = x - x_{ss}$ ” y “ $z_2 = y - y_{ss}$ ” podemos escribir el sistema (5) como el sistema linealizado con ecuación matricial (6).

$$Z' = JZ \quad (6)$$

Decimos que (x_{ss}, y_{ss}) es un equilibrio hiperbólico del sistema (3), cuando al resolver el polinomio característico de (6)

$$r^2 - \text{tr}(J)r + \det(J) = 0$$

se obtiene que $\text{Re}(r) \neq 0$. En este caso, el **teorema de Hartman-Grobman** nos indica que el sistema (3) y (6) son topológicamente conjugados. Es decir, el comportamiento de las soluciones de (3) cerca de (x_{ss}, y_{ss}) es como el comportamiento de las soluciones de (6) cerca de $(0,0)$.

Formalmente, si $\text{Re}(r) \neq 0$, existen abiertos del plano U y V con $(x_{ss}, y_{ss}) \in U$ y $(0,0) \in V$, un intervalo I con $0 \in I$ y

$$H: U \rightarrow V$$

un **homeomorfismo** tal que

$$H(\varphi(t, (x_0, y_0))) = e^{Jt}H(x_0, y_0)$$

para todo $(x_0, y_0) \in U$, donde φ es el flujo asociado al sistema (3) en $I \times U$.

Es decir, este homeomorfismo hace corresponder localmente soluciones de (3) pasando por $(x_0, y_0) \in U$ con soluciones de (6) pasando por $H(x_0, y_0) \in V$.

En este caso, se clasifica el punto de equilibrio (x_{ss}, y_{ss}) de acuerdo con la Tabla 9.

Tabla 9*Clasificación del punto de equilibrio de un sistema de EDO no lineal*

$\det(J)$	$\text{tr}(J)$	$\det(J)^2 - 4\text{tr}(J)$	Tipo de equilibrio	Valores propios de J
< 0		> 0	Ensilladura	$r_1 > 0 > r_2$
> 0	> 0	> 0	Nodo inestable	$r_1 > r_2 > 0$
> 0	< 0	> 0	Nodo estable	$r_2 < r_1 < 0$
> 0	> 0	$= 0$	Nodo propio inestable	$r_1 = r_2 > 0$
> 0	< 0	$= 0$	Nodo propio estable	$r_1 = r_2 < 0$
> 0	> 0	< 0	Foco (espiral) inestable	$\rho > 0$
> 0	< 0	< 0	Foco (espiral) estable	$\rho < 0$
> 0	$= 0$	< 0	Vértice	$\rho = 0$
$= 0$	> 0	> 0	Sin equilibrio o equilibrios múltiples inestables	$r_1 > r_2 = 0$
$= 0$	< 0	> 0	Sin equilibrio o equilibrios múltiples estables	$r_1 < r_2 = 0$

Fuente: Matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p200.

En el siguiente ejemplo, se muestra una aplicación de todo lo expuesto anteriormente, que es la clasificación de un punto de equilibrio de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal. El sistema no lineal

$$x' = x^2y + y$$

$$y' = x - y + 1$$

tiene como punto de equilibrio $(x_{ss}, y_{ss}) = (-1, 0)$.

La matriz Jacobiana del mismo es

$$J = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 + 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que evaluada en el punto de equilibrio es

$$J_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

De este modo las raíces del sistema linealizado son $r = 1$ y $r = -2$.

Luego, $\text{tr}(J) < 0$, $\text{det}(J) < 0$, y el determinante del polinomio característico de J es positivo (las raíces son reales).

Verificando estos resultados en la Tabla 8 se deduce que $(-1,0)$ es un punto de silla. Concluyendo así el ejemplo.

Para el diagrama de fase del sistema (3) se debe seguir los siguientes pasos:

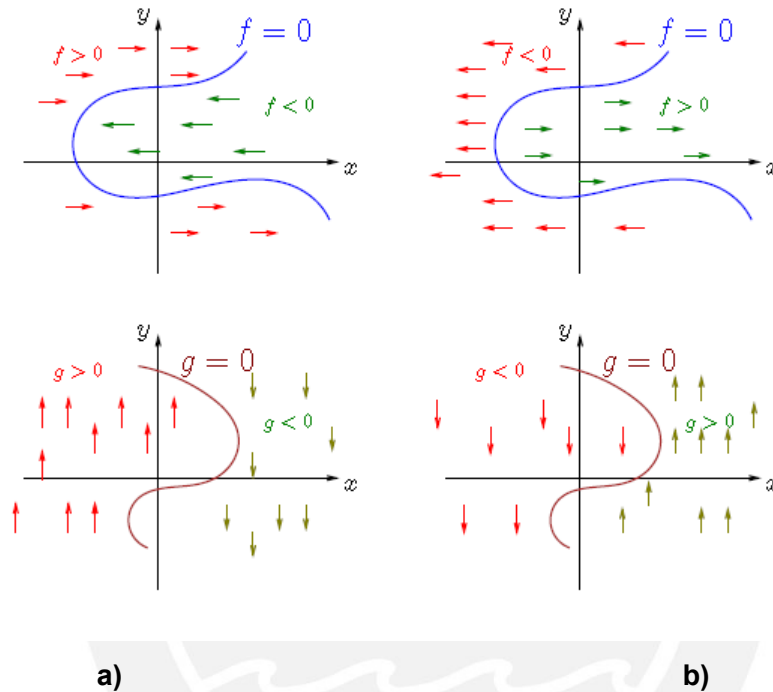
1. Graficar las curvas de fase $f = 0$ y $g = 0$, así como los puntos de equilibrio, todo en un mismo plano.
2. Determinar el signo de x' e y' en cada región determinada por las curvas de fase (ver Figura 12).
3. Hacer el bosquejo de las soluciones apoyándose en el análisis establecido por el teorema de **Hartman-Grobman**.

A continuación, en la Figura 14, se muestran las curvas de fase y campo de vectores (vertical y horizontal) de un modo muy general, que ayudarán en el bosquejo de las soluciones mencionados anteriormente.

Figura 14

Curvas de fase y campo de vectores

Movimiento en el plano xy



Fuente: Adaptado de matemáticas para la economía dinámica de Bonifaz y Winkelried (2003). Universidad del Pacífico, p. 203.

En la figura anterior, cada curva de fase separa al plano xy en dos regiones. Las regiones definidas por la curva f describen movimientos de x (horizontales) mientras que las regiones demarcadas por g generan los movimientos de y (verticales). Con el ejemplo propuesto puede apreciarse que la dirección de cada variable en una de las dos regiones es absolutamente opuesta a la dirección de movimiento dentro de la región restante.

El tema de sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal requiere considerar algunos aspectos relevantes del caso lineal como nociones previas. A partir de ello, se pretende familiarizar y conectar con el tema de sistema de EDO no lineal y, con esto, permitir la conexión de aprendizajes previos con el nuevo. Es importante resaltar que, previamente,

consideraremos que el caso lineal ya fue realizado con el apoyo del docente, por lo que nuestro análisis relevante se desarrolla teniendo en cuenta estos previos.

Luego de presentar la teoría del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineal, como segundo momento, presentamos un breve análisis teórico desde el ETM del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, ello nos permitirá identificar los aspectos epistemológico y cognitivo del trabajo matemático, precisamente la génesis semiótica, instrumental y discursiva, así como los paradigmas que estén presentes en el estudio de nuestro objeto matemático, (el cual detallaremos detenidamente y analizaremos en el capítulo III).

Asociado a nuestra investigación, la articulación de los planos epistemológico y cognitivo que se activan mediante las tres génesis las describimos a continuación:

Génesis semiótica, está asociada a las **representaciones** en relación con un sistema de EDO no lineal y los procesos de visualización en la identificación de sus respectivas singularidades

Génesis instrumental, que permite a los artefactos matemáticos o tecnológicos operar en el proceso de determinar el tipo de singularidad o en el proceso de esbozar el comportamiento de sus soluciones

Genesis discursiva, que hace uso de los elementos que pertenecen al **referencial teórico** de la Matemática para sustentar el tipo de comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal.

Estos articuladores nos permitirán describir el ETM para el diseño de nuestra propuesta didáctica y para reconocer los conocimientos que se podrían propiciar. Además, dichos articuladores nos permiten considerar los tres tipos de planos estrechamente relacionados: los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], e [Ins-Dis].

Sobre los paradigmas presentes en nuestra investigación, el determinar el comportamiento de las soluciones cerca al punto de equilibrio (análisis cualitativo), se puede identificar en los tres paradigmas del análisis:

Análisis-Geométrico/Aritmético, la visualización del comportamiento de las soluciones es posible a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con ecuaciones (fórmulas) explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo parte del supuesto implícito de su existencia, basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman.

Análisis-Calculatorio, pues es necesario definir en el cálculo de singularidades y Linealización las reglas de Cálculo, se espera el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios) y los cálculos previos necesarios.

Análisis-Real, para determinar el tipo de singularidad del sistema linealizado y del sistema no Lineal, es necesario determinar el tipo de singularidad haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman (sujeto a condiciones), ya que este nos brinda información geométrica (la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal) e información topológica (pues toda la información geométrica obtenida es local: se da en una vecindad del punto de equilibrio).

Para el estudio del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, se podría incluir tareas que conecten con los conceptos previos y que hagan uso de las herramientas tecnológicas. Es decir, de un artefacto de tipo software, en base a la teoría de Espacio de Trabajo Matemático (ETM), con la finalidad de una mejor comprensión del objeto matemático.

Así, en términos del ETM, los aspectos epistemológicos y cognitivos son fundamentales para la construcción del objeto matemático, lo que implica una necesidad de propiciar la activación y articulación de los planos epistemológicos y cognitivos a través de la realización de las tareas por parte de los posibles sujetos.

A partir de ello, surge la necesidad de crear una propuesta didáctica para el estudio del análisis cualitativo de Sistemas de EDO no lineales con tareas que hacen uso de herramientas tecnológicas con la intención que estas puedan propiciar la activación y articulación de los planos epistemológicos y cognitivos, en el que los propios sujetos que estén al frente a estas tareas y puedan construir el significado del objeto matemático y que con el uso de la tecnología digital se optimizaría el tiempo en la sesión de clase, favoreciendo ello a un mejor desarrollo de las actividades volviéndola más interactiva.

Es importante mencionar que nuestra propuesta didáctica está diseñada para un contexto de una implementación a futuro, contando con la intervención docente; por ello, se presenta la propuesta y su análisis en una situación ideal (supuesta).

A continuación, presentaremos la propuesta didáctica, las tareas que lo conforman y su respectivo análisis desde el ETM.

Capítulo III: Propuesta didáctica

En este capítulo se presenta primero el diseño de la propuesta didáctica orientada al análisis cualitativo de sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales y luego el análisis a priori de la propuesta desde el ETM.

Respecto al diseño, la propuesta está conformada por tres tareas (ver Anexo 2). Aquí es conveniente mencionar que se incorpora el uso de tecnología digital en una de las tres tareas de la propuesta didáctica.

Respecto al análisis a priori, se considera primero la descripción de las tareas, luego se presentan los enunciados de las tareas, seguido de la solución esperada y del análisis teórico (haciendo uso del protocolo definido en la Tabla 5 del capítulo II) desde el ETM.

A continuación, describiremos la organización de la propuesta didáctica y las tareas que lo conforman.

3.1 Organización de la propuesta didáctica

Planteamos una propuesta que responda las necesidades actuales y en particular en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Por ello, nuestra investigación presenta una propuesta didáctica, conformada por tareas, que está elaborada para ser implementada tanto en educación virtual, en el sentido de Sin, Bongiovanni y Faner, como en la educación presencial.

A continuación, se describe brevemente la noción de tarea matemática el cual se considera en la presente investigación.

Tarea Matemática

Con respecto a la tarea, Sierpiska (2004) afirma que:

“Cualquier problema de matemáticas las cuales tengan las hipótesis y preguntas que son claramente formuladas y las cuales se sabe que los estudiantes pueden resolver en un tiempo que se puede prever” (pág. 10).

Adaptando la definición de Sierpiska al modelo de ETM, Nechache (2017) afirma que la tarea matemática es todo ejercicio, pregunta o problema realizado en un tiempo limitado en un contexto dado. Las condiciones de realización de este trabajo matemático son definidas por el ETM en el cual la tarea es propuesta.

La propuesta didáctica está conformada por tres tareas, las cuales definiremos como **T1** a la tarea 1, **T2** a la tarea 2 y **T3** a la tarea 3. En la Tabla 10, se sintetiza la estructura global de la propuesta didáctica donde se presentan las tareas y los contenidos asociados a cada una.

Tabla 10

Estructura de la propuesta didáctica

		Tarea	Descripción
PROPUESTA DIDÁCTICA	T1	Análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal	La tarea incluye un sistema de EDO no lineal, el cual consta de cinco preguntas, las cuales conforman los pasos para analizar cualitativamente un sistema de EDO no lineal, el cual es el objetivo principal de T1.
	T2	Uso de la tecnología digital en el análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal	La tarea trata del uso de la herramienta tecnológica (Matlab, Bluffton y Wolfram), en la construcción del Diagrama de fase. Las dos primeras herramientas son de acceso libre, mientras que la última cuenta con una versión gratuita.
	T3	Aplicación del análisis cualitativo: Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans	La tarea incluye un modelo de Economía, el cual se puede analizar cualitativamente de manera similar a las tareas anteriores. Esto, con el objetivo de ir del modelo que se está analizando a la Matemática y de la Matemática a describir cualitativamente el modelo analizado.

La propuesta está orientada para estudiantes que ya hayan llevado los primeros cursos de Matemáticas (Matemáticas I y Matemáticas II), pues se requiere que tengan conocimientos básicos del álgebra lineal y cálculo diferencial, que son requisito para un curso avanzado que

contiene la noción de análisis cualitativo de Sistemas de EDO no lineales como herramienta para el análisis de modelos de Economía.

Con relación al tiempo estimado para las tareas **T1** y **T2** es de 50 minutos cada una, mientras que para la tarea **T3** es de 100 minutos aproximadamente.

Es importante resaltar que las tareas que conforman la propuesta están diseñadas de manera secuencial, para que en conjunto sea posible alcanzar el objetivo general de la investigación.

Enseguida, se explica la pertinencia de la secuencialidad de las tareas de la propuesta didáctica.

Secuencialidad de las tareas de la propuesta

Se espera que, en la tarea **T1**, para las preguntas propuestas, se utilicen herramientas de Álgebra (pues hay procesos operatorios con polinomios y matrices), seguidas de herramientas de Análisis (pues bajo ciertas condiciones se hace uso de un teorema para determinar el tipo de singularidad, incluyendo además un estudio de los signos de las componentes del vector tangente para el esbozo de las trayectorias).

Es importante mencionar que, en **T2** haciendo uso de la herramienta tecnológica los tipos de singularidades también se pueden visualizar, de forma más interactiva, a través del siguiente enlace:

<http://mathlets.org/mathlets/linear-phase-portraits-matrix-entry/>.

También se espera que, en **T2**, haciendo uso de las herramientas tecnológicas se visualicen, de manera más dinámica, las curvas de fase y el comportamiento de las soluciones, optimizando el tiempo limitado. Además de verificar el análisis cualitativo realizado en **T1**.

Como estamos interesados en estudiar modelos económicos, cuyos análisis están asociados a sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales. Por ejemplo, el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, cuyo sistema de EDO no lineal asociado a este modelo (el cual se puede volver a revisar en la Figura 31, página 86), está dado por:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \quad \text{y} \quad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m + \rho) \quad (*)$$

Por ello, consideramos importante y pertinente en nuestra propuesta presentar este modelo en **T3** donde se hace uso del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales y así obtener información relevante de dicho modelo.

A continuación, se presenta la descripción de las tareas de la propuesta didáctica.

3.2 Descripción de las tareas de la propuesta

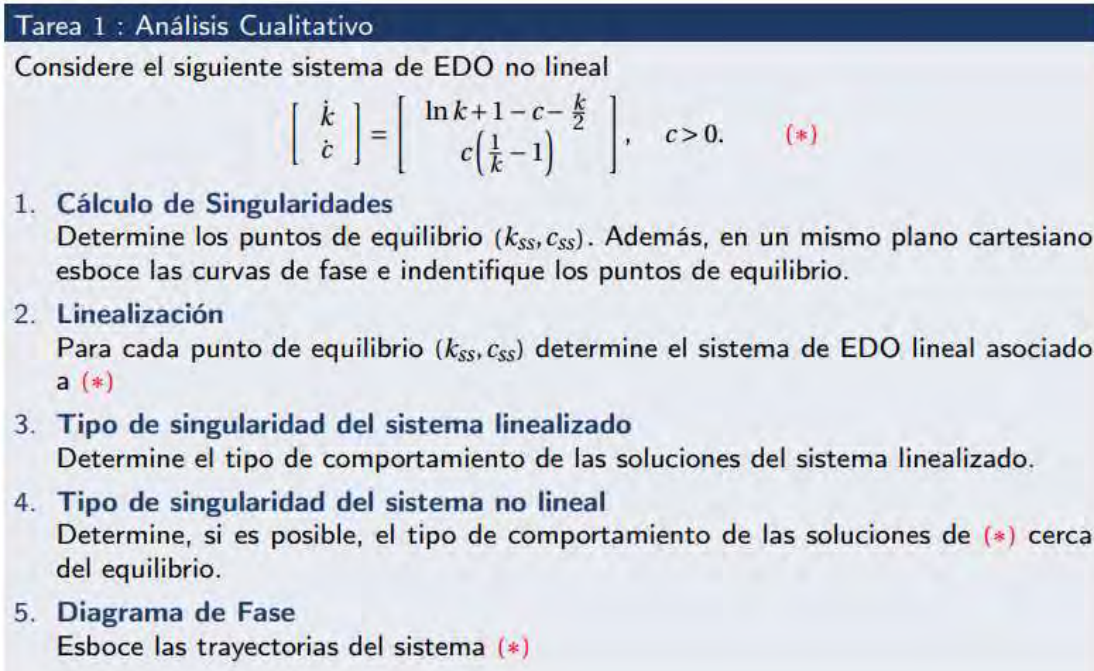
Descripción de la tarea 1 (T1)

Se presentan cinco preguntas, las cuales buscan propiciar que, más allá del cálculo, la matemática sea realmente una herramienta de análisis.

T1 tiene como propósito generar conocimiento sobre los pasos cruciales en el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales. El enunciado de **T1** se muestra en la Figura 15.

Figura 15

Tarea 1: Análisis Cualitativo de un sistema de EDO no lineal



Tarea 1 : Análisis Cualitativo

Considere el siguiente sistema de EDO no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln k + 1 - c - \frac{k}{2} \\ c\left(\frac{1}{k} - 1\right) \end{bmatrix}, \quad c > 0. \quad (*)$$

- Cálculo de Singularidades**
Determine los puntos de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) . Además, en un mismo plano cartesiano esboce las curvas de fase e indentifique los puntos de equilibrio.
- Linealización**
Para cada punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) determine el sistema de EDO lineal asociado a $(*)$
- Tipo de singularidad del sistema linealizado**
Determine el tipo de comportamiento de las soluciones del sistema linealizado.
- Tipo de singularidad del sistema no lineal**
Determine, si es posible, el tipo de comportamiento de las soluciones de $(*)$ cerca del equilibrio.
- Diagrama de Fase**
Esboce las trayectorias del sistema $(*)$

Descripción de la tarea 2 (T2)

Se incluye tecnología digital, haciendo uso del Matlab y Bluffton (una aplicación de la Universidad de Bluffton en EE. UU), que son de acceso libre (sin paga), además del Wolfram, que cuenta con una versión de acceso libre, pero haremos uso de la versión con licencia (previo pago) para generar el algoritmo necesario. Todo ello, orientado a que la propuesta didáctica propicie un aprendizaje más interactivo del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales y que, con la práctica, ejemplos y casos se manipulen los objetos matemáticos enfatizando en el aspecto geométrico por medio del esbozo de trayectorias.

T2 tiene como propósito verificar el análisis cualitativo realizado en **T1**. Ello a partir de la elaboración del diagrama de fase, al igual que la última pregunta de **T1**, pero esta vez haciendo uso de la tecnología digital. El enunciado de **T2** se muestra en la Figura 16.

Figura 16

Tarea 2: Uso de la tecnología digital en el análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal

Tarea 2 : Uso de la herramienta tecnológica

Usar cualquiera de las siguientes herramientas tecnológicas para verificar el análisis cualitativo de la **Tarea 1**

1. **MatLab**: Phase plane plot
2. **Bluffton**: Slope and Direction Fields
3. **Wolfram Alpha**: Algoritmo (para una versión no gratuita)

En la propuesta, sobre las herramientas tecnológicas MatLab y Bluffton, en ambos casos, debemos considerar dos aspectos que la caracterizan: el algoritmo y la restricción de las variables (valores permitidos). Para ambas herramientas, ya existen algoritmos preestablecidos y su uso es bastante intuitivo. Por ello, es suficiente considerar una introducción bastante rápida, presentando el enlace que lleva a la página donde sólo deberán digitar las expresiones matemáticas e ingresar los valores permitidos para las variables respectivas. Al respecto, más adelante se detallará y se mostrarán las figuras de referencia. Sobre las restricciones matemáticas (valores permitidos) de las variables, son parte de un análisis previo que se realiza de manera independiente al uso de las herramientas tecnológicas.

En la propuesta, sobre el Wolfram, partiremos de un algoritmo elaborado por la autora (ver en detalle en Anexo 2), el cual podría ser presentado previamente por el docente a cargo de la enseñanza, además de estar presente en su implementación para absolver cualquier duda al respecto del uso del software.

A continuación, describiremos cada una de las herramientas tecnológicas consideradas en **T2**, comenzando por la descripción del MatLab.

Descripción de la Herramienta MatLab

Para el caso de la herramienta MatLab se usa el siguiente enlace: <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html> el cual lo llevará, por defecto, a una página tal como se muestra en la Figura 17.

Figura 17

Ventana de MatLab

This page plots a system of differential equations of the form $dx/dt = f(x,y)$, $dy/dt = g(x,y)$.

For a much more sophisticated phase plane plotter, see the [MATLAB plotter](#) written by John C. Polking of Rice University.

The direction field solver knows about trigonometric, logarithmic and exponential functions, but multiplication and evaluation must be entered explicitly (2^*x and $\sin(x)$, not $2x$ and $\sin x$).

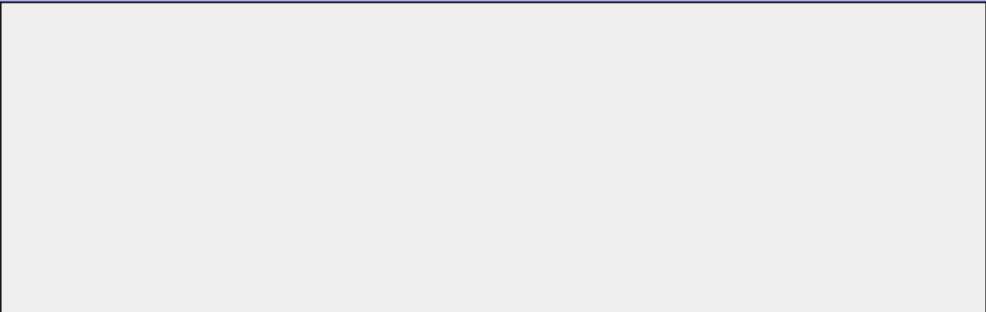
$x' =$

$y' =$

The Display:

Minimum x: Minimum y: Arrow length: Variable length arrows

Maximum x: Maximum y: Number of arrows:

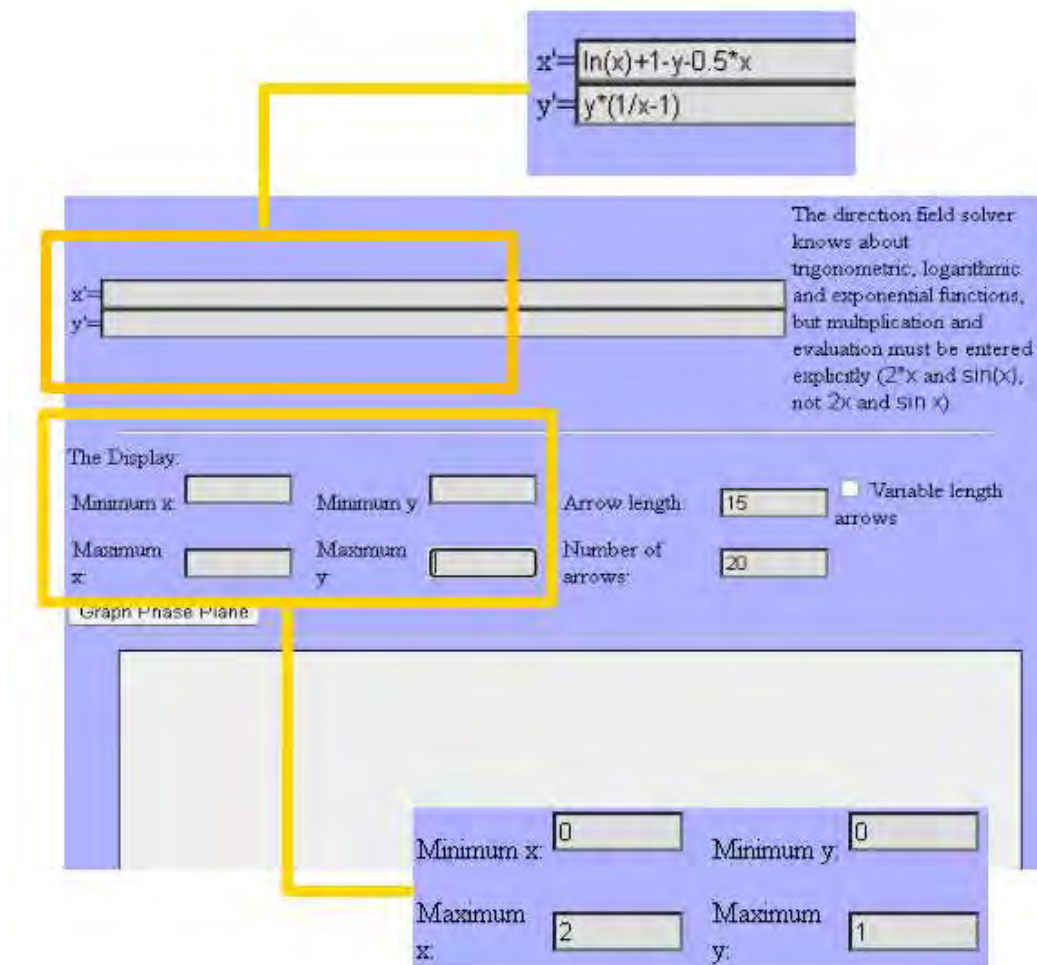


Fuente: Captura de MatLab (<https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>)

Así, al ser de acceso libre, podrán hacer uso de la herramienta sin alguna restricción. El ingreso de datos del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) y restricciones se realiza, tal como se muestra en la Figura 18.

Figura 18

Entrada del sistema y restricciones al MatLab

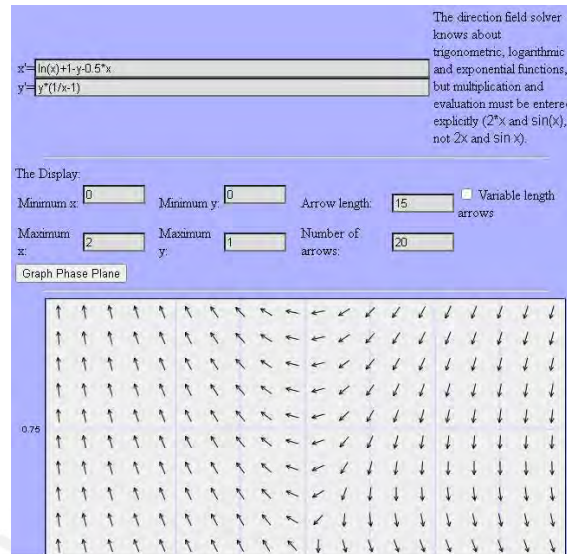


Fuente: Captura de MatLab (<https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>)

En la figura anterior, se observa que, en la parte superior, se registra el sistema de EDO, mientras que, en la parte inferior, se registran las restricciones o valores permitidos del sistema. Estos valores permiten mostrar la región del plano cartesiano para la visualización del diagrama de fase. Después de ingresar la información, lo que se genera se muestra en la Figura 19.

Figura 19

Salida del Diagrama de fase generado por MatLab

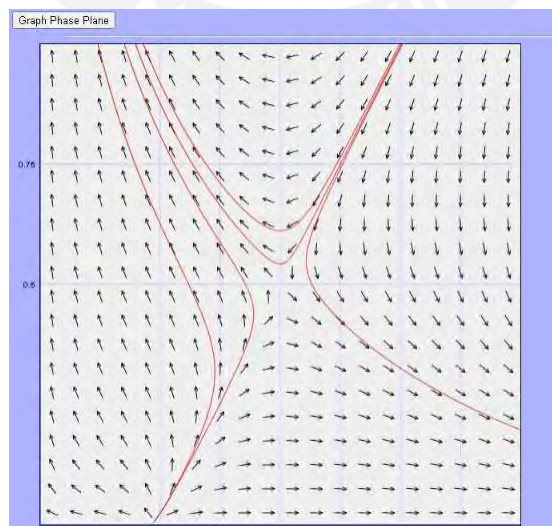


Fuente: Captura de salida del Diagrama de fase generado por MatLab

En la figura anterior, se observa que, tras digitar la información del sistema de EDO, se muestra, en la parte inferior, el campo de vectores tangentes. Es así como, para visualizar el esbozo de las trayectorias, solo queda hacer clic en este campo de vectores, como se muestra en la Figura 20.

Figura 20

Trayectorias generadas por MatLab



Fuente: Captura de Trayectorias generadas por MatLab

En figura anterior, se muestra el esbozo de cinco trayectorias, cada una de las cuales fue generada luego de hacer clic en un punto ubicado en el campo de vectores. Es decir, por cada uno de esos puntos señalados en el campo de vectores, se esboza la trayectoria que pasa por dicho punto.

A continuación, describiremos la segunda herramienta considerada en la T2.

Descripción de la Herramienta Bluffton

Para el caso de la herramienta Bluffton, esta se puede conocer a través del siguiente enlace:

<https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html>

el cual lo llevará a una página en la que se visualiza, por defecto, la opción para el ingreso de información de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden, tal como se muestra en la Figura 21.

Figura 21

Ventana de Bluffton: EDO de primer orden

BLUFFTON UNIVERSITY > MATHEMATICS > DARRYL NESTER >

One ODE System Polar ODE

Polar system

$dy/dx =$
x+y

Variables: dy/dx ▼

-4 ≤ x ≤ 4 with 20 segments

-3 ≤ y ≤ 3 with 15 segments

Runge-Kutta (RK4) * h = 0.1 switching

To specify initial values for solution curves, either:

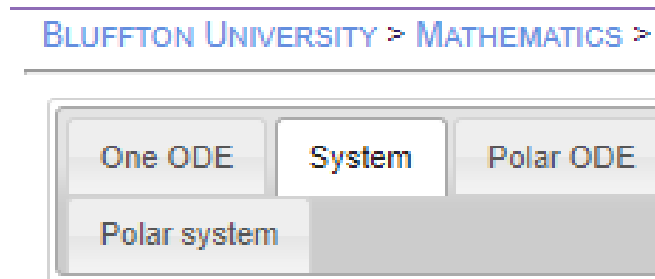
- enter (x,y) = (0 , 1)
- or click on the graph:

Fuente: Captura de Bluffton (<https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html>)

En esta página, hay opciones de configuración para tipos de EDO. En nuestro caso, se tendría que usar la opción System, tal como se muestra en la Figura 22.

Figura 22

Opción System en Bluffton

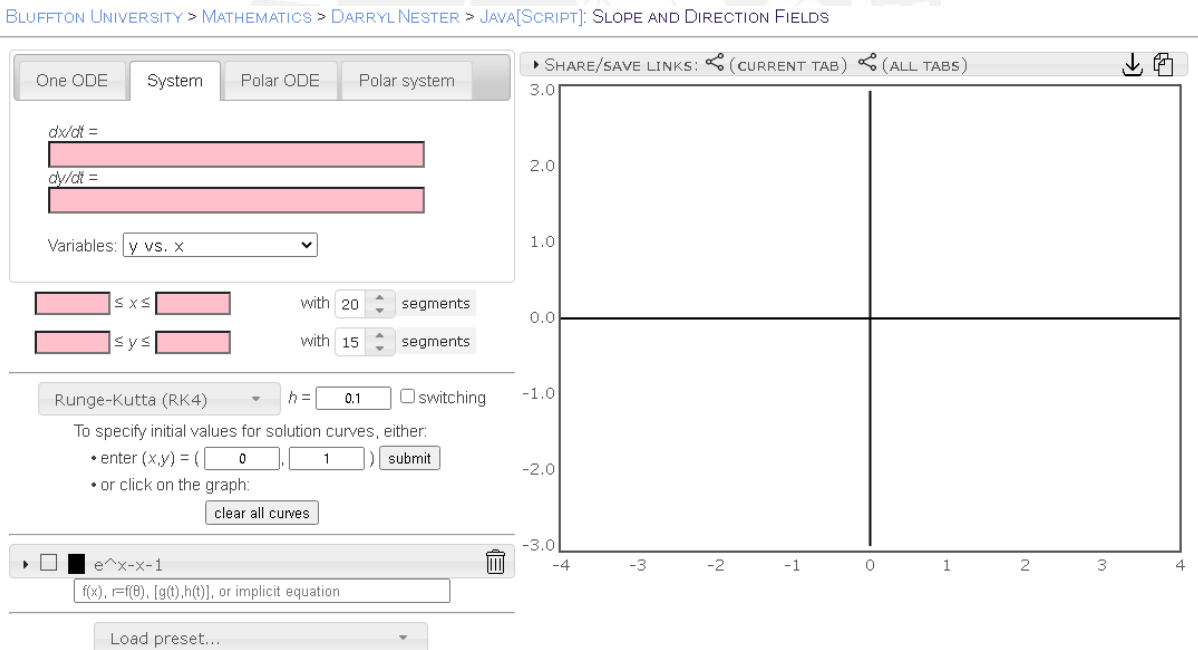


Fuente: Captura de la opción System en Bluffton

Esta opción permite digitar un sistema de EDO, tal como se muestra en la Figura 23.

Figura 23

Ventana de Bluffton: Sistema de EDO

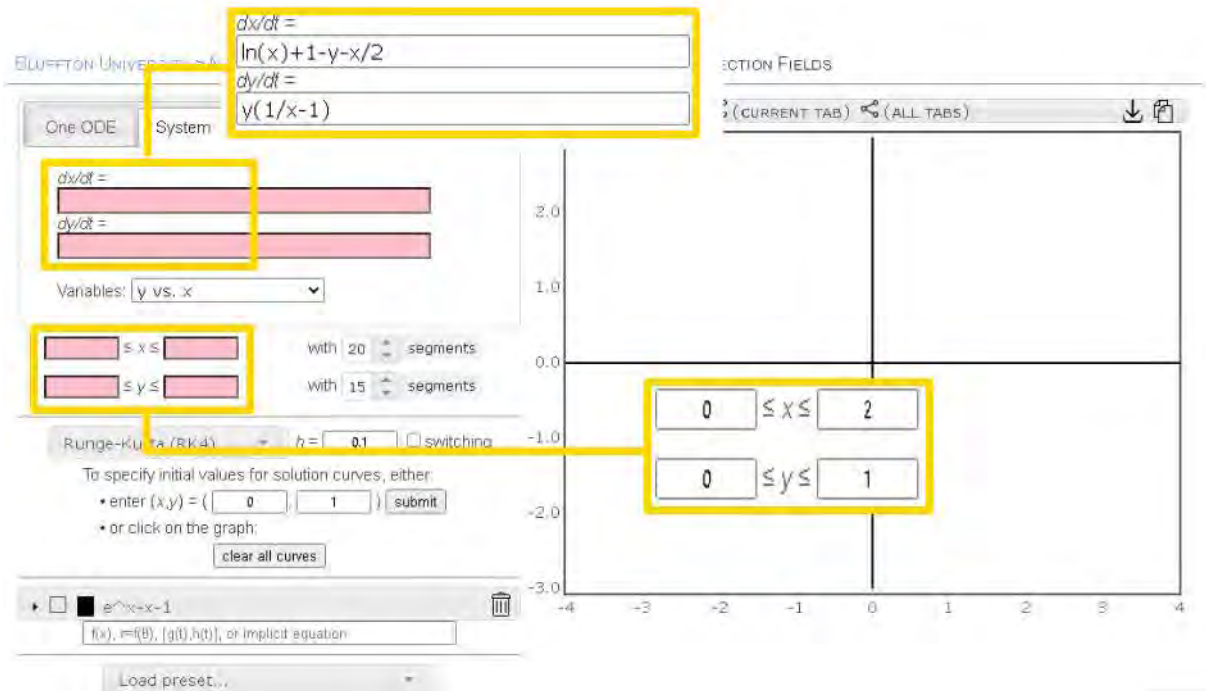


Fuente: Captura de Bluffton: Sistema de EDO

Esta herramienta, al igual que la versión gratuita de MatLab, es de acceso libre, en donde podrán hacer uso de la herramienta sin alguna restricción. El ingreso de datos del sistema de EDO y restricciones del sistema se realiza, tal como se muestra en la Figura 24.

Figura 24

Entrada del sistema y restricciones en Bluffton



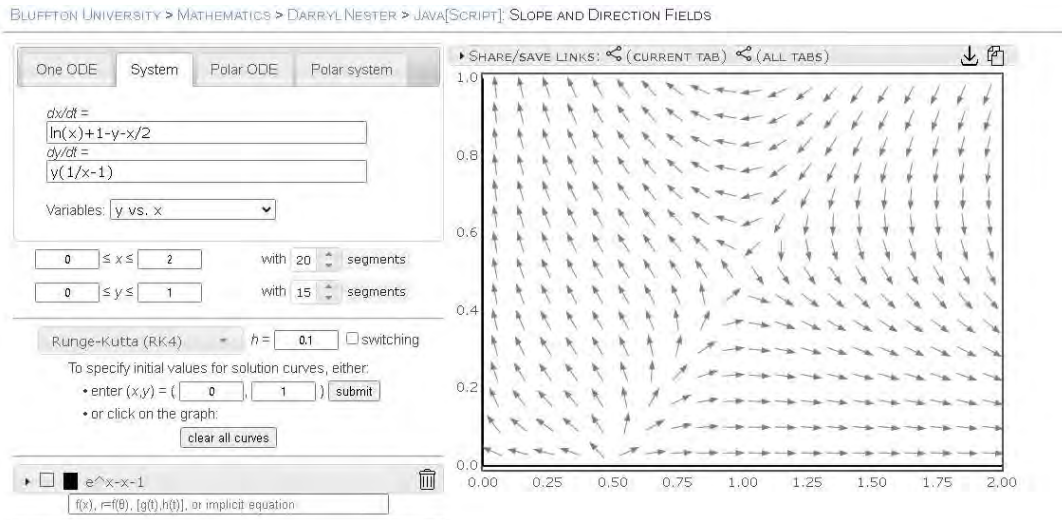
Fuente: Captura de entrada del sistema y restricciones en Bluffton

En la figura anterior, al igual que en MatLab, se observa que en la parte superior se registra el sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), mientras que, en la parte inferior, se registran las restricciones o valores permitidos del sistema. Estos valores permiten mostrar la región del plano cartesiano para la visualización del diagrama de fase.

Después de ingresar los datos y valores permitidos, lo que se genera se muestra en la Figura 25.

Figura 25

Diagrama de fase generado por Bluffton

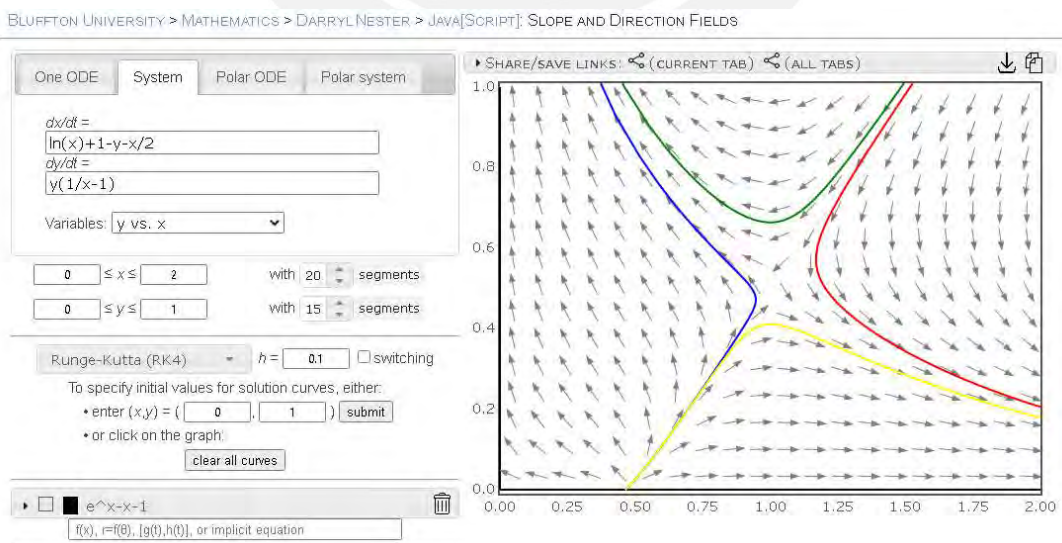


Fuente: Captura del Diagrama de fase generado por Bluffton

En la figura anterior, se observa que, al igual que en MatLab, tras digitar la información del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), se muestra, en la parte derecha, el campo de vectores tangentes. Es así como, para visualizar el esbozo de las trayectorias, solo queda hacer clic en este campo de vectores, tal como se muestra en la Figura 26.

Figura 26

Trayectorias generadas por Bluffton



Fuente: Captura de las Trayectorias generadas por Bluffton

Adicionalmente, en el caso de la herramienta Bluffton, a diferencia del MatLab, se puede generar previamente el enlace. Para ello se presentan dos opciones: Primera opción, configurada para digitar directamente el sistema de EDO y las restricciones de manera similar, tal como se mostró en la Figura 26. La segunda opción, de acuerdo con el propósito del usuario de esta herramienta, es que se puede guardar la información del sistema analizado y/o el que desea analizar e incluso las restricciones digitadas en un enlace, con la ventaja de continuar o recordar el análisis dicho sistema en una sesión posterior. Como ejemplo el siguiente enlace:

[Slope and Direction Fields for Differential Equations \(bluffton.edu\)](https://bluffton.edu/slope-direction-fields)

lo llevará a una página de manera similar a lo mostrado en la figura anterior, pero en este caso se puede observar que el sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal y las restricciones ya están digitados, por lo que solo quedaría hacer clic en el plano cartesiano (parte derecha) para visualizar el esbozo de las trayectorias, tal como se mostró en la Figura 26.

A continuación, describiremos la tercera herramienta considerada en la T2.

Descripción de la Herramienta Wolfram

Para el caso de la herramienta Wolfram, se tienen dos opciones. La opción web WolframAlpha, que es de acceso libre y la opción, con licencia, Wolfram Mathematica. Esta segunda opción será la considerada en la tarea 2. Ambas opciones, se muestran en la parte superior e inferior respectivamente en la Figura 27.

Figura 27

Ventanas de WolframAlpha y Wolfram Mathematica

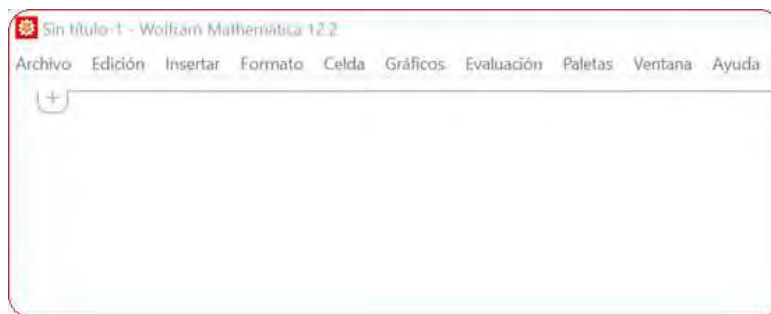


Fuente: Captura del menú principal de WolframAlpha y Wolfram Mathematica

El Wolfram Mathematica tiene muchas más herramientas, lo que permitió elaborar un algoritmo específico que muestra cada uno de los pasos cruciales en el proceso del análisis cualitativo, para ser usado de manera similar en las herramientas anteriores. La descripción detallada de este algoritmo se presenta en el Anexo 2. La Figura 28 muestra la ventana de inicio del Wolfram Mathematica.

Figura 28

Ventanas de inicio de Wolfram Mathematica

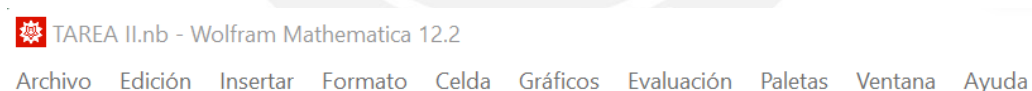


Fuente: Captura de la ventana de inicio de Wolfram Mathematica

En la figura anterior, se introducen los comandos respectivos para ingresar el sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Dichos comandos requieren de cierta sintaxis propia del Wolfram Mathematica, tal como se muestra en la Figura 29.

Figura 29

Entrada de las funciones y el sistema en Wolfram Mathematica



Sistema de EDO no lineal:

$$f[k_, c_] = \text{Log}[k] + 1 - c - \frac{k}{2};$$

[logaritmo]

$$g[k_, c_] = c \left(\frac{1}{k} - 1 \right);$$

$$k'[t_] = f[k[t], c[t]];$$

$$c'[t_] = g[k[t], c[t]];$$

Fuente: Captura de la entrada de las funciones y el sistema en Wolfram Mathematica

En la figura anterior, primero se definen las funciones f y g , después de ello se define el sistema de EDO no lineal

$$k' = f(k(t), c(t)) \text{ y } c' = g(k(t), c(t)).$$

Al hacer uso de este algoritmo, se requiere digitar las funciones y el sistema de EDO no lineal. A diferencia de las herramientas anteriores, no se requiere ingresar las restricciones porque el Wolfram Mathematica las detecta, salvo que sean condiciones propias del sistema.

Descripción de la tarea 3 (T3)

Incluye un modelo de Economía, el cual tiene asociado un sistema de EDO no lineal. Dicho modelo se desea analizar cualitativamente, aplicando un proceso similar que en **T1** y **T2**. Esto con el objetivo de ir del modelo que se está analizando a la Matemática y de la Matemática a describir cualitativamente el modelo analizado.

T3 tiene como **propósito** propiciar que nuestro objeto de estudio sea realmente una herramienta de análisis para la Economía, además de obtener información sobre un modelo Económico. El enunciado de **T3** se muestra en la Figura 30.

Figura 30

Tarea 3: Aplicación del análisis cualitativo: Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Tarea 3 : Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Analizar cualitativamente el **modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans**. Dicho modelo establece las siguientes relaciones dinámicas entre el stock de capital per cápita de una economía, k , y el consumo per cápita, c :

$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \quad \text{y} \quad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m + \rho) \quad (*)$$

- La primera ecuación es una regla de acumulación de capital e indica que el capital per cápita se incrementa siempre que la inversión en nuevo capital, que es igual al ahorro $y - c$ donde $y = \phi(k)$ es el nivel de ingreso (producción), supere a la cantidad necesaria para reponer el capital depreciado, mk . La función ϕ es cóncava, $\phi' > 0$ y $\phi'' < 0$.
- La segunda ecuación (llamada **ecuación de Euler**) es el resultado de un problema de optimización dinámico, donde $\rho \in]0, 1[$ es la tasa de descuento de los hogares.

En la Tabla 11, se muestra una síntesis de la estructura de las tres tareas, y su respectivo objetivo y procedimiento.

Tabla 11

Síntesis de la estructura de las tareas, objetivos y procedimiento

		Objetivo	Procedimiento
TAREA	T1	Analizar cualitativamente un sistema de EDO no lineal	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios) • Linealización • Tipo de singularidad del sistema linealizado • Tipo de singularidad del sistema no lineal • Diagrama de fase
	T2	Verificar el análisis cualitativo, haciendo uso de la tecnología digital	<ul style="list-style-type: none"> • Uso de la Tecnología digital MatLab, Bluffton o un Algoritmo de Wolfram para el análisis cualitativo de un sistema de EDO no lineal
	T3	Analizar cualitativamente un modelo de Economía	<ul style="list-style-type: none"> • Procedimiento similar que en la tarea 1.

Como muestra la tabla anterior, **T1** trata del análisis cualitativo de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal y **T2** es dedicada al uso de la herramienta tecnológica MatLab, Bluffton y Wolfram, que tiene por objetivo confirmar el análisis realizado en **T1**. De manera secuencial estas tareas serán consideradas como el previo de **T3**, el cual trata de la aplicación del análisis cualitativo para el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans.

La propuesta se presenta en una situación ideal, pues no hay una persona real. Como afirman Montoya y Vivier (2014), en el modelo de Espacio de Trabajo Matemático (ETM) del análisis, esto permite mayor libertad en el análisis y descarta la necesidad de pensar en las respuestas de los estudiantes, además de los conocimientos disponibles y el plan de estudios. Por ello, a continuación, se presenta un análisis del trabajo matemático que podría manifestarse en esta situación apoyándonos del modelo del ETM.

3.3 Análisis de las tareas de la propuesta desde el ETM

La presente sección se ha organizado de la siguiente manera: en primer lugar, se analiza desde el ETM las conexiones que existen entre un sistema de EDO no lineal con uno lineal. Después de ello, se analiza, con base en el ETM, las tres tareas de la propuesta didáctica. Para realizar dicho análisis se hace uso de un **protocolo** (ver Tabla 5).

Primero realizaremos un análisis sobre la conexión entre un sistema no lineal con uno lineal. Es importante mencionar que, para movilizar la noción de sistema de EDO no lineal, se debe considerar el uso de algunos aspectos teóricos relevantes del tema de sistema de EDO lineal, el cual consideraremos como parte de los previos requeridos para iniciar un estudio en el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales.

3.3.1. Análisis de la conexión de un sistema de EDO no lineal con un sistema de EDO lineal desde el ETM

En la investigación consideramos como conocimiento previo sistemas del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (i)$$

con a, b, c, d constantes. Podemos escribir (i) en la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{bmatrix}$$

donde $f(x, y) = ax + by$ y $g(x, y) = cx + dy$.

Se sigue que $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones lineales. Ahora vamos a estudiar sistemas de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{bmatrix} \quad (ii)$$

donde $f, g: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones que no necesariamente son lineales. Sin embargo, lo aprendido en la etapa previa (estudio de (i)) será de mucha utilidad para el estudio de (ii).

A partir de la representación algebraica de un sistema de EDO lineal, se puede reescribir esta de manera general, considerando funciones no necesariamente lineales, obteniendo una representación algebraica de un sistema de EDO no lineal.

En términos del ETM, propiciaría la activación de la **génesis discursiva** cuando, a partir de la teoría matemática, se presenta la conexión del sistema de EDO lineal con un sistema de EDO no lineal, lo que permite justificar la importancia y utilidad de las nociones previas consideradas en esta investigación.

En términos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), al usar como artefacto simbólico

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x(t), y(t)) \\ g(x(t), y(t)) \end{bmatrix}$$

Se puede generar la conexión de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) lineal con uno no lineal, podría permitir identificar de manera más explícita la importancia y utilidad de algunos aspectos de las nociones previas de sistemas de EDO lineal en la construcción del nuevo concepto sobre sistemas de EDO no lineal. Así podría activarse la **génesis instrumental**. Por tanto, basado en las posibles activaciones de las génesis instrumental y discursiva, se propiciaría la activación del **plano vertical Instrumental Discursivo** [Ins-Dis].

A continuación, se analiza con base en el ETM, las tareas de la propuesta.

3.3.2. Análisis de las tareas T1, T2 y T3 desde el ETM

Aquí se presenta el análisis de cada una de las tareas **T1**, **T2** y **T3**. La organización del análisis realizado en cada una de ellas está dada de la siguiente manera:

Con respecto a la tarea **T1**, en cada una de las cinco preguntas que la conforman hay tres partes. Comienza con la descripción del propósito de dicha pregunta, seguido de la solución esperada y finaliza con el análisis teórico (de dicha solución esperada) desde el ETM.

Con respecto a la tarea **T2**, en cada una de las tres herramientas digitales hay tres partes. Comienza con la descripción del propósito de uso de dicha herramienta, seguido de la solución esperada y finaliza con el análisis teórico (de dicha solución esperada) desde el ETM.

Con respecto a la tarea **T3**, comienza con la descripción del propósito de dicha tarea. Además, en cada uno de los pasos del análisis cualitativo (visto en **T1**) hay dos partes. Se presenta la solución esperada y finaliza con el análisis teórico (de dicha solución esperada) desde el ETM.

Análisis de T1

Pregunta 1 (P1)

Tiene como propósito generar la noción de curvas de fase al graficar las curvas representadas por las ecuaciones $f(k, c) = 0$ y $g(k, c) = 0$, además en la intersección de dichas curvas identificar y calcular los puntos de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal. Aquí, denominamos a este sistema como (*).

Solución esperada de P1

La solución esperada se muestra en la Figura 31.

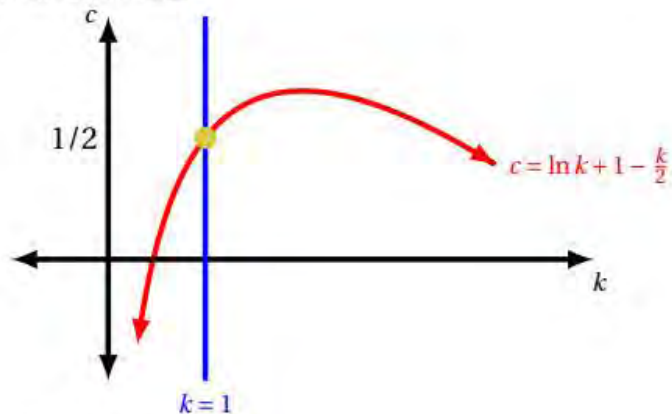
Figura 31

Solución esperada de la P1

1. **Puntos de Equilibrio.** Curva de fase: $f(k, c) = 0 \wedge g(k, c) = 0$

$$\left. \begin{aligned} \dot{k} = f(k, c) &:= \ln k + 1 - c + \frac{k}{2} = 0 &\rightarrow c = \ln k + 1 - \frac{k}{2} \\ \dot{c} = g(k, c) &:= c \left(\frac{1}{k} - 1 \right) = 0 &\rightarrow k = 1 \end{aligned} \right\} \text{ curvas de fase}$$

Esbozo de las curvas de fase



Puntos de equilibrio: (k_{ss}, c_{ss})

$$k = 1 \rightarrow c = \ln 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, $(k_{ss}, c_{ss}) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Análisis de P1 desde el ETM

Se espera que active la **génesis semiótica**, cuando a partir de la representación

$$f(k, c) := \ln(k) + 1 - c - \frac{k}{2} = 0 \quad \text{y}$$

$$g(k, c) := c \left(\frac{1}{k} - 1 \right) = 0,$$

se realice un proceso de visualización cuando identifiquen a la representación algebraica de las curvas de fase, la cual se muestra en la Figura 32.

Figura 32

Solución esperada: Curva de fase

Curva de fase: $f(k, c) = 0 \wedge g(k, c) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{k} = f(k, c) := \ln k + 1 - c + \frac{k}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad c = \ln k + 1 - \frac{k}{2} \\ \dot{c} = g(k, c) := c \left(\frac{1}{k} - 1 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad k = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{curvas} \\ \text{de} \\ \text{fase} \end{array}$$

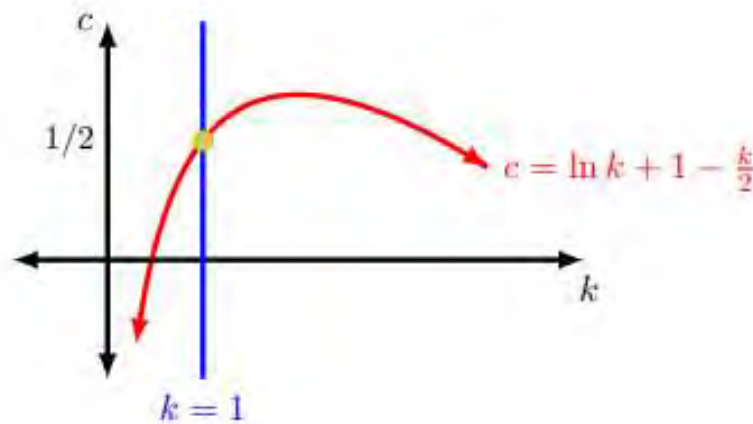
Además, para el esbozo de las curvas de fase, se espera la activación de la **génesis instrumental** al usar como artefacto simbólico la representación algebraica de las curvas de fase

$$c = \ln(k) + 1 - \frac{k}{2} \quad \text{y} \quad k = 1,$$

con el propósito de realizar la construcción de la gráfica de las curvas de fase las cuales se pueden ver en la Figura 33.

Figura 33

Solución esperada: Esbozo de las curvas de fase



A partir de la representación gráfica, de las curvas de fase, se puede tomar como representamen la intersección de las curvas de fase e identificar esta como el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) del sistema de EDO no lineal. Es decir,

$$k = 1 \rightarrow c = \ln 1 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego, $(k_{SS}, c_{SS}) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$. Con lo cual se espera se active la **génesis semiótica**.

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis de Cálculo (AC)**, pues se espera el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios).

Otra manera de obtener los puntos de equilibrio es a partir de la representación algebraica donde podría activarse la **génesis semiótica** al tomar como representamen al punto de intersección (k_{SS}, c_{SS}) , que fue obtenido a partir de resolver

$$F(k, c) = \begin{bmatrix} f(k, c) \\ g(k, c) \end{bmatrix} = 0$$

lo que es equivalente a resolver las ecuaciones:

$$f(k, c) = 0 \text{ y } g(k, c) = 0,$$

para realizar el proceso de visualización al identificar este punto como el punto de equilibrio del sistema de EDO no lineal.

Pregunta 2 (P2)

Considerando un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal (*), esta pregunta tiene como **propósito** linealizar dicho sistema. Es decir, para cada punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) determinar el sistema lineal asociado al no lineal (*). Para ello es necesario calcular la matriz Jacobiana y evaluar en cada punto de equilibrio.

Solución esperada de P2

La solución esperada se muestra en la Figura 34.

Figura 34

Solución esperada de la P2

2. **Linealización.** El sistema lineal asociado alrededor del equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) viene dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = DF(k_{ss}, c_{ss}) \cdot \begin{bmatrix} x - x_{ss} \\ y - y_{ss} \end{bmatrix}$$

donde

$$F(k, c) = \begin{bmatrix} \ln k + 1 - c - \frac{k}{2} \\ c\left(\frac{1}{k} - 1\right) \end{bmatrix}$$

De la tarea 2: $(k_{ss}, c_{ss}) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

Luego

$$DF(k_{ss}, c_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{ss}} - \frac{1}{2} & -1 \\ c_{ss}\left(-\frac{1}{k_{ss}^2}\right) & \frac{1}{k_{ss}} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema lineal asociado es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{Sistema Lineal Homogéneo}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Sistema Lineal No Homogéneo}} \end{aligned}$$

Análisis de P2 desde el ETM

A partir de la transformación F , se espera que se realice la aproximación de primer orden de F cerca del equilibrio, dado por

$$F(k, c) \approx F(k_{ss}, c_{ss}) + DF(k_{ss}, c_{ss}) \cdot d(k, c) = 0 + DF(k_{ss}, c_{ss}) \cdot d(k, c) = DF(k_{ss}, c_{ss}) \cdot d(k, c)$$

donde $d(k, c)$ es el diferencial de (k, c) definido por:

$$d(k, c) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta(k, c) = k - c$$

Luego, el sistema lineal asociado a (*) alrededor del punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) viene dado por:

$$F(k, c) \approx DF(k_{ss}, c_{ss}) \cdot d(k, c)$$

En términos del ETM, se espera que se propicie la activación de la **génesis instrumental** al hacer uso del artefacto simbólico la aproximación de primer orden de F para determinar la linealización del sistema (*).

Para determinar la matriz Jacobiana de F , se debe considerar F como

$$F(k, c) = \begin{bmatrix} \ln(k) + 1 - c - \frac{k}{2} \\ c \left(\frac{1}{k} - 1 \right) \end{bmatrix}$$

De la Pregunta 1, el punto de equilibrio es:

$$(k_{ss}, c_{ss}) = \left(1, \frac{1}{2} \right).$$

Luego, evaluando DF en dicho punto se tiene:

$$DF(k_{ss}, c_{ss}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{ss}} - \frac{1}{2} & -1 \\ c_{ss} \left(-\frac{1}{k_{ss}^2} \right) & \frac{1}{k_{ss}} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Así el sistema lineal asociado a (*) es:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - 1 \\ y - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{Sistema lineal homogéneo}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\text{Sistema lineal No homogéneo}} \end{aligned}$$

En términos del ETM, En términos del ETM, se espera que se active la **génesis semiótica** al considerar como representamen a $DF(k_{SS}, c_{SS})$ el cual identifica a la matriz Jacobiana de F evaluada en el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) . En consecuencia, se espera la activación **del plano vertical Semiótico Instrumental [Sem-Ins]** la cual está sustentada por la activación de las **génesis semiótica e instrumental**.

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis de Cálculo (AC)**, pues se espera el cálculo de la matriz Jacobiana evaluado en cada punto de singularidad (puntos de equilibrio o estados estacionarios) y se hace uso de los cálculos previos realizados en la Pregunta 1, lo que describe un trabajo algorítmico.

Pregunta 3 (P3)

Tiene como propósito fortalecer el proceso de clasificación del punto de equilibrio de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) linealizado, haciendo uso del plano de coordenadas $(trA, detA)$.

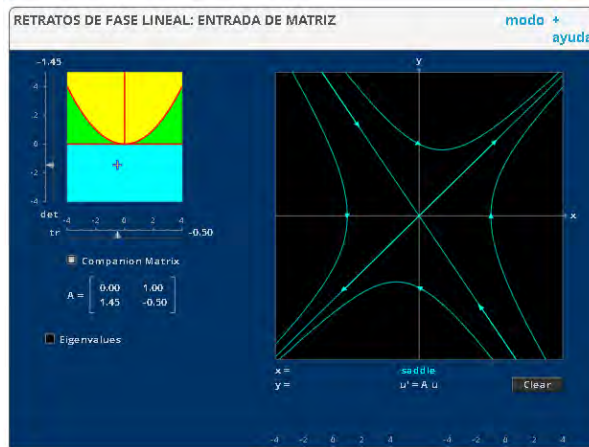
Esta clasificación también se puede visualizar, de forma más interactiva, a través del siguiente enlace:

<http://mathlets.org/mathlets/linear-phase-portraits-matrix-entry/>

el cual, por defecto, asocia a cada par ordenado en el plano $tr(A)$ - $det(A)$ (ubicando el puntero del ratón en dicho par ordenado) el tipo de singularidad a través de su Diagrama de fase, tal como se muestra en la Figura 35.

Figura 35.

Clasificación del punto de equilibrio en el plano ($trA, detA$)



Fuente: Captura de imagen de <http://mathlets.org/mathlets/linear-phase-portraits-matrix-entry/>

Tal como se muestra en la Figura anterior, al ubicar el puntero por ejemplo en la zona (de color turquesa) donde $\det(A) < 0$, la clasificación del diagrama de fase es del tipo Silla.

Solución esperada de P3

La solución esperada se muestra en la Figura 36.

Figura 36.

Solución esperada de la P3

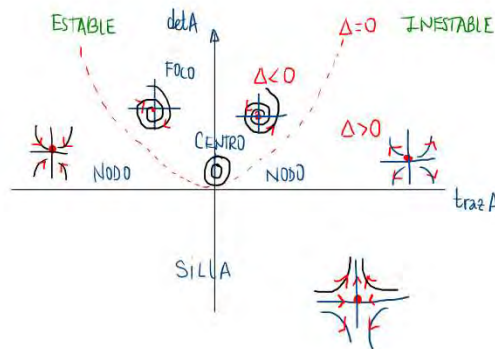
3. **Tipo de singularidad del sistema linealizado.** La clasificación del sistema lineal, se realiza a partir del Sistema Lineal Homogéneo cuyo punto de equilibrio es siempre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- De la clasificación del plano $tr(A)-det(A)$: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es punto de silla, Lo que implica que: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
- $\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) \neq 0$

A continuación, presentamos la clasificación del que se haría uso en la solución esperada. (ver Figura 37)

Figura 37.

Clasificación esperada de singularidades en el plano $(trA, detA)$



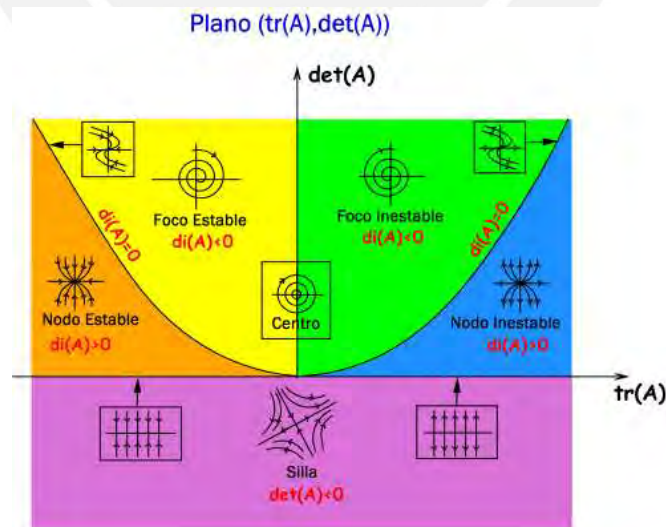
Esta clasificación permitirá un proceso de construcción para obtener el tipo de singularidad del punto de equilibrio $(0,0)$ de un sistema de EDO lineal.

Análisis de P3 desde el ETM

En esta pregunta Propiciaría que se active la **génesis instrumental** cuando se haga uso del artefacto simbólico plano de coordenadas $(trA, detA)$ (ver Figura 38).

Figura 38.

Clasificación de singularidades en el plano $(trA, detA)$



Fuente: Adaptado de <https://tex.stackexchange.com/questions/347201/drawing-the-trace-determinant-diagram-on-latex#347401>

En la Figura 38 se presenta la clasificación de singularidades en el plano ($trA, detA$). A partir de ello, se espera obtener la clasificación del sistema lineal el cual se realiza a partir del Sistema lineal homogéneo, cuyo punto de equilibrio es siempre (0,0). Esta clasificación permitirá un proceso de construcción para obtener el tipo de singularidad del punto de equilibrio (0,0) de un sistema de EDO lineal. Es decir,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} < 0, \text{ entonces } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ es un punto de silla.}$$

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis Real (AR)**, pues se espera que se determine el tipo de singularidad del sistema lineal que está asociado a uno no lineal, esta información es de manera local, ya que se da en una vecindad del punto de equilibrio.

Pregunta 4 (P4)

Considerando un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal (*), esta pregunta tiene como **propósito** obtener información de dicho sistema (*), además de fortalecer el uso del teorema de Grobman-Hartman. Este teorema, siempre y cuando se cumplan sus condiciones, trata de la clasificación de los puntos de equilibrio de un sistema de EDO no lineal, a partir de la clasificación del sistema linealizado (asociado al sistema no lineal (*)). Es decir, el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal alrededor del equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) es similar al comportamiento del sistema linealizado alrededor del (0,0) (esto último visto en la P3).

Solución esperada de P4

La solución esperada se muestra en la Figura 39.

Figura 39.

Solución esperada de la P4

4. **Tipo de singularidad del sistema no lineal.** Por el Teorema de Grobman-Hartman:

- El comportamiento de las soluciones de (*) cerca de $(k_{ss}, c_{ss}) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, es como las del sistema lineal asociado cerca de (0,0), es decir, del tipo silla.

Análisis de P4 desde el ETM

Tenemos que $(0,0)$ es un punto silla (visto en P3). Lo que implica que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ entonces se cumple que $\lambda_i = \text{Re}(\lambda_i) \neq 0$ (condición del Teorema de Grobman-Hartman).

En términos del ETM, se espera que se propicie la activación de la **génesis discursiva** al hacer uso del Teorema de Grobman-Hartman como referencial teórico, para justificar que el comportamiento de las trayectorias del sistema no lineal (*) alrededor del equilibrio

$$(k_{ss}, c_{ss}) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

es similar al comportamiento de las trayectorias del sistema linealizado alrededor de $(0,0)$. Es decir, tiene un comportamiento silla.

El **paradigma** que se privilegia aquí es del **Análisis Real (AR)**, al determinar el tipo de singularidad, haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, este nos brinda información geométrica, pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal. Además, brinda información topológica, pues toda la información geométrica obtenida es de manera local; es decir, se da en una vecindad del punto de equilibrio.

Pregunta 5 (P5)

Tiene por **propósito** elaborar el diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal y confirmar los resultados obtenidos en las preguntas anteriores. Es decir, todo el análisis del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal se complementa con el diagrama de fase.

En el diagrama de fase, se debe graficar las curvas de fase y para ello se pueden emplear los resultados de P1. Luego, identificar las regiones, donde $f > 0, f < 0, g > 0, g < 0$ y, con ello, determinar la orientación de los vectores tangente (\dot{k}, \dot{c}) . Finalmente, realizar el esbozo de las trayectorias en base a la información de los vectores tangente. Como además se cuenta con la información del tipo de singularidad, visto en la P4, se podrá cruzar información y verificar los resultados obtenidos.

Solución esperada de P5

La solución que se espera en esta última pregunta se muestra en detalle en la Figura 40.

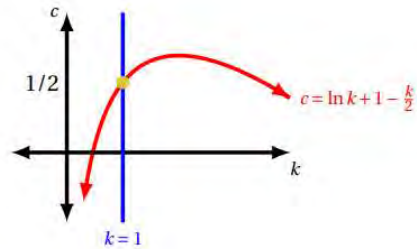
Figura 40.

Solución esperada de la P5

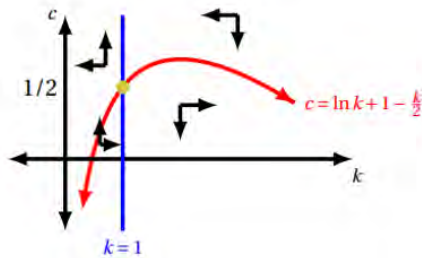
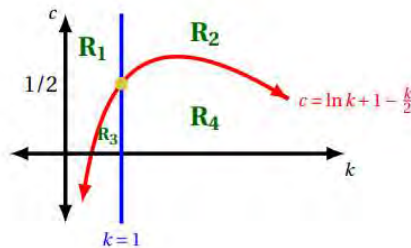
5. Diagrama de Fase.

■ Graficar curvas de fase

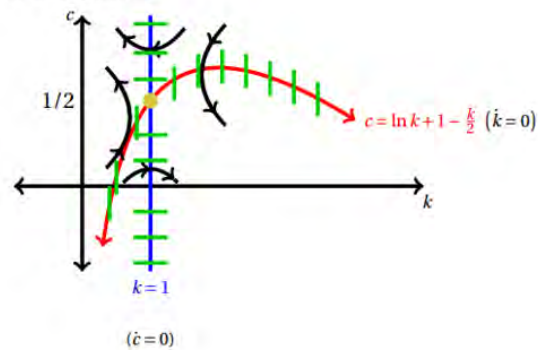
$$\begin{aligned} \dot{k}=0 &\rightarrow c = \ln k - \frac{k}{2} + 1 \\ \dot{c}=0 &\rightarrow k = 1 \end{aligned}$$



■ Regiones



■ Esbozo de las trayectorias



Análisis de P5 desde el ETM

En términos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se espera se active la **génesis instrumental** cuando se haga uso del artefacto simbólico del campo de vectores, de las flechas verticales y horizontales a la vez, es decir, los componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción que permita obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal, en otras palabras, el diagrama de fase.

Para realizar el esbozo de las trayectorias, primero se debe graficar las curvas de fase, tal como se ve en la Figura 41.

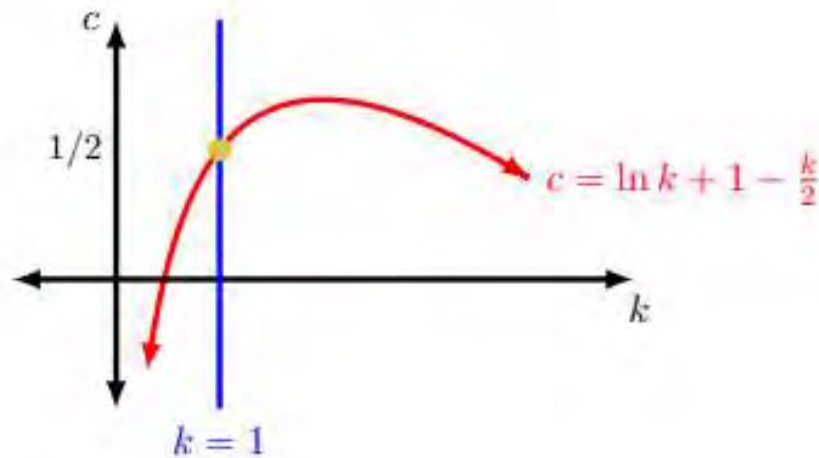
I) Graficar las curvas de fase:

$$\dot{k} = 0 \rightarrow c = \ln k - \frac{k}{2} + 1$$

$$\dot{c} = 0 \rightarrow k = 1$$

Figura 41.

Solución esperada: Curvas de fase

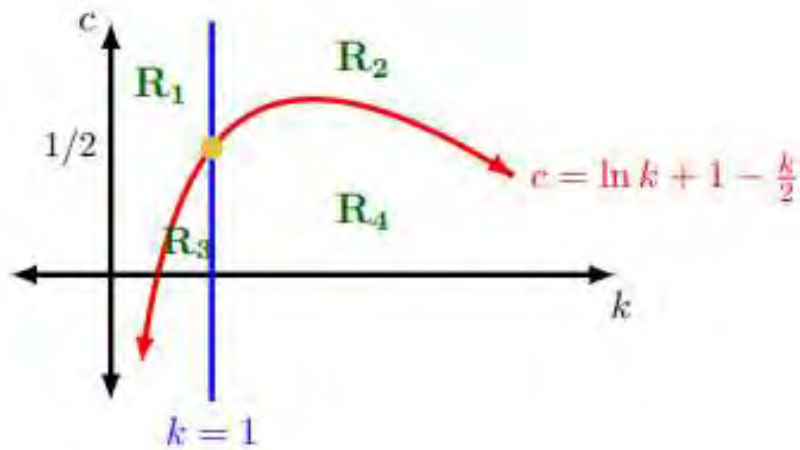


Luego, identificar las regiones que separan el plano cartesiano; ello se muestra en la Figura 42.

II) Regiones:

Figura 42.

Identificación de las regiones que separan el plano cartesiano



En cada región, se espera analizar el signo de los componentes del vector tangente es decir de \dot{k} y \dot{c} .

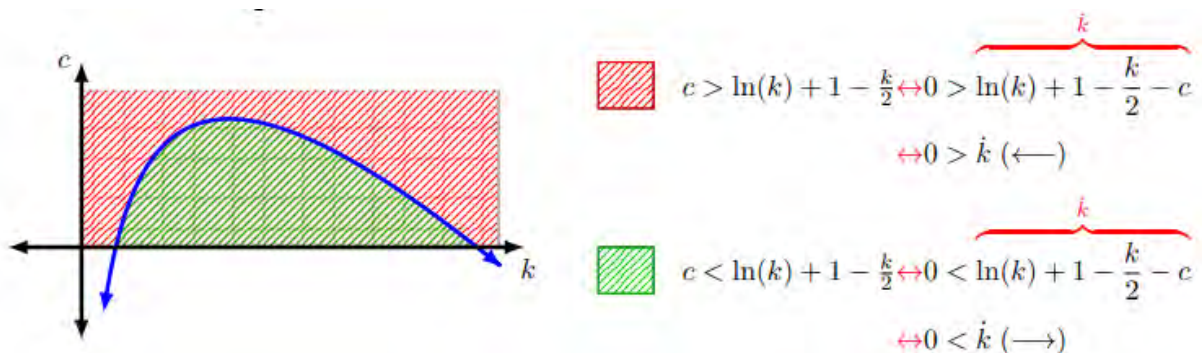
III) Analizar el signo de \dot{k} y \dot{c} (componentes del vector tangente) en cada región R_i :

Para $c = \ln k + 1 - \frac{k}{2}$:

En cada región, analizar el signo de los componentes horizontales del vector tangente. Es decir, de \dot{k} , tal como se muestra en la Figura 43.

Figura 43.

Análisis de signos de los componentes horizontales del vector tangente

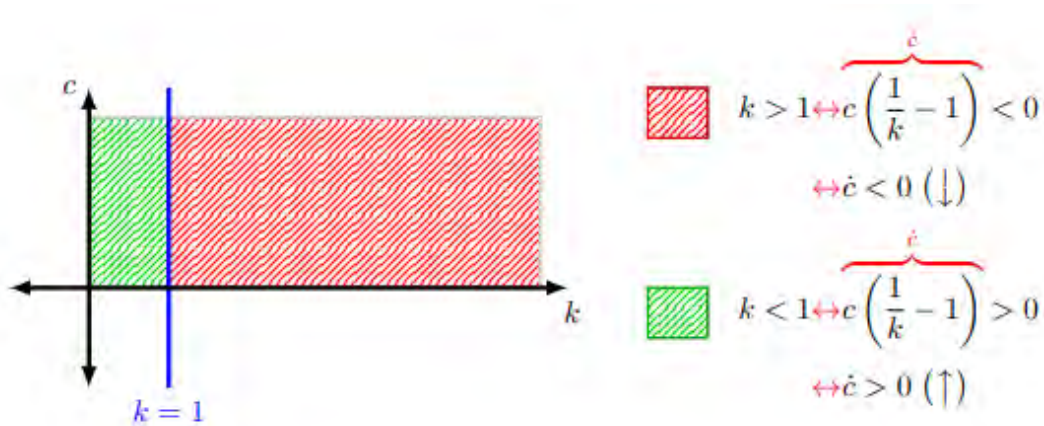


Para $k = 1$:

En cada región, analizar el signo de los componentes verticales del vector tangente es decir de \dot{c} , como se muestra en la Figura 44.

Figura 44.

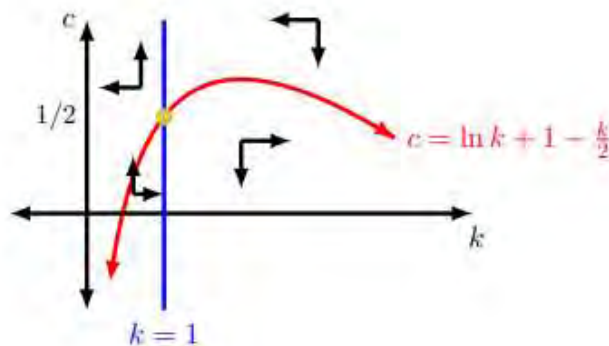
Análisis de signos de los componentes verticales del vector tangente



A partir de los signos, identificar estos componentes, del vector tangente, como vector horizontal y vertical respectivamente, en cada región, tal como se muestra en la Figura 45.

Figura 45.

Identificación de los componentes del vector tangente en el plano

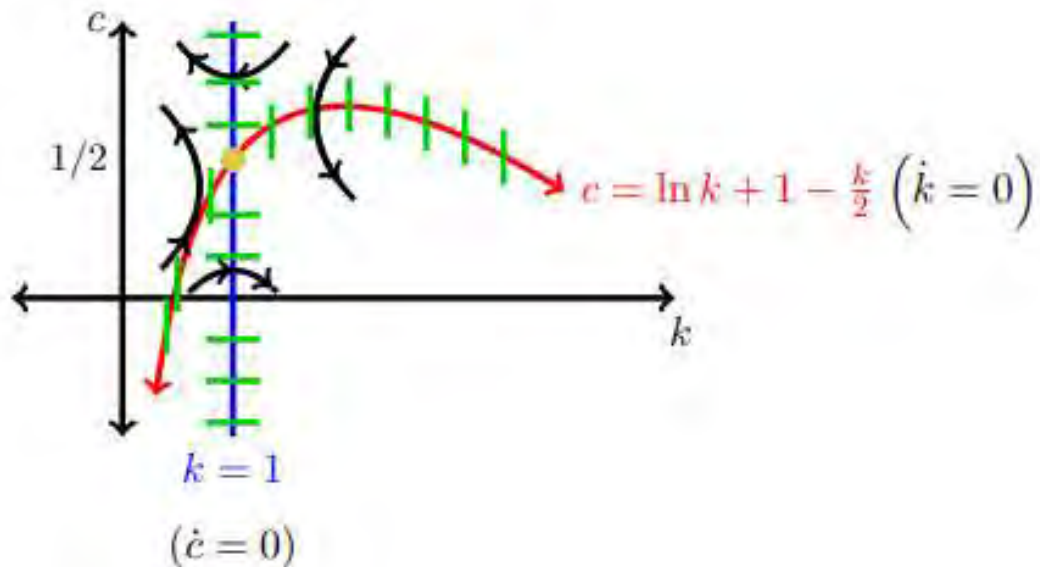


Finalmente, de acuerdo con el análisis anterior, se espera que se realice el esbozo de las trayectorias, como se ve en la Figura 46, considerando las características y resultados obtenidos en los pasos anteriores, complementando esto con la información del tipo de singularidad del punto de equilibrio del sistema de EDO no lineal (analizado en tareas anteriores).

IV) Esbozo de las trayectorias:

Figura 46.

Solución esperada: Esbozo de trayectorias



Sobre los posibles resultados en el ítem IV, propiciaría que se active la **génesis instrumental** cuando se haga uso del artefacto simbólico del campo de vectores, de las flechas verticales y horizontales a la vez, es decir, los componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción que permita obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal o, en otras palabras, el diagrama de fase.

El **paradigma** que se privilegia aquí es del **Análisis Geométrico (AG)**, pues la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con fórmulas explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo parte del supuesto implícito de su existencia basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman.

A continuación, en la Tabla 12, se presenta el análisis de la tarea 1 (**T1**) desde el ETM.

Tabla 12

Síntesis del análisis de T1 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan

		Tarea	Pregunta	Análisis desde el ETM
PROPUESTA DIDÁCTICA	T1		P1	<p>Se espera que active la génesis semiótica, cuando a partir de la representación algebraica se realice un proceso de visualización cuando identifiquen a la representación algebraica de las curvas de fase.</p> <p>Para el esbozo de las curvas de fase, se espera la activación de la génesis instrumental al usar como artefacto simbólico la representación algebraica de las curvas de fase, con el propósito de realizar la construcción de la gráfica de las curvas de fase.</p> <p>A partir de esta representación gráfica, se puede tomar como representamen la intersección de las curvas de fase e identificar esta como el punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) del sistema de EDO no lineal, con lo cual se espera se active la génesis semiótica.</p>
			P2	<p>Se espera que se propicie la activación de la génesis instrumental al hacer uso del artefacto simbólico la aproximación de primer orden de F para determinar la linealización del sistema (*).</p> <p>Se espera que se active la génesis semiótica al considerar como representamen a $DF(k_{ss}, c_{ss})$ de la matriz Jacobiana de F evaluada en el punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}).</p> <p>Así, la activación del plano vertical Semiótico Instrumental [Sem-Ins] está sustentada por la activación de las génesis semiótica e instrumental.</p>
			P3	<p>Propiciaría que se active la génesis instrumental cuando se haga uso del artefacto simbólico plano $(trA, detA)$ y a partir de ello, se espera obtener la clasificación del sistema lineal el cual se realiza por medio del sistema lineal homogéneo, cuyo punto de equilibrio es siempre $(0,0)$.</p> <p>Esta clasificación permitirá un proceso de construcción para obtener el tipo de singularidad del punto de equilibrio $(0,0)$ de un sistema de EDO lineal.</p>
			P4	<p>Se espera que se propicie la activación de la génesis discursiva al hacer uso del Teorema de Grobman-Hartman como referencial teórico, para justificar que el comportamiento de las trayectorias del sistema no lineal (*) alrededor del equilibrio $(k_{ss}, c_{ss}) = (1, \frac{1}{2})$ es similar al comportamiento de las trayectorias del sistema linealizado alrededor de $(0,0)$.</p>
			P5	<p>Se espera se active la génesis instrumental cuando se haga uso del artefacto simbólico del campo de vectores, de las flechas verticales y horizontales a la vez. Es decir, los componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción que permita obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal. En otras palabras, el diagrama de fase.</p>

La tabla anterior permite revisar brevemente las génesis y planos verticales que se activan en cada una de las preguntas de T1.

A continuación, en la Tabla 13 presentamos los paradigmas presentes en las cinco preguntas (en conjunto) de **T1**. Al respecto, en las cinco preguntas de **T1** de la propuesta se espera utilicen herramientas de Álgebra (pues hay procesos operatorios con polinomios y matrices) seguidas de herramientas de análisis (pues bajo ciertas condiciones se hace uso de un teorema para determinar el tipo de singularidad, unido también a que hay un estudio de los signos de las componentes del vector tangente para el esbozo de las trayectorias). De allí, que el trabajo matemático se encuentra principalmente en el Dominio del Análisis.

Tabla 13

Síntesis del análisis de T1 desde el ETM: paradigmas presentes

	Tarea	Paradigma	Análisis desde el ETM
PARADIGMA DEL ANÁLISIS	T1	AC	<ul style="list-style-type: none"> En el paradigma Análisis de Cálculo (AC), para el análisis cualitativo, es necesario definir en P1 y P2 las reglas de Cálculo, se espera el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios) y los cálculos previos necesarios. Luego en P3 y P4 en el paradigma Análisis Real (AR), se puedan utilizar para determinar el tipo de singularidad. Dichos cálculos están basados en resolver ecuaciones (curvas de nivel cero), calcular la matriz Jacobiana (en la linealización del sistema de EDO no lineal), además de su determinante, discriminante y autovalores de dicha matriz; todo lo descrito conduce a un trabajo algorítmico.
		AR	<ul style="list-style-type: none"> En el paradigma Análisis Real (AR), P3 y P4 del análisis cualitativo es determinar el tipo de singularidad al hacer uso del teorema de Grobman-Hartman (en caso se cumplan las condiciones para su uso), ya que este nos brinda información geométrica (pues la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal) y topológica (pues toda la información geométrica mencionada anteriormente es de manera local, ya que se da en una vecindad del punto de equilibrio). Hasta aquí, se espera que se determine el tipo de singularidad del sistema de EDO no lineal cerca al punto de equilibrio, debido a que este trabajo matemático es guiado por los paradigmas AC y AR.
		AG	<ul style="list-style-type: none"> En el paradigma Análisis Geométrico/ Aritmético (AG), la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con ecuaciones (fórmulas) explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo parte del supuesto implícito de su existencia, basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman. Finalmente, en esta situación ideal, observamos que con los posibles resultados obtenidos en AC y AR (donde se da la justificación analítica) se obtiene información que puede ser complementada con una percepción visual a través del Diagrama de fase dentro del paradigma AG.

Una observación es que en el paradigma AG, el diagrama de fase podría ser realizado, en un primer momento, con ayuda de un software (trabajo instrumentado Montoya y Vivier (2016)) o no. Así, previamente, podemos visualizar el comportamiento de las soluciones, la cual será justificada en el paradigma AC y, de manera analítica, en AR.

Es importante mencionar que, en las tareas propuestas para el análisis cualitativo, el trabajo matemático se identificaría en los tres paradigmas del análisis y el trabajar en más de un paradigma ayudaría a evitar errores, tal como afirman Montoya y Vivier (2016). A continuación, en la Tabla 14 se presenta una síntesis del análisis de la tarea 1 (T1) desde el ETM

Tabla 14

Síntesis del análisis de T1 desde el ETM

Síntesis del análisis desde el ETM									
Pregunta	Paradigma	Génesis Semiótica		Génesis Instrumental		Génesis Discursiva	Plano Vertical	Esquema del ETM esperado	
		Rep.	Vis.	Artf.	Const.	Ref.			Pba.
TAREA 1	P1	AC	✓	✓	✓	✓	[Sem – Ins]		
	P2	AC	✓	✓	✓	✓	[Sem – Ins]		
	P3	AR			✓	✓			
	P4	AR					✓	✓	
	P5	AC – AG			✓	✓			

Fuente: Adaptado de Henríquez et al. (2021, p. 136)

En la tabla anterior se presenta una síntesis del análisis de la tarea **T1** desde el ETM, el cual consiste en mostrar, para cada pregunta (P1, P2, P3, P4 y P5) de **T1**, el paradigma presente, las génesis que se activan (mostrando las componentes que lo conforman) y los planos verticales ([Sem – Ins], [Ins – Dis], [Sem – Dis]) correspondientes. Finalmente, un esquema donde se puede visualizar las génesis y planos verticales activados en cada una de las preguntas.

La tarea anterior se puede desarrollar haciendo uso del artefacto digital, como son las aplicaciones Wolfram o MatLab, para la visualización del diagrama de fase y su conexión con el análisis realizado previamente al uso de la tecnología, además de analizar los datos que permitan caracterizar los efectos y resultados obtenidos de la aplicación de la tecnología digital.

Así, en **T2**, que haría uso del artefacto digital, desde el ETM, favorecería la activación de la **génesis instrumental** al hacer uso de los artefactos tecnológicos, como lo son el Wolfram y Matlab, para realizar la construcción del diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal.

Análisis de T2

A continuación, detallamos el uso de la herramienta tecnológica Matlab, Bluffton y Wolfram para realizar la construcción del diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal.

El **paradigma** que se privilegia aquí es del **Análisis Geométrico (AG)**, pues la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias, haciendo uso de la tecnología digital.

Uso del MatLab (U1)

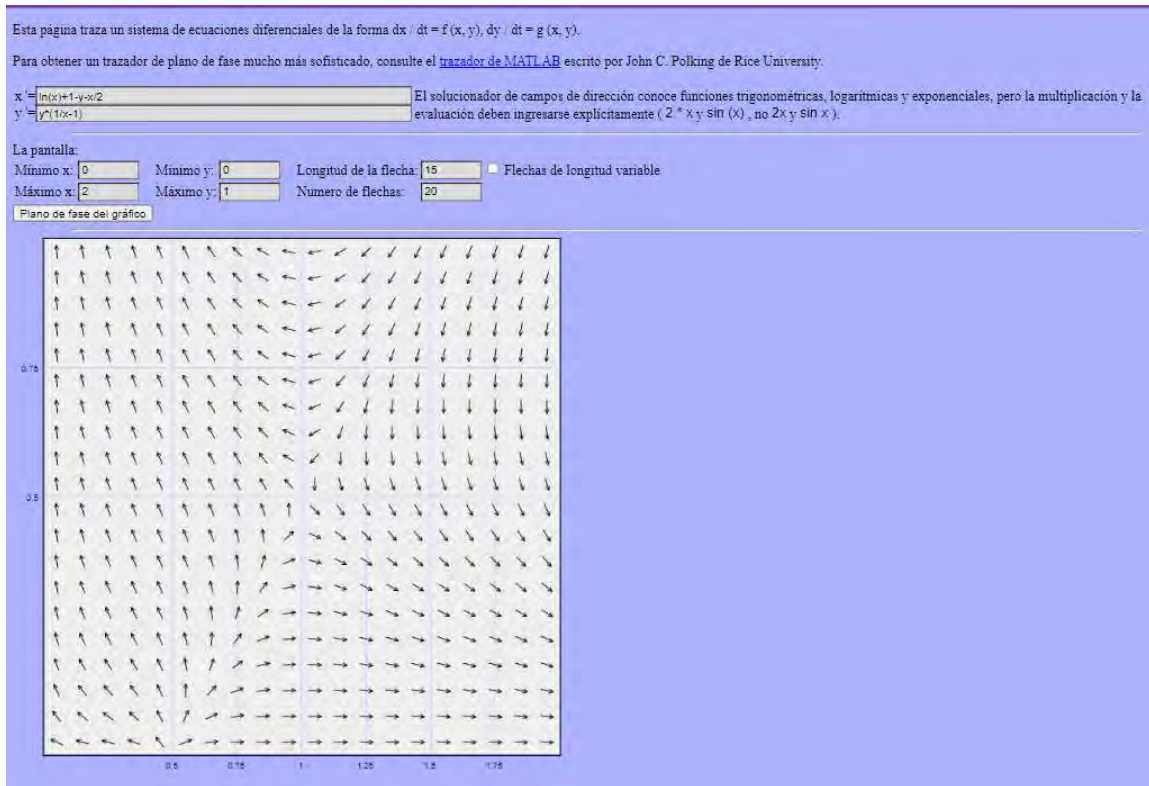
Tiene como propósito elaborar el diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal y confirmar los resultados obtenidos en **T1**, pero esta vez haciendo uso de la tecnología digital Matlab

Solución esperada en U1

Haciendo uso del artefacto MatLab se presenta el diagrama de fase esperado, por medio de un enlace (<https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>) para el cual es necesario reflejar las restricciones de las variables consideradas, para la construcción del campo de vectores. Dicho campo de vectores se muestra en la Figura 47.

Figura 47.

Campo de vectores visualizado en el MatLab



Fuente: Captura del Campo de vectores generado por MatLab

Análisis en U1 desde el ETM

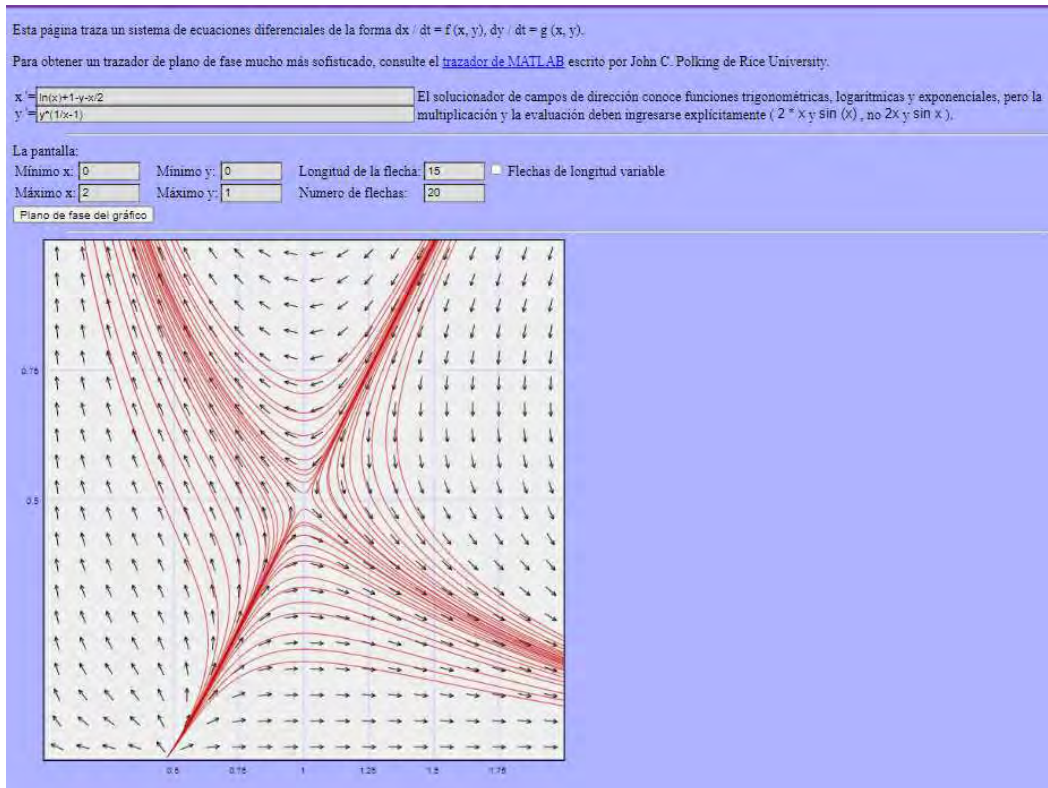
Desde el ETM, uso del artefacto MatLab para la realización del diagrama de fase propiciaría la activación de **la génesis instrumental**.

Desde el ETM, el campo de vectores se representa con flechas, ello favorecería el proceso de visualización de las trayectorias. En consecuencia, la activación de **la génesis semiótica**.

Se espera que luego de la visualización del campo de vectores en el MatLab, también se visualice el esbozo de trayectorias haciendo un clic sobre este campo de vectores, tal como se muestra en la Figura 48.

Figura 48.

Esbozo de trayectorias visualizado en el MatLab



Fuente: Captura del Esbozo de trayectorias generado por MatLab

Desde el ETM, se propicia la activación de dos procesos (visualización y prueba) en el plano horizontal cognitivo, ya que se favorece la visualización del esbozo de las trayectorias y con ello se determina el comportamiento tipo silla.

Uso del Bluffton (U2)

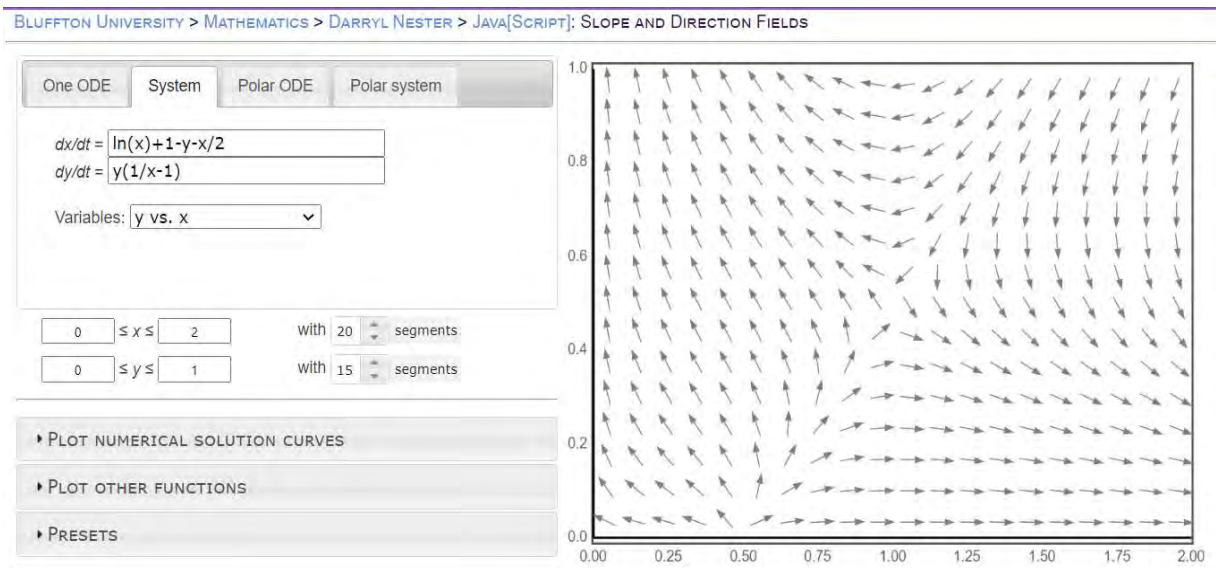
Tiene como **propósito** elaborar el diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal y confirmar los resultados obtenidos en **T1**, pero esta vez haciendo uso de la tecnología digital Bluffton.

Solución esperada en U2

En seguida se muestra lo esperado en el diagrama de fase haciendo uso del artefacto Bluffton ([Slope and Direction Fields for Differential Equations \(bluffton.edu\)](http://bluffton.edu)), el cual es mostrado en la Figura 49.

Figura 49.

Campo de vectores visualizado en Bluffton



Fuente: Captura del Campo de vectores generado por Bluffton

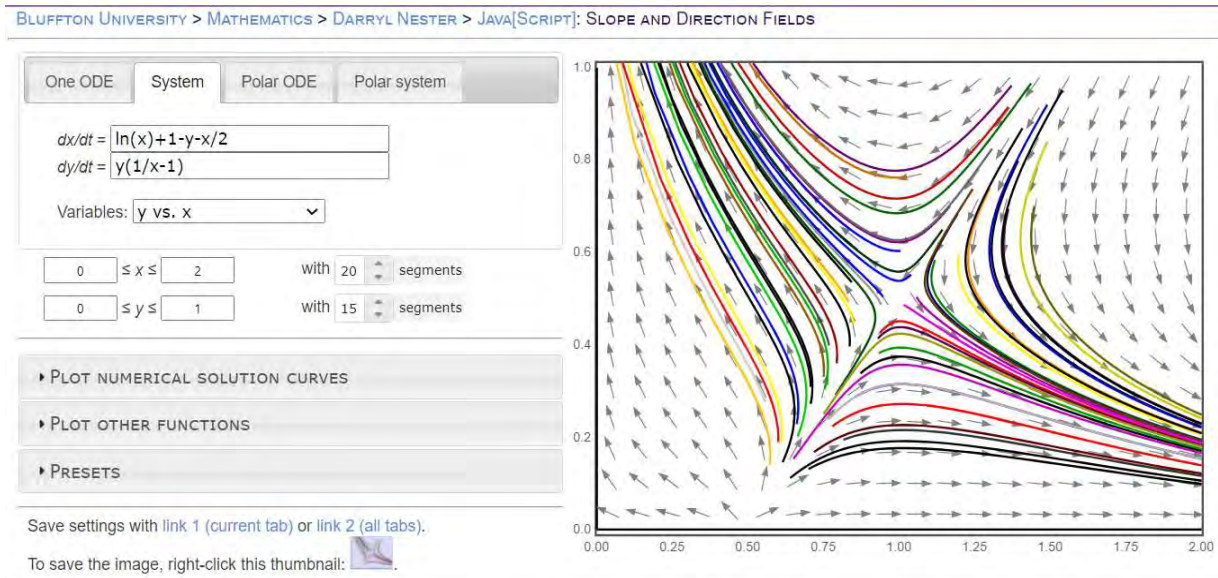
Análisis en U2 desde el ETM

Se espera que a partir de la representación vectorial en Bluffton, también se visualice el esbozo de trayectorias haciendo un clic sobre este campo de vectores. En consecuencia, la activación de la **génesis semiótica**.

En la Figura 49, podemos observar que también es necesario considerar las restricciones de las variables y enseguida ingresar las expresiones, esto determina la región donde se mostrará el campo de vectores. Desde el ETM, sin embargo, determinar estas restricciones es posible haciendo uso requiere del campo de vectores, generado sin restricciones, como artefacto y a partir de ello construir la región óptima para el campo de vectores. Lo que propiciaría la activación de la **génesis instrumental**.

Figura 50.

Esbozo de trayectorias visualizado en Bluffton



Fuente: Captura del Esbozo de trayectorias generado por Bluffton

Luego, haciendo solo clic sobre el campo de vectores, se obtenga el esbozo de las trayectorias, tal como se observa en la parte derecha de la Figura 50. Desde el ETM, se propicia la activación de dos procesos en el **plano horizontal cognitivo**, ya que se favorece la visualización del esbozo de las trayectorias, haciendo solo clic sobre el campo de vectores, y con ello se determina el comportamiento tipo silla.

Uso del Wolfram (U3)

De acuerdo con Flores et al. (2022) en el libro Kuzniak et al. (2022), donde se distingue el punto de vista del diseñador del artefacto del punto de vista del usuario e introducen el trabajo iterativo y la búsqueda de la idoneidad de su uso como en su diseño respectivo, esta tarea que trata de un algoritmo elaborado (original) por las autoras tiene como **propósito** esbozar el diagrama de fase de un sistema de EDO no lineal y confirmar los resultados obtenidos en T1, señalando paso a paso el desarrollo del análisis cualitativo, pero esta vez haciendo uso de la tecnología digital Wolfram, el cual es un artefacto complejo pero muy completo con múltiples opciones de resolución de problemas. En el Anexo 3, se puede revisar en detalle todo el algoritmo haciendo uso de dicha tecnología digital.

Solución esperada y análisis en U3 desde el ETM

Por último, en las siguientes figuras, mostramos lo esperado haciendo uso del artefacto Wolfram. Presentamos el algoritmo requerido para la realización del diagrama de fase.

Figura 51.

Algoritmo para el análisis cualitativo en Wolfram

Tarea 2

Sistema:

$$\text{In[]:= } f[k_, c_] = \text{Log}[k] + 1 - c - \frac{k}{2};$$

$$g[k_, c_] = c \left(\frac{1}{k} - 1 \right);$$

$$k'[t_] = f[k[t], c[t]];$$

$$c'[t_] = g[k[t], c[t]]; \text{Out[]:=}$$

1) Cálculo de singularidades:

$$\text{In[]:= } \text{sols} = \text{Solve}[f[k, c] == 0 \&\& g[k, c] == 0 \&\& c > 0, \{k, c\}, \text{Reals}]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ k \rightarrow 1, c \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Observación : La expresión $c > 0$ es una restricción. En caso no hubiese restricción, omitimos " $\&\& c > 0$ ".

Fuente: Captura del Algoritmo para el cálculo de singularidades en Wolfram

En la Figura 51, a partir de ingresar el sistema respectivo, se muestra el cálculo de singularidades, cuyo algoritmo permitiría obtener los puntos estacionarios o de equilibrio, lo cual es necesario para la linealización, el cual se muestra en la Figura 52.

Figura 52.

Linealización en Wolfram

2) Linealización:

$$\text{In}[] := \text{DF}[k_ , c_] = \text{MatrixForm}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

[forma de matriz]

$$t[A] = \text{Tr}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

[traza]

$$d[A] = \text{Det}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

[determinante]

$$\Delta[A] = (t[A])^2 - 4 d[A]$$

Out[]:=MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{k} & -1 \\ -\frac{c}{k^2} & -1 + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

$$\text{Out}[] := -\frac{3}{2} + \frac{2}{k}$$

$$\text{Out}[] := \frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} - \frac{c}{k^2} - \frac{3}{2k}$$

$$\text{Out}[] := -4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} - \frac{c}{k^2} - \frac{3}{2k} \right) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{k} \right)^2$$

$$\text{In}[] := (\text{DF}[k, c] /. \text{sols})$$

$$\text{Out}[] := \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Fuente: Captura del Algoritmo para la linealización en Wolfram

La figura anterior muestra que en el algoritmo se definen la traza, determinante y discriminante de la matriz A, donde A es definida como la matriz jacobiana de F. Además, se muestra dicha matriz jacobiana. Los valores obtenidos se muestran en la Figura 53.

Figura 53.

Tipo de singularidad del sistema linealizado

3) Tipo de singularidad del sistema linealizado:

$$\text{In[]:= } (\{\text{t[A], d[A], } \Delta[\text{A}]\} /. \text{sols})$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right\} \right\}$$

$$\text{In[]:= } (\text{P}[\lambda_] = \lambda^2 - \text{t[A]} \lambda + \text{d[A]} /. \text{sols})$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 \right\}$$

Autovalores:

$$\text{In[]:= } (\text{Solve}[\text{P}[\lambda] = 0, \lambda] /. \text{sols})$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ \left\{ \lambda \rightarrow -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow 1 \right\} \right\} \right\}$$

El origen de coordenadas es para el sistema linealizado un punto de silla.

Fuente: Captura del Algoritmo para el tipo de singularidad en Wolfram

En la figura anterior, el algoritmo permitiría visualizar los valores de la traza, determinante y discriminante de la matriz A. A partir de ello, muestra los autovalores.

Para obtener el tipo de singularidad del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal se utiliza como marco de referencia el Teorema de Grobman-Hartman, para realizar un proceso de prueba que justifique la obtención del comportamiento de las soluciones respectivas, lo que conduce a la activación de la **génesis discursiva** tal como se muestra en la Figura 54.

Figura 54.

Tipo de singularidad del sistema no lineal y Diagrama de fase en Wolfram

4) Tipo de singularidad del sistema no lineal:

Por el teorema de Grobman-Hartman, el único punto de equilibrio es un punto silla.

5) Diagrama de fase:

Generación de espacio de salida

```
in[ ]:= R = CoordinateBoundingBox[{{k, c} /. sols, 0.5];  
[caja delimitadora de coordenadas]  
in[ ]:= Ω = MeshRegion[Rectangle[R[[1]], R[[2]]];  
[región como--] [rectángulo]
```

Observación:

La región Ω se define teniendo en cuenta que queremos visualizar todos los puntos de equilibrio.

```
in[ ]:= G1 = ContourPlot[{{f[k, c] == 0, g[k, c] == 0},  
[representación de contornos]  
{k, c} ∈ Ω, ContourStyle → {Red, Green}, PlotLegends → "Expressions"]  
[estilo de contorno] [rojo] [verde] [leyendas de representación]
```

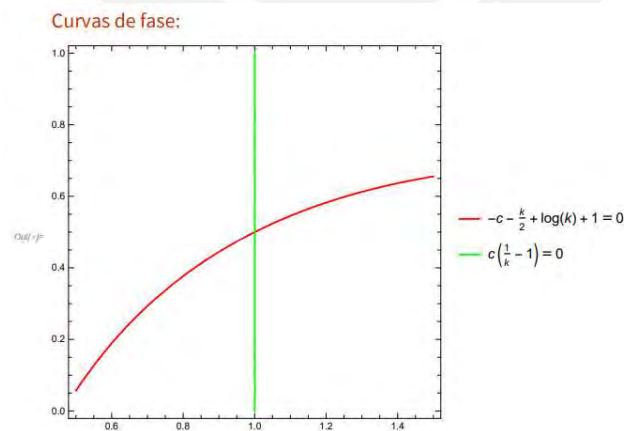
Fuente: Captura del Algoritmo para el Diagrama de fase en Wolfram

La figura anterior muestra que en el algoritmo se definen objetos que determinarán el plano donde se visualizara el campo de vectores.

La Figura 55 muestra las respectivas curvas de fase, que particionan el plano en cuatro regiones.

Figura 55.

Curvas de fase en Wolfram



Generación de diagramas de flechas (componentes del vector tangente):

```
in[ ]:= FV[k_, c_, e_, δ_] = {{k + e, c + δ}, {k + e, c + δ + g[k + e, c + δ]}};
```

Fuente: Captura del Algoritmo para las curvas de fase en Wolfram

En la figura anterior, para determinar el número de regiones en las que se particiona el plano, se utiliza la representación gráfica de las curvas de fase (se distinguen por colores cada una) como representamen para realizar un proceso de visualización que permitiría determinar la cantidad de regiones, lo que activaría la **génesis semiótica**. En la Figura 56, el algoritmo permitiría visualizar en cada región, las respectivas componentes del vector tangente.

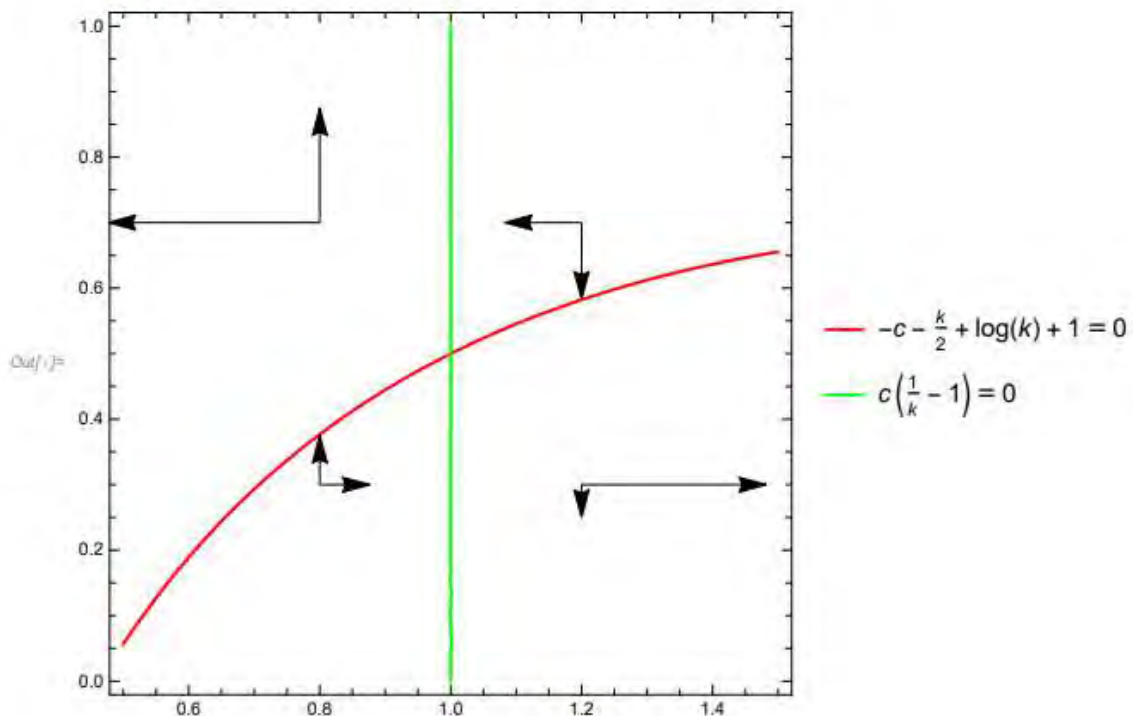
Figura 56.

Componentes de los vectores tangentes a las soluciones en Wolfram

```

In[ ]:= FH[k_, c_, ε_, δ_] = {{k + ε, c + δ}, {f[k + ε, c + δ] + k + ε, c + δ}};
In[ ]:= G[ε_, δ_] := Graphics[{Arrow[FV[k, c, ε, δ]], Arrow[FH[k, c, ε, δ]] /. sols};
In[ ]:= Show[G1, G[0.2, 0.2], G[0.2, -0.2], G[-0.2, 0.2], G[-0.2, -0.2]]

```



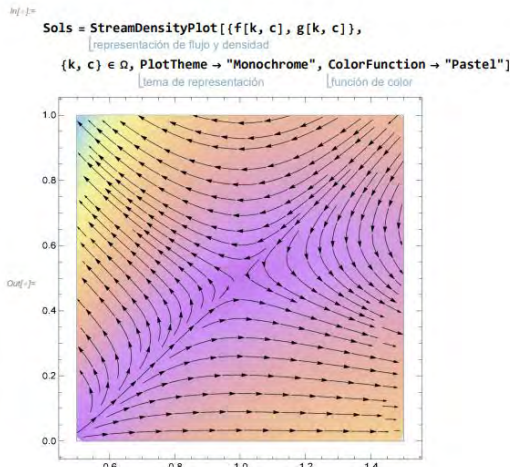
Fuente: Captura del Algoritmo de los vectores tangentes a las soluciones en Wolfram

De la figura anterior, sigue el esbozo de las trayectorias. El algoritmo muestra ello en la Figura 57.

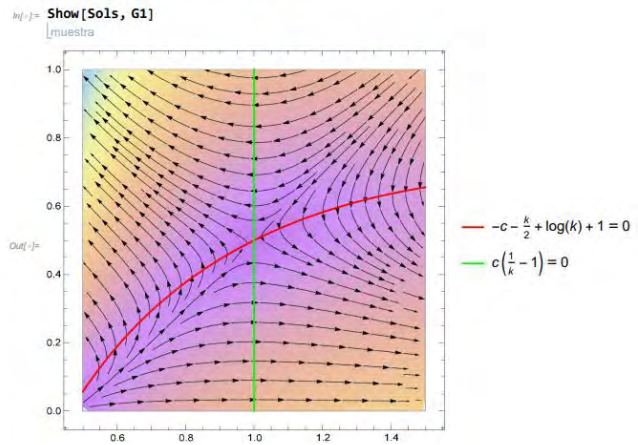
Figura 57.

Campo de vectores y esbozo de trayectorias visualizado en Wolfram

Esbozo de trayectorias:



Trayectorias y curvas de fase:



Fuente: Captura del Algoritmo que visualiza las trayectorias y curvas de fase en Wolfram

La Figura 57 muestra, en el lado izquierdo, el campo de vectores tangentes y el esbozo de las trayectorias. En el lado derecho, se muestra además las respectivas curvas de fase; todo en un mismo plano. Aquí se utiliza el artefacto campo de vectores para realizar el proceso de construcción que permite esbozar las trayectorias, así como la representación gráfica del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal. Estas acciones esperadas activarían la **génesis instrumental**.

El trabajo matemático esperado para dicha construcción del campo de vectores y esbozo de trayectorias y considerando el paso anterior (curvas de fase), muestra la activación de la **génesis semiótica e instrumental**. Así, la esperada activación de dichas génesis permitiría identificar la activación del **plano vertical** [Sem-Ins].

Finalmente, el trabajo matemático esperado en la construcción del esbozo de trayectorias y determinación del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal favorece la activación de las tres génesis, lo cual permitiría identificar en esta tarea la activación de los tres planos verticales.

A continuación, en la Tabla 15, se presenta una síntesis del análisis de la tarea 2 (**T2**) desde el ETM.

Tabla 15

Síntesis del análisis de T2 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan

		Tarea Preg.	Análisis desde el ETM
PROPUESTA DIDÁCTICA	T2	U1	<p>El uso del artefacto MatLab para la realización del diagrama de fase propiciaría la activación de la génesis instrumental.</p> <p>El campo de vectores se representa con flechas, ello favorecería el proceso de visualización de las trayectorias. En consecuencia, la activación de la génesis semiótica. Se espera que luego de la visualización del campo de vectores en el MatLab, también se visualice el esbozo de trayectorias haciendo un clic sobre este campo de vectores.</p> <p>Ello propicia la activación de dos procesos (visualización y prueba) en el plano horizontal cognitivo, ya que se favorece la visualización del esbozo de las trayectorias y con ello se determina el comportamiento tipo silla.</p>
		U2	<p>A partir de la representación vectorial en Bluffton, también se espera se visualice el esbozo de trayectorias haciendo un clic sobre este campo de vectores. En consecuencia, la activación de la génesis semiótica.</p> <p>Como también es necesario considerar las restricciones de las variables y enseguida ingresar las expresiones, esto determina la región donde se mostrará el campo de vectores. Sin embargo, determinar estas restricciones es posible haciendo uso requiere del campo de vectores, generado sin restricciones, como artefacto y, a partir de ello, construir la región óptima para el campo de vectores, lo que propiciaría la activación de la génesis instrumental. Luego, haciendo solo clic sobre el campo de vectores, se obtiene el esbozo de las trayectorias. Desde el ETM, se propicia la activación de dos procesos en el plano horizontal cognitivo, ya que se favorece la visualización del esbozo de las trayectorias, haciendo solo clic sobre el campo de vectores, y con ello se determina el comportamiento tipo silla.</p>
		U3	<p>En el algoritmo, a partir de ingresar el sistema de EDO no lineal respectivo, se muestra el cálculo de singularidades, cuyo algoritmo permitiría obtener los puntos estacionarios o de equilibrio, lo cual es necesario para la linealización. en el algoritmo se definen la traza, determinante y discriminante de la matriz A, donde A es definida como la matriz jacobiana de F. Además, se muestra dicha matriz jacobiana.</p> <p>El algoritmo permitiría visualizar los valores de la traza, determinante y discriminante de la matriz A. A partir de ello, muestra los autovalores. Para obtener el tipo de singularidad del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal se utiliza como marco de referencia el Teorema de Grobman-Hartman, para realizar un proceso de prueba que justifique la obtención del comportamiento de las soluciones respectivas, lo que conduce a la activación de la génesis discursiva.</p> <p>Para determinar el número de regiones en las que se particiona el plano, se utiliza la representación gráfica de las curvas de fase (se distinguen por colores cada una) como representamen para realizar un proceso de visualización que permitiría determinar la cantidad de regiones, lo que activaría la génesis semiótica. El algoritmo permitiría visualizar en cada región, las respectivas componentes del vector tangente.</p> <p>Cuando se muestra el campo de vectores tangentes y el esbozo de las trayectorias y además las respectivas curvas de fase; todo en un mismo plano. Aquí se utiliza el artefacto campo de vectores para realizar el proceso de construcción que permite esbozar las trayectorias, así como la representación gráfica del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal. Estas acciones esperadas activarían la génesis instrumental. El trabajo matemático esperado para dicha construcción del campo de vectores y esbozo de trayectorias y considerando el paso anterior (curvas de fase), muestra la activación de la génesis semiótica e instrumental. Es así como, la esperada activación de dichas génesis permitiría identificar la activación del plano vertical [Sem-Ins].</p> <p>Finalmente, el trabajo matemático esperado en la construcción del esbozo de trayectorias y determinación del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal favorece la activación de las tres génesis, lo cual permitiría identificar en esta tarea la activación de los tres planos verticales.</p>

La tabla anterior permite revisar brevemente las génesis y planos verticales que se activan con cada una de las herramientas digitales en **T2**.

Al finalizar las dos primeras tareas, una sugerencia para profundizar en el tema con las aplicaciones propias de la Economía es finalizar con un problema avanzado, el cual se presenta a través de la tarea 3 que lo describimos a continuación.

Análisis de T3

Modelo económico (ME): Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Analizar el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(k) - c - mk \\ c(\phi'(k) - m - \rho) \end{bmatrix} \quad (**)$$

donde

$$c > 0, 0 < \rho < 1, \phi' > 0, \phi'' < 0, m > 0.$$

Una observación, es que para

$$\phi(k) = \ln k + 1,$$

$$m = \rho = \frac{1}{2}$$

tenemos el problema resuelto en la tarea 1. Por ello, adaptaremos los momentos vistos en ella, en el cual se espera como solución:

Cálculo de Singularidades (ME₁)

Solución esperada de ME₁

En seguida se muestra la solución esperada en la Figura 58.

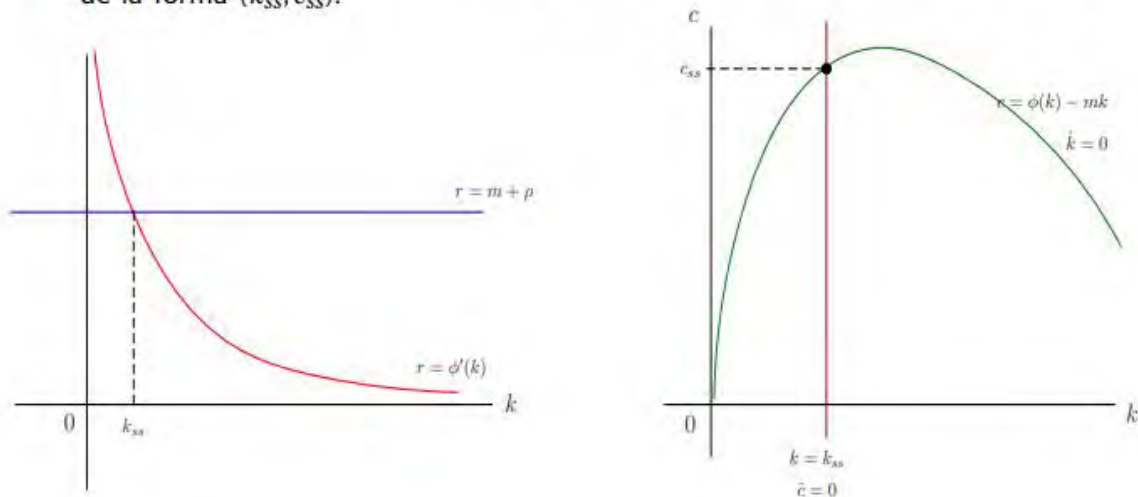
Figura 58.

Cálculo de Singularidades del modelo de Ramsey

1. **Puntos de Equilibrio.** (k, c) es solución de

$$\begin{cases} \phi(k) - c - mk & = 0 \\ \phi'(k) - (m + \rho) & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c & = \phi(k) - mk \\ \phi'(k) & = m + \rho \end{cases}$$

- $\phi'(k) = m + \rho$ tiene una única solución $k_{SS} > 0$.
- La recta vertical $k = k_{SS}$ corta a la gráfica de $c = \phi(k) - mk$ en un único punto de la forma (k_{SS}, c_{SS}) .



Análisis de ME₁ desde el ETM

Se propiciaría la activación de la **génesis discursiva** cuando a partir de la clasificación de un sistema lineal asociado a este sistema no lineal, tenga que usar el teorema de Grobman-Hartman para la justificación del comportamiento de las soluciones del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal cerca al punto de equilibrio.

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis de Cálculo (AC)**, pues se espera el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios).

Línealización (ME₂)

Solución esperada de ME₂

A continuación, se muestra la solución esperada en la Figura 59.

Figura 59.

Línealización del modelo de Ramsey

2. **Línealización.** El sistema original es de la forma

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi(k) - c - mk \\ c(\phi'(k) - (m + \rho)) \end{pmatrix} = F(k, c) \\ F(k, c) &\approx F(k_{SS}, c_{SS}) + DF(k_{SS}, c_{SS}) \begin{pmatrix} k - k_{SS} \\ c - c_{SS} \end{pmatrix} \\ A = DF(k_{SS}, c_{SS}) &= \begin{pmatrix} \phi'(k_{SS}) - m & -1 \\ c_{SS}\phi''(k_{SS}) & \phi'(k_{SS}) - m - \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ c_{SS}\phi''(k_{SS}) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Análisis de ME₂ desde el ETM

Se espera que se propicie la activación de la **génesis instrumental** al hacer uso del artefacto simbólico la aproximación de primer orden de F para determinar la línealización del sistema (**).

En términos del ETM, se espera que se active la **génesis semiótica** al considerar como representamen a $DF(k_{SS}, c_{SS})$ de la matriz Jacobiana de F evaluada en el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) .

En consecuencia, la activación del plano vertical Semiótico Instrumental [Sem-Ins] se justifica por la activación de las génesis semiótica e instrumental.

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis Real (AR)** al determinar el tipo de singularidad haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, ya que este nos brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal.

Además, brinda información topológica, pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, o, en otras palabras, se da en una vecindad del punto de equilibrio.

Tipo de singularidad del sistema lineal (ME_3)

Solución esperada de ME_3

En seguida se muestra la solución esperada en la Figura 60.

Figura 60.

Tipo de singularidad del sistema lineal asociado al modelo de Ramsey

3. Tipo de singularidad del sistema linealizado.

$$\det A = \underbrace{c_{SS}}_{+} \underbrace{\phi''(k_{SS})}_{-} < 0.$$

Análisis de ME_3 desde el ETM

En esta pregunta, vista desde el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), propiciaría que se active la **génesis instrumental** cuando se haga uso del artefacto simbólico plano $(trA, detA)$, el cual se mostró antes en la Figura 38, y a partir de ello, se espera obtener la clasificación del sistema lineal, cuyo punto de equilibrio es siempre $(0, 0)$.

El **paradigma** que se privilegia es del **Análisis Real (AR)**, pues se espera que se determine el tipo de singularidad del sistema lineal que está asociado a uno no lineal, esta información es de manera local, ya que se da en una vecindad del punto de equilibrio.

Tipo de singularidad del sistema no lineal (ME4)

Solución esperada de ME4

En seguida se muestra la solución esperada en la Figura 61.

Figura 61.

Tipo de singularidad del sistema no lineal del modelo de Ramsey

4. Tipo de singularidad del sistema no lineal. Como $\det A < 0$:

- $\Delta = [\text{tr}(A)]^2 - 4 \det A > 0 \rightarrow$ valores propios reales y distintos.
- $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \rightarrow$ valores propios de signos opuestos.
- Luego, la parte real de los valores propios es no nula (condición de **G-H**).
- **Teorema de Grobman-Hartman** **G-H**: cerca del estado (k_{SS}, c_{SS}) , el comportamiento de las trayectorias del sistema no lineal (*) es como el del sistema lineal, es decir un **punto silla**.

Desde el ETM, esta tarea propiciaría la activación de la **génesis discursiva** cuando, a partir de la clasificación de un sistema lineal asociado a este sistema no lineal, tenga que usar como referencial teórico el teorema de Grobman-Hartman para la justificación del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal cerca al punto de equilibrio.

El **paradigma** que se privilegia aquí es del **Análisis Real (AR)**, al determinar el tipo de singularidad, haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, este nos brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal; además brinda información topológica pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, es decir se da en una vecindad del punto de equilibrio.

Diagrama de fase (ME5)

Solución esperada de ME5

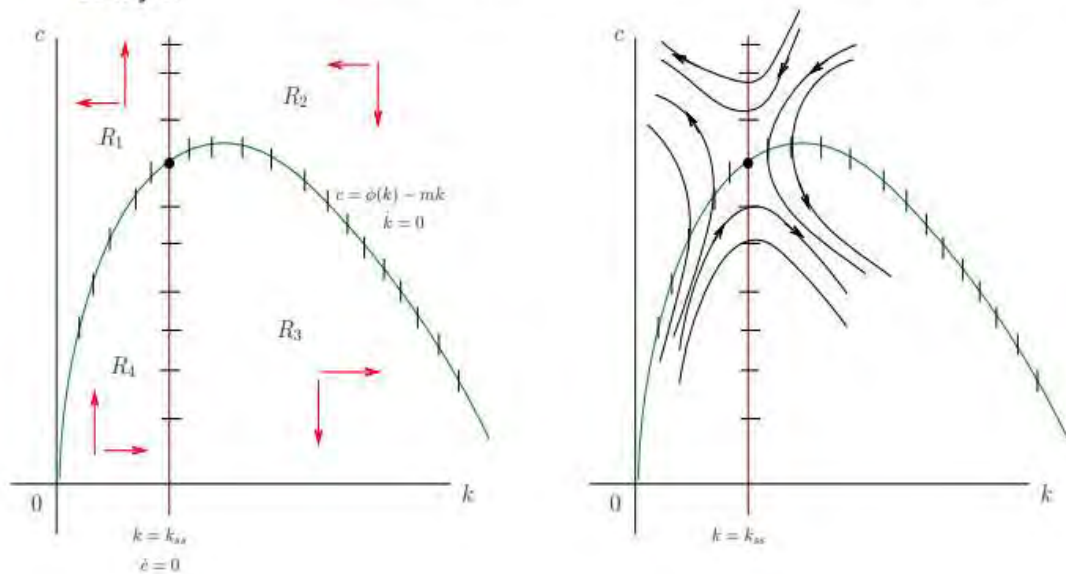
En seguida se muestra la solución esperada en la Figura 62.

Figura 62.

Diagrama de fase del modelo de Ramsey

5. Diagrama de Fase. Curvas de fase: $\dot{k}=0$ y $\dot{c}=0$.

- Las dos curvas se intersectan en (k_{SS}, c_{SS})
- Se determinan 4 regiones sobre el plano, en las cuales debemos hallar los signos de \dot{k} y \dot{c} .



Análisis de ME₅ desde el ETM

Se espera que se active la **génesis instrumental** cuando se haga uso del artefacto simbólico del campo de vectores, de las flechas verticales y horizontales a la vez. Es decir, las componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción que permita obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal. En otras palabras, el diagrama de fase.

El **paradigma** que se privilegia aquí es del **Análisis Geométrico (AG)**, pues la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con fórmulas explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo parte del supuesto implícito de su existencia, basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman.

A continuación, en la Tabla 16, se presenta una síntesis del análisis de la tarea 3 (**T3**) desde el ETM.

Tabla 16

Síntesis del análisis de T3 desde el ETM: génesis y planos verticales que se activan

		Tarea	Momento	Análisis desde el ETM
PROPUESTA DIDÁCTICA	T3		ME₁	Se propiciaría la activación de la génesis discursiva cuando a partir de la clasificación de un sistema lineal asociado a este sistema no lineal, tenga que usar el teorema de Grobman-Hartman para la justificación del comportamiento de las soluciones del sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal cerca al punto de equilibrio.
			ME₂	Se espera que se propicie la activación de la génesis instrumental al hacer uso del artefacto simbólico la aproximación de primer orden de F para determinar la linealización del sistema (**). Se espera que se active la génesis semiótica al considerar como representamen a $DF(k_{SS}, c_{SS})$ de la matriz Jacobiana de F evaluada en el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) . En consecuencia, la activación del plano vertical Semiótico Instrumental [Sem-Ins] se justifica por la activación de las génesis semiótica e instrumental .
			ME₃	Propiciaría que se active la génesis instrumental cuando se haga uso del artefacto simbólico plano $(trA, detA)$ y a partir de ello, se espera obtener la clasificación del sistema lineal, cuyo punto de equilibrio es siempre $(0, 0)$.
			ME₄	Propiciaría la activación de la génesis discursiva cuando, a partir de la clasificación de un sistema lineal asociado a este sistema no lineal, tenga que usar como referencial teórico el teorema de Grobman-Hartman para la justificación del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal cerca al punto de equilibrio.
			ME₅	Se espera que se active la génesis instrumental cuando se haga uso del artefacto simbólico del campo de vectores, de las flechas verticales y horizontales a la vez. Es decir, las componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción que permita obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal. En otras palabras, el diagrama de fase.

La tabla anterior permite revisar brevemente, en el trabajo matemático que promueven las tareas de la propuesta didáctica, las génesis y planos verticales que se activarían en cada uno de los momentos de los procedimientos de **T3**.

A continuación, en la Tabla 17 presentamos los paradigmas presentes en los cinco momentos de **T3**. Al respecto, se espera que utilicen herramientas de álgebra y análisis como en **T1**. Así el trabajo matemático se encuentra principalmente en el Dominio del Análisis.

Tabla 17

Síntesis del análisis de T3 desde el ETM: paradigmas presentes

		Tarea	Momento	Paradigma	Análisis desde el ETM
PARADIGMA DEL ANÁLISIS	T3		ME ₁	AC	<ul style="list-style-type: none"> El paradigma que se privilegia es del Análisis de Cálculo (AC), pues se espera el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios).
			ME ₂	AR	<ul style="list-style-type: none"> El paradigma que se privilegia es del Análisis Real (AR) al determinar el tipo de singularidad haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, ya que este nos brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal. Además, brinda información topológica, pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, o, en otras palabras, se da en una vecindad del punto de equilibrio.
			ME ₃	AR	<ul style="list-style-type: none"> El paradigma que se privilegia es del Análisis Real (AR), pues se espera que se determine el tipo de singularidad del sistema lineal que está asociado a uno no lineal, esta información es de manera local, ya que se da en una vecindad del punto de equilibrio.
			ME ₄	AR	<ul style="list-style-type: none"> El paradigma que se privilegia aquí es del Análisis Real (AR), al determinar el tipo de singularidad del sistema no lineal, haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, este nos brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal; además brinda información topológica pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, es decir se da en una vecindad del punto de equilibrio.
			ME ₅	AG	<ul style="list-style-type: none"> El paradigma que se privilegia aquí es del Análisis Geométrico (AG), pues la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con fórmulas explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo parte del supuesto implícito de su existencia, basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman.

De la tabla anterior, una observación es que en el momento **ME**, el paradigma AG esbozo de las trayectorias podría ser realizado con ayuda de un software (trabajo instrumentado Montoya y Vivier (2016)) o no. Así como en **T1**, previamente, podemos visualizar el comportamiento de las soluciones, la cual será justificada en el paradigma AC y, de manera analítica, en AR.

Recordemos que en el trabajo matemático que promueven las tres tareas de la propuesta didáctica, que conforman la propuesta didáctica para el *análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales*, se van a reconocer en los tres paradigmas del análisis y el trabajar en más de un paradigma ayudaría a evitar errores, tal como afirman Montoya y Vivier (2016).



Conclusiones

Este trabajo de investigación tiene como objetivo principal analizar una propuesta didáctica basada en el ETM que propicia el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía, pues, entre los distintos conceptos matemáticos, el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales tiene una fuerte relación con diversos modelos económicos. Al respecto es de especial interés que la propuesta didáctica propicie el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales. Por ello, en la propuesta se consideró como características principales: el uso de representaciones semióticas en relación con un sistema de EDO no lineal que favorecen la identificación de sus respectivas singularidades (puntos de equilibrio), el uso de herramientas matemáticas para determinar el tipo de singularidad y herramientas tecnológicas para esbozar el comportamiento de sus respectivas soluciones; así también el uso del referencial teórico (definiciones, teoremas, propiedades) para justificar el tipo de comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal. Dichas características están asociadas a las componentes y procesos de los planos epistemológico y cognitivo respectivamente, del ETM. En ese sentido, la base teórica en la que se enmarcó la investigación es la teoría Espacio de Trabajo Matemático (ETM), específicamente, el ETM idóneo potencial (del análisis a priori) que, de acuerdo con Kuzniak et al. (2022), se refiere a la concepción previa del ETM. Ello, además, es fundamental en la investigación, pues en una perspectiva de enseñanza tiene que ver con el diseño de la propuesta y con el análisis a priori de la propuesta.

Este trabajo de investigación se desarrolló con una metodología de tipo cualitativa, lo cual es coherente para lo que deseamos alcanzar. Una de las fortalezas de este tipo de metodología es su flexibilidad en toda la estructura y desarrollo de la investigación.

Con relación a las investigaciones de referencia, relacionadas a nuestro objeto de estudio, fue posible identificar diversas investigaciones relacionadas con EDO y análisis cualitativo de una EDO que fueron analizados con distintos marcos teóricos. Pero desde una perspectiva de enseñanza, no se hallaron investigaciones sobre el análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, específicamente, no se encontraron investigaciones relacionadas con nuestro objeto de estudio que hayan sido analizados teóricamente desde el ETM. Es importante enfatizar que diversas investigaciones recomiendan potenciar el análisis cualitativo con la integración de la tecnología digital (algún software en geometría dinámica) y la modelación matemática, lo cual se consideró en el diseño de la propuesta didáctica de la presente investigación.

La propuesta didáctica es relevante porque tiene una estructura donde se consideran tres visiones: lo disciplinar, la tecnología y lo interdisciplinar. Ello se evidencia en las tareas que conforman la propuesta. En ese sentido, para el análisis de la propuesta didáctica se consideró cuatro fases: descripción de la tarea, presentación del enunciado de la tarea, solución esperada, análisis teórico (de la solución esperada) desde el ETM. Respecto a esta última fase se consideró el uso de un protocolo el cual también se presentó en la metodología. Es decir, la propuesta se ha organizado de tal manera que hace visibles elementos (asociados a estas tareas) que brindan metodológicamente una estructura, lo cual nos parece que es un aporte, específicamente, para trabajos de ETM idóneo potencial.

En efecto, se lograron los objetivos específicos.

Para alcanzar el **primer objetivo específico** que es diseñar una propuesta didáctica conformada por una secuencia de tareas orientada al análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales para estudiantes de Economía, la propuesta didáctica estuvo conformada por tres tareas, la cual brinda metodológicamente una estructura con las siguientes intenciones fundamentales: una intención disciplinar, otra intención con el uso de la tecnología y la última que tiene una intención interdisciplinar con la Economía.

En ese sentido, la tarea1 se propuso con una **intención disciplinar** y fue estructurada de esa manera con el propósito de integrarlos al uso de la herramienta matemática como herramienta de análisis en la Economía.

La tarea 2 se relacionó con el **uso de la tecnología** para pasar de la situación disciplinar a una situación que hizo uso de tecnología. Se planteó así con el propósito de que los estudiantes manipulen las distintas representaciones del objeto matemático, lo que permitió una interacción directa entre el estudiante y el objeto matemático.

Además, el uso de las herramientas tecnológicas como el MatLab y Bluffton son bastante intuitivos y además de libre acceso. Se pueden aplicar de forma sincrónica o asincrónica y en cualquier lugar, permite interactuar con los objetos matemáticos haciendo énfasis en el aspecto geométrico, y las propiedades cualitativas de dichos objetos.

Respecto al Wolfram Mathematica, el algoritmo que realizamos (que no existía antes) y que ponemos a disposición de la comunidad científica (ver Anexo 2) favorece de igual manera

que las herramientas mencionadas en el aspecto geométrico, pero además es posible visualizar todos los cálculos y el proceso del análisis cualitativo desde un punto de vista algebraico.

Además, con las herramientas tecnológicas, se visualizan de manera más dinámica las curvas de fase y el comportamiento de las soluciones; todo esto en un tiempo más optimizado. Así el uso de la tecnología digital impacta en el proceso de resolución de las tareas y el manejo de la respectiva teoría.

Desde el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) favorecería la activación de la **génesis instrumental** al hacer uso de las herramientas tecnológicas, como son el Matlab, Bluffton o Wolfram (en este caso, considerando el algoritmo necesario), para realizar la construcción del diagrama de fase de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineal.

Finalmente, la tarea 3, se propuso con la **intención interdisciplinar** con la Economía. Para ello, nos sustentamos en Doig et al. (2019), donde afirma que los estudios empíricos han demostrado que la serie de prácticas interdisciplinarias tienen un impacto positivo en las actitudes de los docentes y en la de los alumnos hacia estas prácticas innovadoras, las cuales involucran a las disciplinas que ayudan a los alumnos a resolver problemas de indagación en el aula. En este caso, se consideró el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, pues es una aplicación económica real que tiene una fuerte relación con diversos modelos económicos.

Para alcanzar los siguientes objetivos, se realizó el análisis (a priori), considerando cuatro fases: descripción de la tarea, presentación del enunciado de la tarea, solución esperada y el análisis teórico, de la solución esperada, desde el ETM.

Para alcanzar **el segundo objetivo específico** que es reconocer los paradigmas del Dominio del análisis que emergen en la solución esperada de las tareas de la propuesta didáctica, se procedió de la siguiente manera:

En la tarea 1, el paradigma Análisis de Cálculo (**AC**), se evidenció en las preguntas P1 y P2; pues ahí fueron necesarias definir las reglas de Cálculo, como es el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios) y los cálculos previos necesarios. El paradigma Análisis Real (**AR**), se evidenció en las preguntas P3 y P4 pues se ahí se esperó determinar el tipo de singularidad al hacer uso del teorema de Grobman-Hartman (en caso se cumplan las condiciones para su uso), ya que este brinda información geométrica (pues la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal) y

topológica (pues toda la información geométrica mencionada anteriormente es de manera local, ya que se da en una vecindad del punto de equilibrio). El paradigma Análisis Geométrico/ Aritmético (**AG**), se evidenció con la visualización del comportamiento de las soluciones, el cual se dio a partir del esbozo de las trayectorias. Al no contar con ecuaciones (fórmulas) explícitas que definan esas trayectorias, el trabajo partió del supuesto implícito de su existencia, basado en la información geométrica y topológica que es dada por el teorema de Grobman-Hartman.

En la tarea 2, el paradigma AG se evidenció con la visualización del comportamiento de las soluciones; el cual se dio a partir del esbozo de las trayectorias, haciendo uso de la tecnología digital.

En la tarea 3, tal como en la tarea 1, el paradigma **AC** se evidenció en el momento ME1 con el cálculo de singularidades (puntos de equilibrio o estados estacionarios). El paradigma **AR** se evidenció en el momento ME2 al determinar el tipo de singularidad haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, ya que este brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal. Además, brinda información topológica, pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, o, en otras palabras, se da en una vecindad del punto de equilibrio. Este paradigma **AR** también estuvo presente en el momento ME3, pues ahí se determinó el tipo de singularidad del sistema lineal que está asociado a uno no lineal. En el momento ME4, el paradigma que se evidenció es del **AR**, al determinar el tipo de singularidad del sistema no lineal, haciendo uso del teorema de Grobman-Hartman, siempre que se cumplan las condiciones de uso, este nos brinda información geométrica pues afirma que la forma de las soluciones del sistema de EDO no lineal es muy parecida a las del sistema de EDO lineal; además brinda información topológica pues toda la información geométrica obtenida es de manera local, es decir se da en una vecindad del punto de equilibrio. En el momento ME5, el paradigma que se privilegia aquí es el **AG**, pues la visualización del comportamiento de las soluciones se da a partir del esbozo de las trayectorias.

Para alcanzar **el tercer y cuarto objetivo específico** que es analizar la activación de las génesis semiótica, instrumental y discursiva, así como la activación de los planos verticales en la solución esperada que propician las tareas de la propuesta didáctica, se procedió de la siguiente manera:

En la tarea 1, pregunta P1, se evidencia la activación de la **génesis semiótica** al identificar la representación algebraica de las curvas de fase. Al esbozar las curvas de fase, se

evidenció la activación de la **génesis instrumental**. A partir de dicha representación gráfica, se tomó como representamen la intersección de las curvas de fase e identificar esta como el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) del sistema de EDO no lineal, con lo cual se espera se active la **génesis semiótica**. En la pregunta P2, se evidencia la activación de la **génesis instrumental** al hacer uso del artefacto simbólico la aproximación de primer orden de F para determinar la linealización del sistema no lineal También se activó la **génesis semiótica** al considerar como representamen a $DF(k_{SS}, c_{SS})$ de la matriz Jacobiana de F evaluada en el punto de equilibrio (k_{SS}, c_{SS}) . Así, la activación del **plano vertical** Semiótico Instrumental [**Sem-Ins**] está sustentada por la activación de las génesis semiótica e instrumental. En la pregunta P3, se evidencia la activación de la **génesis instrumental** con el uso del artefacto simbólico plano $(trA, detA)$ para la clasificación del sistema lineal. En la pregunta P4, se evidencia la activación de la **génesis discursiva** al hacer uso del Teorema de Grobman-Hartman como referencial teórico, para justificar que el comportamiento de las trayectorias del sistema no lineal, alrededor del equilibrio $(k_{SS}, c_{SS}) = (1, \frac{1}{2})$, es similar al comportamiento de las trayectorias del sistema linealizado alrededor de $(0, 0)$. En la pregunta P5, se evidencia la activación de la **génesis instrumental** cuando se usa el artefacto simbólico campo de vectores, es decir, los componentes del vector tangente, para realizar un proceso de construcción y obtener el esbozo de las trayectorias del sistema de EDO no lineal (el diagrama de fase).

En la tarea 2, con el uso de cada artefacto MatLab y Bluffton para la realización del diagrama de fase se evidencia la activación de la **génesis instrumental**. El campo de vectores se representa con flechas; ello favorecería el proceso de visualización de las trayectorias y se evidencia la activación de la **génesis semiótica**, lo cual propicia la activación de dos procesos (visualización y prueba) en el **plano horizontal cognitivo**, ya que se favorece la visualización del esbozo de las trayectorias y con ello se determina el comportamiento tipo silla.

En el caso del algoritmo generado en Wolfram, a partir de ingresar el sistema de EDO no lineal respectivo, se muestra el cálculo de singularidades, cuyo algoritmo permitiría obtener los puntos estacionarios o de equilibrio, lo cual es necesario para la linealización. El algoritmo evidencia la visualización de los valores de la traza, determinante y discriminante de la matriz A , donde A representa matriz jacobiana de F . A partir de ello, muestra los autovalores. Para obtener el tipo de singularidad del sistema no lineal, se utilizó como marco de referencia el Teorema de Grobman-Hartman para realizar un proceso de prueba que justifique la obtención del comportamiento de las soluciones respectivas, lo que evidencia la activación de la **génesis**

discursiva. Para determinar el número de regiones en las que se particiona el plano, se utiliza la representación gráfica de las curvas de fase como representamen para realizar un proceso de visualización que permitiría determinar la cantidad de regiones, lo que evidencia la activación de la **génesis semiótica**. El algoritmo permitiría visualizar en cada región, las respectivas componentes del vector tangente. Aquí se utiliza el artefacto campo de vectores para realizar el proceso de construcción que permite esbozar las trayectorias, así como la representación gráfica del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal. Estas acciones esperadas activarían la **génesis instrumental**. Dicha construcción del campo de vectores y esbozo de trayectorias, considerando además el paso anterior (curvas de fase), muestra la activación de la **génesis semiótica e instrumental**. Así, la esperada activación de dichas génesis permitiría identificar la activación del **plano vertical [Sem-Ins]**.

En la tarea 3, se evidencia la activación de las **génesis semiótica, instrumental y discursiva** tal como se analizó en la tarea 1.

Finalmente, la solución esperada en la construcción del esbozo de trayectorias y determinación del comportamiento de las soluciones del sistema de EDO no lineal favorece la activación de las tres génesis, lo cual evidencia en las tres tareas la activación de los tres planos verticales.

Con base en el análisis preliminar de las tareas consideradas en la propuesta didáctica, podemos afirmar que, el diseño y secuencia de las tareas que conforman la propuesta didáctica y que están en el paradigma del análisis, funcionan para activar las distintas génesis y planos verticales del ETM. De acuerdo con Kuzniak (2011), el alumno al transitar por dos planos, epistemológico y cognitivo, adquiere la comprensión de un saber. En ese sentido, podemos afirmar que la propuesta didáctica propicia el análisis cualitativo.

Dado que se lograron alcanzar los objetivos específicos de investigación, podemos afirmar que también se logró alcanzar el objetivo general de investigación.

La importancia de esta investigación es que, en la estructura de la propuesta, al ser evidente la conexión explícita entre los saberes previos, la relación que guardan las tareas con intención disciplinar y que además conectan con la tecnología digital y lo interdisciplinar, al desarrollar las tareas, en las acciones esperadas, se evidenciaría la activación de las distintas génesis y planos del Espacio de Trabajo Matemático (ETM), lo que de acuerdo con la teoría ETM

nos garantiza la adquisición del conocimiento, además de identificar aspectos poco visibles y tratados pero que son de mayor complejidad.

Con esto, brindaremos el soporte que fortalece la base teórica de un sistema de EDO no lineal y la interpretación de los resultados matemáticos obtenidos en relación con los modelos económicos estudiados en la carrera de Economía.

Esta investigación no pretende reemplazar, ni mucho menos imponer alguna forma de implementación, sino más bien complementar el estudio del análisis cualitativo de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) no lineales.

Perspectivas para futuras investigaciones

Algunas consideraciones futuras de la investigación son que, en una posible aplicación de la propuesta, el estudiante sea capaz de reflexionar y manipular de manera eficiente los conceptos relacionados al análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales, ya sea esta manipulación de manera manual o haciendo uso de la tecnología.

La propuesta contiene tareas las cuales, en su totalidad, permite un análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales de manera detallada, pero podrían considerarse todo o una parte de ellas dependiendo en lo que esté interesado potenciar y/o estudiar, como, por ejemplo, si se desea desarrollar el diagrama de fase, podríamos considerar actividades como las presentadas en la tarea 1, específicamente, la pregunta 5 y tarea 2 de la propuesta didáctica.

A modo de proyección, la tarea 2 de la propuesta (que es una iniciación al uso de la tecnología) se podría adaptar de forma más explícita y directa para el uso de las herramientas señaladas y así aprovechar del todo el potencial de las tecnologías. Por ejemplo, en dicha tarea, sugerimos realizar la siguiente pregunta adicional:

¿Cuál es la diferencia para usted de resolver (con Matlab, Bluffton, Wolfram, etc.) usando la tecnología digital que resolver de forma manuscrita?

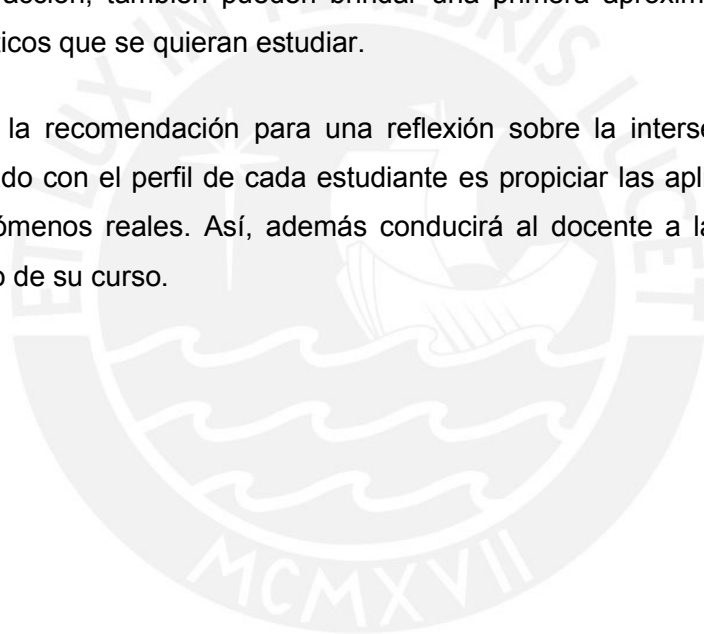
También a partir de la tarea 3, se pueden generar tareas más avanzadas y puesto que para la carrera de Economía es de interés estudiar modelos económicos reales, cuyos análisis están asociados a sistemas de EDO no lineales, se puede considerar, por ejemplo, modelos

económicos que surgieron como el modelo de Ramsey, además este modelo fue inspiración para otros modelos de Economía (asociados a sistemas de EDO no lineales).

Es importante seguir realizando investigaciones que contribuyan al aprendizaje y la enseñanza para los estudiantes. La presente investigación estuvo dirigida a los estudiantes de la carrera de Economía de una Universidad particular, la cual también podría ser aplicada a estudiantes de otras carreras, como ingeniería y ciencias afines de otras organizaciones educativas, realizando las adaptaciones respectivas y para los fines del usuario que requieran y/o estén interesados en el estudio del análisis cualitativo de sistemas de EDO no lineales.

Igualmente, es importante seguir propiciando el uso de las herramientas tecnológicas que además de la interacción, también pueden brindar una primera aproximación práctica a los conceptos matemáticos que se quieran estudiar.

Finalmente, la recomendación para una reflexión sobre la intersección del concepto matemático estudiado con el perfil de cada estudiante es propiciar las aplicaciones a modelos asociados con fenómenos reales. Así, además conducirá al docente a la elaboración de un material actualizado de su curso.



Referencias

- Arslan, S. (2005). *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S : ¿est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?* (Tesis doctoral en Didáctica de las Matemáticas). Université Joseph Fourier, Grenoble, Alpes, Francia. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00009594/document>
- Barros, M. C. (2017). *Equações diferenciais ordinárias no contexto dos registros de representação semiótica e da modelagem matemática*. (Tesis de Doctorado en Educación para la Ciencia y la Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Brasil. <http://repositorio.uem.br:8080/jspui/bitstream/1/4535/1/000226019.pdf>
- Bonifaz y Winkelried (2003). *Matemáticas para la economía dinámica (1a ed.)*. Lima: Universidad del Pacífico, Centro de Investigación. <https://repositorio.up.edu.pe/handle/11354/975>
- Chiang y Wainwright (2006). *Métodos Fundamentales de economía matemática*. México: McGraw-Hill.
- Collantes y Vigo (2019). *Un repaso de las investigaciones producidas en torno a la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Revista de producción estudiantil en educación matemática. Pontificia Universidad Católica de São Paulo - Programa de Postgrado en Educación Matemática. <https://doi.org/10.23925/2238-8044.2019v8i2p2-26>
- Doig, B., Williams, J., Swanson, D., Borromeo Ferri, R., & Drake, P. (2019). *Interdisciplinary mathematics education: The state of the art and beyond*. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-11066-6>
- Henríquez Rivas, C., Ponce, R., Carrillo Yáñez, J., Climent, N. y Espinoza-Vásquez, G. (2021). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123-142. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3210>
- Henríquez y Montoya (2015) Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, Barcelona, v. 33, n.2, p. 51-70. <http://funes.uniandes.edu.co/22027/>

- Hernández (2017) *Espacio de trabajo matemático del análisis: enseñanza de las sucesiones en los primeros años de universidad*. (Tesis de Doctorado en Didáctica de la Matemática). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Recuperado de: <http://repositorio.conicyt.cl/handle/10533/208871>
- Hernández-Sampieri, R. y Mendoza, C (2018). *Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*, Ciudad de México, México: Editorial Mc Graw Hill Education, Año de edición: 2018, ISBN: 978-1-4562-6096-5, 714 p. <https://virtual.cuautitlan.unam.mx/rudics/?p=2612>
- Javaroni, S. L. (2007) *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. (Tesis Doctoral en Educación Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil. https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102149/javaroni_sl_dr_rcla.pdf
- Kline (1972). *Mathematical Thought Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press
- Kuzniak (2011) L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Strasbourg, v.16, p. 9-24. 2011. https://www.researchgate.net/publication/278622106_L'espace_de_Travail_Mathematique_et_ses_geneses
- Kuzniak y Richard (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4-1), 5-39. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Kuzniak, A., Montoya-Delgadillo, E., y Richard, P. (2022). *Mathematical Work in Educational Context. The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-90850-8>
- Listado de cursos. (2021, 23 septiembre). Facultad de Ciencias Sociales. Recuperado 20 de septiembre de 2022, de <https://facultad.pucp.edu.pe/ciencias-sociales/carreras/economia/listado-de-cursos/?nivel=0&tipocurso=Obligatorio>
- Martínez (2008). *La educación a distancia: sus características y necesidad en la educación actual*.

https://www.researchgate.net/publication/277827109_La_educacion_a_distancia_sus_caracteristicas_y_necesidad_en_la_educacion_actual/fulltext/558a1ce608ae273b2876e761/La-educacion-a-distancia-sus-caracteristicas-y-necesidad-en-laeducacion-actual.pdf?origin=publication_detail

Montoya y Vivier (2016). Espacio de trabajo matemático y paradigmas como herramienta de análisis para la enseñanza y aprendizaje del análisis. *Educación Matemática ZDM* **48**, 739–754 (2016). <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>

Montoya y Vivier (2016). Mathematical Working Spaces as an analyzing tool for the teaching and learning of calculus. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, (5), 1689–1699. <http://doi.org/10.1007/s11858-016-0777-9>

Nechache, A. (2017). La catégorisation des tâches et du travailleur-sujet: un outil méthodologique pour l'étude du travail mathématique dans le domaine des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (22), 67-90. https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_22/adsc-2017_003.pdf, <https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST17004.htm>

Pontificia Universidad Católica del Perú. Carrera de Economía. <https://facultad.pucp.edu.pe/ciencias-sociales/carreras/economia/listado-de-cursos/?nivel=0&tipocurso=Obligatorio>

Proleón (2018) *Un enfoque del Multiplicador de Lagrange por medio de la Teoría de Registros de Representación Semiótica en estudiantes de Economía*. (Tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú. <http://tesis.pucp.edu.pe/repositorio/handle/20.500.12404/13415>

Reyes, C. (2021) *Enseignement et apprentissage des fonctions numériques dans un contexte de modélisation et de travail mathématique*. (Tesis de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas). Université de Paris, Paris, Francia. <https://hal.inria.fr/tel-03211997/>

Sin, Bongiovanni, Faner (2019) *De la Educación a Distancia a la Educación Virtual*. La experiencia del Colegio Universitario IES (Encuentro) Colegio Universitario IES con sede central en la ciudad de Córdoba, Argentina. <https://encuentros.virtualeduca.red/storage/ponencias/peru2019/C7GA62IDqvdnKWdF32vOjpc4g06FBMzC0rpKKLRR.pdf>.

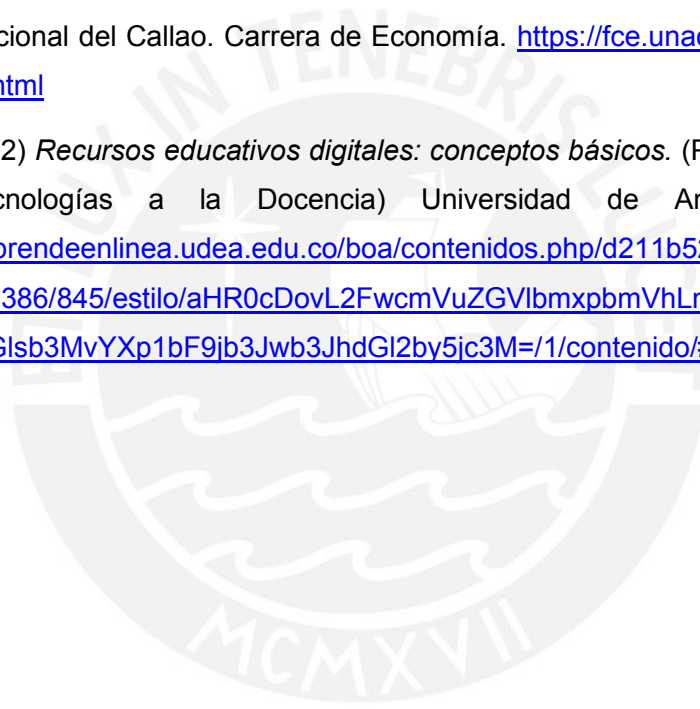
Universidad del Pacífico. Carrera de Economía. https://www.up.edu.pe/en/degrees-graduate-studies-languages/undergraduates-degrees/economics/PublishingImages/Paginas/plan-estudios/malla_curricular_economia.pdf

Universidad de la Escuela Superior de Administración y Negocios. Carrera de Economía y Negocios Internacionales. <https://www.ue.edu.pe/resources/Plan-de-estudios/Econom%C3%ADa%20y%20Negocios%20Internacionales.pdf>

Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Escuela Profesional de Economía. https://economia.unmsm.edu.pe/escuela/e/Silabo_e.htm

Universidad Nacional del Callao. Carrera de Economía. <https://fce.unac.edu.pe/fce-plan-de-estudio.html>

Zapata, M. (2012) *Recursos educativos digitales: conceptos básicos*. (Programa Integración de Tecnologías a la Docencia) Universidad de Antioquia, Colombia. https://aprendeenlinea.udea.edu.co/boa/contenidos.php/d211b52ee1441a30b59ae008e2d31386/845/estilo/aHR0cDovL2FwcmVuZGVlbmxpbmVhLnVhZWEuZWR1LmNvL2VzdGlsb3MvYXp1bF9jb3Jwb3JhdGI2by5jc3M=/1/contenido/#referencia_3a



Anexos

Anexo 1

Sílabo de la carrera de Economía de la Universidad del Pacífico



Sílabo

130233 - Matemáticas III

I. Información general

Nombre del Curso: Matemáticas III
Código del curso: 130233
Departamento Académico: Economía
Créditos: 5
Horas Teoría: 4
Horas Práctica: 2
Periodo Académico: 2023-01-PRE
Sección: G
Modalidad: Presencial
Idioma: Español
Docente: ORESTES MARTIN BUENO TANGO
Email docente: o.buenotangoa@up.edu.pe

II. Introducción

Matemáticas III es un curso obligatorio para las carreras de Economía y de Finanzas. Tiene como requisito Matemáticas II (131650) y sirve como requisito para los cursos de Matemáticas IV (130229) y Econometría I (130424).

El curso proporciona a los estudiantes conceptos claves de álgebra matricial y de cálculo multivariado, con el propósito de incorporarlos plenamente en el instrumental matemático más utilizado en el análisis económico estático y en el desarrollo de técnicas econométricas. Además, se introduce a los estudiantes al análisis dinámico, univariado y multivariado, y sus aplicaciones en las teorías económica, financiera y econométrica.

III. Logro de aprendizaje final del curso

Al finalizar el curso, el alumno será capaz de formular y resolver problemas matemáticos vinculados a modelos económicos y financieros, tanto estáticos como dinámicos, utilizando los conceptos de álgebra lineal y cálculo multivariado. Además, será capaz de analizar cuantitativa y cualitativamente la estabilidad de las soluciones a sistemas de ecuaciones, tanto estáticos como dinámicos.

IV. Unidades de aprendizaje

UNIDAD 1: Espacios vectoriales

Logro de Aprendizaje / propósito de la unidad:

Contenidos:

1. Vectores en R^n . Definición, operaciones y propiedades: suma, producto escalar, producto interno y norma Euclídeana. Combinaciones lineales. Ley de cosenos y desigualdad de Cauchy-Schwarz. Revisión del método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales.



2. Espacios vectoriales y subespacios. Clausura bajo suma y producto escalar. Independencia lineal y generación de subespacios vectoriales.
3. Bases y dimensión de espacios vectoriales.

UNIDAD 2: Álgebra matricial

Logro de Aprendizaje / propósito de la unidad:

Contenidos:

4. Transformaciones lineales. Tipos de matrices. Valores y vectores propios. Definición, cálculo y propiedades. Diagonalización y descomposición espectral. 5. Formas cuadráticas y tipo o signo de una matriz simétrica. Identificación, propiedades y diagonalización. Producto de Kronecker. Operaciones y propiedades.

UNIDAD 3: Números complejos y Tópicos de cálculo

Logro de Aprendizaje / propósito de la unidad:

Contenidos:

6. Números complejos. Propiedades y operaciones. Forma polar y exponencial. Teorema de De Moivre y la fórmula de Euler.
7. Polinomios y series de Taylor. Representación en series de McLaurin comunes. Radio de convergencia. Error de aproximación y residuo de Lagrange.
8. Matriz jacobiana de una transformación de R^m en R^n . Composición de funciones y regla de la cadena. El teorema de la función implícita. Estática comparativa en modelos económicos.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Logro de Aprendizaje / propósito de la unidad:

Contenidos:

9. Ecuaciones diferenciales de primer orden. Ecuaciones separables. La técnica del factor de integración. Método de coeficientes indeterminados. 10. Estabilidad y análisis cualitativo. Diagramas de fase y linealización. Ecuaciones no lineales de primer orden. 11. Ecuaciones diferenciales de orden superior y sistemas de ecuaciones lineales. Análisis cualitativo de sistemas diferenciales no lineales. Diagramas de fase y linealización. Caracterización de equilibrios.

UNIDAD 5: Ecuaciones en diferencias

Logro de Aprendizaje / propósito de la unidad:

Contenidos:

12. Ecuaciones en diferencias de primer orden. Soluciones por medio de recursión. Método de coeficientes indeterminados. 13. Análisis cualitativo de ecuaciones en diferencias no lineales de primer orden. Diagramas de fase y linealización. 14. Ecuaciones en diferencias de orden superior y sistemas de ecuaciones en diferencia. Clasificación de singularidades.

V. Estrategias Didácticas

En todo momento, el profesor propiciará la participación de los alumnos en el análisis de problemas, la demostración de teoremas y propiedades, explicando el qué, cómo y por qué de las teorías aprendidas. Esta forma de trabajo permitirá ampliar la capacidad de análisis y el pensamiento crítico en los alumnos.

VI. Sistemas de evaluación

Consideraciones para las evaluaciones

1. El curso consta de un examen parcial, un examen final y cuatro prácticas calificadas. Ninguna de estas notas se redondea. El promedio de prácticas es el promedio simple de las notas de las prácticas calificadas. La nota final del curso se calcula redondeando el promedio ponderado del examen parcial (30%), examen final (30%) y promedio de prácticas (40%).

Nombre evaluación	%	Fecha	Criterios	Comentarios
1. Examen parcial	30	09/05/2023		
2. Examen final	30	04/07/2023		
3. Promedio de 4 prácticas calificadas	40			Promedio simple de las cuatro prácticas calificadas.

Unidades de aprendizaje	Contenidos y actividades a realizar	Recursos y materiales	Evaluaciones
	Actividades a realizar: <ul style="list-style-type: none"> • Práctica Dirigida 4. 		
Semana 8 de exámenes parciales: del 08/05/2023 al 13/05/2023			
	EXAMEN PARCIAL		
Semana 9: del 15/05/2023 al 20/05/2023			
<ul style="list-style-type: none"> • UNIDAD 3: Números complejos y Tópicos de cálculo 	Contenido: <ul style="list-style-type: none"> • Polinomios y series de Taylor. • Transformaciones. Actividades a realizar: Práctica Dirigida 5.		
Semana 10: del 22/05/2023 al 27/05/2023			
<ul style="list-style-type: none"> • UNIDAD 3: Números complejos y Tópicos de cálculo • Ecuaciones diferenciales ordinarias 	Contenido: <ul style="list-style-type: none"> • Teorema de la función implícita. • Estática comparativa. • EDOs: clasificación y lineales de primer orden. Actividades a realizar: Práctica Dirigida 6.		
Semana 11: del 29/05/2023 al 03/06/2023			
<ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones diferenciales ordinarias 	Contenido: <ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones separables, factor de 		



Unidades de aprendizaje	Contenidos y actividades a realizar	Recursos y materiales	Evaluaciones
	integración. • Análisis cualitativo de EDOs autónomas. Actividades a realizar: • Practica Calificada 3		
Semana 12: del 05/06/2023 al 10/06/2023			
• Ecuaciones diferenciales ordinarias	Contenido: • EDOs de orden superior. • Sistemas lineales de EDOs. Actividades a realizar: • Práctica Dirigida 7.		
Semana 13: del 12/06/2023 al 17/06/2023			
• Ecuaciones diferenciales ordinarias • UNIDAD 5: Ecuaciones en diferencias	Contenido • Sistemas de EDOs autónomas. • Ecuaciones en diferencias de primer orden. Actividades a realizar: • Práctica Dirigida 8.		
Semana 14: del 19/06/2023 al 24/06/2023			
• UNIDAD 5: Ecuaciones en diferencias	Contenido: • Análisis cualitativo de EEDs autónomas. • Ecuaciones en diferencias de orden		



Anexo 2

Tareas

Tarea 1 : Análisis Cualitativo

Considere el siguiente sistema de EDO no lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln k + 1 - c - \frac{k}{2} \\ c\left(\frac{1}{k} - 1\right) \end{bmatrix}, \quad c > 0. \quad (*)$$

1. **Cálculo de Singularidades**

Determine los puntos de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) . Además, en un mismo plano cartesiano esboce las curvas de fase e indentifique los puntos de equilibrio.

2. **Linealización**

Para cada punto de equilibrio (k_{ss}, c_{ss}) determine el sistema de EDO lineal asociado a $(*)$

3. **Tipo de singularidad del sistema linealizado**

Determine el tipo de comportamiento de las soluciones del sistema linealizado.

4. **Tipo de singularidad del sistema no lineal**

Determine, si es posible, el tipo de comportamiento de las soluciones de $(*)$ cerca del equilibrio.

5. **Diagrama de Fase**

Esboce las trayectorias del sistema $(*)$

Tarea 2 : Uso de la herramienta tecnológica

Usar cualquiera de las siguientes herramientas tecnológicas para verificar el análisis cualitativo de la **Tarea 1**

1. **MatLab**: Phase plane plot
2. **Bluffton**: Slope and Direction Fields
3. **Wolfram Alpha**: Algoritmo (para una versión no gratuita)

Tarea 3 : Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

Analizar cualitativamente el **modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans**.

Dicho modelo establece las siguientes relaciones dinámicas entre el stock de capital per cápita de una economía, k , y el consumo per cápita, c :

$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \quad \text{y} \quad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m + \rho) \quad (*)$$

- La primera ecuación es una regla de acumulación de capital e indica que el capital per cápita se incrementa siempre que la inversión en nuevo capital, que es igual al ahorro $y - c$ donde $y = \phi(k)$ es el nivel de ingreso (producción), supere a la cantidad necesaria para reponer el capital depreciado, mk . La función ϕ es cóncava, $\phi' > 0$ y $\phi'' < 0$.
- La segunda ecuación (llamada **ecuación de Euler**) es el resultado de un problema de optimización dinámico, donde $\rho \in]0, 1[$ es la tasa de descuento de los hogares.

Anexo 3

Algoritmo creado para el Diagrama de fase usando la herramienta WolframAlpha

Tarea 2

Sistema:

$$\text{In[]:= } f[k_, c_] = \text{Log}[k] + 1 - c - \frac{k}{2};$$

$$g[k_, c_] = c \left(\frac{1}{k} - 1 \right);$$

$$k'[t_] = f[k[t], c[t]]; \quad c'[t_] = g[k[t], c[t]];$$

1) Cálculo de singularidades:

$$\text{In[]:= } \text{sols} = \text{Solve}[f[k, c] = 0 \&\& g[k, c] = 0 \&\& c > 0, \{k, c\}, \text{Reals}]$$

$$\text{Out[]:= } \left\{ \left\{ k \rightarrow 1, c \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

Observación: La expresión $c > 0$ es una restricción. En caso no hubiese restricción, omitimos " $\&\& c > 0$ ".

2) Linealización:

$$\text{In[]:= } \text{DF}[k_, c_] = \text{MatrixForm}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

$$t[A] = \text{Tr}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

$$d[A] = \text{Det}[\{\{\partial_k f[k, c], \partial_c f[k, c]\}, \{\partial_k g[k, c], \partial_c g[k, c]\}\}]$$

$$\Delta[A] = (t[A])^2 - 4 d[A]$$

Out[]:= MatrixForm

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{k} & -1 \\ -\frac{c}{k^2} & -1 + \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

$$\text{Out[]:= } -\frac{3}{2} + \frac{2}{k}$$

$$\text{Out[]:= } \frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} - \frac{c}{k^2} - \frac{3}{2k}$$

$$\text{Out[]:= } -4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} - \frac{c}{k^2} - \frac{3}{2k} \right) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{2}{k} \right)^2$$

```
In[ ]:= (DF[k, c] /. sols)
```

```
Out[ ]:=  $\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -1 \right\}, \left\{ -\frac{1}{2}, 0 \right\} \right\}$ 
```

3) Tipo de singularidad del sistema linealizado:

```
In[ ]:= (t[A], d[A], Δ[A]) /. sols)
```

```
Out[ ]:=  $\left\{ \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right\} \right\}$ 
```

Auto valores:

```
In[ ]:= (Solve[λ^2 - t[A] λ + d[A] == 0, λ] /. sols)
```

```
Out[ ]:=  $\left\{ \left\{ \lambda \rightarrow -\frac{1}{2} \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow 1 \right\} \right\}$ 
```

El origen de coordenadas es para el sistema linealizado un punto de silla.

4) Tipo de singularidad del sistema no lineal:

Por el teorema de Grobman Hartman, el único punto de equilibrio es un punto silla.

5) Diagrama de fase:

Generación de espacio de salida

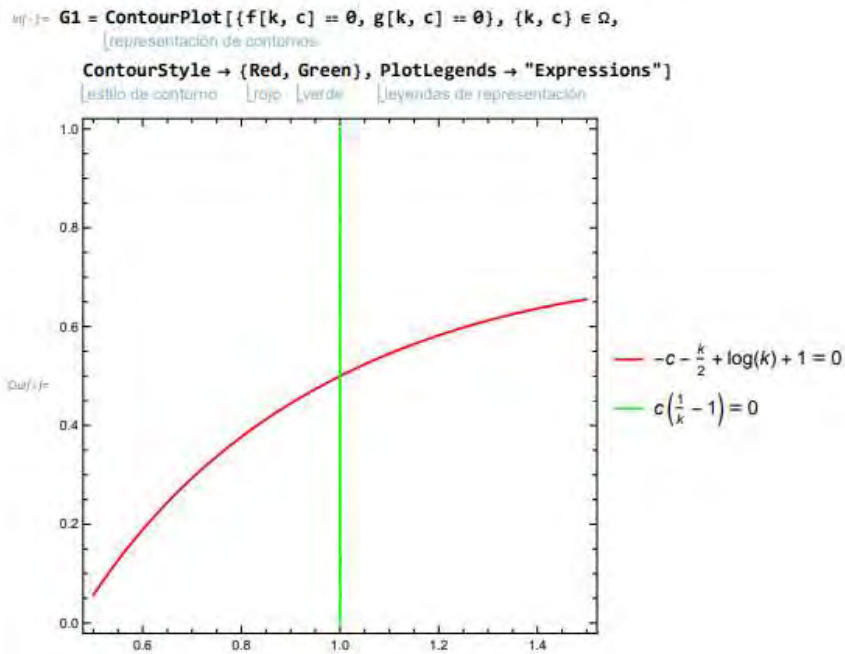
```
In[ ]:= R = CoordinateBoundingBox[{k, c} /. sols, 0.5];
```

```
In[ ]:= Ω = MeshRegion[Rectangle[R[[1]], R[[2]]];
```

Observación: La región Ω se define teniendo en cuenta que queremos visualizar todos los puntos de equilibrio.



Curvas de fase:



Generación de diagramas de flechas (componentes del vector tangente):

```

mf:= FV[k_, c_, e_, δ_] = {{k+e, c+δ}, {k+e, c+δ+g[k+e, c+δ]}};
mf:= FH[k_, c_, e_, δ_] = {{k+e, c+δ}, {f[k+e, c+δ]+k+e, c+δ}};
mf:= G[e_, δ_] := Graphics[{Arrow[FV[k, c, e, δ]], Arrow[FH[k, c, e, δ]]} /. sols];
  (grafico) (flecha) (flecha)

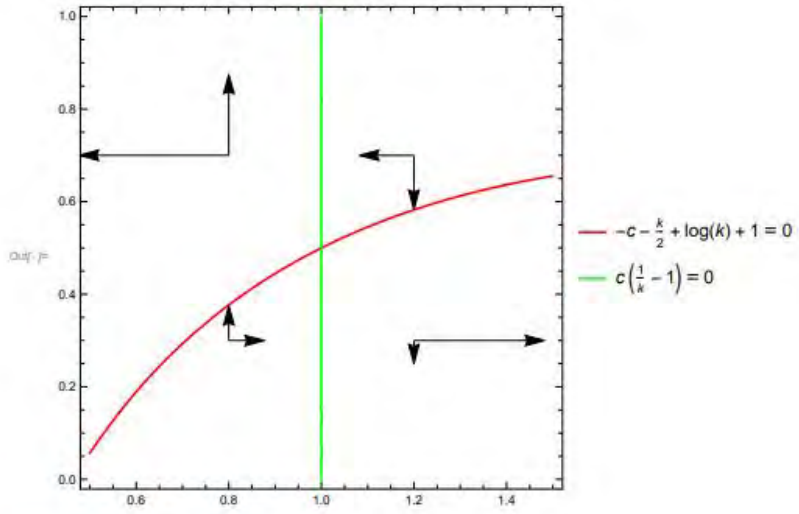
```



```

In[ ]:= Show[G1, G[0.2, 0.2], G[0.2, -0.2], G[-0.2, 0.2], G[-0.2, -0.2]]

```

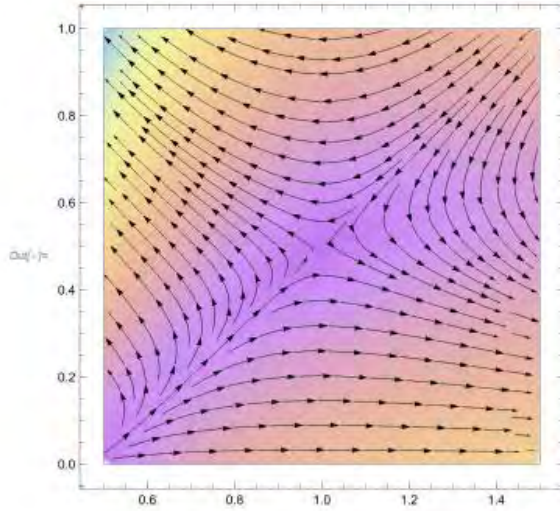


Esbozo de trayectorias:

```

In[ ]:= Sols = StreamDensityPlot[{f[k, c], g[k, c]},

```



Trayectorias y curvas de fase:

inf -> Show[Sols, G1]
[muestr

