

## DIMENSIONAMIENTO DE SERVOMOTORES ELÉCTRICOS EN APLICACIONES AEROESPACIALES DE CONTROL DE POSICIONAMIENTO

COVA, Walter J. D. – JAZNI, Jorge E. – GONZÁLEZ, Gustavo J. –  
SALOMONE, Javier E. – PEDRONI, Juan P. – DUTTO, Esteban A. – LAGIER, Santiago

Instituto Universitario Aeronáutico, Centro de Investigaciones Aplicadas,  
Departamento Sistemas Electromecánicos.  
Av. Fuerza Aérea 6500 – CP(5022) Córdoba – Argentina.  
Tel. 0351-4435012 – e-mail: [wcova@iua.edu.ar](mailto:wcova@iua.edu.ar)

### RESUMEN

Se presenta un conjunto de procedimientos para la selección (o dimensionamiento) de servomotores eléctricos rotativos (*brushed* o *brushless*) destinados a aplicaciones de control de posición en vehículos aeroespaciales. Se trata del control de posición de dispositivos y órganos mecánicos (superficies aerodinámicas, válvulas de control de flujo, toberas orientables, etc.) con exigentes requerimientos de performance y restricciones de peso y volumen.

Los procedimientos presentados se basan en el análisis del funcionamiento del motor en condiciones de oscilación armónica, para diversos estados de carga mecánica, tanto lineales como no lineales. Las curvas de carga consideradas se extienden desde las puramente conservativas (curvas inerciales y/o elásticas) a las disipativas y sus combinaciones. La utilización de la metodología propuesta tiene por resultado la determinación de un motor mínimo, cuyas prestaciones mecánicas y performance térmica (característica curva-velocidad, potencia mecánica y capacidad de disipación de calor) satisfagan los requerimientos impuestos por la condición operativa de carga a que se encuentra sometido. La exposición se complementa con ejemplos prácticos.

### 1.- INTRODUCCIÓN

Los criterios para el dimensionamiento y/o selección de servomotores eléctricos han constituido una permanente inquietud, tanto para los teóricos de control como para los ingenieros de aplicaciones. Indagando el pasado, destaca el trabajo de G. Newton [1] que se remonta a 1950 y los aportes incluidos en el texto de Gille et. al (1959), [2]. Esas contribuciones basan sus análisis en la inercia de la carga conducida y abundan en consideraciones de carácter particular atinentes a la aplicación específica considerada en cada caso. En la bibliografía moderna – véanse Chiasson [3] (2005), Gieras y Wang [4] (2002) – el dimensionamiento no es considerado como un problema, sino como un punto de partida, es decir un dato inicial para tratar aspectos de diseño, modelización y control.

En este trabajo se aborda la temática del dimensionamiento de motores eléctricos para servoposicionadores de aplicación aeroespacial. Los actuadores considerados son a imán permanente y con alimentación por corriente continua, preferentemente sin escobillas (BLDC), en concordancia con lo recomendado por NASA [5]. Debe hacerse notar que, en control de posición, los motores rara vez alcanzan su velocidad de régimen, sino que se encuentran permanentemente operando en estado transitorio. Ello trae como consecuencia que el calentamiento propio del motor se deba a la corriente circulante, siendo el efecto  $I^2R$  preponderante frente al calentamiento de origen magnético.

De acuerdo a cada aplicación, la realización de la transmisión mecánica que acopla carga y motor podrá (o no) incluir elementos de transformación del movimiento rotativo en despla-

zamiento lineal.

La minimización de potencia, volumen y peso de los dispositivos constituye un requerimiento mandatorio en aplicaciones aeroespaciales, por lo que se justifica el desarrollo de un procedimiento para dimensionar servomotores.

En la Sección 2 subsiguiente, se analizan los requerimientos de operación justificándose el enfoque del dimensionamiento por respuesta en frecuencia. En las Secciones 3 y 4 se consideran los estados de carga generalizado e inercial para cuplas de carga lineales o linealizables, mientras que en la Sección 5 se tratan las cuplas fuertemente no lineales. En la Sección 6 se analizan las implicaciones del criterio de selección de la relación de transmisión basado en la maximización de la aceleración. La Sección 7 presenta un ejemplo aplicativo completo, sintetizándose en la Sección 8 las conclusiones alcanzadas en este trabajo.

## 2.- REQUERIMIENTOS DE OPERACIÓN

Para seleccionar un motor preexistente o para establecer las especificaciones de diseño de uno nuevo, se debe considerar la satisfacción de las solicitaciones estáticas y dinámicas impuestas por sus condiciones de operación.

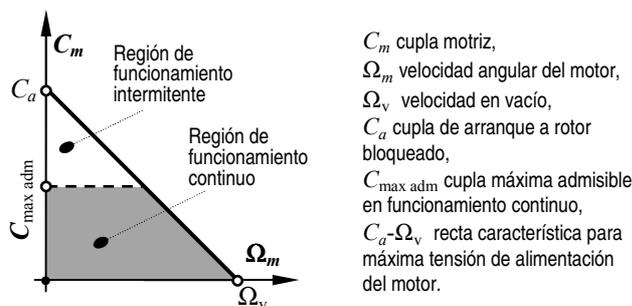


Fig. 1. Característica cupla-velocidad idealizada de un servomotor.

La evolución del punto de funcionamiento deberá ubicarse en armonía con la característica cupla-velocidad del motor, sin exceder los límites impuestos por los máximos de potencia erogable y de temperatura de trabajo (que depende de la temperatura ambiente y de la carga del motor), lo que establece una limitación en la máxima cupla eficaz admisible (Fig. 1). A su vez, la característica de funcionamiento continuo se interpreta como una envolvente que limi-

ta los valores de cupla que el motor es capaz de erogar en servicio continuo para cada régimen de velocidad angular.

El concepto de respuesta en frecuencia, ha conducido a métodos de comprobada eficacia para el análisis y diseño de lazos de control, que han sido revitalizados por las teorías de Control Robusto. Si, como ocurre en muchas situaciones, no se cuenta con la caracterización temporal detallada de las solicitaciones a que se encontrará sometido el actuador, la solución adoptada es seleccionar (o diseñar) un servo-motor, considerándolo sometido a solicitaciones de amplitud y frecuencia conocidas a las que deberá responder proporcionando las cuplas y velocidades de rotación pertinentes, sin superar sus restricciones operativas.

En ciertos casos, además del detalle de la carga mecánica a posicionar, se cuenta con requerimientos específicos de desplazamiento, velocidad y aceleración angular máximas a alcanzar, con lo que —en principio— quedaría definida la potencia mínima del motor a utilizar; adicionalmente se deberá verificar si resulta suficiente para operar en el rango de frecuencias especificado para el lazo de posicionamiento.

Considerando ahora la operación armónica del motor cargado, en el punto de funcionamiento nominal la carga oscila con amplitud  $\theta_0$  y frecuencia angular  $\omega$ . El accionamiento opera con una relación de reducción  $\alpha$ , una cupla motriz  $C_m$  y una velocidad angular  $\Omega_m$  al eje del motor.

$$\theta_c(t) = \theta_0 \sin \omega t; \quad \alpha = \theta_m / \theta_c; \quad \Omega_m(t) = \alpha \omega \theta_0 \cos \omega t; \quad (1)$$

$$C_m(t) = -\left(J_m + J_c / \alpha^2\right) \alpha \omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \frac{T_c}{\alpha} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

donde  $J_m$  y  $J_c$  son el momento de inercia del motor y la carga, representándose con  $(T_c, \varphi)$  las restantes cuplas (elásticas, disipativas, lineales y no lineales) actuantes en régimen sinusoidal.

En un proceso de diseño, el momento de inercia del motor  $J_m$ , es uno de los valores a determinar, por lo que se deberá usar inicialmente en la (2) un valor estimado en base a la experiencia, el que será refinado en sucesivas aproximaciones. Se deduce en consecuencia que el procedimiento que se propone, es de naturaleza iterativa. Igual consideración se puede

hacer con respecto a la relación de transmisión mecánica  $\alpha$ , cuyo valor inicial también ha de ser estimado.

Retornando a (2), el motor debe en general contrarrestar dos tipos de cupla: inerciales (asociadas a las masas en movimiento) y no inerciales. Las cuplas no inerciales (lineales o no lineales) podrán existir o no, o ser despreciables en razón de su magnitud relativa. Según sean los valores relativos de las cuplas de carga y las frecuencias de operación consideradas, el estado de carga será preponderantemente inercial o no. Paralelamente, la operación en el punto de funcionamiento nominal puede requerir por parte del motor el suministro de una cupla motriz constante  $C_c$ , lo que también incide sobre el calentamiento del motor.

Para subrayar el carácter oscilatorio del movimiento, se puede reescribir las ecuaciones:

$$\Omega_m(t) = \hat{\Omega}_m \cos \omega t; \quad (3)$$

$$C_m(t) = \hat{C}_m \cos(\omega t - \delta) \quad (4)$$

donde  $\delta$  representa el desfase de la velocidad angular respecto de la cupla motriz. Si se normalizan las precedentes expresiones respecto de sus valores máximos resulta:

$$x(t) = \frac{\Omega_m(t)}{\hat{\Omega}_m} = \cos \omega t; \quad y(t) = \frac{C_m(t)}{\hat{C}_m} = \cos(\omega t - \delta) \quad (5)$$

e introduciendo la variable auxiliar  $u = \omega t$ , se obtiene muy simplemente:

$$x = \cos(u); \quad y = \cos(u - \delta) \quad (6).$$

### 3.- ESTADO DE CARGA GENERALIZADO.

#### A.- Carga generalizada con cupla estática nula

La cupla que carga al motor poseerá en general componentes disipativas, elásticas y no lineales:

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &= \alpha \omega \theta_0 \cos \omega t \\ C_m(t) &= -(J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \\ &+ \frac{B_c}{\alpha} \theta_0 \omega \cos \omega t + \frac{k_c}{\alpha} \theta_0 \sin \omega t + \frac{N_c(t)}{\alpha} \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $B_c$  es el coeficiente de fricción viscosa referido al eje de carga,  $k_c$  representa una cons-

tante elástica asociada; mientras que  $N_c(t)$  es una cupla de carga no lineal periódica de la misma frecuencia. Se supondrá que  $N_c(t)$  es reemplazable por la componente fundamental de su serie de Fourier multiplicada por una constante  $K_N$  adecuadamente elegida (aproximación de primera armónica):

$$N_c(t) \approx K_N N_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (8)$$

donde  $N_1$ ,  $\varphi_1$  dependen de la frecuencia y de la amplitud del movimiento. Se debe acotar aquí que la aproximación (8) es válida, si  $K_N$  multiplicado por el valor eficaz de la armónica fundamental es igual o mayor que el valor eficaz de la función  $N_c(t)$ :

$$K_N N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T N_c^2(t) \cdot dt} \quad (9).$$

Se garantiza así que la cupla motriz eficaz necesaria para vencer la no linealidad, será en la práctica menor o igual que el valor de dimensionamiento adoptado. En muchos casos, bastará elegir  $K_N \approx 1.15$  para cumplir (9). Más adelante se tratarán aquellas situaciones para las cuales la hipótesis no es aplicable.

Las (7) pueden ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &= \alpha \omega \theta_0 \cos \omega t; \\ C_m(t) &= -(J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \sin \omega t + \\ &+ \frac{B_c}{\alpha} \theta_0 \omega \cos \omega t + \frac{k_c}{\alpha} \theta_0 \sin \omega t + \frac{K_N N_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}{\alpha} \end{aligned} \quad (10)$$

Empleando ahora notación fasorial:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \alpha \theta_0 \omega j \\ C_m &= (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \theta_0 \omega^2 j^2 + \frac{B_c}{\alpha} \theta_0 \omega j + \frac{k_c}{\alpha} \theta_0 + \frac{K_N N_1}{\alpha} \angle \varphi_1 \end{aligned} \quad (11)$$

y definiendo los coeficientes

$$\begin{aligned} a_\Omega &= \alpha \theta_0 \omega, \quad c_J = (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \theta_0 \omega^2; \\ c_B &= \frac{B_c}{\alpha} \theta_0 \omega, \quad c_K = \frac{k_c}{\alpha} \theta_0; \quad c_N = \frac{K_N N_1}{\alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

las (11) quedan

$$\begin{aligned} \Omega_m &= a_\Omega j \\ C_m &= c_J j^2 + c_B j + c_K + c_N \angle \varphi_1 \end{aligned} \quad (13)$$

y se pueden representar en el plano complejo mediante el diagrama de la Fig. 2.

La evolución temporal del estado de carga del servomotor está asociada a la variación rela-

tiva de los fasores  $C_m$  y  $\Omega_m$ , cuyos módulos valen:

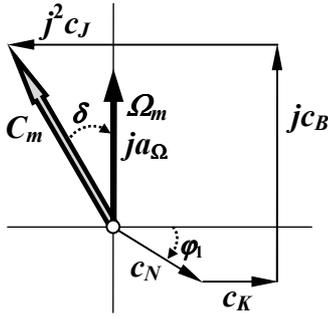


Figura 2. Diagrama fasorial del estado de carga.

$$\begin{aligned} |\Omega_m| &= a_\Omega \\ |C_m| &= \sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2} \end{aligned} \quad (14)$$

al igual que del ángulo de desfase  $\delta$ , el que será denominado *ángulo de carga*:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{c_B + c_N \sin \varphi_1}{c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J} \right). \quad (15)$$

La definición adoptada para el ángulo de carga  $\delta$  es consistente con la clásica analogía eléctrica {cupla  $\rightarrow$  tensión, velocidad  $\rightarrow$  corriente}, en la que los elementos circuitales inductancia y susceptancia se corresponden con el momento de inercia y la rigidez del sistema mecánico.

Normalizando las (13) con respecto de los módulos (14), se tienen los fasores unitarios desfasados en  $\delta$

$$\frac{\Omega_m}{|\Omega_m|} = \mathbf{1}_\Omega = e^{j\pi/2}, \quad \frac{C_m}{|C_m|} = \mathbf{1}_C = e^{j(\pi/2 - \delta)} \quad (16)$$

representativos de las variables  $x$  e  $y$ , véanse las (6).

Desde otro punto de vista, las (6) son las ecuaciones paramétricas de una elipse centrada en el origen del plano  $[x, y]$ , e inscrita en un cuadrado de lado igual a 2; cuyo eje mayor está inclinado  $\pi/4$  respecto de la horizontal (Fig. 3). En esta elipse la relación entre los semiejes es  $b/a = \tan |\delta/2|$ . El área encerrada por la elipse  $S = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot \sin |\delta|$  resulta proporcional a la potencia entretenida en el sistema carga-motor. A la frecuencia de resonancia, el estado es puramente disipativo,  $\delta = 0$ , la elipse degenera en una recta que une los puntos  $(+1, +1)$ ,  $(-1, -1)$  y no encierra área alguna. En caso de carga inercial pura, la elipse se convierte en una circunfe-

rencia, ya que en este caso vale  $\delta = -\pi/2$  y resulta  $b = a = 1$ .

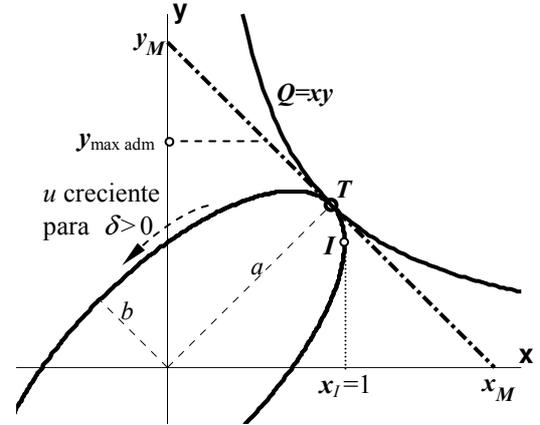


Figura 3. Lugar del punto de funcionamiento.

El recorrido del lugar de funcionamiento del motor, se inicia para  $u=0$  en el punto  $I$  de coordenadas  $(1, \cos \delta)$  y se mueve sobre la elipse en sentido antihorario para valores crecientes de  $u$  si  $\delta > 0$ ; para  $\delta < 0$  el recorrido es en sentido horario.

En la Fig. 3 se grafica la elipse del motor cargado, junto con la hipérbola de potencia normalizada constante

$$Q = xy \quad (17)$$

que le es tangente en  $T$  (punto de potencia instantánea máxima).

Con las coordenadas  $(x_T, y_T)$  del punto de tangencia, se obtienen de inmediato los valores de los extremos  $x_M, y_M$  de la recta característica cupla-velocidad del motor, ya que toda hipérbola bisecta a sus tangentes. Resulta así:

$$x_M = 2x_T; \quad y_M = 2y_T \quad (18)$$

Es fácil deducir que el valor del parámetro  $u$  sobre el punto  $T$  estará dado por la solución de:

$$-\tan(u) = \tan(u - \delta) \quad (19)$$

que es, simplemente:  $u = \delta/2$ . (20)

de modo que en  $T$  valen:

$$x_T = \cos(\delta/2); \quad y_T = \cos(\delta/2 - \delta) = \cos(\delta/2); \quad (21)$$

$$Q = x_T y_T = \cos^2(\delta/2).$$

Finalmente la característica cupla-velocidad del motor requerido queda determinada por:

$$x_M = 2 \cos(\delta/2); \quad y_M = 2 \cos(\delta/2); \quad (22)$$

de cuya denormalización se obtiene la velocidad en vacío, la cupla de arranque y la potencia pico que debe suministrar el motor:

$$\begin{aligned}\Omega_v &= 2 \cos(\delta/2) \cdot |\Omega_m| = 2 \cos(\delta/2) \cdot a_\Omega \\ C_a &= 2 \cos(\delta/2) \cdot |C_m| = \\ &= 2 \cos(\delta/2) \cdot \sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2} \\ P_{\max} &= \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) a_\Omega \sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2}\end{aligned}\quad (23)$$

Debe observarse que las (23) junto con las definiciones (12) y (15) caracterizan el motor mínimo que para cada frecuencia de oscilación  $\omega$  considerada, puede suministrar la cupla necesaria para alcanzar el punto de funcionamiento  $T$  en condiciones de régimen sinusoidal. Todo otro motor cuya recta característica se encuentre por arriba de la correspondiente al motor mínimo, también admitirá a  $T$  como punto de operación.

El motor mínimo tendrá su correspondiente cupla máxima admisible (véanse Figs. 1 y 3), que por seguridad ha de ser mayor que la cupla pico de régimen sinusoidal, lo que conduce a:

$$y_{\max \text{ adm}} = \frac{C_{\max \text{ adm}}}{\hat{C}_m} \geq 1. \quad (24)$$

Los requerimientos de disipación térmica del motor pueden deducirse a partir de la (24),

$$\begin{aligned}C_{\max \text{ adm}} &\geq \hat{C}_m; \quad C_{\text{ef max adm}} \geq |C_m| \cdot \sqrt{2}/2 \\ k_T I_{\text{ef max adm}} &\geq \sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\quad (25)$$

donde  $k_T$  es la constante de cupla del motor e  $I_{\text{ef}}$  la corriente eficaz circulante. Simultáneamente, la corriente máxima debe cumplir con la restricción impuesta por la potencia disipable  $P_d$ , que se encuentra limitada por la máxima temperatura a que pueda ser sometido el motor en su entorno de trabajo:

$$R I_{\text{ef max adm}}^2 \leq P_{d \text{ max}}, \quad (26)$$

siendo  $R$  la resistencia del bobinado.

Según sean los valores de  $\delta$  en el rango de frecuencias de interés, el estado de carga podrá ser predominantemente inercial ( $-90^\circ \leq \delta < 0^\circ$ ), disipativo (si  $\delta$  se mantiene en los alrededores de  $0^\circ$ ), o bien predominantemente elástico ( $0^\circ <$

$\delta \leq 90^\circ$ ). Por cierto, pueden producirse situaciones en que el estado sea variable de uno a otro tipo a lo largo de la banda de interés, puesto que  $\delta$  depende de la frecuencia de operación:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{B_c \theta_0 \omega + K_N N_1 \sin \varphi_1}{k_c \theta_0 + K_N N_1 \cos \varphi_1 - (J_m \alpha^2 + J_c) \theta_0 \omega^2} \right) \quad (27)$$

El dimensionamiento del motor no puede entonces realizarse tan sólo a la frecuencia máxima de operación, ya que no se puede afirmar a priori que la máxima cupla de arranque y la máxima velocidad de vacío ocurran simultáneamente para esa frecuencia.

### B.- Estado de carga generalizado con cupla estática superpuesta

Incorporando una cupla estática  $C_c$  a las (10):

$$\begin{aligned}\Omega_m(t) &= \alpha \omega \theta_0 \sin(\omega t + \pi/2) \\ C_m(t) - \frac{C_c}{\alpha} &= (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \sin(\omega t + \pi) + \\ &+ \frac{B_c}{\alpha} \theta_0 \omega \sin(\omega t + \pi/2) + \frac{k_c}{\alpha} \theta_0 \sin \omega t + \frac{K_N N_1 \sin(\omega t + \varphi_1)}{\alpha}\end{aligned}\quad (28)$$

o bien, en variables normalizadas,

$$\begin{aligned}x &= \cos(u); \quad y - y_0 = \cos(u - \delta), \\ y_0 &= \frac{C_c / \alpha}{\sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2}}.\end{aligned}\quad (29)$$

Nuevamente, las ecuaciones de  $x$  e  $y$ , corresponden a la representación paramétrica de una elipse en el plano  $[x, y]$ , centro en  $(0, y_0)$ , con eje inclinado  $45^\circ$ . Al estar desplazado el centro de la elipse respecto del origen, el punto de máxima potencia ya no coincide con su vértice.

Para calcular el punto de tangencia entre la elipse y la hipérbola de potencia máxima se debe resolver la ecuación trascendente:

$$\cot(u) + \cot(u - \delta) + y_0 \operatorname{cosec}(u - \delta) = 0 \quad (30)$$

cuyas soluciones:

$$u_T = g(y_0, \delta) \quad (31)$$

no son expresables en forma analítica. Por la comodidad de contar con soluciones positivas para todo valor de  $\delta$ , se han graficado en la Fig. 4 las soluciones numéricas alrededor de  $2\pi$ .

El valor asintótico al que tiende  $u_T$  para  $y_0$  creciente y todo  $\delta$ , es  $u_T = 2\pi$ . Nótese que para  $y_0 \geq 2.63$   $u_T \in [2\pi \pm 5\%]$ , mientras que para  $y_0 \geq 7.8$   $u_T \in [2\pi \pm 2\%]$ . En consecuencia, para

cálculos de ingeniería, bastará contar con alguna función aproximante del valor  $u_T$  para cuplas estáticas en el rango de  $y_0 \leq 2.7$  y ángulos  $\delta$  superiores en valor absoluto a los  $15^\circ$  (pues para  $|\delta| > 15^\circ$  las soluciones pertenecen a la banda de  $\pm 2\%$ ).

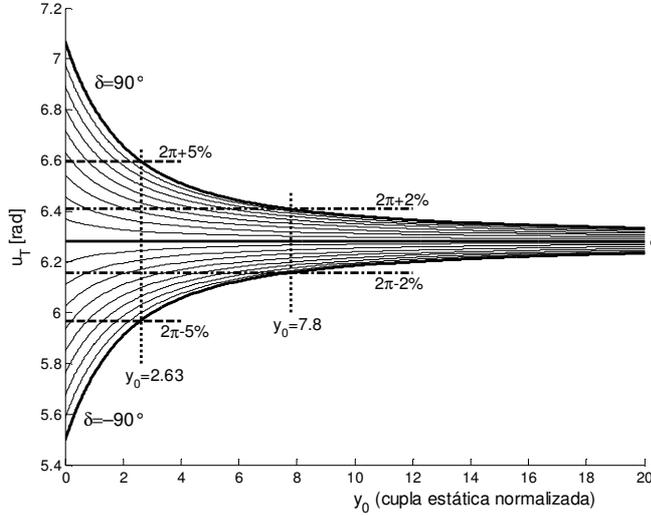


Figura 4. Valores numéricos de la expresión (31)

La función empírica definida como:

$$\tilde{u}_T = \left(2\pi + \frac{\delta}{2}\right) - (0.3643|\delta| - 0.0194) \cdot \psi \cdot \text{sign}(\delta) \quad (32)$$

$$\psi = \left[1 - e^{-y_0 / (0.23\delta^2 - 0.135|\delta| + 1.323)}\right]$$

es aplicable para  $y_0 \leq 3$  para  $15^\circ \leq |\delta| \leq 90^\circ$ , con un error porcentual máximo inferior al 0.5%.

El punto de potencia máxima corresponde a las coordenadas:

$$x_T = \cos(u_T); \quad y_T = \cos(u_T - \delta) + y_0 \quad (33)$$

La recta característica del motor mínimo, queda definida por

$$\Omega_v = 2 \cos(u_T) \cdot |\Omega_m| = 2 \cos(u_T) \cdot a_\Omega$$

$$C_a = 2 [\cos(u_T - \delta) + y_0] \cdot |C_m| =$$

$$= 2 [\cos(u_T - \delta) + y_0] \sqrt{(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2} \quad (34)$$

Los requerimientos de disipación térmica del motor dados por (25), se convierten ahora en:

$$C_{ef \max \text{ adm}} \geq \sqrt{\left[\frac{C_c}{\alpha}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |C_m|\right]^2}$$

$$k_T I_{ef \max \text{ adm}} \geq \sqrt{\left[\frac{C_c}{\alpha}\right]^2 + \frac{1}{2} [(c_K + c_N \cos \varphi_1 - c_J)^2 + (c_B + c_N \sin \varphi_1)^2]} \quad (35)$$

que se deberá verificar en todo el rango de frecuencias de interés.

#### 4.- ESTADO DE CARGA INERCIAL.

En muchas ocasiones en que el estado de carga es marcadamente inercial, resulta conveniente asumir el caso ideal, y considerar solamente cuplas inerciales superpuestas con una eventual cupla estática; bajo esta hipótesis, el ángulo de carga es  $\delta = -90^\circ$ . A su vez las expresiones analíticas se simplifican y resultan útiles para aproximaciones preliminares. Indicando con  $C_c/\alpha$  la cupla estática referida al eje del motor, las (28) son ahora:

$$\Omega_m(t) = \alpha \omega \theta_0 \cos(\omega t)$$

$$C_m(t) = \frac{C_c}{\alpha} - (J_m + J_c/\alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \sin(\omega t) \quad (36)$$

o bien, en variables normalizadas:

$$x = \frac{\Omega_m(t)}{\hat{\Omega}_m} = \frac{\Omega_m(t)}{\alpha \omega \theta_0} = \cos \omega t$$

$$y - y_0 = \frac{C_m(t) - C_c/\alpha}{\hat{C}_m} = \frac{C_m(t) - C_c/\alpha}{(J_m + J_c/\alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0} = -\sin \omega t \quad (37)$$

con lo que en el plano  $[x, y]$  los lugares de los puntos de funcionamiento del motor se convierten en una familia de circunferencias unitarias, con centros en  $(0, y_0)$  –véase Fig. 5:

$$x^2 + (y - y_0)^2 = 1 \quad (38)$$

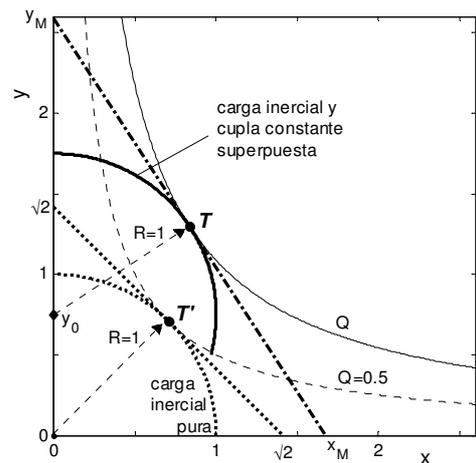


Figura 5. Condición de carga inercial, con y sin cupla estática superpuesta.

siendo las coordenadas para potencia máxima:

$$y_T = \frac{3y_0 + \sqrt{y_0^2 + 8}}{4}; \quad x_T = \sqrt{1 - (y_T - y_0)^2} \quad (39)$$

La recta característica del motor mínimo en el plano  $[x,y]$ , está dada por:

$$x_M = 2x_T; \quad y_M = 2y_T, \text{ es decir}$$

$$\Omega_v = 2x_T \alpha \omega \theta_0$$

$$C_a = 2y_T (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \quad (40)$$

$$P_m = x_T y_T (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha^2 \omega^3 \theta_0^2$$

Para el análisis térmico, la cupla eficaz actuante en estas condiciones de carga es:

$$C_{ef} = \sqrt{\left[ (J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \omega^2 \theta_0 \cdot \sqrt{2} / 2 \right]^2 + [C_c / \alpha]^2} \quad (41)$$

valor que determina la corriente eficaz que ha de soportar el bobinado del motor. Aplicando las (25) y (26) se tiene que

$$\begin{aligned} k_T I_{ef \max \text{ adm}} &\geq C_{ef} \\ R I_{ef \max \text{ adm}}^2 &\leq P_{d \max} \end{aligned} \quad (42)$$

Reemplazando valores, se puede calcular la frecuencia máxima para carga inercial en función de la potencia disipable en el motor:

$$\omega_{\max} \leq \left[ \frac{2k_T^2 P_{d \max}}{R(J_m + J_c / \alpha^2) \alpha \theta_0} \right]^{1/4} \cdot \left[ 1 - \frac{C_c^2 R}{\alpha^2 k_T^2 P_{d \max}} \right]^{1/4} \quad (43)$$

Se observa que en la Ec.(43) concurren dos factores: el primero representa la máxima frecuencia de operación alcanzable en condición de carga inercial pura, mientras que el segundo factor, menor que la unidad, refleja el efecto de la cupla estática no nula.

## 5.- CUPLAS NO LINEALIZABLES

En muchas situaciones prácticas aparecen cuplas de carga no lineales que no admiten la aproximación de primera armónica. Tales situaciones se encuentran por ejemplo en el control de flujo de líquidos mediante válvulas tipo mariposa. Justamente se ha elegido este ejemplo para ilustrar la metodología de cálculo propuesta.

La Fig. 6 muestra la no linealidad de las cuplas de apertura  $T_O$  y cierre  $T_C$  en función del ángulo de rotación de la válvula. Para más detalles, véase Huzel y Huang [6].

Para estimar la cupla de accionamiento  $C_v$  de la válvula, se han digitalizado las curvas  $T_O$  y

$T_C$  aproximándolas mediante polinomios dependientes del ángulo  $\theta$  de apertura de la válvula:

$$T_O = f(\theta) \quad (44)$$

$$T_C = g(\theta) \quad (45)$$

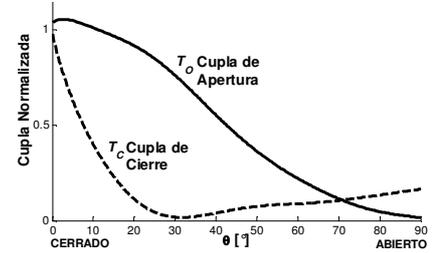


Figura 6. Cuplas de apertura y cierre en una válvula mariposa. Tomado de Huzel y Huang [6].

Las ecuaciones de movimiento (10) se reescriben ahora en forma completa con  $u = \alpha t$ :

$$\theta_c = \theta_0 \sin u + \theta_{PO}; \quad \Omega_m = \alpha \omega \theta_0 \cos u;$$

$$C_m = \frac{1}{\alpha} \left\{ [k_c - (J_m \alpha^2 + J_c) \omega^2] \theta_0 \sin u + B_c \omega \theta_0 \cos u + C_v (\theta_c, \dot{\theta}_c) + C_e \right\} \quad (46)$$

$$C_v = T_O = f(\theta), \dot{\theta} \geq 0; \quad C_v = T_C = g(\theta), \dot{\theta} < 0 \quad (47)$$

donde se incluye el ángulo  $\theta_{PO}$  correspondiente al punto de operación y una cupla estática  $C_e$ .

Las (46) deben ser resueltas numéricamente: para ello se implementó un script Matlab®, [7], que proporciona para cada frecuencia, la evolución gráfica del punto de funcionamiento del motor en el plano velocidad-cupla, la determinación de la potencia máxima requerida, la cupla de arranque, y la velocidad en vacío del motor mínimo, como asimismo la cupla eficaz correspondiente.

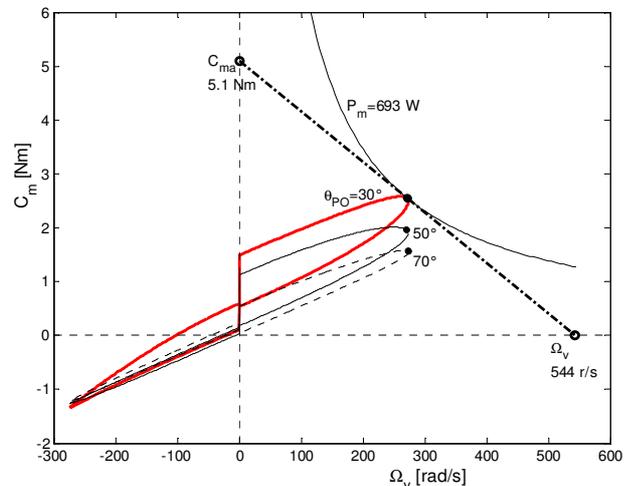


Figura 7. Diagramas de funcionamiento para  $f=25$  Hz.

Se presentan en la Fig. 7 los resultados para un par de válvulas mariposa en tándem con los siguientes parámetros: cupla de fricción máxima  $T_m=7.375$  Nm, inercia  $J_c=5.32 \times 10^{-3}$  Kg.m<sup>2</sup>, coeficiente de fricción viscosa  $B_c =0.125$  Nm/rad/s,  $k_c =0$ . Se han determinado los parámetros de un motor mínimo con  $J_m=10^{-3}$  Kg.m<sup>2</sup> y relación de transmisión  $\alpha=5$  para una frecuencia máxima de 25 Hz, amplitud de oscilación  $\theta_0 =20^\circ$ , en los puntos de operación correspondientes a  $\theta_{PO}=\{30^\circ, 50^\circ, 70^\circ\}$ .

## 6.- SELECCIÓN DE LA RELACIÓN DE TRANSMISIÓN

Un criterio generalmente aceptado para seleccionar la relación de transmisión  $\alpha$  es el de maximizar la aceleración del eje de carga en respuesta a una cupla motriz aplicada. Aplicando este concepto al modelo linealizado del motor cargado (para condiciones iniciales nulas),

$$\alpha C_m(s) - C_E(s) = (J_e s + B_e) \Omega_c(s) + k_e \Theta_c(s) \quad (48)$$

donde  $s$  es la variable de Laplace;  $C_m$  y  $C_E$  son la cupla motriz y una cupla externa.  $J_e$ ,  $B_e$  y  $k_e$  representan momento de inercia, fricción viscosa y constante elástica referidos al eje de carga:

$$J_e = \alpha^2 J_m + J_c, \quad B_e = \alpha^2 B_m + B_c, \quad (49)$$

$$k_e = \alpha^2 k_m + k_c,$$

con el subíndice  $m$  asociado a parámetros del motor, mientras que  $c$  se refiere a valores de la carga.

Reescribiendo (48) en función de la aceleración angular de la carga  $\Gamma_c(s)$ , se tiene,

$$\alpha C_m(s) - C_E(s) = (J_e s + B_e) \frac{1}{s} \Gamma_c(s) + k_e \frac{1}{s^2} \Gamma_c(s) \quad (50)$$

es decir,

$$\Gamma_c(s, \alpha) = s^2 \frac{\alpha C_m(s) - C_E(s)}{\alpha^2 (J_m s^2 + B_m s + k_m) + (J_c s^2 + B_c s + k_c)} \quad (51)$$

Maximizando (51) respecto de  $\alpha$ , se obtiene para  $s = j\omega$

$$\alpha_A(j\omega) = \frac{C_E(j\omega)}{C_m(j\omega)} + \sqrt{\left[ \frac{C_E(j\omega)}{C_m(j\omega)} \right]^2 + \frac{k_c - J_c \omega^2 + j\omega B_c}{k_m - J_m \omega^2 + j\omega B_m}} \quad (52)$$

y se deducen las expresiones clásicas que reproduce la tabla siguiente.

Tabla 1 – Relaciones de transmisión

$C_E = 0$ $\{B_m, k_m, B_c, k_c\} \rightarrow 0,$	$\alpha_A = \sqrt{\frac{J_c}{J_m}},$ (c. inercial pura)
$C_E$ y $C_m$ constantes $\{B_m, k_m, B_c, k_c\} \rightarrow 0$	$\alpha_A = \frac{C_E}{C_m} + \sqrt{\left[ \frac{C_E}{C_m} \right]^2 + \frac{J_c}{J_m}}$
$C_E = 0$ (cupla externa nula)	$\alpha_A = \sqrt{\frac{k_c - J_c \omega^2 + j\omega B_c}{k_m - J_m \omega^2 + j\omega B_m}}$

Nótese que la relación de transmisión calculada mediante (52) es un valor complejo dependiente de la frecuencia. Por razones de realizabilidad corresponderá implementar el valor del módulo de  $\alpha_A(j\omega)$ . Se verifica analíticamente que el valor  $|\alpha_A(j\omega)|$  maximiza el módulo de la función de transferencia aceleración-cupla motriz a la frecuencia angular considerada.

Hasta aquí, se ha operado exclusivamente en el dominio lineal. En condiciones de funcionamiento oscilatorio, resulta lícito emplear aproximaciones de primera armónica en el cálculo de la relación de transmisión con aquellas no linealidades que satisfagan la condición (9). Las (28) en notación fasorial y referidas al eje de carga dan:

$$\Omega_c = j\omega \theta_0; \quad \Gamma_c = j^2 \omega^2 \theta_0;$$

$$\alpha C_m - C_E = (\alpha^2 J_m + J_c) \theta_0 j^2 \omega^2 + (\alpha^2 B_m + B_c) \theta_0 j\omega + (\alpha^2 k_m + k_c) \theta_0 + K_N N_1 \cos(\varphi_1) + j K_N N_1 \sin(\varphi_1) \quad (53)$$

Escribiendo la ecuación de equilibrio de cuplas en función de la aceleración angular y ordenando:

$$\Gamma_c(\omega, \alpha) =$$

$$\frac{-\omega^2 (\alpha C_m - C_E)}{\alpha^2 (k_m - J_m \omega^2 + j\omega B_m) + (k_c - J_c \omega^2 + j\omega B_c) + A(j\omega)} \quad (54)$$

donde se ha designado con  $A(j\omega)$  a la relación:

$$A(j\omega) = \frac{K_N N_1(j\omega)}{\theta_0} = \frac{K_N N_1 [\cos(\varphi_1) + j \sin(\varphi_1)]}{\theta_0}, \quad (55)$$

Maximizando respecto de  $\alpha$ , se llega a:

$$\alpha_A(j\omega) = \frac{C_E(j\omega)}{C_m(j\omega)} + \sqrt{\left[ \frac{C_E(j\omega)}{C_m(j\omega)} \right]^2 + \frac{k_c - J_c \omega^2 + j\omega B_c + \text{Re}\{A\} + j \text{Im}\{A\}}{k_m - J_m \omega^2 + j\omega B_m}} \quad (56)$$

y, siempre por condiciones de realizabilidad física, la implementación de la relación de

transmisión corresponderá al módulo  $|\alpha_A(j\omega)|$  calculado mediante la expresión (56).

Finalmente, no debe perderse de vista que las consideraciones prácticas de implementación de los circuitos de excitación (drivers) de los motores brushless también influyen en la selección de la relación de transmisión, puesto que en definitiva la máxima cupla sostenida que podrá suministrar el motor, dependerá de sus propias restricciones y de la máxima corriente que pueda manejar en régimen continuo su driver. La relación  $\alpha$  deberá ser elegida en consonancia.

## 7.- EJEMPLO APLICATIVO

Sea dimensionar un motor para el control de posición angular de la tobera flexible de un vehículo a propulente sólido. La carga posee los parámetros de la Tabla 2, requiriéndose del servoposicionador  $5^\circ$  de excursión angular máxima,  $30^\circ/s$  de velocidad y  $300^\circ/s^2$  de aceleración angular máxima. Además se especifica una frecuencia mayor o igual a 7.5Hz para el sistema operando en pequeña señal, con una amplitud  $\theta_0=0.5^\circ$ .

Tabla 2 – Caracterización de la carga

Parámetro	Valor
Momento de inercia de la tobera	5.75 kg m <sup>2</sup>
Amortiguamiento de la junta	2650 N m s
Elasticidad de la junta	48500 N m/rad
Fricción seca en la junta	850 N m
Desalineación de empuje	450 N m
Aceleración longit. del vehículo	430 N m/rad
Aceleración lateral del vehículo	60 N m

Con los parámetros y los requerimientos de movimiento especificados se tiene que, en el peor caso, la cupla máxima requerida es de 7048 Nm lo que representa una potencia pico de 3690 Watt.

Para motores de potencias cercanas a los 4kW, se tienen algunos valores típicos:  $J_m = 1.26 \times 10^{-3}$  kgm<sup>2</sup>,  $B_m = 7.16 \times 10^{-4}$  Nms,  $k_T = 1.3$  Nm/A, cupla de arranque continua 13.6 Nm, cupla máxima 33.3 Nm durante 5 s, [8].

La cupla pico requerida por la carga y los límites de cupla continua y máxima que puede suministrar el motor definen el rango de valores

viabiles para la relación de transmisión:

$$\alpha \in [212, 518] \quad (57)$$

Para frecuencias de 5, 7.5 y 10 Hz, reemplazando valores en (56) se obtiene, respectivamente:  $\alpha_A = \{297, 241, 211\}$  lo que conduciría a seleccionar para  $\alpha$  algún valor cercano al límite inferior del intervalo (57).

Para guiar la selección de  $\alpha$  es posible en el presente caso plantear una maniobra que permita alcanzar los límites requeridos: para ello se aplica la aceleración máxima ( $300^\circ/s^2$ ) hasta alcanzar la mitad de la velocidad angular máxima ( $15^\circ/s$ ), continuar por un intervalo a velocidad constante, y luego aplicar nuevamente la máxima aceleración hasta alcanzar simultáneamente la velocidad de  $30^\circ/s$  y la deflexión de  $5^\circ$ .

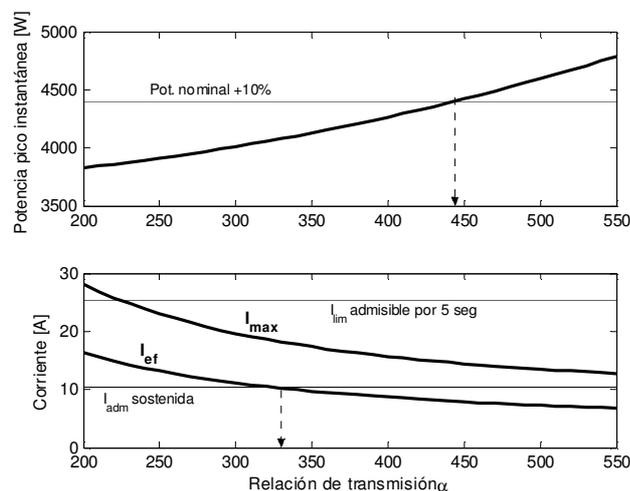


Figura 8. Corriente y potencia eficaz para la maniobra.

Resolviendo la ecuación diferencial de movimiento para la maniobra propuesta y diferentes valores de  $\alpha$  se ha trazado la Fig. 8. Se observa que la corriente eficaz para la maniobra se hace inferior a la corriente máxima de servicio continuo para valores de  $\alpha > 330$ , mientras que para  $\alpha > 445$  la potencia pico supera en más del 10% la potencia nominal seleccionada (4 kW).

En la Fig. 9 se grafica el tiempo requerido para deflectar la tobera  $\theta = 2.5^\circ$  aplicando al motor un escalón de corriente de 10.5 A, que coincide con la cupla de arranque continua admisible:  $10.5 \times 1.3 = 13.65$  Nm. Se observa que con  $\alpha = 450$  se obtiene el tiempo mínimo; admitiendo un 1% de tolerancia, el rango de valores es  $\alpha \in [392, 522]$ . Combinando criterios con

la Fig. 8, se adopta el valor nominal  $\alpha=400$ .

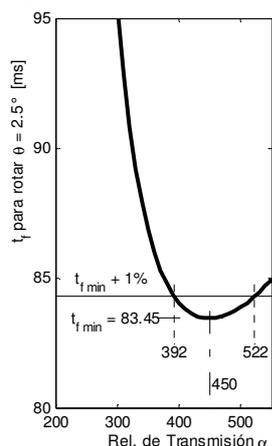


Figura 9. Tiempo para rotar 2.5°

Se verifica a continuación el rango de frecuencias en que puede operar el motor, para la carga y amplitud de oscilación ( $\theta_0 = 0.5^\circ$ ) especificadas, empleando el valor  $\alpha=400$ . En la Fig. 10 se observa que para  $f=10$  Hz, el lugar de funcionamiento del motor permanece por debajo de la hipérbola de 4000 W.

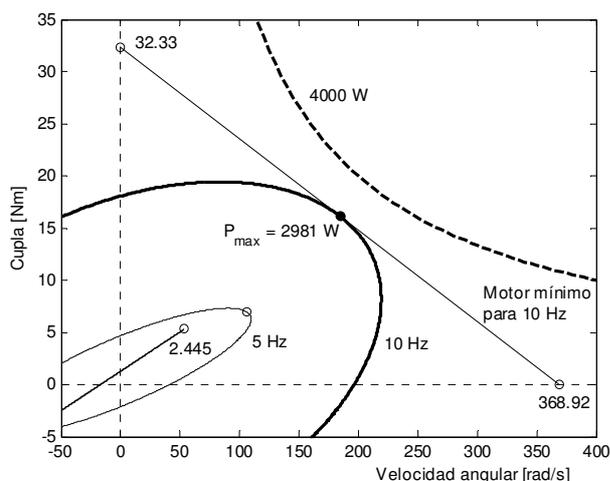


Figura 10. Funcionamiento en régimen oscilatorio.

## 8.- CONCLUSIONES

Puede inferirse que el correcto diseño de un sistema de control de posición utilizando como actuador a un servomotor BLDC, exige no sólo el dimensionamiento del motor, sino también la determinación de la relación de transmisión más adecuada para la condición operativa de carga.

El método de dimensionamiento presentado, basado en el análisis de funcionamiento en oscilación armónica bajo diversas condiciones de

carga mecánica, permite determinar los requerimientos mínimos de cupla, velocidad, potencia mecánica y disipación térmica que han de ser satisfechos (motor mínimo), brindando al proyectista una cota inferior para el diseño o selección del efector, cota sobre la que se aplicarán los factores de seguridad adecuados, además de verificar cualquier otro requerimiento existente.

## AGRADECIMIENTO

Los autores desean manifestar su reconocimiento al colega Ing. Carlos M. Cagliolo, del Centro de Investigaciones Aplicadas – IUA, por la eficaz motivación brindada y las críticas constructivas formuladas al método propuesto.

## REFERENCIAS

- [1] G. Newton, "What size motor for proper operation of servomechanism". *Machine Design*, **22** (11): 125-130, 200-202. 1950.
- [2] J-C Gille, M.J. Pelegrin, P. Decaulne, *Feedback Control Systems – Analysis, Synthesis and Design*, New York: McGraw-Hill, 1959, Cap. 30, págs. 539-568.
- [3] J. Chiasson, *Modeling and High-Performance Control of Electric Machines*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey – 2005.
- [4] J. F. Gieras, M. Wing, *Permanent Magnet Motor Technology*, second edition, Marcel Dekker Inc., New York – 2002.
- [5] NASA, *Selection of Electric Motors for Aerospace Applications*. Preferred Reliability Practice No. PD-ED-1229. Marshall Space Flight Center.
- [6] D. K. Huzel, D. H. Huang, : *NASA SP-125, Design of Liquid Propellant Rocket Engines*. Washington, D. C.: NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION, Scientific and Technical Information Div., Office of Technology Utilization, 1967.
- [7] Matlab es marca registrada de *The MathWorks Inc.*, Natick, Mass., U.S.A.
- [8] Pacific Scientific, *High Performance Servo Motors*. (Catalog). Pag. 4-28. R60 Series Motors. Disponible en [www.pacsci.com](http://www.pacsci.com).