

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA
FACULTAD DE FILOSOFIA Y HUMANIDADES
SECRETARÍA DE POSGRADO**

**Deducción teoremaica y resolución de problemas: la
relevancia de Peirce para la concepción heurística de la
matemática**

Matías Andrés Saracho

**Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Filosofía**

**Directora: Dra. Norma B. Goethe
Co-director: Dr. Luis Adrián Urtubey**

**Abril 2022
Córdoba, Argentina**



Presentación de Tesis FFyH – RDU.

<https://rdu.unc.edu.ar/>

Deducción teoremática y resolución de problemas; Relevancia de Peirce para la concepción heurística de la matemática © 2022 Matías Andrés Saracho.

Distribuido bajo una Licencia CC BY-NC-ND 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Tabla de contenidos

	Página
Indice figuras.....	iv
Lista de abreviaturas.....	v
Resumen.....	vi
I. Introducción.....	1
II. La concepción heurística de la matemática.....	8
2.1. Carlo Cellucci y la matemática como resolución de problemas.....	9
2.1.1. Racionalidad y exploración matemática.....	10
2.1.2. El método analítico.....	13
2.1.3. Problemas como cuestiones abiertas.....	17
2.1.4. La reducción de Hipócrates como ejemplo paradigmático.....	21
2.2. Análisis y representación según Emily Grosholz.....	28
2.2.1. El análisis como búsqueda de condiciones de inteligibilidad.....	29
2.2.2. Isomorfismo y representación científica.....	33
2.2.3. La representación matemática según Grosholz.....	36
III. Irreductibilidad de la representación icónica.....	42
3.1. Similitud e iconicidad.....	43
3.2. El rol de los diagramas geométricos en la resolución de problemas.....	45
3.3. Carlo Cellucci: Diagramas y trayectoria de proyectiles en Galileo.....	49
3.4. Emily Grosholz: Diagramas y estudio del movimiento en Galileo.....	51

3.5.	La dimensión icónica de las notaciones simbólicas.....	55
3.6.	La dimensión icónica de la numeración arábica.....	62
IV.	Peirce y el razonamiento de la práctica matemática.....	69
4.1.	La matemática como el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas...	70
4.2.	Los problemas externos y la invención de hipótesis matemáticas.....	72
4.2.1.	La naturaleza de las situaciones hipotéticas.....	74
4.3.	El carácter observacional y experimental del razonamiento deductivo.....	79
4.3.1.	Razonamiento y evidencia.....	81
4.3.2.	Clasificación de los diagramas.....	83
4.3.3.	Dos divisiones tricotómicas del interpretante.....	89
4.3.4.	Deducción y experimentación diagramática.....	91
4.4.	Las dos actividades comprendidas por la matemática.....	95
4.4.1.	Las definiciones de Benjamin Peirce y Charles Peirce.....	98
V.	Deducción corolaria y deducción teoremática.....	104
5.1.	Deducción corolaria.....	105
5.2.	Deducción teoremática.....	110
5.2.1.	Razonamiento teoremático y razonamiento abductivo.....	114
5.2.2.	Paso teórico, restricciones y creatividad.....	117
5.2.3.	Tipos de pasos teóricos.....	119
5.2.4.	Observación.....	126
VI.	Deducción teoremática y concepción heurística.....	133

6.1. La duplicación del cuadrado, <i>Menón</i> 81c-85d.....	133
6.1.1. La duplicación del cuadrado según el método analítico.....	138
6.1.2. La resolución platónica como un caso de deducción teorema-tica.....	140
6.1.3. Razonamiento matemático y razonamiento deductivo.....	141
6.1.4. Irreductibilidad de la representación icónica en el caso del <i>Menón</i>	145
6.2. Leibniz y la cuadratura aritmética del círculo, la elipse y la hipérbola.....	146
6.2.1. El método de transmutación.....	148
6.2.2. Prueba indirecta del teorema de transmutación.....	150
6.2.3. La prueba indirecta como un caso de deducción teorema-tica.....	152
6.2.4. Deducción teorema-tica y creatividad.....	154
6.2.5. La prueba directa como un caso de deducción teorema-tica.....	156
6.2.6. El razonamiento que subyace al paso teórico.....	158
6.2.7. La influencia de Pascal sobre Leibniz.....	162
VII. Conclusiones.....	169
Bibliografía.....	174

Índice de figuras

	Página
Figura 2.1: Resolución del problema de la duplicación del cubo según el método analítico	23
Figura 2.2: Reducción de Hipócrates.....	26
Figura 3.1: Teorema de Pitágoras.....	46
Figura 3.2: Trayectoria de un proyectil.....	50
Figura 3.3: Movimiento rectilíneo uniforme.....	53
Figura 3.4: Tres representaciones icónicas del número seis.....	63
Figura 3.5: Triángulo aritmético y triángulo armónico según Leibniz.....	66
Figura 4.1: Primera clasificación de los signos de Peirce.....	85
Figura 4.1: Igualdad de los ángulos opuestos a los lados iguales en un triángulo isósceles..	93
Figura 5.1: Suma de los ángulos internos de una figura rectilínea convexa.....	108
Figura 5.2: Suma de los ángulos interiores de un triángulo.....	111
Figura 5.3: Igualdad entre triángulos según Euclides.....	123
Figura 5.4: Teorema de Desargues o problema de los diez puntos.....	124
Figura 5.5: Ángulo exterior y los ángulos interiores opuestos de un triángulo.....	129
Figura 5.6: Falacia cometida por Euclides en la proposición I.16 de los <i>Elementos</i>	130
Figura 6.1: La duplicación del cuadrado según Platón.....	135
Figura 6.2: Teorema de transmutación.....	149
Figura 6.3: Trasmutación de un triángulo en un rectángulo.....	151
Figura 6.4: Método del triángulo característico según Pascal.....	162
Figura 6.5: El triángulo característico según Leibniz.....	165

Lista de Abreviaturas

- CP *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, ocho volúmenes, eds. C. Hartshorne, P. Weiss, A. Burks (Cambridge: Harvard University Press, 1931–60) (vol./párrafo).
- NEM *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*, cuatro volúmenes en cinco, ed. Carolyn Eisele (La Haya, París: Mouton) (vol./página).
- EP *The Essential Peirce: Selected Philosophical Writings*, vol. I (1867–93), eds. N. Houser, C. Kloesel; vol. II (1893–1913), ed. Peirce Edition Project (Indiana: Indiana University Press, 1992, 1998) (vol./página).
- PMSW *Philosophy of Mathematics: Selected Writings*, ed. Matthew E. Moore (Indiana: Indiana University Press, 2010) (página).
- MS[R] Manuscrito identificado por Richard S. Robin en *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce* (Amherst: University of Massachusetts Press, 1967) y “The Peirce Papers: A Supplementary Catalogue” (*Transactions of the Charles S. Peirce Society* Vol. 7, No. 1 (invierno 1971), pp. 37-57) (número de manuscrito).

Resumen

El análisis de procedimientos mediante los cuales el matemático resuelve problemas ha desplazado el análisis de fundamentos en la filosofía de la matemática, motivando una revisión del papel de la lógica como herramienta de análisis. La dificultad principal es su incapacidad para explicar cómo se introducen hipótesis y el uso frecuente de representaciones icónicas. Nuestro propósito es mostrar que la noción alternativa de “deducción teoremaica” de Peirce, permite responder a esas dificultades. Brevemente, la deducción teoremaica requiere, primero, construir un diagrama de las premisas y, luego, experimentar con el mismo hasta visualizar la conclusión. La deducción teoremaica se distingue de la concepción tradicional de la deducción, limitada al análisis del contenido implícito en las premisas del razonamiento. En nuestro trabajo comparamos, por un lado, la perspectiva de Peirce con críticas contemporáneas de la lógica y, por otro, consideramos el estudio de dos casos históricos significativos: la resolución platónica del problema de la duplicación del cuadrado (Menón 81c-85d), y el método de transmutación de curvas que Leibniz propone en *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (1672-1676). A diferencia de la concepción tradicional, Peirce entiende la deducción como el procedimiento que determina lo que sería necesariamente verdadero bajo ciertas hipótesis, lo cual va ligado a su idea de que todo razonamiento matemático es razonamiento deductivo y todo razonamiento deductivo es matemático en tanto involucra aspectos diagramáticos. Según Peirce, la concepción tradicional es limitada, pues no siempre la deducción es meramente explicativa. Peirce encuentra así una solución a la paradoja entre la existencia de auténticos descubrimientos matemáticos y la necesidad de esos resultados. Por otra parte, la noción de deducción teoremaica destaca el rol de representaciones icónicas como modelos de “lápiz y papel” con los que el matemático experimenta para resolver problemas. Este procedimiento de experimentación diagramática es análogo al procedimiento de experimentación con objetos físicos y es allí donde Peirce encuentra la unidad fundamental entre el razonamiento matemático y el razonamiento

científico. La experimentación diagramática es justamente el rasgo distintivo de la deducción teorematizada. La misma es un procedimiento creativo en el que se añaden elementos nuevos que hacen posible resolver un problema. La propuesta de Peirce es una propuesta abierta a una variedad de perspectivas aun por explorar que en todo caso deberá partir del estudio de casos históricos de la práctica investigativa.

I

Introducción

La deducción teorematizada se presenta como un marco conceptual útil para desentrañar el razonamiento mediante el cual el matemático resuelve problemas. La noción se la debemos a Peirce, quien hacia el final de su vida llegó a distinguir entre dos clases de deducción, a saber, corolaria y teorematizada. Esta última distinción se basa en la imposibilidad de determinar todas las consecuencias necesarias de una hipótesis mediante el análisis del contenido que lleva implícito. Así, mientras que la deducción corolaria se reduce a esta operación de análisis, la deducción teorematizada exige procedimientos más ingeniosos. Primero, requiere construir un diagrama de las premisas, y, luego, experimentar con el mismo hasta observar la conclusión. Por lo general, dicho experimento consiste en añadir elementos externos. Pero otras veces toma otras formas. Peirce calificará la distinción entre estas dos clases de deducción como su “primer descubrimiento de importancia acerca de los procedimientos matemáticos” (NEM 4:49).

El planteo anterior cobra relevancia en la medida en que la actividad principal del matemático es la resolución de problemas. Por lo menos así lo plantea Carlo Cellucci (2013) en contraposición a la visión estándar de la matemática. Según la visión estándar, la matemática consiste en derivar teoremas. Dicho de otro modo, el matemático sólo se ocupa de extraer el contenido implícito en un conjunto arbitrario de principios. Pero la matemática, afirma Cellucci, no consiste en derivar teoremas sino en resolver problemas. Así, desde la perspectiva de Cellucci, la actividad del matemático es más compleja. Esto se debe a que la resolución de un problema no se reduce a extraer el contenido implícito en una proposición, sino que además requiere añadir hipótesis externas. Cellucci denomina a esta visión, la concepción heurística de la matemática.

De este modo, Cellucci evoca la idea de una unidad fundamental en los patrones de razonamiento humano, independiente del dominio al cual se aplique. Según esta idea, los procedimientos matemáticos no diferirían sustancialmente de los procedimientos científicos ni de

los procedimientos empleados para resolver cualquier otro tipo de problema. Un ejemplo de estas prácticas que estarían en continuidad con la práctica científica y matemática son aquellas actividades desarrolladas por nuestros antepasados cazadores y recolectores. Según Cellucci:

(E)l conocimiento científico puede ser visto como una extensión de las actividades con las que nuestros antepasados remotos resolvieron sus problemas de supervivencia. Estas actividades, y aquellas que subyacen al conocimiento científico, están basadas en procesos científicos esencialmente similares. Nuestros antepasados cazadores – recolectores resolvían sus problemas de supervivencia haciendo hipótesis acerca de la ubicación de los depredadores o presas basándose en las pistas que encontraban en el ambiente – pastos y plantas aplastados o doblados, ramas torcidas o quebradas, barro fuera de los arroyos, y así sucesivamente. Casi de la misma manera, los científicos resuelven problemas haciendo hipótesis sobre la base de las pistas que encuentran en la naturaleza. (CC 2013, 255)

Del mismo modo, plantea Cellucci, para resolver un problema el matemático formula una hipótesis plausible, que deriva del problema y el conocimiento establecido mediante alguna regla ampliativa de razonamiento. Luego, comprueba si la hipótesis resuelve el problema mediante procedimientos deductivos. Cellucci denomina a este procedimiento general de resolución de problemas, método analítico. El método analítico es el núcleo de la concepción heurística de la matemática.

En este respecto, Cellucci cuestiona la utilidad de la lógica deductiva para iluminar los procedimientos de resolución de problemas matemáticos. La deducción, insiste Cellucci, es meramente explicativa. Únicamente sirve para exponer lo que ya se sabe partiendo de principios y para comprobar si una determinada hipótesis permite resolver un problema. Pero es inútil a la hora de buscar una hipótesis para resolver un problema. La resolución de un problema es un procedimiento ampliativo que exige un cambio de enfoque en la lógica. Esta nueva lógica debería

justamente hacer foco en las “reglas de descubrimiento” mediante las cuales se obtienen hipótesis para resolver problemas.

Pero los planteos críticos de Cellucci contra la lógica no son los únicos. Otros están dirigidos contra sus pretensiones de ser el lenguaje ideal de la matemática. En este respecto se destacan los estudios de Grosholz (2007, 2016). De acuerdo con Grosholz, hay funciones de la representación que superan los límites de un sistema formal. Y sin una representación que desempeñe esos roles el matemático no podría resolver un problema. Por lo general, sostiene Grosholz, el matemático debe combinar diferentes medios de representación para compensar las debilidades que cada uno individualmente posee.

De acuerdo con Grosholz, el matemático no solo busca probar, sino también entender el porqué de los resultados que obtiene. Esto la lleva a reconocer que la actividad matemática tiene como fin la búsqueda de condiciones de inteligibilidad. Esta búsqueda recae en objetos, problemas y procedimientos usados para resolver problemas. En este marco, Grosholz distingue entre dos funciones indisociables de la representación, a saber, denotar y hacer posible la búsqueda de condiciones de inteligibilidad. Puesto que ninguna de estas dos funciones se ejerce independientemente de la otra, las mismas son indisociables. Luego, sobre esta base, Grosholz distingue entre dos formas de denotación, por similitud o icónica y por convención o simbólica. A esto añade que no todas las representaciones son igualmente productivas para resolver un problema. Por el contrario, hay grados de productividad que dependen del problema concreto que se requiere resolver.

En particular, con respecto a las representaciones icónicas, Grosholz obtiene tres notables resultados. El primero es que típicamente las notaciones simbólicas poseen una dimensión icónica. Esta similitud es estructural, no de aspecto. Un ejemplo paradigmático a este respecto es la numeración arábica. Grosholz observa aquí un paralelo entre el sistema de numeración arábica y la notación química de Berzelius, caso investigado por Ursula Klein (2000).

Otro resultado es que las representaciones icónicas de los objetos matemáticos no son una mera copia de esos objetos, sino una representación sesgada que “precipita” regularidades y patrones en los objetos que los vuelven inteligibles. La representación, dice Grosholz, se ubica en una zona de frontera entre “representar” e “intervenir”. Distintas representaciones estructuran de distinto modo el mismo objeto. Y no todas son igualmente productivas. Grosholz compara a este respecto distintas representaciones icónicas de los números naturales y muestra que no todas son productivas. Esta comparación encuentra un paralelo en los diferentes modos de representar las sustancias químicas que competían con la notación de Berzelius.

Finalmente, Grosholz comprueba que mediante una representación icónica es posible crear un modelo del objeto. Como todo ícono, este modelo de “lápiz y papel” ocupa una posición intermedia entre la representación y la intervención. Luego, este modelo puede ser manipulado para obtener nuevo conocimiento. En la medida en que las notaciones simbólicas poseen una dimensión icónica son usadas de este modo. Los ejemplos paradigmáticos para Grosholz a este respecto vuelven a ser la numeración arábiga y la notación de Berzelius.

Nuestro trabajo se propone dos objetivos. El primero es mostrar que la noción de deducción teorema, propuesta por Peirce, captura el razonamiento involucrado en la resolución de problemas matemáticos. Dado que para resolver un problema es necesario introducir hipótesis externas al problema, este razonamiento no es explicativo. Así, la noción de deducción teorema ofrece un marco para el estudio del razonamiento del método analítico.

Por otra parte, este marco abre la posibilidad de distinguir entre problemas matemáticos y problemas empíricos. Esto no es posible desde la perspectiva de un problema como una cuestión abierta. Esta última caracterización alude al estado del conocimiento. Como tal no distingue entre los problemas de nuestros antepasados cazadores y recolectores, y los problemas de la matemática. Por el contrario, la noción de deducción teorema nos permite diferenciar estos problemas. El

rasgo distintivo de los problemas matemáticos es que consisten en determinar las consecuencias necesarias que se siguen de ciertas hipótesis. Sin embargo, debemos observar que estas dos caracterizaciones no son contradictorias.

Del mismo modo, la noción de deducción teoremaica pone en evidencia la unidad fundamental del razonamiento humano, sin dejar de lado las diferencias específicas de los procedimientos matemáticos. Esta diferencia se desdibuja un poco desde la perspectiva de Cellucci. Esa unidad se deriva del carácter observacional y experimental de la matemática. De acuerdo con Peirce “las operaciones sobre diagramas, ya sean externos o imaginarios, ocupan el lugar de los experimentos realizados sobre los objetos reales en la química y la física” (Peirce, 1906, CP 4.530). Aún más, Peirce enfatiza la rica interacción entre matemática y ámbitos extramatemáticos. Pero esta unidad fundamental no equivale a identidad.

El segundo objetivo es mostrar que la noción de deducción teoremaica captura el rol de las representaciones icónicas en la búsqueda de condiciones de inteligibilidad. Desdoblamos este último objetivo en cuatro objetivos específicos. El primero es mostrar que la noción de diagrama captura la dimensión icónica de las notaciones simbólicas. La noción de diagrama compone la noción de deducción teoremaica. El segundo objetivo es mostrar que esta misma noción es coherente con el hecho de que una representación icónica está entre la representación y la intervención. El tercero es mostrar que la noción de deducción teoremaica revela el rol fundamental de la manipulación de representaciones icónicas para resolver problemas matemáticos. En este sentido es posible plantear la irreductibilidad de la representación icónica, tal como defiende Grosholz. Finalmente, el cuarto objetivo es mostrar que una deducción teoremaica no solo prueba los resultados, sino también el porqué de estos resultados.

Con vistas a lograr estos objetivos, primero, exploraremos la coherencia entre las perspectivas de Peirce, Cellucci y Grosholz en torno al razonamiento matemático. Las dos fuentes principales en relación a Peirce serán los *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* (Peirce, 1931-

1958) y *The New Elements of Mathematics* (Peirce, 1976). Luego, a partir de la noción de deducción teoremaica analizaremos dos casos paradigmáticos de la concepción heurística de la matemática, a saber, la resolución platónica del problema de la duplicación del cuadrado (Menón 81c-85d), y el método de transmutación de curvas que Leibniz propone en *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis* (1672-1676).

La importancia de Peirce para desentrañar la naturaleza del razonamiento de la práctica matemática se expresa en las distintas voces que participan del debate contemporáneo. Como antecedentes de nuestro propio trabajo debemos mencionar en primer lugar a Campos (2010). Este autor coincide justamente en señalar que en la “reconcepción de la racionalidad matemática [de Peirce], como una racionalidad que involucra necesariamente el trabajo creativo y experimental de la imaginación, encontramos una nueva perspectiva para un abordaje alternativo al estudio de la inferencia ampliativa en matemática” (p. 133). Del mismo modo, como otro antecedente, podemos mencionar a Carter (2012), quien utiliza la noción de deducción teoremaica para estudiar el rol del razonamiento diagramático en teoría de la probabilidad libre. En otros trabajos la importancia de Peirce se expresa a través de la adopción de conceptos más limitados. Un ejemplo es la adopción de la distinción entre índices, íconos y símbolos. Podemos citar a este respecto los trabajos de Grosholz (2007, 2016), Netz (1999) y Macbeth (2010). Finalmente, la importancia de Peirce se refleja en el debate actual en torno al rol del razonamiento abductivo en la práctica matemática. Aquí podemos citar, entre otros, los trabajos de Magnani y el propio Cellucci, quien argumenta en contra de la utilidad de este concepto.

Nuestro trabajo se divide en tres partes. La primera parte es una descripción general de la concepción heurística. Se concentra en las disquisiciones de Cellucci en torno al método analítico y plantea el encuadre general de Grosholz en torno a la representación (capítulo II). Esta parte también incluye los planteos de Grosholz y Cellucci en torno al rol de las representaciones icónicas

en la resolución de problemas (capítulo III). La segunda parte es una caracterización general de la concepción de la matemática de Peirce y su visión del razonamiento deductivo (capítulos IV y V). Finalmente, la tercera parte, presenta desde la perspectiva de la noción de deducción teorema el análisis de los dos ejemplos paradigmáticos de la concepción heurística. Como ya mencionamos, uno de estos casos es la versión platónica del problema de la duplicación del cuadrado, y el otro es el método de transmutación de Leibniz (capítulo VI).

II

La concepción heurística de la matemática

En las últimas décadas, los filósofos han vuelto a interesarse en el crecimiento y desarrollo de la matemática. Este interés se concentra principalmente en el razonamiento involucrado en la resolución de problemas. Y ha llevado a buscar una interacción fructífera entre filosofía e historia de la matemática. Un signo de la importancia que ha adquirido este enfoque es la creación en 2009 de la *Association for the Philosophy of Mathematical Practice* (APMP), asociación cuyo fin es promover los estudios en esta dirección. En este marco, destacamos los aportes de Carlo Cellucci, profesor emérito de filosofía de la Universidad de Roma, “La Sapienza”, y Emily Grosholz, profesora de filosofía en la Universidad Estatal de Pensilvania.

Contra la visión estándar, Cellucci afirma que la matemática se desarrolla a partir de la resolución de problemas. Así, el método de la matemática no sería el método axiomático-deductivo, sino el método analítico. El punto de partida del método analítico es un problema. Luego, para resolver este problema, primero, es necesario formular una hipótesis plausible, siguiendo alguna regla no deductiva de razonamiento. Y posteriormente, cerciorarse de que la hipótesis permite resolver el problema, mediante algún otro procedimiento, que en el caso de la matemática es deductivo. De este modo, el método analítico pondría en evidencia la unidad fundamental entre los procedimientos matemáticos y científicos.

Por su parte, Grosholz focaliza en el rol fundamental de la representación en el método analítico. Grosholz caracteriza, en primer lugar, el análisis como búsqueda de condiciones de inteligibilidad. Con ello, intenta reflejar el hecho de que los matemáticos no solo buscan probar, sino también entender el porqué de los resultados que obtienen. Al mismo tiempo, observa que nuestro acceso a los objetos matemáticos está mediado por una

representación, que limita los problemas que podemos plantear y resolver. En este marco, comprueba que para resolver un problema es necesario combinar diferentes representaciones de un mismo objeto y apelar al lenguaje natural. Y esto la lleva a plantear que sería equivocado pensar en la lógica como el medio ideal para expresar el razonamiento matemático.

El presente capítulo tiene dos objetivos. El primero es presentar en términos generales el procedimiento de análisis según Cellucci. Y el segundo es introducir a grandes rasgos el marco conceptual en el que se inscriben las investigaciones de Grosholz. En consecuencia el capítulo estará dividido en dos partes, la primera dedicada a Cellucci y la segunda a Grosholz.

2.1. Carlo Cellucci y la matemática como resolución de problemas

La concepción heurística surge en oposición al enfoque fundacionalista que predominó a lo largo del siglo pasado. El enfoque fundacionalista está asociado a dos ideas, estrechamente vinculadas, que aún ejercen influencia. Una es el supuesto de que sólo la justificación del conocimiento es susceptible de un análisis lógico. La otra es la concepción axiomática del método de la matemática. Esta última pone en primer plano las relaciones deductivas entre proposiciones. Ambas, subraya Cellucci, conducen a plantear la imposibilidad de ofrecer un análisis lógico del descubrimiento matemático. Cellucci ve en estos supuestos dos obstáculos que es preciso remover del camino para abrir paso al desarrollo de una concepción racional de este proceso. Comencemos entonces presentando brevemente estos prejuicios para luego ubicar la concepción de la matemática de Cellucci contra este marco de referencia.

2.1.1. Racionalidad y exploración matemática

Un prejuicio muy extendido, según Cellucci, es el de la irracionalidad del descubrimiento matemático. Este prejuicio se expresa de distintos modos. Enumeremos entonces algunos de los modos que Cellucci puntualiza.

En primer lugar, afirma Cellucci, se encuentra la concepción de que el descubrimiento sólo puede ser objeto de estudio de la psicología. Cellucci considera que Frege y Poincaré son los representantes arquetípicos de esta visión. La misma no es otra cosa – según Cellucci – que un resabio del mito romántico del genio. Según la tradición romántica, que Cellucci identifica con Novalis, la solución a un problema no es el resultado de un proceso ordinario de razonamiento, sino un acto prodigioso, fruto de un talento excepcional. Sin embargo, afirma Cellucci, “el mito Romántico del genio está en desacuerdo con los hechos. El descubrimiento no es el resultado de procesos extraordinarios de pensamiento, sino más bien el resultado de procesos ordinarios de pensamiento que producen un resultado extraordinario” (Cellucci, 2017a, p. 136)¹.

En segundo lugar, Cellucci identifica otro obstáculo en sobredimensionar el papel del azar en los procesos de búsqueda. Este prejuicio se trasluce, según observa, en algunas de las concepciones del descubrimiento por serendipia. La serendipia se define como “la facultad de realizar descubrimientos afortunados e inesperados por accidente” (Cellucci 2017a, p. 136). En este caso, Cellucci menciona como ejemplos las concepciones de Crick (1982), Simonton (2004) y Kantorovich (1993). De acuerdo con Cellucci, el fallo de esta visión es desatender el hecho de que el azar sólo juega un rol cuando la mente está preparada y la persona se encuentra receptiva. Por otra parte, advierte Cellucci, si bien algunos descubrimientos pueden

1 “(...) the Romantic myth of genius is at odds with facts. Discovery is not the result of extraordinary thought processes, but rather the result of ordinary thought process that produce an extarordinary outcome” (Cellucci, 2017a, p. 136).

atribuirse a la serendipia este no es el camino más frecuente. No obstante, Cellucci también considera una forma ligeramente distinta de serendipia, cuando en lugar de descubrir lo que se buscaba se descubre otra cosa. Entendida de este modo, nos indica, la serendipia se encuadraría dentro un proceso racional. Y lo mismo ocurre – observa Cellucci – con lo que ha sido llamado “serendipia adicional” (*additional serendipity*) (Gillies 2014), cuando además del resultado buscado se descubre que la misma solución se aplica a otro problema (Cellucci, 2017a, p. 136).

En tercer lugar, Cellucci menciona los embates contra el método, sobre la base de que las violaciones a la razón son un ingrediente necesario para el desarrollo del conocimiento. Como representante de esta posición Cellucci menciona a Feyerabend (1993) (Cellucci, 2017a, p. 139).

Finalmente, Cellucci considera que otro obstáculo es equiparar método con método algorítmico. La comprobación de que no existe un método mecánico que permita ampliar el conocimiento, ha conducido, de acuerdo con Cellucci, a negar la existencia de un método en absoluto. El error de este planteo, según Cellucci, es no ver que el método de descubrimiento es heurístico (Cellucci 2017a, pp. 144-5). Un método heurístico no garantiza el hallazgo de la solución de un problema, pero reduce el espacio de su búsqueda. Directamente ligada a esta concepción, Cellucci ubica la trivialización del descubrimiento matemático a partir del formalismo de Hilbert, donde el descubrimiento queda reducido a la derivación mecánica de teoremas a partir de un conjunto arbitrario de axiomas (Cellucci, 2017a, p. 142).

Otro obstáculo que impide una concepción racional del descubrimiento matemático, según Cellucci, es la concepción axiomática del método de la matemática. Esta concepción se refleja en el orden de presentación de los resultados, en dónde se prioriza la dependencia deductiva entre proposiciones. De acuerdo con Cellucci, Frege sería el representante

arquetípico de esta visión. Frege, nota Cellucci, sostiene que en matemáticas se procede primero, estableciendo un conjunto de axiomas que se declaran explícitamente como tales, con la finalidad de que los fundamentos de la estructura queden completamente a la vista y no permanezca nada oculto. Luego, partiendo de estos axiomas se avanza, derivando los teoremas de la teoría mediante reglas deductivas que también se establecen de antemano (Cellucci, 2000, p. 153).

Esta concepción metodológica representa para Cellucci una “visión cerrada del conocimiento matemático” (Cellucci, 2000). Con respecto a la misma, Cellucci observa que no solo no es incompatible con los resultados limitativos de Gödel, sino que entra en conflicto con la práctica matemática misma. Puntualicemos algunos de los aspectos que Cellucci considera problemáticos con respecto a la concepción axiomática.

En primer lugar, la concepción axiomática no da cuenta, según Cellucci, del origen de muchas áreas de la matemática, que se originan en problemas pertenecientes a otras disciplinas científicas o campos de acción humana. Tanto la elección del vocabulario como de las reglas para formar las expresiones de una teoría se presentan como una elección arbitraria. Y lo mismo ocurre con la elección de los axiomas. El único requisito que se debe satisfacer es que los principios elegidos formen un conjunto consistente y completo.

En segundo lugar, la concepción axiomática no atribuye significado a las expresiones matemáticas. Se considera que las expresiones matemáticas son puramente formales, carentes de todo contenido semántico.

Por otro lado, la concepción axiomática no da cuenta del entrecruzamiento fecundo entre dominios de investigación que se produce durante el desarrollo de un área de la matemática. Según esta visión, cada área de la matemática forma un sistema cerrado. Una vez establecido un conjunto consistente y completo de axiomas, el desarrollo del área se reduce a

hacer explícito lo que ya está contenido de forma implícita en los axiomas, aplicando las reglas de la lógica.

Por último, la concepción axiomática no da cuenta del proceso de cambio conceptual. Si el sistema se muestra inadecuado no es posible corregirlo mediante ajustes parciales sino que es necesario reemplazarlo completamente. Según la concepción cerrada, en matemática, los cambios se producen de forma análoga a como se producen los cambios en una ciudad, dónde viejos edificios son derribados por completo para construir otros nuevos, analogía que Cellucci toma de Poincaré.

Tanto la concepción de que sólo la justificación es susceptible de análisis lógico, como la concepción axiomática del método de la matemática, bloquean, de acuerdo con Cellucci, la posibilidad de una concepción racional y adecuada del proceso de crecimiento y desarrollo de la matemática. Es por ello que el primer paso que da Cellucci para sortear estos obstáculos es la búsqueda de una concepción metodológica alternativa. Y esta concepción alternativa tendrá la función primordial de orientar el estudio del razonamiento matemático más allá de los límites de la lógica formal.

2.1.2. El método analítico

De acuerdo con Cellucci, la matemática se desarrolla alrededor de problemas. Aquí podemos poner como ejemplo la geometría griega, articulada en torno a tres grandes problemas, a saber, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, y la trisección del ángulo (Knorr, 1986). Todos estos problemas, de acuerdo con Cellucci, son continuos con los problemas de otros campos de conocimiento. Y en última instancia se vinculan con los problemas que como organismos necesitamos resolver para sobrevivir (Cellucci, 2013, p. 281).

Una condición suficiente para resolver un problema es encontrar una hipótesis plausible de la cual se deduzca la solución. Por ejemplo, si el problema es demostrar una relación expresada en un teorema geométrico, para resolver el problema basta encontrar una hipótesis de la cual la relación se deduzca. Ahora bien, dado que frecuentemente las hipótesis no están contenidas en el problema, la búsqueda de una hipótesis, como plantea Cellucci, se debe basar en patrones no deductivos de inferencia. Cellucci llama a estos patrones “reglas de descubrimiento”. Por otra parte, para explicar esta hipótesis es necesario formular otras hipótesis, las que a su vez se transformarán en nuevos problemas, y así sucesivamente. De este modo, la resolución de un problema es un proceso siempre inconcluso.

Cellucci encuentra un antecedente de esta concepción de la matemática en la formulación platónica del método analítico (Menón 81c-85d). En su formulación el método analítico es el método de acuerdo con el cual:

to solve a problem, we look for some hypothesis that is a sufficient condition for solving the problem. The hypothesis is obtained from the problem, and possibly other data already available, by some non-deductive rule (such as induction, analogy, metaphor, and so on) and must be plausible, that is, the arguments for the hypothesis must be stronger than those against it. Then we deduce the solution to the problem from the hypothesis. But the hypothesis is in turn a problem that must be solved, and is solved in the same way (...). And so on, ad infinitum. Thus solving a problem is a potentially infinite process. (Cellucci, 2017b, p. s. d.)

El método analítico es el núcleo de lo que Cellucci a veces denomina como la concepción heurística de la matemática. Puntualicemos algunos de los caracteres específicos concepción heurística.

(1) Hipótesis. Cellucci admite que hay distintas clases de hipótesis, incluyendo objetos matemáticos y proposiciones referidas a esos objetos (Cellucci, 2013, p. 36). Estas hipótesis se articulan no sólo de forma lingüística sino también a través ecuaciones, diagramas, gráficos, etc., i. e., medios de representación no lingüísticos, los cuales a su vez pueden ser objeto de investigación científica (Cellucci, 2013, p. 36).

(2) Búsqueda de hipótesis mediante reglas de inferencia no deductivas. Según Cellucci, la búsqueda de hipótesis sigue patrones no deductivos de inferencia. El punto de partida es el problema bajo consideración y alguna otra información disponible. Entonces, partiendo del problema se infiere no deductivamente una hipótesis. Cellucci caracteriza una inferencia como una transición gradual de datos orientada a un propósito:

(L)as inferencias deben ser concebidas en términos de transiciones de datos a datos (...). Por supuesto, existen varios tipos de transiciones de datos a datos (...). Cuáles de ellas puedan ser consideradas como inferencias, depende de la finalidad de las reglas de inferencias. (Cellucci, 2013, p. 271)

Cellucci divide las inferencias en dos grandes grupos: ampliativas y no ampliativas. En una inferencia no ampliativa, la conclusión contiene información ya contenida en las premisas, mientras que, en las ampliativas, esta información excede a la de las premisas. Dado que esta información puede ser representada a través de distintos medios, además de las inferencias lingüísticas, la búsqueda de hipótesis se apoya en inferencias no lingüísticas. Por otra parte, una inferencia puede ser inconsciente. Como hemos mencionado, Cellucci denomina a los patrones de inferencia en los que se basa la búsqueda de hipótesis “reglas de descubrimiento”. Estas reglas son heurísticas, en el sentido de que su función es reducir el espacio de búsqueda de una solución (Cellucci, 2013, p. 236). Entre las reglas citadas se encuentran, en primer lugar, la inducción y la analogía. Y a estas Cellucci añade otras como

la metonimia, definición y diagramas, a las cuales considera como las reglas de inferencia más comunes. Según Cellucci, estas reglas forman un conjunto que se van ampliando con el desarrollo de la disciplina.

(3) La matemática es un sistema abierto. Desde la perspectiva de la concepción heurística de la matemática, la matemática se presenta como un sistema abierto, donde con frecuencia para resolver un problema es necesario poner en relación racional dominios de investigación dispares (Cellucci, 2000, p. 10).

(4) Plausibilidad. Como resultado de los teoremas de incompletud de Gödel, Cellucci propone abandonar el ideal de un rigor absoluto en favor de la plausibilidad. Cellucci entiende este concepto en un sentido similar al concepto aristotélico de “*endoxa*” (Cellucci, 2017a, p. 110). La plausibilidad de una hipótesis se determina evaluando los argumentos a favor y contra la hipótesis. Si los argumentos a favor son más fuertes o superan a los argumentos en contra, entonces la hipótesis es plausible. Es importante subrayar que determinar la plausibilidad de una hipótesis "implica operaciones que van más allá de la mera formación de hipótesis" (Cellucci, 2013, p. 331). Esas operaciones están contenidas en una prueba que permite excluir aquellas hipótesis que impliquen consecuencias contradictorias o que no resulten favorecidas en el balance de razones a favor y en contra. Esta prueba se resume en tres pasos, según Cellucci:

- (a) Deduce conclusions from the hypothesis.
- (b) Compare the conclusions with each other, in order to see that the hypothesis does not lead to contradictions.
- (c) Compare the conclusions with other hypotheses already known to be plausible, and with results of observations or experiments, in order to see that the arguments for the

hypothesis are stronger than those against it on the basis of experience. (Cellucci, 2013, p. 56)

Un ejemplo de esta prueba es el debate en torno al uso de cantidades infinitamente pequeñas en geometría. Estas hipótesis, dice Cellucci,

were controversial, Leibniz and Newton gave arguments for them, while others, such as Nieuwentijdt, Gassendi, and Berkeley, gave arguments against them. But, by evaluating the arguments for and against the hypotheses, the mathematical community eventually concluded that the arguments for them were stronger than those against them. Therefore, the mathematical community accepted the hypotheses as plausible, and considered plausible the solutions to problems deduced from them. (Cellucci, 2020, p. s. d.)

Finalmente notemos que dado que nueva información puede modificar el balance de razones, el resultado de esta prueba nunca es definitivo (Cellucci, 2020, p. s/d).

2.1.3. Problemas como cuestiones abiertas

Cellucci (2017) ha enmarcado su defensa del método analítico en la larga controversia mantenida en torno a la importancia relativa de problemas y teoremas en la geometría antigua. Los geómetras griegos distinguieron consistentemente en sus tratados entre estos dos tipos de proposiciones. Pappus incluso distinguió entre tres clases de proposiciones: teoremas, problemas y porismos. Desde entonces los comentaristas han debatido acerca de cuál de estas dos categorías es la más fundamental. Comencemos entonces haciendo un breve repaso por esta disputa para ver cómo, a partir de ella, Cellucci caracteriza su propio modelo de la matemática.

Desde un punto de vista formal, un problema se expresa como un imperativo, de acuerdo con el cual, se requiere construir un determinado término geométrico en una relación

específica con otros términos geométricos (Knorr, 1986, p. 348). Un ejemplo que podemos citar para ilustrar esta noción de problema es la proposición I.1 de los *Elementos* de Euclides. La misma requiere construir un triángulo equilátero, dado un segmento de recta. Un teorema, en cambio, es un enunciado condicional en el que se afirma que determinada configuración geométrica posee una propiedad específica (p. 348-9). En este caso podemos citar como ejemplo la proposición I.5 de los *Elementos*, que afirma que los ángulos comprendidos entre la base y los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

Otra diferencia entre teoremas y problemas es que por lo general un problema tiene como resultado la construcción de una única figura, mientras que un teorema expresa un conjunto de propiedades relativas a una clase completa de objetos (Knorr, 1986, 349). Notemos de paso que ciertos problemas sólo pueden ser resueltos cuando se cumplen ciertas condiciones. Estas condiciones se expresan en un diorismo. El mismo, puede ser objeto de un teorema incluido antes del problema, o aludiendo a esa misma condición en la resolución del problema (Knorr, 1986, 349). Finalmente, cuando un problema admite varias soluciones, este problema se expresa como un teorema o como un problema de *locus*.

Dado que un problema puede ser expresado como un teorema, y un teorema puede ser expresado como un problema, manteniéndonos dentro una perspectiva formal, la distinción entre teoremas y problemas es en gran medida artificial (Knorr, 1986, p. 348). Ahora bien, de acuerdo con Pappus, aquellos comentaristas de inspiración platónica, considerando que el objeto de la matemática es eterno e inmutable, creyeron más apropiado llamar a todas las proposiciones teoremas. El representante arquetípico de esta posición es Espeusipo. Por otra parte, aquellos comentaristas más estrechamente vinculados a la práctica matemática, consideraron más apropiado llamar a todas las proposiciones problemas. El representante arquetípico de este punto de vista es Menecmo (Knorr, 1986, p. 351).

Con respecto a la estructura de los textos, la mayoría de los comentaristas y especialistas, tanto antiguos como modernos, han mantenido que en la sistematización de los resultados, los problemas se encuentran subordinados a los teoremas. En este orden sistemático, la función de los problemas es asegurar la existencia de los objetos necesarios para demostrar los teoremas (Knorr, 1986). Sin embargo no todos los especialistas coinciden. Knorr, por ejemplo, encuentra evidencia de una relación de subordinación contraria. En primer lugar, de acuerdo con Knorr, hay problemas que parecen poseer un interés intrínseco. En este caso, sólo se demuestran los teoremas necesarios para su resolución. Knorr menciona los libros IV y XIII de los *Elementos* como ejemplos paradigmáticos de este tipo de subordinación de teoremas a problemas. Otro ejemplo para Knorr es el tratamiento por parte de Pappus del problema de la trisección del ángulo. Finalmente, Knorr observa que incluso en el libro I de los *Elementos*, la validez de muchos teoremas no depende de los problemas, mientras que por el contrario, la resolución de los problemas se apoya de forma recurrente en los teoremas (Knorr, 1986).

Contra el punto de vista estándar, la conclusión a la que arriba Knorr a partir del análisis textual es que el interés principal de la práctica geométrica griega se encontraba en la resolución de problemas, en el sentido formal que hemos mencionado al comienzo. Mientras que la mayor parte de las veces, la demostración de teoremas desempeñaba un rol secundario subordinado a esa actividad. En términos de Knorr: “la resolución de problemas fue la parte esencial de la empresa geométrica marcada por los trabajos de Euclides, Apolonio, y aquellos en su tradición, y (...) para ellos la compilación de cuerpos de teoremas era un esfuerzo subordinado a esta actividad” (Knorr, 1986)².

2 “(...) problem solving was the essential part of the geometric enterprise marked off by the works of Euclid, Apollonius, and those in their tradition, and that for them the compilation of bodies of theorems was an effort ancillary to this activity” (Knorr, 1986).

Ahora bien, veamos cómo, de acuerdo con Cellucci, se ubica la concepción heurística de la matemática en el marco de esta controversia en torno a la relación entre los distintos tipos de proposiciones geométricas. Según Cellucci, la controversia pone de manifiesto un enfrentamiento de fondo entre dos concepciones opuestas de la matemática, enfrentamiento que se retrotrae a la disputa entre Platón y Aristóteles con respecto al método de la matemática. Mientras que de un lado, Platón defiende que el método de la matemática es el método analítico, Aristóteles sostiene, del otro, que el método de la matemática es el método axiomático. Lo que equivale a afirmar, según Cellucci, que para Platón el matemático fundamentalmente resuelve problemas, mientras que para Aristóteles sólo demuestra teoremas (Cellucci, 2017b).

Notemos que en este nivel de la controversia las nociones de problema y teorema no son las mismas que antes mencionábamos. En este contexto, un teorema es una proposición derivada deductivamente de un conjunto consistente y completo de proposiciones. Por el contrario, un problema es algo desconocido que se busca conocer, “una pregunta abierta” (Goethe & Friend, 2010, p. 278), ya sea una relación que requiere ser probada o una construcción que aún no sabemos cómo efectuar. Así, un teorema desde el punto de vista formal también es un problema en este último sentido. Considerados desde el punto de vista del desarrollo de la investigación, los teoremas son un resultado, aquello a lo que se llega a partir de los principios de una teoría. Mientras que los problemas son un punto de partida.

De acuerdo entonces con la concepción “aristotélica”, el matemático se limita a exhibir el contenido implícito en principios que adopta arbitrariamente. En contraposición, la resolución de un problema requiere la búsqueda de hipótesis plausibles, no contenidas en el problema, y de las que se derive la solución. Por lo tanto, desde una perspectiva “platónica” la actividad matemática es un proceso mucho más complejo, que incluye tanto movimientos

deductivos como no deductivos. El contraste entre ambas concepciones, para Cellucci, no puede ser más marcado. La concepción aristotélica no deja lugar para la novedad, excepto en un sentido psicológico. Y reduce la actividad matemática a un procedimiento cuasi mecánico dentro de un sistema cerrado. Por el contrario, desde una perspectiva platónica, la actividad matemática es una actividad expansiva y creativa. Más aún, dada la utilidad que poseen para la resolución de un problema los vínculos con otros problemas y otros dominios de investigación, la matemática se presenta como un sistema abierto.

Ahora bien, la práctica matemática lejos de limitarse al desarrollo de lo que ya está contenido en una serie de principios que se establecen de antemano, se centra mayormente en la resolución de problemas. Por lo tanto, la identificación del método de la matemática con el método axiomático no resulta apropiada. Por el contrario, la concepción platónica del método parece dar cuenta con mayor exactitud del modo efectivo en el que procede la investigación y ofrecer una explicación plausible de los sorprendentes descubrimientos que la matemática ofrece. En la práctica, la axiomatización casi siempre es una tarea posterior, que se emprende cuándo se desea pulir o limpiar y sistematizar los resultados obtenidos. Su función principal es la de ordenar lo que ya se posee, por ejemplo, con propósitos expositivos o pedagógicos. Pero, raramente se identifica con el método de descubrimiento o exploración matemática.

2.1.4. La reducción de Hipócrates como ejemplo paradigmático

Cellucci utiliza varios casos de la geometría griega como ejemplos paradigmáticos del método analítico. En particular, el problema de la duplicación del cubo ocupa un lugar significativo a este respecto. Este problema, también conocido como problema de Delos o de las dos medias proporcionales, es uno de los problemas que más atrajo a los geómetras antiguos (Knorr, 1986, p. 1). El problema fue abordado entre otros por Hipócrates de Quíos (fl. ca. 440 a. C.), a quien se atribuye el mérito de haber descubierto que para duplicar un

cubo basta con encontrar las dos medias proporcionales en proporción continua entre dos líneas dadas. Y en esta forma reducida el problema fue abordado después de Hipócrates. Por otra parte, la estrategia empleada por Hipócrates sirvió de modelo para la invención de la técnica del análisis como método de resolución de problemas, método que luego formulará Platón.

Nuestro conocimiento de las fases tempranas de la resolución del problema de la duplicación del cubo proviene de dos reportes derivados de Eratóstenes de Cirene (siglo III a. C.). Uno de ellos es un fragmento del diálogo Platónicus, cuyo autor es el mismo Eratóstenes. Este fragmento ha sido preservado por Teón de Esmirna en *Sobre las matemáticas utilizadas para el entendimiento de Platón* y por Plutarco en *Moralia*, ambos textos del siglo II. El otro reporte es una carta dirigida por Eratóstenes a Ptolomeo III Evergetes, en la que Eratóstenes presenta un instrumento para obtener medias proporcionales de su propia invención, llamado mesolabio. Esta carta ha sido preservada por Eutocio de Ascalon (siglo VI) junto a otros once textos sobre el problema, en su comentario a la obra de Arquímedes, “*Sobre la esfera y el cilindro*”. Dicha carta posee un valor documental de excepcional importancia para nuestro conocimiento de la historia del problema (Knorr, 1986, pp. 17-24).

Aunque originalmente el problema pudo haber sido planteado en los términos específicos de duplicar un cubo, se sospecha que pronto pudo haber adquirido una forma generalizada, a saber, dado un cubo encontrar un cubo en la misma razón que un par de líneas dadas (Saito, 1995, p. 120). No obstante, el problema siguió llamándose duplicación del cubo y Cellucci elige esta forma particular del problema para ilustrar el método analítico.

De acuerdo con Cellucci,

(...) to solve this problem, Hipocrates of Chios states the following hypothesis:

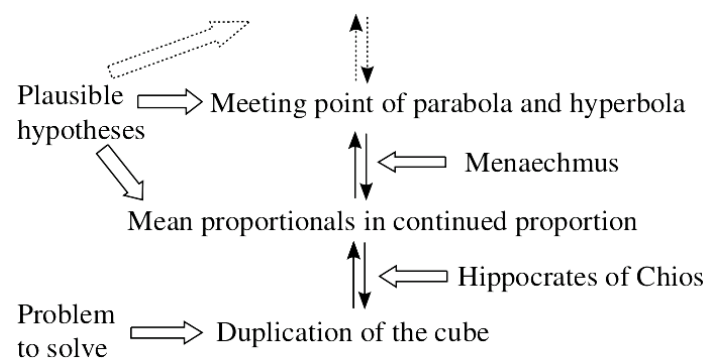
(A) Given any two straight lines, a and b , we can always find two other straight lines, x and y , which are the mean proportional in continued proportion between a and b , that is $a:x = x:y = y:b$.

Hypothesis (A) is a sufficient condition for solving the problem. For, by (A), for any given straight lines a and b , we can find two other straight lines, x and y , such that $a:x = x:y = y:b$. Then $(a:x)^3 = (a:x)(x:y)(y:b) = (a:b)$. For $b = 2a$ this yields $(a:x)^3 = 1:2$, hence $x^3 = 2a^3$, that is, a cube double of the given cube of side a . Thus “the cube will be doubled.” This solves the problem. (Cellucci, 2013, p. 59)

Esta hipótesis, sigue Cellucci, plantea un nuevo problema, el cual fue abordado por varios geómetras posteriores. Entre ellos Menecmo, quien ofreció una solución basada en la intersección entre una parábola y una hipérbola³. Pero esta nueva hipótesis “es a su vez un problema que debe ser resuelto. Y así, *ad infinitum*” (Cellucci, 2013, p. 60, Figura 2.1).

Figura 2.1

Resolución del problema de la duplicación del cubo según el método analítico



Nota. En el diagrama, las flechas ascendentes representan inferencias no deductivas, las flechas descendentes, inferencias deductivas, y las flechas superiores, el ascenso infinito de hipótesis (Cellucci, 2013, p. 60).

3 Esta solución podría haber sido otra, tal como atestiguan las diferentes soluciones preservadas por Eutocio (Knorr, 1986, pp. 50-66).

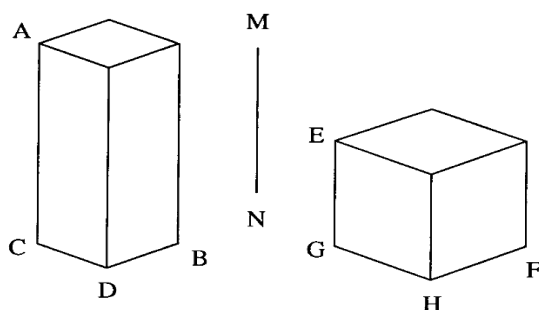
Esta reconstrucción nos muestra dos aspectos del procedimiento de resolución del problema en conformidad con el método analítico. En primer lugar, la reconstrucción nos muestra que la dirección en la que se desarrolla la práctica es “hacia arriba”, desde un problema hacia una serie potencialmente infinita de hipótesis, cada una de las cuales no está contenida en el problema bajo consideración. En contraposición al método de exposición, en el desarrollo de un campo de investigación, los problemas preceden a los axiomas. Recién con posterioridad el conocimiento puede ser ordenado en un sistema axiomático. En segundo lugar, la reconstrucción pone de relieve que la hipótesis es una condición suficiente para resolver el problema, en tanto que la solución se deriva deductivamente de la hipótesis. Sin embargo, esta reconstrucción pasa por alto el modo en el que Hipócrates llegó a la hipótesis (A). Cellucci simplemente sugiere que Hipócrates pudo haber obtenido la hipótesis a partir de algún tipo de inferencia no deductiva, basada en el problema y el conocimiento disponible, pero no da más detalles.

No obstante, el hecho de que Cellucci justifique que la hipótesis (A) es una condición suficiente para resolver el problema, pero no muestre cómo Hipócrates redujo el problema, no es una omisión sólo de Cellucci. Esta omisión también está presente en las fuentes históricas (Saito 1995, p. 120). Aún más, el argumento ofrecido por Cellucci para justificar (A) es una reconstrucción posterior que apela a nociones que no estaban disponibles en la época de Hipócrates, como las de razón triple (*triplicate ratio*) y “composición de razones (*compounding of ratios*), siguiendo la línea de argumentación planteada por Diocles, Pappus y Filópono para justificar la reducción (Saito, 1995, p. 121).

Dado este vacío, Ken Saito (1995) ha intentado rellenar esta laguna ofreciendo una reconstrucción de los pasos que pudo haber efectuado Hipócrates, o alguno de sus predecesores inmediatos. Nosotros podemos aprovechar la reconstrucción histórica de Saito

para completar nuestro ejemplo del método analítico y sacar algunas conclusiones en relación a la capacidad de este modelo para explicar la práctica matemática. La reconstrucción de Saito se basa en el análisis de la estructura argumentativa de los libros VI, XI y XII de Euclides. Este análisis le permite a Saito obtener una visión aproximada del conocimiento y los métodos que se empleaban en la época de Hipócrates para determinar la razón entre figuras. Sobre esta base, Saito plantea que Hipócrates pudo haber abordado el problema de la duplicación del cuadrado con la misma técnica con la que Arquímedes aborda el problema de encontrar una esfera igual a un cono o un cilindro dados (*Sobre la esfera y el cilindro*, II.1). Ambos problemas se reducen a encontrar las dos medias proporcionales en proporción continua entre dos líneas dadas, similitud que motivó a Eutocio a introducir un recuento histórico del problema en su comentario a la obra de Arquímedes. Saito denomina esta técnica “reducción a una razón lineal” (*reductio to linear ratio*) y argumenta que la misma pudo ya haber sido profusamente empleada por los geómetras contemporáneos de Hipócrates, estimando que su aparición no pudo haberse demorado hasta más allá de primera mitad del siglo V a. C.

Basado en este análisis, Saito propone una formulación alternativa del problema de Hipócrates: dado un prisma rectangular AB con base cuadrada BC , construir un cubo EF igual a AB (Figura 2.2). Puesto que, para construir un prisma rectangular en una razón arbitraria con respecto a un cubo, basta con tomar como base un cuadrado igual a la base del cubo, y una altura en la misma razón con respecto a la altura del cubo que la razón buscada; la solución de la forma alternativa del problema claramente implica la solución del problema original. Planteado de este modo, el problema es análogo al problema abordado por Arquímedes. Y es en esta forma que el problema pudo haber sido evidente para Hipócrates (Saito, 1995, p. 122).

Figura 2.2*Reducción de Hipócrates*

Nota. La figura ilustra un problema equivalente, a saber, encontrar un cubo igual a un prisma dado (Saito, 1995, p. 134).

Veamos cómo Saito reconstruye los pasos dados por Hipócrates siguiendo la reducción que ofrece Arquímedes del problema análogo (*ibid.* pp. 134-5). Notemos que a la derecha están citados los supuestos que podrían haber sido admitidos por Hipócrates según la reconstrucción. La mención a los lugares que ocupan estos supuestos en la sistematización posterior de Euclides, sólo se hace a los fines de identificarlos.

Asumamos el problema resuelto, supuesto,

$$\text{cuadr}(CB):\text{cuadr}(GF) = EG:AC, \text{ de 1 por } \textit{Elementos XI.34}^4,$$

$$\text{cuadr}(CB):\text{cuadr}(GF) = GH:AC, \text{ de 2 por definición de cubo, sustitución.}$$

Sea MN una línea tal que $\text{cuadr}(GF) = \text{rect}(CD, MN)$, supuesto,

$$\text{cuadr}(CB):\text{cuadr}(GF) = \text{cuadr}(CB):\text{rect}(CD, MN), \text{ de 4 sustitución,}$$

$$\text{cuadr}(CB):\text{rect}(CD, MN) = CD:MN, \textit{Elementos VI.1}^5,$$

$$CD:MN = GH:AC, \text{ de 3, 5 y 6 por noción común 1,}$$

4 Proposición XI.34: “In equal parallelepipedal solids the bases are reciprocally proportional to the heights; and those parallelepipedal solids in which the bases are reciprocally proportional to the heights are equal” (Heath, 1908, vol. 3, p.345).

5 Proposición VI.1: “Triangles and parallelograms which are under the same height are to one another as their bases” (Heath, 1908, vol. 2, 191).

$CD:GH = MN:AC$, de 7,

$CD:GH = GH:MN$, de 4 por *Elementos* VI.16⁶,

$CD:GH = GH:MN = MN:AC$, de 8 y 9 por noción común 1.

Esta reconstrucción histórica del razonamiento seguido por Hipócrates nos permite rellenar la laguna dejada por Cellucci en la presentación de este caso. Ahora bien, esta reconstrucción nos ofrece una imagen algo distinta a la planteada por el modelo de la práctica matemática propuesto por Cellucci. En la reconstrucción de Saito vemos que el camino que conduce desde el problema hasta la hipótesis es el camino inverso del camino que conduce desde la hipótesis hasta el problema. Por el contrario, en la formulación de Cellucci los dos caminos difieren sustancialmente entre sí, ya que el primero es no deductivo y el segundo es deductivo. Puntualmente, de acuerdo con Saito:

- (a) Hipócrates formula de un problema equivalente.
- (b) Asume que el problema ha sido resuelto.
- (c) Introduce la línea MN tal que el cuadrado GF es igual al rectángulo CD, MN .
- (d) Deduce la hipótesis (A) apoyado en la figura y a partir del conocimiento establecido y los supuestos anteriores.

Por lo tanto, dadas estas discrepancias no resulta claro si es posible compatibilizar estas dos visiones.

Por otra parte, de acuerdo con Cellucci, Hipócrates resolvió el problema introduciendo la hipótesis (A). Dado que de ella se deriva la solución, esta hipótesis, afirma Cellucci, es una condición suficiente para resolver el problema. Sin embargo, Eratóstenes no consideraba que Hipócrates hubiera resuelto el problema, sino simplemente reducido un

6 Proposición VI.16: “If four straight lines be proportionals, the rectangle contained by the extremes is equal to the rectangle contained by the means; and if the rectangle contained by the extremes be equal to the rectangle contained by the means, the four straight lines will be proportional” (Heath, 1908, vol. 2, p. 221).

problema a otro. Aún más, de acuerdo con Eratóstenes, Hipócrates convirtió “el problema en otro problema, no menor” (Eutocius, 2004, p. 294)⁷. Y esta misma visión, ya era compartida entre los geómetras contemporáneos de Hipócrates (Knorr, 1986, p. 24). Sin embargo, en conformidad de con la concepción de Cellucci de la matemática como un sistema abierto, la reducción fue fructífera, en el sentido de que permitió poner la teoría de proporciones a disposición de la resolución del problema (Knorr, 1986, p. 24).

Estos desacuerdos entre el modelo de la práctica matemática y la reconstrucción histórica de este caso de estudio nos llevan a preguntarnos si no es necesario revisar algunos aspectos de la concepción heurística. En nuestro trabajo intentaremos mostrar que la concepción diagramática de la deducción ofrecida por Peirce nos ofrece una alternativa en este sentido. Pasemos ahora a los aportes de Grosholz que consideramos relevantes para nuestro trabajo.

2.2. Análisis y representación según Emily Grosholz

Del mismo modo que Cellucci, Emily Grosholz se concentra en el razonamiento mediante el cual el matemático resuelve problemas. En este marco, Grosholz plantea la importancia que tiene estudio de la representación para desentrañar dicho razonamiento. Este estudio es fundamental porque nuestro acceso a la realidad matemática siempre está mediado por una representación (Grosholz, 2007, p. 47). Y esta representación determina el entendimiento de objetos, problemas y soluciones (*ibid.*, p. 20).

Grosholz vuelca los resultados de estas investigaciones en dos obras. La primera es *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences* (2007). En la misma, Grosholz declara que su propósito principal es “hacer plena justicia al rigor especial

7 “(...) Hippocrates of Chios was the first to realize that, if it is found how to take two mean proportionals, in continuous proportion, between two straight lines (of whom the greater is double the smaller), then the cube shall be doubled, so that he converted the puzzle into another, no smaller puzzle” (Eutocius, 2004, p. 294).

del razonamiento matemático y científico” (*ibid.*, p. xi), y pone en evidencia que “such rationality is more inclusive and multifarious than philosophers of mathematics have admitted during the past century” (*ibid.*, p. xi). El otro trabajo es *Starry Reckoning: Reference and Analysis in Mathematics and Cosmology* (2016). En este otro trabajo, Grosholz profundiza los estudios anteriores y vuelve a remarcar que su objetivo principal es entender “¿qué sucede cuando el razonamiento no solo ordena lo que sabemos, sino que añade a lo que sabemos?” (*ibid.*, p. xiii).

2.2.1. El análisis como búsqueda de condiciones de inteligibilidad

Además del interés por el razonamiento ampliatorio, Grosholz comparte con Cellucci la concepción de la matemática como una actividad de resolución de problemas. Ahora bien, dado que el matemático no solo busca un resultado, sino también entender por qué lo obtiene, Grosholz caracteriza esta práctica como “búsqueda de condiciones de inteligibilidad” (Grosholz, 2007, p. 33). En este marco distingue entre tres formas de análisis, diferenciadas por su objeto, a saber, análisis de términos, análisis de proposiciones y análisis de argumentos. Dado que el objeto del análisis de proposiciones es un problema en el sentido restringido que asignaban los griegos a ese concepto; y que la reducción de Hipócrates ilustra esta forma de análisis; en esta sección solo nos ocuparemos del análisis de términos y del análisis de argumentos.

La concepción de Grosholz del análisis de términos alude a la noción de objeto inteligible. De acuerdo con Grosholz, ser inteligible es existir y ser una totalidad unificada, en contraposición a una mera concatenación de partes. Aunque inmediatamente aclara que “hay diferentes modos en los que las cosas pueden existir” y que “hay diferentes modos en los que las cosas pueden (...) estar unificadas” (Grosholz, 2007, p. 34). Grosholz además observa que los objetos inteligibles son expresables y son problemáticos. “Las cosas inteligibles conducen

ellas mismas a relaciones de analogía y pueden estar en lugar de otras cosas” (*ibid.*, p. 34)⁸. Pero “la conciencia de cosas inteligibles (...) puede estar lejos de un entendimiento completo” (*ibid.*, p. 34). Sobre esta base, el análisis de los términos puede ser descrito como “la búsqueda de las razones o causas, los requisitos, que son necesarios para que una cosa sea pensable y posible, para que sea lo que es” (*ibid.*, p. 33)⁹.

Este análisis toma distintas formas, según nos indica Grosholz. En el caso de la matemática, esta búsqueda consiste en hacer explícito el modo en el que el todo constriñe las partes (Grosholz, 2007, p. 33). Los *Elementos* de Euclides brindan una buena ilustración de esta forma de análisis, de acuerdo con Grosholz. Por ejemplo, encontramos esta ilustración en el libro I, concentrado en el triángulo y en los libros III y IV, concentrados en el círculo. En estos libros,

(...) problems have to do with the way the whole of the figure constrains its parts, imposing an ordered relationship upon them: how a right triangle constrains its sides, and how a circle constrains its diameter and circumference, as well as the angles inscribed within it. (Grosholz, 2007, p. 36)

El análisis de términos procede de lo complejo y problemático a lo simple y explicativo. Este es un “proceso histórico de descubrimiento y reflexión”, que Grosholz denomina “experiencia matemática” (Grosholz, 2007, p. 39). En el mismo ciertos objetos adquieren un estatus especial, en la medida en que prueban ser condiciones de inteligibilidad de otros objetos. Y, por lo tanto, prueban ser más simples que aquellos a los que ellos mismos

8 “My position is that to be intelligible is to exist and to be one, though there are different ways in which things can exist and be unified; it is also to be expressive intelligible things lend themselves to relations of analogy and may stand for other things. Moreover, against Descartes, I note that awareness of intelligible things, even ‘simple’ intelligible things, may be far from complete understanding, for intelligibility is not transparency: intelligible things are problematic and must be investigated” (Grosholz, 2007, p. 34).

9 “If we take the notion of term as primary, it is the search for the reasons or causes, the requisites, that are necessary for a thing to be thinkable and possible, to be what it is” (Grosholz, 2007, p. 33).

contribuyen a entender. Grosholz denomina a esos objetos “objetos canónicos” (*ibid.*, p. 39). La canonicidad no es una condición intrínseca de un objeto, sino que se revela en el curso del análisis (*ibid.*, p. 39).

Volviendo a Euclides, Grosholz refiere a la canonicidad del triángulo, subrayando su rol preponderante como condición de inteligibilidad del círculo:

Book IV makes use of a series of results in Book III that show how the circle constrains the angles we may inscribe inside them; these results are often presented in terms of triangles, particularly right triangles, one of whose sides is a diameter of the circle. (Grosholz 2007, 38)

Finalmente, refiriéndose a la línea, el triángulo, el círculo y la esfera, Grosholz observa que la canonicidad de estos objetos “era evidente 2500 años atrás, y el tiempo no ha disipado su canonicidad, sino solo revelado explicaciones más profundas de ello, y nuevos usos para ellos” (Grosholz, 2007, p. 40).

Habiendo descrito el análisis de términos, pasemos ahora al análisis de argumentos. Grosholz caracteriza el análisis de argumentos como una forma de análisis que prioriza la generalidad sobre la abstracción. El análisis de argumentos consiste en “la exploración del significado de procedimientos, algoritmos, y métodos en términos de problemas paradigmáticos que pueden ser usados para exhibir su corrección, clarificar su dominio de aplicación, e indicar cómo ese dominio puede ser extendido” (Grosholz, 2007, p. 34)¹⁰. La caracterización de Grosholz de esta forma de análisis parte de la interpretación de Karine Chemla de la matemática china antigua.

10 "If we take the notion of argument as primary, analysis is the exploration of the meaning of procedures, algorithms, and methods in terms of paradigmatic problems that may be used to exhibit their correctness, clarify their domain of application, and indicate how that domain can be extended" (Grosholz, 2007, p. 34).

Karine Chemla (2003) ha propuesto una lectura alternativa del *Los Nueve Capítulos sobre los Procedimientos Matemáticos* que pone en evidencia la preferencia por esta forma de análisis en la matemática china antigua. Este texto, compilado alrededor del siglo I de nuestra era y la fuente más antigua que llega a nosotros a través de los copistas, ocupa, con respecto a la matemática china antigua, un lugar análogo a los *Elementos* de Euclides con respecto a la matemática griega. contra la lectura estándar, Chemla muestra que el texto no es una mera compilación de problemas concretos, sino que los nueve problemas que lo componen se exhiben a fin de exponer la generalidad de los procedimientos y algoritmos involucrados en su resolución. Estos problemas desempeñan el rol de paradigmas en el mismo sentido que se habla de paradigmas en la lingüística. El significado de estos problemas concretos se revela a la luz de los comentarios que fueron añadiéndose a lo largo de todo un milenio, desde el siglo III. Por lo que, el texto es inescindible de estos comentarios.

En contraste con la geometría griega, argumenta Chemla, en la matemática china antigua la generalidad era considerada como un valor epistémico superior a la abstracción. Pero esta primacía de la generalidad sobre la abstracción no se circunscribe a la geometría china antigua. Chemla también ha identificado esta misma preferencia en los trabajos de Lazare Carnot, Jean-Victor Poncelet, Joseph Gergonne y Michael Chasles, en la geometría del siglo XIX. Por su parte Anne Robadey (2004) ha encontrado la misma preferencia en los trabajos sobre geodésicas de las superficies convexas y mecánica celeste de Poincaré. Y de acuerdo con Grosholz, en los libros de texto sobre la topología del siglo pasado aún conviven en una relación dialéctica enfoques que priorizan la abstracción sobre la generalidad, donde la presentación histórica a través de problemas va de la mano con la presentación axiomática. A este respecto Grosholz concluye que “ambas aproximaciones, en tándem, son necesarios para educar a los estudiantes que quieren investigar en topología” (Grosholz, 2007, p. 46).

2.2.2. *Isomorfismo y representación científica*

Una parte importante del análisis de Grosholz de la representación matemática se concentra en los límites de la noción de isomorfismo. Este análisis encuentra un paralelo en los planteos críticos de Robin Hendry contra la posibilidad de reducir la representación científica a una relación de isomorfismo. Dado que Grosholz sigue muy de cerca estos planteos, en esta sección nos ocuparemos de ellos. Luego, en la sección siguiente, focalizaremos en el propio análisis de Grosholz.

Hendry distingue entre dos componentes indisolubles de la representación: denotación y éxito (*success*). El primer componente es la relación que vincula a un objeto como la representación de otro objeto. El segundo es una propiedad que responde a algún criterio comparativo, tal como la precisión o la fidelidad, de acuerdo con el cual una representación resulta más o menos satisfactoria desde el punto de vista de la práctica científica. Este criterio puede admitir grados de satisfacción o ser un criterio absoluto que sólo puede ser satisfecho en su totalidad. El mismo desempeña un rol análogo al de la verdad en semántica (Hendry & Psillos 2007, p. 141). Ninguno de estos dos elementos, subraya Hendry, puede ser suprimido de la representación científica. Por un lado, en las ciencias empíricas la representación requiere necesariamente algún criterio de éxito representacional. Y por otro, la determinación del logro de una representación implica la existencia de una relación previa de denotación. “Para usar el frecuentemente parafraseado precepto kantiano, el éxito representacional sin denotación es ciego, mientras que la denotación sin éxito representacional es vacía” (Hendry & Psillos 2007, p. 142)¹¹.

Ahora bien, Hendry plantea que relaciones estructurales, como la de isomorfismo, no explican por sí solas ni la denotación ni el éxito representacional. Con respecto a la

11 “To use the oft-paraphrased kantian precept, representational success without denotation is blind, whereas denotation without representational success is empty” (Hendry & Psillos 2007, p. 142).

denotación, Hendry reitera dos de los argumentos que Nelson Goodman (1972, 1976) dirige contra la noción de similitud. El primero es que todo se parece a todo en alguna medida, por lo que la representación supone un entendimiento previo de que elementos se corresponden entre sí. Es decir, la denotación supone elementos convencionales que permiten diferenciar las similitudes relevantes. El otro argumento es que la relación de semejanza es reflexiva y simétrica, mientras que la representación es irreflexiva y asimétrica. Por lo tanto, tampoco desde este punto de vista la denotación puede reducirse a una relación de isomorfismo. Pero mientras que Goodman considera inútil la relación de similitud para explicar la representación, Hendry considera que la representación científica no puede reducirse a relaciones de denotación, sino que cierto grado de éxito representacional es necesario (Hendry & Psillos 2007, pp. 142-3).

Por otra parte, tampoco se puede explicar el éxito representacional apelando únicamente a relaciones estructurales. Por un lado, porque siempre puede conseguirse el isomorfismo estructural de forma estipulativa. Por lo tanto, la adecuación empírica de una teoría se reduciría a una cuestión puramente convencional, lo que resulta absurdo. Hendry aclara que este es el mismo problema planteado por M. H. A. Newman (1928) al estructuralismo de Russell. Por otro lado, Hendry observa que desde un punto de vista estructural, dos modelos referidos a diferentes campos de la realidad pero idénticos estructuralmente resultan indiscernibles. Por lo tanto, la relación de isomorfismo por si sola no permite distinguir cual es el dominio de aplicación del modelo. Hendry cita como ejemplos los modelos del movimiento periódico de un péndulo y del ciclo económico (Hendry & Psillos 2007, pp. 143-4).

Los mismos problemas enfrentan las demás variantes del estructuralismo, entendido en un sentido fuerte, en las que la noción de isomorfismo es remplazada por alguna otra

relación estructural, como la de “integración” (*embeddability*) (van Fraassen), “similitud” (*similarity*) (Giere) o “verdad parcial” (*partial truth*) (da Costa y French) como criterio de éxito (Hendry & Psillos 2007, 141). Por lo tanto, ni la denotación ni el éxito representacional puede ser explicado reemplazando la relación de isomorfismo por alguna otra relación estructural.

Para resolver estos problemas, observa Hendry, debemos observar que la representación científica es inseparable del contexto lingüístico y las tradiciones de representación, históricamente situadas, en la que este contexto se inscribe:

To dissolve the Newman problem, we note that equations are offered not in isolation, but in conjunction with text or speech. This linguistic context is what determines their denotation, and serves to make representation a determinate, non-stipulative relation that may admit of (degrees of) non-trivial success and failure. Natural languages like English, French or German equip their speakers with abilities to refer to their surroundings, and we can understand how equations can represent if they borrow reference from this linguistic context. In a physics paper, equations are accompanied and motivated by text written in a specialist sub-language-like physics-German, physics-English, or physics-French-which is as much part of (the particular presentation of) the claims being made using the equations as are any preceding equations. The particular historical and material context of a language within which a theoretical discourse is pursued is what endows it with reference, and reference can be passed on to other media (like equations) which become entwined in that discourse. When equations are introduced, a mathematical entity like a vector comes to represent a physical quantity like an electric or magnetic field strength, and that particular relation-instance of representation is no more mysterious than, and is determined in

precisely the same way as, the reference of the words 'electric field strength'. (Hendry 2001, p. 227)

2.2.3. La representación matemática según Grosholz

De acuerdo con Grosholz, tampoco en matemática es posible reducir la representación a una relación de isomorfismo. Grosholz encuentra que en este ámbito se aplican los mismos argumentos que Hendry plantea respecto a la representación científica. Así, partiendo de argumentos similares, llega a la conclusión que la representación matemática es indisoluble del uso en un contexto histórico de resolución de problemas. Este uso determina que cosa ocupa el lugar de una representación y de que modo este objeto denota aquello que representa. Y del mismo modo que en las ciencias, en matemática los roles de representación y objeto pueden invertirse, o un mismo elemento puede ser utilizado para denotar de distinto modo en diferentes contextos:

A representation that is symbolic with respect to one kind of thing may become iconic with respect to another kind of thing depending on context (...). Whether, or to what extent, a representation is iconic or symbolic cannot be read directly off the representation, but must take into account the discursive context—the context of use. (Grosholz 2007, p. 127)

Siguiendo a Hendry, Grosholz afirma que este uso está determinado por tradiciones de representación, que regulan el modo de representar los objetos dentro de un contexto de investigación. Las tradiciones de representación limitan y organizan la práctica. De acuerdo con Hendry, en las ciencias empíricas “el uso de diagramas y modelos son gobernados por tradiciones de representación visual en evolución” (Hendry 2007, p. 138). Del mismo modo, sostiene Grosholz, “las notaciones matemáticas y las figuras pertenecen a tradiciones de representación que severamente constriñen que puede ser puesto en la página, cómo las

marcas pueden ser ubicadas cerca de otras marcas, y cuál es el significado que ellas pueden tomar” (Grosholz 2007, p. 50)¹².

Las tradiciones de representación, añade Grosholz, no solo determinan la forma en la que se representan los objetos problemáticos de la matemática sino que estas tradiciones emergen en el curso de la resolución de los problemas y adquieren caracteres específicos a partir del desarrollo de esta actividad. Para explicar la relación dialéctica que se da entre tradiciones de representación y resolución de problemas, Grosholz plantea una analogía entre el derecho anglosajón (*common law*) y la matemática, basándose en la interpretación que propone Catherine Kemp (2002) del concepto de experiencia de Hume en relación con la filosofía del derecho. Por un lado, Grosholz establece un nexo entre la clase de pericia especializada que posee el matemático y que los estudiantes adquieren en distinto grado, a la cual denomina experiencia matemática, y la experiencia formal de la ley que poseen abogados y jueces, y por otro, vincula las tradiciones de representación, con los usos legales establecidos (*customs*). En analogía con el derecho anglosajón, la experiencia matemática es la experiencia acumulada de los matemáticos que prueban y revisan objetos canónicos, problemas, procedimientos, métodos, y una variedad de modos de representación, mediante su aplicación a la resolución de problemas particulares. Mientras que, la experiencia matemática es constreñida por tradiciones de representación, estas tradiciones de representación, como los usos establecidos de la ley, son un efecto de la experiencia matemática y perduran en tanto hacen posible la resolución exitosa de nuevos problemas.

The effect of mathematical experience (a succession of canonical items, problems, procedures and methods, expressed in traditions of representations and associated

12 “(...) mathematical notation and figures belong to traditions of representation that severely constrain what may be put on the page, how marks may be set next to other marks, and what meanings they may take on” (Grosholz 2007, p. 50).

‘combinatorial spaces’) is to establish customs that organize and limit the work of mathematicians. The customs that stabilize mathematical practice, recorded in textbooks and scholarly journals, are also the conditions under which custom or belief is subsequently altered in mathematical experience. (Grosholz 2007, p. 58)

Grosholz observa que típicamente en el contexto de uso se combinan distintas tradiciones de representación (cita). Y el modo en el que estas tradiciones se combinan es expresado mediante el lenguaje natural. Por lo tanto, es el contexto material e histórico, en el cual el lenguaje se encuentra inmerso, el que dota de referencia a una representación.

The know-how that lets human beings interpret symbolic and iconic representations, combine them, and apply them to problems within mathematics and to physical reality, for example, resists formalization. This is one reason why formal modes of representation must be surrounded by natural language that explains their significance. (Grosholz 2007, p. 51)

Ahora bien, continua Grosholz, la representación exitosa de los objetos matemáticos tampoco puede reducirse a una relación puramente estructural. En este respecto se aplican nuevamente las consideraciones de Hendry con respecto a la representación científica. Pero además, porque el rol de la representación es “el descubrimiento y la resolución exitosa de problemas acerca de objetos problemáticos, objetos heterogéneos de muchas clases diferentes” (Grosholz 2007, p. 24)¹³. O como lo expresa aludiendo a la indisociabilidad entre denotación y éxito representacional: “el discurso científico y matemático productivo debe llevar a cabo dos diferentes tareas en tándem: un análisis o búsqueda de condiciones de inteligibilidad (cosas) y resolubilidad (problemas); y una estrategia para lograr una referencia

13 “(...) the successful discovery and solution of problems about problematic things, heterogeneous things of many different kinds” (Grosholz 2007, p. 24).

exitosa, la indicación clara y pública de qué es aquellos acerca de lo cual estamos hablando” (Grosholz, 2016, p. 1)¹⁴.

En este sentido, dos representaciones estructuralmente isomórficas pueden ser diferentes desde el punto de vista de la resolución de un problema. A este respecto Grosholz cita como ejemplo las fórmulas de Berzelius. De acuerdo con Grosholz:

The use of Berzelian formulas (the familiar formulas like H₂O used by chemists) was crucial to the swift advance of organic chemistry in the mid-nineteenth century, not because it was ‘more isomorphic’ to experimental patterns recorded in the laboratory than notations preceding it, but because it enjoyed a useful, meaningful iconicity, ambiguity, and algebraicity. (Grosholz 2007, p. 22)

Por otra parte, Grosholz observa que la representación no es un reflejo pasivo de un objeto, sino que supone la selección de determinados aspectos y la omisión de otros, una forma particular de organización, etc., todas acciones creativas que determinan el modo en el que un objeto se presenta. En este punto, Grosholz reitera nuevamente argumentos de Goodman:

A representation A of an entity B is not merely a denotation of it, but also creatively describes and classifies it as such-and-such. Representation (...) is not a matter of passive reporting (...). Rather, representation involves organization, invention, and other kinds of activity. (Goodman, 1976, citado por Grosholz 2007, p. 22)

Aún más, Grosholz advierte que no hay una representación perfecta, sino que distintas representaciones capturan diferentes aspectos del objeto de estudio. Por lo tanto, “que representaciones tengamos a nuestra disposición y como las combinamos determina como

¹⁴ "(...) productive scientific and mathematical discourse must carry out two distinct tasks in tandem: an analysis or search for conditions of intelligibility (things) and solvability (problems); and a strategy for achieving successful reference, the clear and public indication of what we are talking about” (Grosholz, 2016, p. 1).

podemos formular y resolver problemas, distinguir ítems y articular procedimientos, suministrar evidencia en argumentos y ofrecer explicaciones” (Grosholz 2007, 25)¹⁵.

Las consideraciones anteriores explican porque la resolución exitosa de problemas típicamente involucra el uso de múltiples modos de representación, icónicos, simbólicos e indexicales combinados de distintas maneras y rodeados de lenguaje natural. Grosholz identifica tres modos en los que las representaciones se combinan: superposición, yuxtaposición, unificación. La unificación permite incluso explotar la ambigüedad de forma productiva. En este caso, un mismo signo refiere icónicamente a objeto y simbólicamente a otro. Como resultado aumenta nuestro entendimiento de los problemas y de los objetos involucrados. Esta última forma de combinar distintas representaciones constituye el foco de muchas investigaciones de Grosholz.

Conclusión

En este capítulo no concentramos en las principales contribuciones de Carlo Cellucci y Emily Grosholz al estudio del razonamiento de la práctica matemática.

Primero focalizamos en el modelo de la práctica matemática propuesto por Cellucci. Según este modelo, la matemática es fundamentalmente una actividad de resolución de problemas. Dichos problemas se resuelven usando el método analítico. El método analítico es el método según el cual para resolver un problema primero es necesario formular una hipótesis. Esta hipótesis se deriva del problema y otra información disponible mediante alguna regla no deductiva de razonamiento. Luego se comprueba si la hipótesis es plausible. Y finalmente, si a partir de ella es posible derivar la solución. Este método es el mismo que

15 “(...) which representations we have at our disposal and how we combine them determines how we can formulate and solve problems, discern items and articulate procedures, supply evidence in arguments and offer explanations” (Grosholz 2007, 25).

originariamente formula Platón en *Menón* (81c-85d). Aunque con anterioridad ya era utilizado por matemáticos y médicos.

En segundo lugar, focalizamos en el análisis de la representación matemática de Grosholz. Este análisis parte del hecho de que el matemático busca determinar las condiciones de inteligibilidad de objetos, problemas y procedimientos usados para resolver esos problemas. En este marco, Grosholz plantea que la búsqueda de condiciones de inteligibilidad siempre está delimitada por una representación de los objetos a los que se refiere esa búsqueda. Esta representación cumple dos funciones, denotar y hacer posible la resolución de un problema. Ahora bien, puesto que, ninguna representación puede ejercer eficazmente esas dos funciones, para resolver un problema es necesario utilizar un conjunto heterogéneo de representaciones. Señalamos este resultado como una de las conclusiones más importantes de Grosholz. El mismo explica por qué el matemático utiliza diferentes tipos de representaciones y por qué el lenguaje natural es insustituible.

III

Irreductibilidad de la representación icónica

El uso de diagramas y otras formas icónicas de representación es intrínseco a la práctica matemática. Sin embargo, este uso quedó por mucho tiempo excluido de la reflexión filosófica. Este abandono se suele explicar por la conjunción de dos tesis. Por un lado, la distinción entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación, que limita la epistemología a la justificación del conocimiento. Por otro, la idea de que una prueba sólo es rigurosa cuando está libre de imágenes. Estas últimas, según se argumenta, pueden ocultar errores. Por lo tanto, una prueba basada en imágenes no es fiable. Así, no se niega, por ejemplo, que los diagramas puedan servir para descubrir o facilitar la comprensión. Pero dado que el ideal de prueba rigurosa los excluye, no se consideran de interés filosófico.

El primer ataque contra esta concepción provino de la revisión de la supuesta falta de rigor del razonamiento basado en diagramas. Esta revisión se inicia con los trabajos de Barwise y Etchemendy (1996). Sin embargo, la misma no toma en cuenta el rol de los diagramas en la práctica matemática. Y sigue anclada en una concepción axiomática del método de la matemática. Afortunadamente, otros ataques han sido lanzados desde enfoques que sí toman en cuenta la práctica matemática y unen reflexión filosófica e historia de la matemática. Al respecto, podemos destacar los intentos de elucidar el rol de los diagramas en la geometría griega. Podemos citar como ejemplos los trabajos de Netz (1999), Manders (2008), Macbeth (2010), Mumma (2010) y Panza (2012). A los mismos se suman los intentos de analizar el rol de los diagramas en la matemática contemporánea. Podemos citar en este caso los trabajos de Chemla (1998), Grosholz (2007), Carter (2010), Starikova (2010, 2012), Toffoli y Giardino (2014, 2015) y Cellucci (2019). Finalmente, debemos mencionar entre las

posiciones críticas contra la posición estándar el trabajo de Giaquinto (2008), que vincula reflexión filosófica y ciencia cognitiva.

Este capítulo se concentra principalmente en las contribuciones de Grosholz al estudio de la iconicidad en el razonamiento matemático, aunque en menor medida, también contempla el análisis de Cellucci. Está dividido en seis secciones, que giran en torno al carácter específico de la iconicidad en matemática y su rol en la resolución de problemas. La primera trata sobre la noción de iconicidad que emerge de los distintos estudios de caso abordados por Grosholz. La segunda se enfoca en el rol de los diagramas en la geometría clásica según Grosholz. La tercera y cuarta analizan el rol de los diagramas en la investigaciones de Galileo sobre el movimiento, según las perspectivas de Grosholz y Cellucci. La quinta trata sobre el análisis de Ursula Klein sobre el uso de las notación de Berzelius en la química orgánica del siglo XIX. Y finalmente, la quinta sección de ocupa de la dimensión icónica del sistema de numeración arábica, según Grosholz. Este último caso pone en evidencia que las conclusiones de Klein con respecto a la notación de Berzelius se aplican a la matemática.

3.1. Similitud e iconicidad

Según la distinción estándar un ícono es una representación basada en la similitud, mientras que un símbolo es una representación basada en una convención. En conformidad con esta distinción, Grosholz afirma que “algunas representaciones matemáticas son icónicas, esto es, capturan la imagen y se parecen a lo que ellas representan; otras son simbólicas y representan por convención, sin mucho parecido” (Grosholz, 2007, p. 25)¹⁶. Grosholz menciona los diagramas euclídeos como un caso de representación icónica y las ecuaciones

16 “Some mathematical representations are iconic, that is, they picture and resemble what they represent; some are symbolic and represent by convention, without much resemblance” (Grosholz, 2007, p. 25).

polinómicas de la geometría cartesiana como un caso de representación simbólica (*ibid.*, p. 25).

Ahora bien, las notaciones simbólicas también pueden tener una dimensión icónica. La similitud no se reduce a una similitud pictórica. Una representación icónica también puede denotar un orden similar. “Las representaciones icónicas no necesitan ser imágenes de objetos con forma, aunque por supuesto a veces lo son; también pueden ser representaciones que exhiben el orden que hace a algo ser lo que es”¹⁷ (Grosholz 2007, 266). Como veremos en las dos secciones finales, la notación química de Berzelius y la numeración arábica ejemplifican este tipo de iconicidad.

Por otra parte, similitud no es identidad. Un ícono presenta distorsiones, subraya ciertos aspectos en detrimento de otros, representa la idealización de un objeto, etc.

Icons are also supposed to have a strong resemblance to what they represent.

However, all icons are unlike as well as like what they represent: if an icon perfectly reproduced the thing it represented, then either it would simply be that thing and therefore not a representation, or it would violate the principle of the identity of indiscernibles—and therefore (if we agree with Leibniz) wouldn’t exist (...).

Representative icons distort, abridge, and idealize; they call attention to their status as representations (in contrast to the thing represented) and hence their metaphorical ambiguity; they exhibit ‘style’ referable to their author or cultural context. (Grosholz 2007, 97)

En este respecto, un ícono es como una “máquina nomológica” (Grosholz, 2007, p. 65). Este concepto fue introducido por Nancy Cartwright (1999) para referirse a “una disposición (suficientemente) fija de componentes, o factores, con capacidades

17 “Iconic representations need not be pictures of things with shape, though of course they often are; they may also be representations that exhibit the orderliness that make something what it is” (Grosholz 2007, 266).

(suficientemente) estables que en la clase correcta de ambiente (suficientemente) estable dará lugar, mediante operaciones repetidas, a la clase regular de comportamiento que representamos en nuestras leyes científicas” (Cartwright, 1999, p. 50)¹⁸. Dos ejemplos paradigmáticos de Grosholz en este sentido vuelven a ser la notación de Berzelius y la numeración arábiga. Puntualmente, la numeración arábiga precipita una estructura periódica mediante la cual es posible contar y operar con los números. A su vez, esta estructura exhibe patrones y simetrías que son la base del planteo y la resolución exitosa de problemas.

3.2. El rol de los diagramas geométricos en la resolución de problemas

Simbolicidad e íconicidad son dos dimensiones que típicamente coexisten en una representación matemática. Una representación puede ser predominantemente simbólica o predominantemente icónica, pero “todos los íconos tienen una dimensión simbólica, así como todos los símbolos tienen una dimensión icónica; y todas las representaciones hasta cierto punto organizan, ordenan y muestran” (Grosholz, 2007, p. 25)¹⁹.

Este es el caso de los diagramas geométricos. De acuerdo con Grosholz, en la geometría clásica los diagramas representan icónicamente la forma (*shape*) de una figura geométrica particular y, simbólicamente, el concepto bajo el cual cae la figura. Un ejemplo, es el diagrama de la la proposición 1.47 de los *Elementos*, que contiene el teorema de Pitágoras (Figura 3.1). Dicho diagrama “denota un triángulo recto específico, que puede presentarse como una representación de todos los triángulos rectos porque su manejo

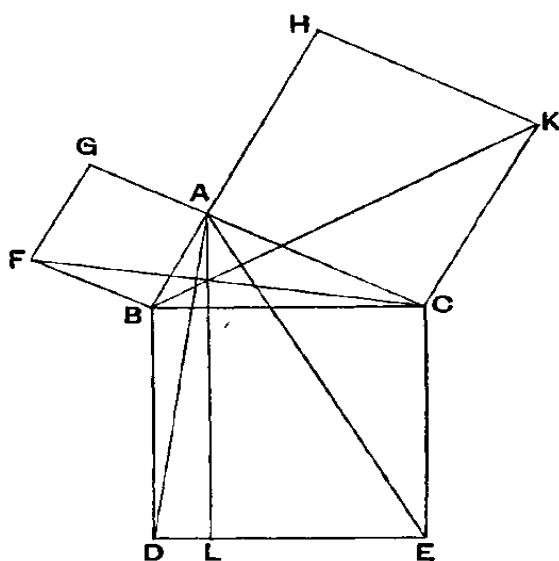
18 “(...) a fixed (enough) arrangement of components, or factors, with stable (enough) capacities that in the right sort of stable (enough) environment will, with repeated operation, give rise to the kind of regular behaviour that we represent in our scientific laws” (Cartwright, 1999, p. 50).

19 “(...) all icons have a symbolic dimension, as all symbols have an iconic dimension; and all representations to a certain extent organize, order, and display” (Grosholz, 2007, p. 25).

simbólico no hace uso de sus características peculiares, características que lo distinguen de cualquier otro triángulo” (Grosholz, 2007, p. 163)²⁰.

Figura 3.1

Teorema de Pitágoras



Nota. Euclides, *Elementos*, libro 1, proposición 47 (Heath, 1908, p.349).

Ahora bien, dando por sentada la ambigüedad de un diagrama geométrico, concentrémonos en su función icónica ¿Qué denota en su calidad de ícono el diagrama y qué rol cumple esta representación en el razonamiento según Grosholz? Como dijimos, el diagrama denota icónicamente una instancia particular de una forma (*shape*) geométrica. Esta forma, nos dice Grosholz, es una extensión delimitada (*bounded extension*). En nuestro ejemplo, los límites son los lados, los vértices y los ángulos internos del triángulo rectángulo representado en el diagrama de la proposición 1.47. Dicha forma, insiste Grosholz, es irreducible o heterogénea con respecto a sus partes (Grosholz, 2007, pp. 36-7). Dicho de otro

20 “(...) denotes a specific right triangle, which can stand as a representative of all right triangles because its symbolic handling does not make use of any of its peculiar features, features that distinguish it from other right triangles” (Grosholz, 2007, p. 163).

modo, cambios en una parte de la figura repercuten en el resto de la figura que se modifica para preservar su integridad.

The right triangle in Proposition 47, the Pythagorean Theorem, is then presented as caught in a web of constraints pictured by the auxiliary constructions that surround it, and which include not only the squares built upon its sides but a series of parallelograms and triangles within them. These constraints show that no matter how we perturb a right triangle, it will always be the case that ‘the square of the side subtending the right angle is equal to the (sum of the) squares on the sides containing the right angle. (Grosholz, 2007, p. 37-8)

Así, en su función icónica, un diagrama exhibe una forma irreducible. Aún más, un ícono es el único medio para exhibir, no solo denotar, la irreducibilidad de la forma. Esta es la razón por la cual la representación icónica en muchos casos es indispensable (Grosholz, 2007, pp. 55, 186, 262).

Dicho sea de paso, aquí podemos observar lo mismo que Grosholz subraya con respecto a la representación de los números naturales, y de la cual nos ocuparemos en la última sección: “(...) la representación no puede ser explicada meramente en términos de *tókenes* físicos, ni siquiera en los casos más simples” (Grosholz, 2007, p. 263)²¹. Un diagrama no se reduce a una serie de trazos sobre el papel, sino que la interpretación de esos trazos como la representación de un objeto inteligible es una parte constitutiva del diagrama.

Veamos ahora qué función cumple este ícono en el razonamiento según Grosholz. Antes que nada debemos notar que el problema planteado en la proposición 1.47 ejemplifica el análisis de términos. El problema gira en torno a las condiciones de inteligibilidad del triángulo. En consecuencia, requiere determinar cuáles son las restricciones que impone la

21 “(...) representation cannot be explained in terms of merely physical tokens, even in the very simple cases” (Grosholz, 2007, p. 263).

figura sobre sus partes. En términos de Grosholz, lo que se busca es “descubrir qué hace a una forma, la forma que es: cuáles son los requisitos para que un triángulo recto sea un triángulo recto (...)?” (Grosholz, 2007, p. 36)²².

En este contexto, Grosholz recurre a Poincaré (1952) y su caracterización de la inducción matemática para explicar la función icónica del diagrama. De acuerdo con Poincaré la inducción es un razonamiento que va de lo particular a lo general. El mismo consiste en comprobar que una misma conclusión se aplica a todos los casos que caen bajo una misma descripción general (Poincaré, 1952, p. 9 y sigs.). Así, según Grosholz,

[T]he diagram exhibits, and must exhibit, this right triangle in order to show that the theorem hold for any right triangle. Due to the irreducibility of shape, in order to denote *this* right triangle we have to present a shape; due to the nature of mathematical induction, the anchor case must be exhibited in its particularity in order to generate what Poincaré calls the *cascade* of other cases (...). The diagram does in fact successfully and correctly help to exhibit the relation between the squares on the legs of the triangle and the square of the hypotenuse; there is nothing misleading about its contribution to the proof. The diagram, the symbolic notation of ratio and proportion, and the explanatory natural language that links them, provide a combination that leads to a satisfactory proof of the problem. (Grosholz, 2007, p. 55)

En síntesis, como ícono la función del diagrama es mostrar que la tesis del teorema es verdadera cuando la hipótesis es verdadera. Esta función es la base de un proceso inductivo. Por otra parte, este proceso requiere fijar la referencia de hipótesis, una función que desempeña el diagrama en su calidad de símbolo.

22 “(...) seeks to discover what makes a shape the shape it is: what are the requisites for a right triangle to be a right triangle (...)?” (Grosholz, 2007, p. 36).

3.3. Carlo Cellucci: Diagramas y trayectoria de proyectiles en Galileo

De acuerdo con Cellucci, diagramas y símbolos "stand for another thing which is associated with it" (Cellucci 2013, p. 357). Al igual que Grosholz, Cellucci apela al concepto de similitud para definir un diagrama. De acuerdo con Cellucci, los diagramas a diferencia de los símbolos poseen cierta similitud (*likeness*) con aquello que representan. Cellucci llama inferencia diagramática (*diagramatic inference*) al razonamiento que explota la similitud entre un diagrama y el objeto de estudio. De acuerdo con Cellucci, en la inferencia diagramática, el objeto representado es reemplazado por su representación. Luego, partiendo del hecho de que la representación posee cierta propiedad, se infiere que el objeto representado posee tal propiedad. Cellucci codifica este patrón de razonamiento mediante la siguiente regla de descubrimiento, donde $a \gg b$ significa que el diagrama a posee cierta similitud (stand for) con un objeto b , $A(a)$ que el diagrama a posee una propiedad A y $A(b)$ que el objeto b posee la misma propiedad A :

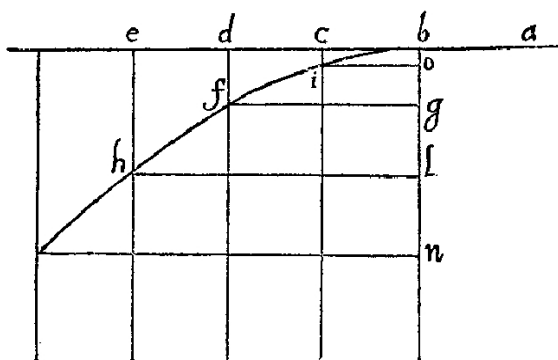
$$(DR) \frac{a \gg b \quad A(a)}{A(b)}$$

Cellucci observa que la similitud en la que se basa la inferencia diagramática puede estar basada en diferentes aspectos. A diferencia de Grosholz, Cellucci limita el concepto de iconicidad a la similitud pictórica o a la similitud basada en la apariencia física. Pero mantiene la idea básica de que es necesario apelar a distintos tipos de similitud para explicar la representación en matemática. Así, Cellucci llama similitud relacional a la similitud basada en la relación que mantienen entre si las partes. A su vez la similitud relacional puede ser dinámica o estática según el tipo de relación que el diagrama represente. De acuerdo con Cellucci, la similitud relacional es la más fructífera desde el punto de vista de la resolución de problemas.

Uno de los ejemplos utilizados por Cellucci para ilustrar la inferencia diagramática es el razonamiento empleado por Galileo (1954) en la proposición 1, teorema 1, de la cuarta jornada en *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze (Discurso)*, en la que Galileo aborda el problema de determinar el tipo de curva que describe la trayectoria de un proyectil (figura 3.2). De acuerdo con Cellucci, este es un ejemplo de inferencia diagramática basada en la similitud relacional dinámica entre el diagrama y la situación representada.

Figura 3.2

Trayectoria de un proyectil



Nota. *Discurso*, cuarta jornada, teorema 1, proposición 1 (Galileo, 1954, p.249).

De acuerdo con Cellucci, partiendo de una correspondencia entre elementos del diagrama y elementos de la situación estudiada, Galileo habría arribado a la solución del problema abordado. Cellucci destaca que el aspecto central de la demostración de Galileo reside en considerar el movimiento de un proyectil como el resultado de la composición de movimiento rectilíneo uniforme y caída libre. Así, el segmento *ba* está en lugar de (*stand for*) un plano horizontal elevado sobre el cual se desplaza un proyectil con velocidad uniforme. La prolongación de este segmento, la línea *be*, está en lugar de el flujo del tiempo, el cual está dividido en intervalos iguales *cb*, *cd*, y *de*. La línea *bn* está en lugar del desplazamiento en caída libre del proyectil. Esta línea está dividida en intervalos desiguales *bo*, *og*, *gl*, *ln*, que

guardan entre sí la misma relación que la serie de los cuadrados, 1, 4, 9, etc., tomando el intervalo bo como unidad. Luego, observando el diagrama se comprueba que la composición del movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento de caída libre conduce a una semiparábola. Este resultado se sigue del estudio de Apolonio, que Galileo presenta al comienzo de la jornada.

Cellucci destaca del siguiente modo el patrón de argumentación subyacente en este caso:

Thus the argument pattern is as follows. Let $bifh$ stand for the path p followed by a body which is carried by a motion compounded of a horizontal uniform motion and a downward uniformly accelerated motion, so that $bifh \gg p$. Let $A(x)$: x is a semiparabolic line. Then $A(bifh)$. From $bifh \gg p$ and $A(bifh)$, by (DR), it follows $A(p)$. (Cellucci, 2013, p. 359)

Veamos ahora como Grosholz analiza este mismo caso desde su perspectiva. Como veremos, Grosholz no focaliza como Cellucci en la experimentación diagramática, sino en la ambigüedad controlada como una estrategia de resolución de problemas.

3.4. Emily Grosholz: Diagramas y estudio del movimiento en Galileo

De acuerdo con Grosholz, el uso de una “ambigüedad controlada y altamente estructurada” es una estrategia muy frecuentemente usada en la resolución de problemas matemáticos (Grosholz, 2007, pp. 3-4). Grosholz llama ambigüedad productiva a este tipo de ambigüedad donde la representación refiere a ítems dispares poniéndolos en relación racional, proveyendo los medios necesarios para avanzar en la resolución del problema. Grosholz describe la ambigüedad productiva como una estrategia de argumentación en la cual “un único modo de representación, usado icónicamente para un propósito y simbólicamente

para otro, puede ser empleado para significar más de una una cosa” (Grosholz 2007, p. 4)²³.

Grosholz enfatiza contra el punto de vista clásico con respecto a la ambigüedad, que esta estrategia de argumentación no genera confusión sino “*insight*”.

De acuerdo con Grosholz, la ambigüedad productiva es un recurso que ocupa en un lugar central en los argumentos que Galileo presenta en el *Discurso*. Los diagramas utilizados por Galileo en su investigación sobre el movimiento son un ejemplo paradigmático de uso de esta ambigüedad controlada como medio para ampliar el conocimiento. El foco del estudio de Grosholz está puesto en cómo los diagramas utilizados por Galileo explotan dicha ambigüedad refiriendo a ítems específicos. No es el patrón abstracto lo que nos permite apreciar la fuerza del argumento empleado en la resolución del problemas sino la descripción minuciosa del modo específico en el que el diagrama pone en relación racional ítems concretos, explotando la ambigüedad.

La atención prestada por Grosholz al *Discurso* de Galileo se debe a que “las pruebas de Galileo son canónicas, parangones de la demostración científica y matemática que preparan el camino para la revolución científica” (Grosholz, 2007, p. 3)²⁴. Esto sugiere, de acuerdo con Grosholz, que el uso de la ambigüedad controlada puede ser un patrón común de argumentación en las matemáticas y las ciencias.

De acuerdo con Grosholz:

In the analysis of free fall on the Third Day, the use of proportions is polyvalent because Galileo asks us to read their terms both as finite and as infinitesimal. When we read them as finite, they allow for the application of Euclidean results and also exhibit patterns among whole numbers; and their configurations stand iconically for

23 “(...) a single mode of representation, used iconically for one purpose and symbolically for another, may be called upon to mean more than one thing” (Grosholz 2007, p. 4).

24 "Galileo's proofs are canonical, parangons of mathematical and scientific demonstration that set the stage for the scientific revolution" (Grosholz, 2007, p. 3).

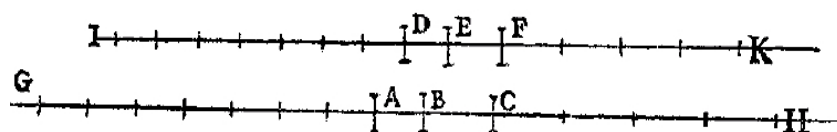
geometrical figures. When we read them as infinitesimal, they allow for the elaboration of the beginnings of a dynamical theory of motion, leading to the work of Torricelli and Newton; and their configurations stand symbolically for dynamical, temporal processes. In the exposition of projectile motion, the curve of the semi-parabola, read iconically, stands for a temporal, dynamical process that we see whenever a projectile leaves a trail behind it; read symbolically, it stands for an infinite-sided polygon that articulates the rational relations among an infinite array of instances of uniform motion that compose the accelerated, curvilinear motion of the projectile. And the rationality of that reduction is justified by results involving proportions and the similarity of geometric figures. (Grosholz, 2007, pp. 3-4)

De acuerdo con Grosholz, el resultado obtenido por Galileo sobre la trayectoria semiparabólica descrita por un proyectil se apoya en resultados previos que Galileo presenta en la tercera jornada, dedicada al movimiento uniforme.

La estrategia empleada por Galileo consiste en establecer una relación racional entre el movimiento uniformemente acelerado y el movimiento uniforme. Para que sea posible establecer esta relación el uso que Galileo hace de las proporciones y los diagramas debe ser “cuidadosamente ambiguo”. Esta ambigüedad ya se presenta en el diagrama de la proposición 1 del teorema 1 de la tercera jornada, donde Galileo aborda el movimiento uniforme (figura 3.3).

Figura 3.3

Movimiento rectilíneo uniforme



Nota. Discurso, tercera jornada, proposición 1, teorema 1 (Galileo, 1954, p.155).

Galileo define en primer lugar el movimiento rectilíneo uniforme como “uno en el que las distancias atravesadas por la partícula en movimiento durante intervalos iguales de tiempo, son también iguales” (Galileo, 1954, p. 154)²⁵. Galileo destaca en su definición de movimiento uniforme la palabra "any" con la cual indica que los intervalos de tiempo pueden ser arbitrariamente elegidos tan pequeños como se desee²⁶. Luego, enuncia la primera proposición de la tercera jornada: “[s]i una partícula en movimiento, transportada uniformemente a una velocidad constante, atraviesa dos distancias los intervalos de tiempo requeridos se encuentran entre sí en la misma razón que las distancias” (*ibid.*, p. 155)²⁷.

En este contexto Galileo presenta un diagrama formado por dos líneas rectas (figura 3.3). La línea *IK* que representa el tiempo, y la línea *GH* que representa la distancia, reconceptualizada como desplazamiento. El lado izquierdo de la línea *IK* es dividido en intervalos iguales tomando *DE* como unidad, mientras que el lado derecho de la línea es dividido en intervalos iguales tomando *EF* como unidad. Del mismo modo la línea *GH* es dividida en intervalos iguales, a la izquierda tomando *AB* como unidad, y a la derecha tomando *BC* como unidad.

Grosholz hace explícito el hecho de que la razón por la cual Galileo utiliza dos líneas se debe a que Galileo asume que el tiempo y la distancia son magnitudes de distinto tipo. Por lo tanto, concluye Grosholz, el estatus de las líneas es distinto. Galileo se apoya en la tradición de la geometría griega que distingue razón (ratio) y proporción, debida a Euclides/Eudoxo. Sólo entre magnitudes del mismo tipo puede existir una razón, mientras

25 “(...) one in which distances traversed by the moving particle during any equal intervals of time, are themselves equal” (Galileo, 1954, p. 154)

26 "By steady or uniform motion, I mean one in which the distances traversed by the moving particle during any equal intervals of time, are themselves equal" (Galilei, 1954, p. 154).

27 “If a moving particle, carried uniformly at a constant speed, traverses two distances the time-intervals required are to each other in the ratio of these distances” (Galileo, 1954, p 155).

que si las magnitudes son de distinto tipo sólo puede establecerse la similitud entre razones, i. e., una proporción. En este marco, el diagrama construido por Galileo permite la aplicación directa del teorema de Euclides/Eudoxo, de acuerdo con el cual, “proporciones entre razones no continuas, $Q:R::S:T$ pueden formarse si y solo si para todo número entero positivo m, n , cuando $nQ \leq mR$, entonces correspondientemente $nS \leq mT$ ” (Grosholz, 2007, p. 7)²⁸.

Ahora bien, a pesar de que Galileo se apoya en la teoría de proporciones debida a Euclides/Eudoxo, al permitir que los intervalos sean arbitrariamente pequeños Galileo hace un uso no euclídeo de esta teoría, ya que la misma no admite términos infinitesimales. Sin embargo, es este uso no euclídeo el que permitirá la posterior reducción de los problemas relativos al movimiento uniforme acelerado a problemas relativos al movimiento rectilíneo uniforme. Así, el diagrama que presenta Galileo exhibe una ambigüedad controlada. Icónicamente, el diagrama refiere a intervalos finitos permitiendo la aplicación de los resultados euclídeo, simbólicamente, el diagrama refiere a intervalos infinitesimales, no admitidos por la geometría clásica. Y esta ambigüedad la que permite poner en relación racional el movimiento rectilíneo uniforme con el movimiento uniformemente acelerado.

3.5. La dimensión icónica de las notaciones simbólicas

La notación introducida entre 1813 y 1814 por el químico sueco Jöns Jacob Berzelius para representar la composición de las sustancias químicas, exhibe para Grosholz dos características típicas de la representación científica, también compartidas por la representación matemática. Una de ellas es no poder ser enmarcada dentro de una distinción rígida entre íconos y símbolos. Efectivamente como veremos, la notación Berzelius contiene tanto elementos simbólicos como icónicos, entrelazados de forma inseparable (Grosholz, 2007, p. 28). La otra característica es que la representación de los objetos de estudio posee

28 “(...) proportions between non-continuous ratios, $Q:R::S:T$, can be formed if and only if for all positive integers m, n , when $nQ \leq mR$, then correspondingly $nS \leq mT$ ” (Grosholz, 2007, p. 7).

una función generativa. Y esta función depende de los componentes icónicos de la representación, junto a otros como su ambigüedad y su carácter abstracto. Los químicos del siglo XIX no sólo utilizaron la notación de Berzelius como un simple medio de expresión, sino también, y más fundamentalmente, como un instrumento para desarrollar sus investigaciones, a la par de los instrumentos de laboratorio.

Este caso ha sido minuciosamente estudiado por Ursula Klein, a quien nos remite Grosholz. Los signos que componen la notación de Berzelius son letras, números, el signo de adición y los paréntesis:

- (1) Los elementos químicos se representan mediante letras. Para denotar cada elemento se usan, según el caso, una o dos letras de acuerdo con las iniciales de su nombre en latín. Por ejemplo, O representa oxígeno (*oxygenum*), S representa azufre (*sulphur*), Cu representa cobre (*cuprum*), etc. En el caso del oxígeno, la letra puede ser reemplazada por un punto. Así, la fórmula de Berzelius para el agua, H²O, también se puede escribir HH.
- (2) Los compuestos se representan mediante fórmulas. Las fórmulas se obtienen usando el signo de adición para combinar letras. Por ejemplo, Cu + O representa óxido de cobre. Cada fórmula posee dos términos, cada uno de los cuales es una letra o una fórmula que representa una sustancia compuesta relativamente estable. Para delimitar los términos que componen una fórmula se utilizan los paréntesis. Por lo general, al unir dos letras se omiten el signo de adición y los paréntesis. Así Cu + O se escribe de forma más compacta CuO. Por lo que para denotar la fórmula del sulfato de cobre, compuesta por ácido sulfúrico y óxido de cobre, basta escribir SO³ + CuO en lugar de utilizar la expresión más compleja (S + O³) + (Cu + O).

(3) Finalmente, los números representan partes discretas de un elemento o de un compuesto y se colocan antecediendo una letra o un término, o superescritos a las letras. En el ejemplo anterior, O^3 representa tres partes de oxígeno y también puede ser escrito, 3O. La tachadura de una letra puede reemplazar al número 2. De este modo, para escribir dos “átomos” o dos “porciones” de cloro, se puede escribir Cl en lugar de 2Cl (Klein, 2000, p. 16).

Berzelius introduce esta notación en el curso de sus investigaciones sobre las “leyes de proporciones” que rigen la combinación de los compuestos inorgánicos y la búsqueda de una “teoría de las proporciones químicas” (Klein, 2000, p. 14). Esta teoría, introduce ciertas entidades teóricas, la cantidad indivisible de un elemento definida por un peso de combinación relativo, único e invariable, que Berzelius denomina “proporciones químicas” o “volúmenes elementales”, y que Klein propone interpretar como “scale-independent portions of elements” (Klein, 2000, 15). Con estas entidades, Berzelius evita la controversia en torno a la hipótesis corpuscular de Dalton abierta en la época, ya que, la porción de un elemento podía ser interpretada no solo como un átomo, sino también como una porción macroscópica discreta de ese elemento manipulable en el laboratorio.

Pero, para expresar esta teoría Berzelius necesitaba un sistema de signos que le permitiera tanto formular las leyes cuantitativas que rigen la combinación de los elementos como evitar las connotaciones atomistas. Y los dos medios de representación de los que disponía, los diagramas de Dalton, y el lenguaje ordinario en el que se expresaba la química de la época, no resultaban aptos para este propósito. Los términos “proporciones químicas” y “volúmenes elementales” remitían a relaciones mensurables de sustancias macroscópicas (Klein, 2000, p. 15). Mientras que, el término “átomo” o los diagramas de Dalton, ineludiblemente, expresaban un compromiso con la teoría corpuscular de la materia que

explícitamente buscaba evitar (Klein, 2000, p. 14). La notación que introduce finalmente satisface estos requisitos. Mientras que las operaciones algebraicas permiten expresar las leyes de combinación, las letras denotan la porción de un elemento independiente de la escala.

En este punto, Grosholz subraya como virtudes de la notación de Berzelius, su ambigüedad y su carácter abstracto, virtudes que se aprecian desde un punto de vista pragmático. Su ambigüedad “allowed chemists to move back and forth between the macroscopic and microscopic worlds as needed” (Grosholz, 2007, p. 26), y su carácter abstracto “freed those who used Berzelius’ formulas from a commitment to an elaborate foundational theory” (Grosholz, 2007, p. 26). Pero aquí también aparece, por primera vez, la función generativa (*generative function*) de la notación de Berzelius. Como Klein subraya, la notación de Berzelius no es un sistema de signos creado para expresar un contenido ya existente. Por el contrario, la elaboración de la teoría de las porciones químicas y la invención de la notación, no pueden ser separadas. En este caso, la relación entre notación y elaboración teórica es análoga a la interacción dialéctica entre elaboración teórica y aparatos de laboratorio estudiada entre otros por Ian Hacking (Grosholz, 2007, p. 30).

Given the fact that there were no linguistic terms or diagrammatic representations available to express this chemically specific reference in an unambiguous way, the new formulaic sign system designed by Berzelius appears in a new light. It was perfectly suited to represent unobservable portions of chemical elements (and of entire compounds) identified by their unique and invariable combining weights. It is not coincidental that Berzelius elaborated his theory of chemical proportions, for which the name “theory of chemical portions” might be more appropriate, in conjunction with the introduction of his chemical formulas. There was no two-step

process in which the theory came first and the formulas afterwards. Rather, the formulaic system became a tool to forge a theory which overlapped with Dalton's atomic theory without being identical to it. The difference between an submicroscopically small atom and a discrete chemical portion was both produced with and embodied by chemical formulas. The mode of representation was not an exterior content, but a constituent of meaning. (Klein, 2000, p. 15)

Klein observa que una distinción estricta entre símbolos e íconos resulta inadecuada para clasificar esta notación, ya que si bien posee indudablemente un carácter simbólico, también posee características icónicas. En primer lugar, afirma Klein, una letra es un objeto indivisible y discreto, del mismo modo que una porción elemental o indivisible de un elemento químico. En consecuencia, hay un grado mínimo de similitud o isomorfismo entre la representación y aquello que representa (Klein, 2000, p. 17). Pero este isomorfismo, advierte Klein, es mayor y más importante entre las fórmulas y la estructura de un compuesto químico, ya que una fórmula no solo representa los elementos que componen una sustancia y sus relaciones cuantitativas, sino también el modo en el que estos elementos se asocian.

La notación de Berzelius, nos indica Klein, encarna la teoría de la constitución binaria de los compuestos químicos (Klein, 2000, p. 17). De acuerdo con esta teoría, los constituyentes inmediatos, en los que se puede descomponer una sustancia son otras dos sustancias relativamente estables, las que si no resultan elementales, estarán compuestas a su vez por otras dos sustancias, y así hasta llegar a los constituyentes elementales (Klein, 2000, p. 18). Esto es porque, en una fórmula, el signo + no sólo representa la adición cuantitativa sino también la adición química. Así, la fórmula de Berzelius para el sulfato de cobre, $\text{SO}_3 + \text{CuO}$, no solo representa los elementos y las cantidades que componen esta sustancia, lo que Berzelius denomina su fórmula empírica, sino también el modo en el que se encuentran

asociados: tres partes de O y una de S formando ácido sulfúrico y una parte de Cu y una de O formando óxido de cobre. De este modo, cada fórmula presenta una imagen de bloques de construcción (*building block image*) que representa icónicamente la constitución binaria de una sustancia. Dado este doble carácter, icónico y simbólico, Klein sugiere como más apropiado clasificar la notación de Berzelius como icónico-simbólica (Klein, 2000, p. 16).

Ahora bien, la dimensión icónica de la notación de Berzelius le permitió desempeñar un rol fundamental en el debate que se dio en la década de 1830 en torno al modo particular en el que los elementos químicos están asociados en los compuestos orgánicos (Klein, 2000, p. 18). El disparador de este debate fue la aceptación generalizada de que los compuestos orgánicos estaban compuestos de forma binaria, del mismo modo que los compuestos inorgánicos. En este contexto, la notación de Berzelius fue utilizada para construir modelos de los compuestos orgánicos y de las reacciones químicas involucradas en continuidad con el análisis químico en el laboratorio. Para caracterizar este uso de la notación Klein introduce la noción de herramientas de lápiz y papel (*paper tool*):

The notion of paper tools implies the assertion that scientists often apply representations or signs systems in general for the same epistemic purpose and in a similar way to laboratory instruments in the strict sense: to produce new representations of invisible objects of processes. Paper tools are material devices in the broadest sense of being exterior to mental processes, visible and maneuverable. Unlike laboratory instruments, they do not interact physically with the object under investigation. This is an important difference from laboratory instruments. Even so, paper tools are visible marks which can be manipulated on paper to create representations of scientific objects. (Klein 2000, p. 28)

Klein estima que el primer registro histórico del uso de la notación Berzelius como una herramienta de lápiz y papel es en un artículo publicado en 1827 por Jean Dumas y Polydore Boullay. En este artículo la notación es utilizada para modelar las reacciones químicas y la constitución de los compuestos orgánicos. Un año después, los mismos autores presentaron una clasificación de los compuestos orgánicos apoyándose principalmente en modelos que ellos mismos crearon utilizando la notación de Berzelius. Pero el punto de inflexión se dio en 1833, cuando Berzelius cuestionó los modelos del alcohol y éter ordinario propuestos por Dumas y Boullay. El ataque dirigido por Berzelius se basaba en los trabajos precedentes de Pelouze con alcohol, “phosphoric acid” y “phosphovinic acid”, y Liebeg con “wood spirit” y “acetal”. Ambos eran trabajos largamente basados en la manipulación de fórmulas teniendo como única limitación la teoría de la constitución binaria de los compuestos orgánicos.

Para ilustrar cómo en este debate, la notación fue usada a la par de los instrumentos de laboratorio, tomaré el caso de las investigaciones de Pelouze (1833) sobre la composición binaria del “phosphovinic acid” descritas por Klein. Pelouze deduce la composición binaria del “phosphovinic acid” a partir del análisis de una sal, la “baryta of phosphovinic acid”, en cuatro pasos. El primer paso es el análisis químico en el laboratorio. A partir de este análisis, Pelouze obtiene las cantidades relativas de cada elemento presentes en la sal: 82,8 % de “baryta of phosphoric acid” – óxido de bario (BaO) más ácido fosfórico (*phosphoric acid*) (Ph^2O^5) – 2,266% de hidrógeno (H), 9,166% de carbono (C) y 5,768% oxígeno (O). El segundo paso es la expresión de estos porcentajes en porciones o “átomos” de cada elemento. Esto se obtiene dividiendo el porcentaje por el peso atómico de cada elemento, o lo que es lo mismo, por su peso de combinación teórico, y redondeando los resultados. El tercer paso es la construcción de la fórmula empírica del “phosphovinic acid”, $12\text{H} + 4\text{C} + 2\text{O} + \text{Ph}^2\text{O}$,

tomando como base estos resultados. Finalmente, el cuarto paso es la construcción de un modelo de su constitución binaria. Este modelo representa una hipótesis y está basada en el modelo hipotético de la constitución binaria del alcohol propuesto por Dumas y Boullay en 1827, de acuerdo con el cual la composición binaria del alcohol es $H^4C^2 + H^2O$. Así, reacomodando las letras en la fórmula empírica, Pelouze obtiene el siguiente modelo de la constitución binaria del “phosphovinic acid”: $2(H^4C^2 + H^2O) + Ph^2O$, en estado seco, y $2(H^4C^2 + H^2O) + Ph^2O + H^2O$, en agua (Klein, 2000, pp. 23-4).

En conclusión, tal como sucedió en el desarrollo de la teoría de las proporciones químicas, en el debate posterior en torno a la constitución binaria de las sustancias orgánicas, la notación de Berzelius tuvo un importante papel como instrumento, al servir como herramienta para la construcción de modelos hipotéticos. Como demuestra Klein, este papel no sólo descansa en su carácter abstracto, el cual le permitía dejar de lado la disputa en torno al atomismo, sino también en su dimensión icónica. Gracias a que ofrecía una imagen de bloques de construcción, la notación pudo ser usada por los químicos del siglo XIX para desarrollar hipótesis acerca de la estructura de un compuesto, en conjunción con los experimentos en el laboratorio. Veamos ahora, como siguiendo este modelo, Grosholz propone elucidar el rol de la dimensión icónica de las notaciones simbólicas en la exploración matemática.

Dimensión icónica de la numeración arábica

Grosholz argumenta que la iconicidad es un carácter irreductible, no sólo en la representación científica, sino también en la matemática, dónde el acceso al objeto de estudio siempre está mediado por una representación. Entre los casos presentados por Grosholz que con mayor énfasis demuestran esta continuidad, se encuentra el sistema de numeración arábica. Grosholz acentúa incluso las marcadas similitudes entre este caso y el caso

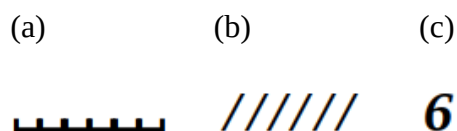
presentado por Klein. Del mismo modo que la notación de Berzelius, la numeración arábica crea un modelo del objeto de estudio y exhibe la estructura de este modelo, lo que la convierte en un instrumento fecundo para el planteo y la resolución de problemas.

Recordemos que la numeración arábica es un sistema de numeración posicional de base diez. Es decir, se basa en el principio, común a otros sistemas de numeración, de dividir las unidades que componen un número en decenas. Luego, estas decenas se dividen en decenas de decenas, y así sucesivamente. El procedimiento se repite hasta que resulta imposible crear grupos de 10^n unidades mayores. Finalmente, el resultado se expresa utilizando nueve figuras, 1, 2, 3... 9, sin significado ideográfico, que cambian de valor según la posición relativa que ocupan; más el cero, para indicar posiciones vacías (Ifrah *et al.*, 2000).

En primer lugar, Grosholz argumenta que si bien los numerales arábigos suelen ser considerados como una representación puramente simbólica, no obstante poseen un grado mínimo de iconicidad, tal como ocurre con las letras que representan elementos químicos en la notación de Berzelius (Grosholz 2007, 262). En este contexto Grosholz parte de la premisa de que un número natural es “the unit or a multiplicity of units in one number” (Grosholz 2007, 262), y compara tres representaciones distintas del número seis (Figura 3.4).

Figura 3.4

Tres representaciones icónicas del número seis



Nota. (a) Representación de Leibniz, (b) notación de barras y (c) numerales arábigos.

Basado en (Grosholz, 2007, pp. 263-4).

Con respecto a estas representaciones, observa que la representación de Leibniz y la notación de barras son icónicas en relación a la multiplicidad contenida en el número. La representación de Leibniz representa esta multiplicidad mediante la contigüidad espacial de elementos, mientras que la otra, mediante la secuencia de barras. Naturalmente, nos dice Grosholz, los numerales arábigos no son icónicos en este respecto. Pero el hecho de que un numeral sea un objeto visible y discreto constituye sin embargo una similitud mínima con respecto a la unidad indivisible del número. Las otras dos notaciones también representan esta unidad, la notación de barras mediante el agrupamiento de las barras y su separación con respecto a los otros elementos de la página, y la notación de Leibniz de forma más enfática y positiva mediante la línea (Grosholz 2007, p. 263). Esto demuestra que los numerales arábigos no carecen completamente de iconicidad, aunque comparados con los otros modos de representación su iconicidad es mínima. Los numerales arábigos sólo representan icónicamente la unidad, mientras que los otros sistemas logran representar la concurrencia de unidad y multiplicidad en un número (Grosholz, 2007, pp. 262-3).

Pero, la numeración árabe es icónica en otros aspectos, más relevantes desde el punto de vista de la resolución de problemas y en los que supera a las otras dos notaciones. La numeración árabe exhibe periodicidades y simetrías que reflejan el modo en el que han sido estructurado los números. Por un lado, hay un isomorfismo entre la estructura posicional de la notación y la jerarquía de unidades utilizada para componer un número. Y por otro, el uso de las mismas figuras para representar distintos ordenes de unidades refleja, tanto el carácter iterativo del procedimiento utilizado para contar como las analogías entre cantidades de distinto orden. "Iconic representations need not be pictures of things with shape, though of course they often are; they may also be representations that exhibit the orderliness that makes something what it is" (Grosholz, 2007, p. 266).

La dimensión icónica de la numeración arábica ejerce una función análoga, desde un punto de vista pragmático, al de la notación de Berzelius: crea un modelo de los números naturales, que estructura el objeto de investigación, a fin de volverlo tratable e inteligible. Este modelo, según Grosholz, puede ser entendido, como dijimos en la primera sección, en términos del concepto de máquina nomológica propuesto por Nancy Cartwright.

My point is that the notation of Arabic numerals has a conceptual function that is not merely syntactic, but semantic and pragmatic as well: it creates a model of the natural numbers that precipitates a nomological machine... It ... exhibits, in virtue of its compounded 10^n periodicity, patterns that form the basis for problems concerning natural numbers. (Grosholz 2007, p. 265)

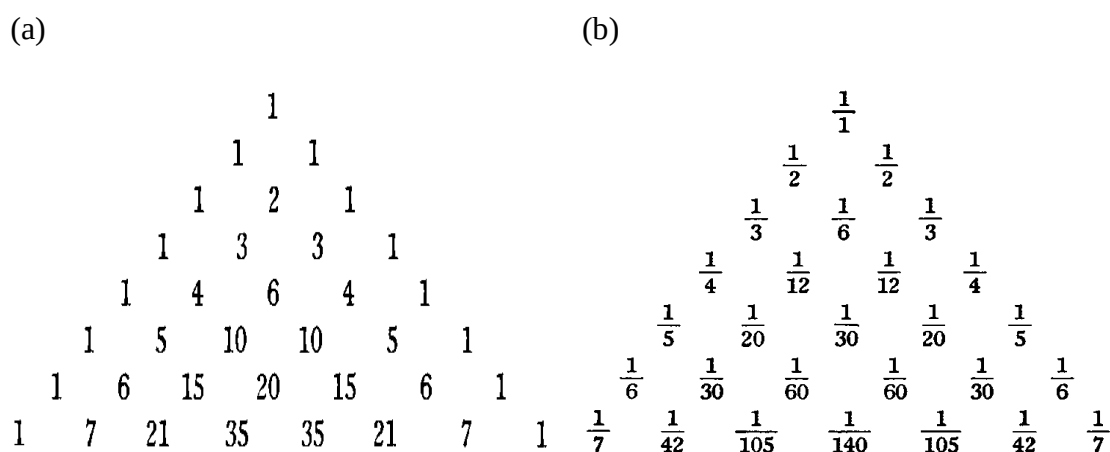
Grosholz también habla de un “*middle ground*” entre representar e intervenir, para referir a los intereses pragmáticos que gobiernan la representación matemática y científica, y que la alejan de un simple reporte pasivo del objeto de estudio (Grosholz, 2007, p. 66). Los patrones que encarna la notación permiten, por ejemplo, operar con los números y construir tablas finitas para ordenar de forma sistemática los resultados de las operaciones aritméticas (Grosholz, 2007, p. 267). A su vez, esta sistematización hace posible explorar las propiedades de los números, aumentando, por ejemplo, nuestra capacidad para explorar el aspecto más importante de los números naturales, “the possibility of expressing each one as a unique product of primes” (Grosholz, 2007, p. 267)

Aquí podemos añadir otro ejemplo a los mencionados por Grosholz, el triángulo aritmético y el triángulo armónico, dos tablas que encarnan relaciones entre series de números naturales y números racionales (Figura 3.5). En ambos casos, vemos las series de números dispuestas en forma oblicua y simétrica. En el caso del triángulo aritmético, por ejemplo, observamos que cada elemento de una serie es igual a la diferencia entre el elemento

que tiene justo por debajo y el que le antecede; y a la suma de los elementos de la serie anterior. En particular, en el caso de la serie de números naturales, vemos que cada elemento es igual a la diferencia entre dos elementos consecutivos de la serie de números triangulares, $2=3-1$, $3=6-3$, $4=10-6$, etc., y a la suma de los elementos de la primera columna, $2=1+1$, $3=1+1+1$, $4=1+1+1+1$, etc. Y lo mismo se observa en cualquier otra serie. Dadas sus propiedades, estas tablas fueron explotadas por Leibniz en el estudio de las sumas de diferencias entre elementos de una serie (Child, 2005, pp. 49-50).

Figura 3.5

Triángulo aritmético y triángulo armónico según Leibniz



Nota. Historia et Origo Calculi Differentialis. (a) Triángulo aritmético, (b) triángulo armónico (Child, 2005, pp. 49-50).

Para finalizar, notemos que a diferencia de la numeración arábiga, las otras dos representaciones numéricas que hemos considerado en esta sección, si bien icónicas, poseen capacidades limitadas para las operaciones de cálculo, y para el planteo y la resolución de problemas. En contraposición, las tablas utilizadas por Leibniz ilustran una característica fundamental de un buen sistema de representación, subrayada por Grosholz, la de permitirnos “to say more than we know we are saying” (Grosholz, 2007, p. 49). Esto posiblemente nos

exija una mayor elaboración del concepto de iconicidad. No obstante, la dimensión icónica de la numeración arábica pone en evidencia que la iconicidad es tan importante para la exploración matemática como para la exploración científica, y que la iconicidad no se limita al modo de representar de las figuras geométricas.

Conclusión

Este capítulo giró en torno a la iconicidad y su rol en la resolución de problemas matemáticos, según las perspectivas de Grosholz y Cellucci. En primer lugar, vimos que la similitud en la que se basa la representación es una similitud de forma. Así, los diagramas euclídeos exhiben, según Grosholz, una forma (*shape*) invariable con respecto a los cambios que puede sufrir la figura. Y del mismo modo, en un sistema simbólico de notación las reglas que rigen la formación de expresiones se asemejan al ordenamiento constitutivo de un objeto. Este es el caso, por ejemplo, de la numeración arábica. También vimos que dicha similitud no equivale a identidad. Un ícono se ubica, según Grosholz, en una zona intermedia (*middle ground*) entre representar e intervenir. A este respecto, Grosholz subraya la analogía entre representar icónicamente y construir una máquina nomológica, según la noción introducida por Nancy Cartwright.

En segundo lugar, vimos que el uso icónico de una representación típicamente se combina con un uso simbólico. En la proposición 1.47 de Euclides, por ejemplo, el diagrama exhibe icónicamente una relación invariable entre los lados de un triángulo rectángulo particular. Mientras que simbólicamente, denota el concepto de triángulo rectángulo. Y esta ambigüedad es la que nos permite pasar de lo particular a lo general, siguiendo un procedimiento inductivo. De modo similar, en el *Discurso*, Galileo utiliza un diagrama que denota icónicamente intervalos finitos y simbólicamente intervalos infinitesimales. Y esta ambigüedad es la que permite aplicar el teorema de Euclides/Eudoxo al estudio del

movimiento uniforme. Galileo logra demostrar así que la razón entre intervalos de tiempo es proporcional a la razón entre distancias recorridas.

En tercer lugar, vimos el lugar que ocupa la experimentación diagramática en las investigaciones de Galileo sobre el movimiento. De acuerdo con Cellucci, Galileo construye un diagrama que representa la trayectoria de un proyectil como una combinación de movimiento uniforme y caída libre. Luego, observando este diagrama concluye que dicha trayectoria describe una semiparábola, según el estudio de las cónicas de Apolonio. La construcción de este diagrama involucra un modo particular de entender el movimiento. Así, en su construcción interviene una operación semejante a la que Grosholz ubica en una posición intermedia entre representar e intervenir.

Finalmente, focalizamos en las dimensiones icónicas de la notación química de Berzelius y la numeración arábiga. Estos dos casos iluminan con mayor nitidez, que el anterior, el rol de la experimentación diagramática en la resolución de problemas. Como pudimos comprobar, ambas notaciones funcionan como un modelo de “lápiz y papel”, con el que es posible experimentar para obtener nuevo conocimiento.

IV

Peirce y el razonamiento de la práctica matemática

La concepción heurística de la matemática plantea la pregunta acerca de la naturaleza del razonamiento involucrado en la resolución de problemas. Como hemos visto, desde las perspectivas de Cellucci y Grosholz, la lógica deductiva clásica no es capaz de explicar satisfactoriamente este razonamiento. Por una parte, nos dice Cellucci, porque la resolución de un problema no se reduce a hacer explícito el contenido de una proposición, sino que requiere introducir elementos externos, no contenidos en el problema. Por otra parte, nos dice Grosholz, porque hay funciones que un lenguaje simbólico no puede desempeñar. La resolución de un problema exige combinar diferentes tipos de representaciones. En particular, requiere representaciones icónicas, además de simbólicas e incluso indexicales. Estas limitaciones llevan a Cellucci a plantear la necesidad de repensar la lógica en busca de un paradigma alternativo.

En este capítulo intentaremos mostrar que la concepción de la matemática de Peirce es coherente con la concepción heurística y que, por lo tanto, esta concepción nos ofrece un marco para abordar el razonamiento involucrado en la resolución de problemas. Al igual que para Cellucci, para Peirce, la matemática gira en torno a problemas. Y también, como para Cellucci, la resolución de un problema requiere introducir elementos que no están contenidos en el planteo mismo del problema. A su vez, la concepción del razonamiento matemático, implícita en esta concepción, explica la irreductibilidad de la representación icónica en matemática. Como Grosholz, Peirce concibe la matemática como una ciencia de observación y experimentación, en la que un diagrama sustituye al objeto de estudio de la investigación empírica.

Este capítulo se estructura en cuatro secciones. La primera sección presenta la definición de la matemática de Peirce. Esta sección plantea el marco general del capítulo. La segunda sección se ocupa de la formación y la naturaleza de las hipótesis que estudia la matemática, según Peirce. Y la tercera sección focaliza en el procedimiento mediante el cual el matemático traza las consecuencias necesarias que se siguen de esas hipótesis. Estas dos secciones convergen en la cuarta. Esta cuarta sección focaliza en la relación entre formular un marco hipotético y estudiar lo que sería necesariamente verdadero bajo ese marco.

4.1. La matemática como el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas

En 1902, en *The essence of mathematics*, Peirce define la matemática como “el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas” (CP 4.233)²⁹. Esta es una concepción que Peirce reitera en escritos anteriores y posteriores. Por ejemplo, en 1895, Peirce afirma que “la característica distintiva de la matemática es que es el estudio científico de hipótesis que primero construye y luego sigue hasta sus consecuencias” (NEM 4.267)³⁰. Y en 1903, primero destaca el valor de la definición de su padre, quien caracteriza la matemática como “la ciencia que saca conclusiones necesarias” (PMSW 91)³¹. Y luego añade, que la única falta que observa en ella es que excluye la creación de un marco hipotético (*framing hypotheses making*), puesto que entre las actividades propias de la matemática se encuentran, “tanto la formulación de sus hipótesis como la exploración de sus consecuencias” (PMSW 91)³².

29 “Mathematics is the study of what is true of hypothetical states of things” (Peirce, 1902, *The Essence of Mathematics*, CP 4.233, trad. Manuel Sacristán, 1974).

30 “(...) the distinguishing characteristic of mathematics is that it is the scientific study of hypotheses which it first frames and then traces to their consequences” (Peirce, 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mathematical Infinity* (15), NEM 4.267).

31 “Mathematics is the science which draws necessary conclusions” (Peirce, 1903, [*On Collections and Substantive Possibility*], PMSW 91).

32 “The only fault I should find with it [Benjamin Peirce's definition of mathematics] is that if we conceive a science, not as a body of ascertained truth, but, as the living business which a group of investigators are engaged upon, which I think is the only sense which gives a natural classification of sciences, then we must

Así, la definición de la matemática de Peirce apela a un “propósito” (*aim*) intrínseco a la práctica, que delimita el “área de incumbencia” (*subject matter*) de la disciplina. Esta definición es consistente con el criterio general que utiliza Peirce para clasificar las ciencias. De acuerdo con este criterio, un campo de investigación debe ser considerado como una “actividad en desarrollo”, es decir, abierto y no como un “un cuerpo establecido de verdades” (PMSW 91).

Además, según esta definición, el matemático no explora un dominio de objetos. Solo determina lo que sería verdadero bajo ciertas hipótesis. Según Peirce, esta concepción coincide con la concepción implícita en los *Elementos* de Euclides. Y discrepa de la definición de la matemática como la ciencia del espacio y el tiempo. Esta última es una definición de raíz kantiana propuesta por De Morgan y Sir W. R. Hamilton, contra quienes Peirce polemiza.

En efecto, si la geometría fuera la ciencia del espacio y el tiempo, argumenta Peirce, la misma sería una ciencia positiva. Pero la verdad o la probabilidad de una hipótesis es irrelevante para la matemática. El matemático “chasquea los dedos ante la experiencia y ante este pequeño universo: aquello sobre lo que él se pretende pronunciar se relaciona con todos y cada uno de los universos en los que el antecedente de su proposición podría ser verdadero” (NEM 4.208)³³. Por lo tanto, la definición de raíz kantiana es incorrecta.

Por el contrario, en los *Elementos*, los principios que caracterizan las propiedades del espacio reciben el nombre de *postulados*. Según Aristóteles, un postulado es una proposición

include under mathematics everything that is an indispensable part of the mathematician's business; and therefore we must include the formulation of his hypotheses as well as the tracing out of their consequences" (Peirce, 1903, [On Collections and Substantive Possibility], PMSW 91).

33 “The mathematician, however, snaps his fingers at experience and at this little universe: what he means to pronounce upon relates to any and every universe in which the antecedent of his proposition might be true” (Peirce, 1904, *Reason's Conscience* (693), NEM 4.208).

“abierta a la duda pero de la cual no se intenta ninguna prueba” (NEM 4.269). Esta denominación muestra que también Euclides habría considerado “que las propiedades del espacio estaban fuera de la jurisdicción de los matemáticos” (NEM 4. 269)³⁴. Por lo tanto, Euclides coincidiría, según Peirce, con su definición de la matemática como la ciencia que extrae las consecuencias necesarias de ciertas hipótesis.

En síntesis, de acuerdo con Peirce, “la matemática trata exclusivamente de situaciones hipotéticas” (CP 4.232)³⁵. Y aunque una cuestión empírica motive la creación de un “mundo hipotético”³⁶, el matemático nunca tratará este mundo como un conjunto de enunciados fácticos. Las cuestiones de hecho quedan fuera de su esfera de competencia. La verdad o la probabilidad de una hipótesis, insiste Peirce, es un problema externo e irrelevante para la matemática. El matemático solo se limita a explorar las consecuencias necesarias que se siguen de las hipótesis que él mismo formula.

4.2. Los problemas externos y la invención de hipótesis matemáticas

Las hipótesis matemáticas nos invitan a admitir cierto estado de cosas como dado, independientemente de su verdad. En este sentido, “son una creación arbitraria de la mente” (PMSW 48)³⁷. Como hemos visto, no corresponde al matemático determinar si una hipótesis

34 “Euclid terms statements of such properties postulates. Now by a postulate the early geometers understood, as a passage in Aristotle shows, notwithstanding a blunder which the Stagyrte here makes, as he often blunders about mathematics, a proposition which was open to doubt but of which no proof was to be attempted. This shows that inquiry into the properties of space was considered to lie outside the province of the mathematician” (Peirce, 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mathematical Infinity* (15), NEM 4. 269).

35 “(...) all modern mathematicians agree with Plato and Aristotle that mathematics deals exclusively with hypothetical states of things, and asserts no matter of fact whatever (...). This is the true essence of mathematics (...)” (Peirce, 1902, *The Essence of Mathematics*, CP 4.232, trad. Manuel Sacristán, 1974).

36 Expresión utilizada por Daniel Campos (2007) para referirse al conjunto de hipótesis que crea y estudia el matemático.

37 "Mathematical hypotheses are arbitrary creations of the mind" (Peirce, 1895(?), *On the Logic of Quantity*, PMSW 48).

es verdadera o falsa, sino cuáles son sus consecuencias necesarias. Sin embargo, la creación de una hipótesis involucra cierta deliberación en la que sí entra en juego la correspondencia con los hechos. Este acto creativo dista de la libre elección de los axiomas en el método axiomático, solo sujeta a la completitud y la consistencia. Y coincide con la forma en la que Cellucci concibe la relación entre problemas externos e internos en matemática.

En ciertas ocasiones, nos dice Peirce, nos topamos con un “estado inusualmente complicado de relaciones entre hechos” que deseamos comprender (NEM 4.267). Esto sucede normalmente, por ejemplo, en la ciencia, la ingeniería o el cálculo de seguros. Deseamos saber si existe otro estado de cosas necesariamente conectado o que tipo de relaciones se hallan involucradas (NEM 4.267). El oficio del matemático es justamente asistirnos en estas ocasiones. Pero, dado que los problemas superan las capacidades humanas, el matemático, primero, imagina un mundo hipotético que representa aproximadamente dichas relaciones (PMSW 91). Este mundo es tal, que basta apelar a la imaginación para responder a las preguntas formuladas (NEM 4.265). Aunque, luego, una vez que ha imaginado este mundo, ignora por completo la relación entre las hipótesis y los hechos. Y solo se limita a determinar qué otro estado de cosas resulta necesariamente verdadero a partir de ellas (NEM 4.267).

Así, Peirce coincide con Cellucci en cuanto a la relación entre la matemática y los problemas extramatemáticos. De acuerdo con Cellucci:

(...) Mathematics is not an armchair subject, because several mathematical problems have an extra-mathematical origin; several mathematical concepts are formulated to deal with extra-mathematical questions; several mathematical theories are developed to meet extra-mathematical needs and are evaluated in terms of their capacity to meet

those needs. Therefore, mathematics essentially involves interactions with the world beyond the armchair. (Cellucci, 2013, p. 316)

De modo semejante, de acuerdo con Peirce, el matemático comúnmente imagina un mundo hipotético en vistas a entender un estado empírico de cosas. El propósito del matemático es “representar aproximadamente” ese estado (PMSW 91). Aunque después de que la hipótesis ha sido formulada “se desentienda completamente de tal correspondencia” (NEM 4.197).

4.2.1. La naturaleza de las situaciones hipotéticas

De acuerdo con Peirce, una hipótesis matemática es una descripción general perfectamente definida, referida a un estado imaginario de cosas. Este estado es un conjunto de relaciones sumamente abstracto, puesto que una descripción omite cualquier característica superflua que no contribuya a derivar las consecuencias necesarias que se siguen de la hipótesis. En *The Essence of Mathematics* Peirce (1902) ofrece una descripción de los procedimientos matemáticos que encapsula las características distintivas de las hipótesis matemáticas, recién mencionadas.

Suppose a state of things of a perfectly definite, general description. That is, there must be no room for doubt as to whether anything, itself determinate, would or would not come under that description. And suppose, further, that this description refers to nothing occult – nothing that cannot be summoned up fully into the imagination. Assume, then a range of possibilities equally definite and equally subject to the imagination; so that, so far as the given description of the supposed state of things is general, the different ways in which it might be made determinate could never introduce doubtful or occult features. The assumption, for example, must not refer to any matter of fact. For questions of fact are not within the purview of the imagination.

Nor must it be such that, for example, it could lead us to ask whether the vowel **OO** can be imagined to be sounded on as high a pitch as the vowel **EE**. Perhaps it would have to be restricted to pure spatial, temporal, and logical relations. Be that as it may, the question whether in such a state of things, a certain other similarly definite state of things, equally a matter of the imagination, could or could not, in the assumed range of possibility, ever occur, would be one in reference to which one of the two answers, Yes or No, would be true, but never both. But all pertinent facts would be within the beck and call of the imagination; and consequently nothing but the operation of thought would be necessary to render the true answer. Nor, supposing the answer to cover the whole of possibility assumed, could this be rendered otherwise than by reasoning that would be apodictic, general and exact. (Peirce, 1902, *The Essence of Mathematics*, CP 4.232)

Intentemos diseccionar este pasaje para ver con más detalle las características específicas de las hipótesis matemáticas. En primer lugar, observemos que una hipótesis matemática es una descripción “general” de un estado de cosas. Luego, como el adjetivo “general” indica, y la contraposición establecida en el texto entre el estado de cosas y “los diferentes modos en los que puede ser hecho determinado”, debemos considerar al sujeto de esta descripción un universal. Según el uso estándar, un universal es algo que puede ser verdadero de muchos, por ejemplo, “ser un ángulo plano” o “ser un triángulo isósceles”; y se opone a lo que es particular, es decir, lo que solo puede ser verdadero de uno. La caracterización del sujeto de un estado hipotético de cosas como un universal es consistente con el uso que hace Peirce de esta noción. Este uso no sólo comprende lo que puede ser verdadero de individuos, sino también relaciones, propiedades, leyes, o como en este caso

“ser un determinado estado de cosas”. Alternativamente, Peirce utiliza el término “general” (Short, 2007, pp. xiv-xv).

En segundo lugar, este pasaje señala la exactitud de la descripción como otra de las características distintivas de una hipótesis matemática. Una hipótesis, dice Peirce, es una descripción “perfectamente definida” (CP 4.232). Es decir, es posible decidir por sí o por no si algo, “en sí mismo determinado”, es o no es una instancia particular del estado de cosas descrito, o bien, como también lo expresa Campos, la hipótesis “no da lugar a la ambigüedad con respecto a si un mundo particular cae bajo los límites de la (...) descripción” (Campos, 2007, p. 472). Inversamente, esto mismo se aplica a las instancias particulares comprendidas por la descripción.

En tercer lugar, observamos que el objeto de una hipótesis matemática es una relación. Esta relación es una relación racional. Peirce define una relación racional como aquellas relaciones con respecto a las cuales “cualquiera que razone debe tener una familiaridad interna” (NEM 4.316)³⁸. Las relaciones racionales se distinguen de las relaciones conocidas por experiencia o como un hecho. Un ejemplo de relación racional son las relaciones geométricas, como las expresadas en el teorema de Pitágoras. Mientras que un ejemplo de una relación conocida por experiencia, es la relación entre un asesino y la persona asesinada, ejemplo suministrado por Peirce.

La cuarta característica que Peirce subraya en este pasaje es que la descripción se refiere a un estado imaginario de cosas. Y todos los hechos pertinentes, para decidir si una hipótesis cae o no bajo la descripción general, “deben estar al alcance de la imaginación” (CP 4.232). Dadas ciertas relaciones, el matemático se pregunta si en toda instancia en la que se

38 “By rationally related, I mean that there is between them, not merely one of those relations which we know by experience, but know not how to comprehend, but one of those relations which anybody who reasons at all must have an inward acquaintance with” (NEM 4.316).

dan esas relaciones, también se dan otras relaciones, no expresadas en la hipótesis. Este problema no trata sobre ninguna cuestión de hecho, sino sólo sobre lo que es posible imaginar. Por lo tanto, lo único que se necesita para resolverlo es la propia operación del pensamiento. Y esto explica la necesidad de las conclusiones a las que arriba el matemático. La imaginación es una capacidad fundamental, sin la cual la matemática no podría existir. Esta capacidad es la que aporta los materiales y los medios que utiliza el matemático para trabajar. Sin la imaginación no sería posible crear un mundo hipotético para explorar ni determinar lo que sería verdadero en ese mundo (Campos, 2007, 2010).

Finalmente, debemos añadir el carácter “esquelético” o “diagramático” de las hipótesis matemáticas. Dado que el matemático solo está interesado en derivar las consecuencias necesarias de ciertas hipótesis, “todo lo que no concierna a ello es tratado por él como externo a la matemática” (NEM 4.213)³⁹. En consecuencia, las hipótesis no contienen nada que “no introduzca una diferencia con respecto a la forma de las conclusiones necesarias que pueden ser sacadas” (NEM 4.184)⁴⁰. Simplemente expresan “la concepción de un sistema de relaciones” (PMSW 46) despojado de toda característica irrelevante para la derivación de las consecuencias necesarias.

The mathematician always describes his universe, usually in some individual features of it and always, at any rate, as to certain regularities which he supposes to be without exception in it in a list of postulates or otherwise. This description always leaves it indeterminate what color the imagined objects are. To specify anything of that sort would be considered grotesque. Why? Because so long as those which might have

39 “(...) Now the mathematician’s whole interest is in these forms of necessary conclusions; and whatever does not concern them is regarded by him as foreign to mathematics” (Peirce, 1904, *Reason’s Conscience: A practical Treatise on the Theory of Discovery wherein Logic is Conceived as Semeiotic* (693), NEM 4.213).

40 “(...) make no difference as to the form of necessary conclusions that might be drawn” (NEM 4.184).

been imagined blue, or any other color, are represented to be in some way distinguished from others, the distinguishing color chosen could make no difference as to the forms of necessary conclusions that might be drawn. Now mathematician's whole interest is in these forms of necessary conclusions, and whatever does not concern them is regarded by him as foreign to mathematics. It is the same in regard to relations. Only a few relations between the individuals of his imaginary universe are noticed at all by the mathematician, and as those few, what he cares for is the presence (or absence) of an unbroken rule as to the identity of objects in different sets of objects between which the relation subsists. If there is no such rule, which might serve as the means of drawing some necessary conclusion, he will regard the relation as having no mathematical interest (Peirce, 1904, *Reason's Conscience: A practical Treatise on the Theory of Discovery wherein Logic is Conceived as Semeiotic* (693), NE 4.184)

En coherencia con esta caracterización de las hipótesis matemáticas, Peirce concibe la invención de un mundo hipotético como un proceso de “esqueletización” o “diagramatización”. El mismo parte de un estado empírico de cosas para llegar a un resultado sumamente abstracto. Las únicas características superfluas que se conservan en este proceso son aquellas que “ya sea por hábito o por la constitución de la mente, se han vuelto tan familiares que decididamente ayudan a trazar la consecuencias de la hipótesis” (CP 3.558)⁴¹.

41 “(...) This substituted problem differs also from that which was first set before the mathematician in another respect, namely, that it is highly abstract. All features that have no bearing upon the relations of the premises to the conclusion are effaced and obliterated. The skeletonization or diagramatization of the problem serves more purposes than one; but its principal purpose is to strip the significant relations of all disguise. Only one kind of concrete clothing is permitted – namely, such as, whether from habit or from the constitution of the mind, has become so familiar that it decidedly aids in tracing the consequences of the hypothesis” (Peirce, 1898, *The Logic of Mathematics in Relation to Education*, CP3.558).

Y este interés en la deducción es lo que distingue la invención de una hipótesis matemática de otras actividades poéticas como una creación literaria (PMSW 91)⁴².

4.3. El carácter observacional y experimental del razonamiento deductivo

Como vimos, el oficio del matemático consiste en determinar lo que sería necesariamente verdadero bajo ciertas hipótesis cuya verdad no le preocupa y está fuera de su esfera determinar. Peirce clasifica este procedimiento como un procedimiento deductivo, aunque, lejos de la concepción estándar, concibe la deducción como un procedimiento observacional y experimental. Desde su perspectiva, “toda Deducción involucra la observación de un Diagrama (ya sea Óptico, Táctil, o Acústico) y habiendo trazado el diagrama (...) uno encuentra la conclusión representada en él” (NEM 3.869)⁴³. Más aún, es un error para Peirce pensar que la deducción “meramente explica lo que implícitamente está afirmado en las premisas” (CP 4.204)⁴⁴. Esta concepción de la deducción de Peirce es

42 “It cannot be said that all framing of hypotheses is mathematics. For that would not distinguish between the mathematician and the poet. But the mathematician is only interested in hypotheses for the forms of inference form them. As for the poet, although much of the interest of a romance lies in tracing out consequences, yet these consequences themselves are more interesting in point of view of the resulting situations that in the way in which they are deducible. Thus, the poetical interest of a mental creation is in the creation itself, although as a part of this a mathematical interest may enter to a slight extent. Detective stories and the like have an unmistakable mathematical element. But a hypothesis, in so far it is mathematical, is mere matter for deductive reasoning (Peirce 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mathematical Infinity* (15), NEM 4.268). En 1903, Peirce reitera la misma idea: (...) The substance of the mathematician’s hypothesis is therefore a creature of his imagination. Yet nothing can be more unlike a poet’s creation. The reason is that the poet is interested in his images solely on account of their own beauty or interest as images, while the mathematician is interested in his hypotheses solely on account of the ways in which necessary inferences can be drawn from them” (Peirce, 1903, *[On Collections and Substantive Possibility]*, PMSW 91).

43 “(...) every Deduction involves the observation of a Diagram (whether Optical, Tactical, or Acoustic) and having drawn the diagram (...) one finds the conclusion to be represented by it” (Peirce 1909, L 224, NEM 3.869).

44 “This appears to be in harmony with Kant’s view of deduction, namely, that it merely explicates what is implicitly asserted in the premisses. This is what is called a half-truth” (Peirce, 1901, *The Logic of Drawing*

coherente, por un lado, con la concepción de Cellucci de la resolución de un problema, y por otro, con la visión de Grosholz acerca de rol de la iconicidad en este proceso.

Peirce enuncia por primera vez la tesis, acerca del carácter observacional y experimental del razonamiento deductivo, en *On the Algebra of Logic* (1885). Esta enunciación marca un punto de inflexión con respecto a su anterior concepción de la deducción en términos silogísticos, es decir, como la aplicación de una regla a un caso para obtener un resultado (Pietarinen *et al.*, 2014, p. 363). De acuerdo con Peirce, la aparente iconicidad del razonamiento deductivo resolvería el dilema entre la necesidad y la existencia de auténticos descubrimientos matemáticos, tan variados y sorprendidos como los de las ciencias empíricas.

It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. Various have been the attempts to solve the paradox by breaking down one or other these assertions, but without success. The truth, however, appears to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. (Peirce, 1885, *On the Algebra of Logic*, CP. 3.363)

En un texto posterior, conocido como PAP, uno de los borradores de *Prolegomena to an Apology for Pragmatism* (Peirce, 1906), Peirce indica que hay tres líneas de

History from Ancient Documents, CP 4.204).

argumentación, muy próximas entre sí para demostrar esta tesis. Una consiste en mostrar que “cada paso de tal argumento puede ser representado, aunque usualmente mucho más analíticamente, mediante los Gráficos Existenciales” (NEM 4.319)⁴⁵, es decir, mostrar que los gráficos existenciales prueban lo que otros sistemas de representación asumen sin prueba. Otra línea de argumentación consiste en “tomar, una por una, cada forma de razonamiento necesario, y mostrar que la exhibición diagramática de ella le hace perfecta justicia” (NEM 4.319)⁴⁶. Finalmente, un tercer camino es ofrecer una descripción no psicológica del proceso de razonamiento. Este camino es, para Peirce, el más instructivo y el que seguiremos en esta sección.

4.3.1. Razonamiento y evidencia

Peirce distingue entre razonar y aplicar una regla general (*rule of thumb*). La distinción se basa en la posibilidad de ejercer un control crítico sobre la inferencia. Este control existe cuando la conclusión se acepta sobre la base de evidencia que demuestra que ciertas relaciones involucran necesariamente otras relaciones. Mientras que el razonamiento envuelve este control, la aplicación de una regla general carece de este soporte y se basa en algún otro indicio, como puede ser la fuerza del hábito (NEM 4.314).

[I]t is necessary to distinguish reasoning, properly so called, where the acceptance of the conclusion in the sense in which it is drawn, is seen evidently to be justified, from cases in which a rule of inference is followed because it has been found to work well, which I call following a rule of thumb, and accepting a conclusion without seeing why further than that the impulse to do so seems irresistible. In both cases, there

45 “(...) every step of such an argumentation can be represented, but usually much more analytically, by Existential Graps” (Peirce, 1906, PAP, NEM 4.319). Francesco Bellucci y Ahti-Veikko Pietarinen (2016) desarrollan esta línea de argumentación.

46 “(...) taking up, one by one, each form of necessary reasoning, and showing that the diagrammatic exhibition of it does perfect justice (Peirce, 1906, PAP, NEM 4.319).

might be a sound argument to defend the acceptance of the conclusion; but to accept the conclusion without any criticism or supporting argument is not what I call reasoning. (Peirce, 1906, *(PAP)*, NEM 4.314)

En ambos casos la inferencia puede ser correcta, pero sin control crítico no hay razonamiento. Esta es la razón por la que, por ejemplo, un algoritmo ejecutado por una “máquina lógica” no califica como razonamiento. De acuerdo con Peirce, aunque una computadora extraiga la conclusión correcta, solo aplica reglas de modo ciego. No percibe por qué ni cómo, determinadas relaciones necesariamente involucran otras relaciones. Por el contrario, el razonamiento procede sobre la base de evidencia que justifica pasar de las premisas a la conclusión.

[I]t has been shown that all possible general conclusions can be arranged in serial order and as soon as anybody wishes to defray the not extravagant cost, the specifications will be ready for a machine that will actually turn out new theorems from a given set of premises, one after another, as long as they continue to have any interest. But though a machine could do all that, and thus accomplish all that many an eminent mathematician accomplishes, it still cannot properly be called a reasoning machine, any more than the sort of man I have in view can be called a reasoner. It does not reason; it only proceeds by a rule of thumb. (Peirce, *n. d.*, *Our Senses as Reasoning Machines*, NEM 3.115)

Ahora bien, solo la percepción de las relaciones involucradas ofrece la evidencia que exige el razonamiento. Por lo tanto, razonar requiere percibir que en todo estado hipotético de cosas en el que las premisas son verdaderas, la conclusión también es verdadera. “El razonamiento necesario -afirma Peirce- hace su conclusión evidente ¿Qué es esta “Evidencia”? Consiste en el hecho de que la verdad de la conclusión es percibida, en toda su

generalidad, y en la generalidad de cómo y del por qué la verdad es percibida” (NEM 4.317)⁴⁷.

Peirce argumenta que ni un índice ni un símbolo pueden ofrecer esta evidencia. Por un lado, un índice no puede ofrecer evidencia porque “es mediante la fuerza bruta que un Índice empuja a su Objeto en el Campo de la Interpretación, la conciencia, como si desdeñara la evidencia amable” (NEM 4.317)⁴⁸. Por otro lado, un símbolo “no puede hacer más que aplicar una regla general al apoyarse como lo hace enteramente en un Hábito (...) y el Hábito no es evidencia” (NEM 4.317)⁴⁹. Sólo un ícono, en particular un diagrama, cumple este requisito. Veamos entonces qué tipo de signo es un diagrama, según Peirce.

4.3.2. Clasificación de los diagramas

Antes de entrar en la clasificación de los diagramas, debemos advertir que la teoría de los signos de Peirce es una teoría inconclusa, se encuentra dispersa en distintos fragmentos y, por momentos, puede resultar algo imprecisa e incluso, en algunos puntos, contradictoria. De acuerdo con Short (2007), su desarrollo comprende tres etapas. La primera abarca las reflexiones iniciales de Peirce en torno a la naturaleza de los signos, entre 1865 y 1866. La segunda corresponde a la primera articulación de una teoría, entre 1868 y 1869. Y finalmente, la tercera etapa se caracteriza por los sucesivos intentos de Peirce de subsanar las deficiencias de la primera formulación, entre 1877 y 1907 (Short 2007, pp. 27-59).

El núcleo de la teoría es que para que algo sea un signo debe existir la posibilidad de que sea interpretado como un signo. Es decir, la significación es una relación triádica e

47 “Necessary reasoning makes its conclusion evident. What is this “Evidence”? It consists in the fact the truth of the conclusion is perceived, in all its generality, and in the generality the how and why of the truth is perceived” (Peirce, 1906, (PAP), NEM 4.317).

48 “(...) it is by brute force that Index thrusts its Object into the Field of Interpretation, the consciousness, as if disdainingly gentle evidence” (Peirce, 1906, (PAP), NEM 4.317).

49 “(...) can do [not] more than apply a rule of thumb resting as it does entirely on Habit (...) and Habit is not evidence” (Peirce, 1906, (PAP), NEM 4.317).

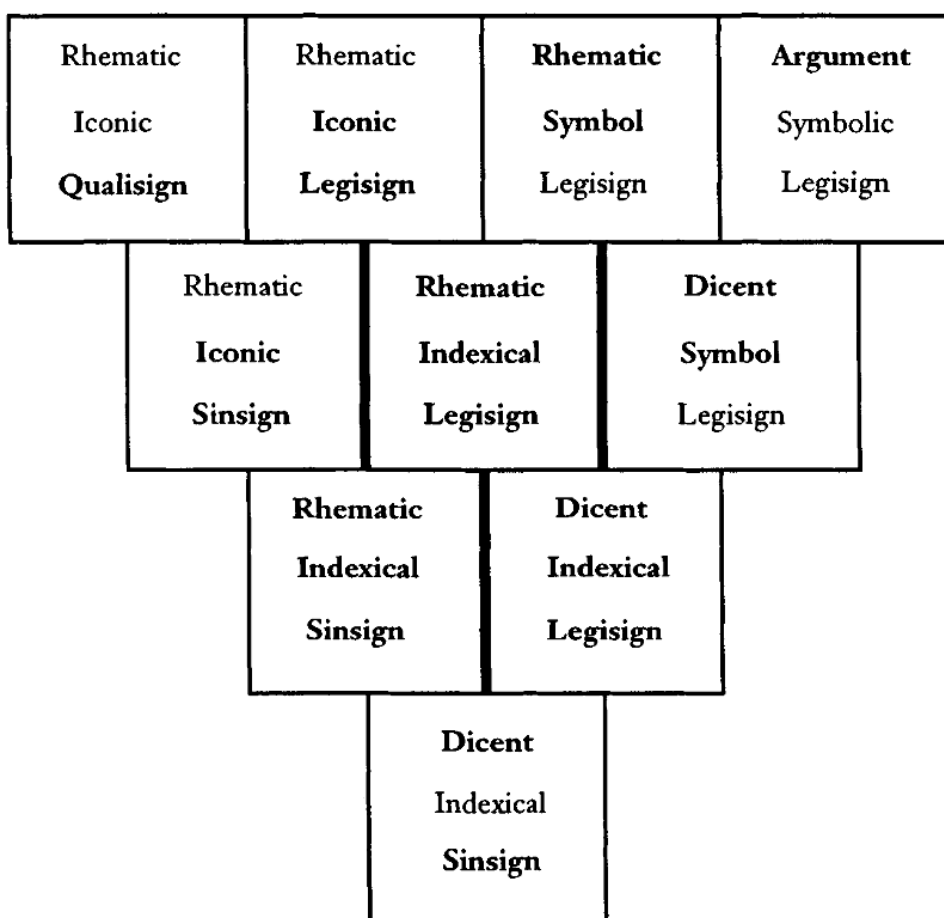
irreductible entre un objeto, un signo y un interpretante. En esta relación el objeto determina el signo y el signo determina el interpretante. Short (2007) ha argumentado que esta determinación no debe ser entendida en un sentido causal, sino como una limitación, es decir, el objeto limita el rango de sus posibles signos y el signo limita el rango de sus posibles interpretantes. Un componente de esta relación triádica es la relación entre el signo y el objeto, que constituye lo que Short denomina la “base” o el “fundamento” de un signo. Dicha relación es lógicamente previa a la relación de significación y es una condición necesaria para que algo sea interpretado como un signo. Por último, aclaremos que el interpretante es el efecto del signo sobre una “cuasi-mente” (*quasi-mind*), noción generalizada de sujeto que aparta a Peirce del psicologismo. El interpretante puede ser otro signo, pero también una acción o una emoción. Este núcleo, que ya aparece en las primeras etapas de la teoría, permanecerá inalterado a lo largo de las sucesivas revisiones.

La primera clasificación completa de los signos data de 1903 y se encuentra en *Nomenclature and Division of Triadic Relations* (CP 2.233-272, EP 2.289-299). La misma está basada en tres criterios: el interpretante, la relación entre el signo y el objeto que representa, y el tipo de objeto que hace las veces de signo. Cada criterio determina una tricotomía de clases excluyentes. Según el primer criterio, los signos se dividen en “Cualisignos” (*Qualisigns*), “Sinsignos” (*Sinsigns*) o “Legisignos” (*Legisigns*), según el segundo criterio, en “Íconos” (*Icons*), “Índices” (*Indexes*) o “Símbolos” (*Symbols*), y por último, según el tercero, se dividen en “Rhema” (*Rheme*), “Dicisigno” (*Did-sign o Dicent Sign*) y “Argumento” (*Argument*). Luego, estos criterios se combinan para formar la taxonomía final. Dado que los principios de combinación no permiten todas las combinaciones numéricas posibles, la misma sólo contiene diez tipos de signos. Cada tipo se nombra enumerando cada una de las tres clases a las que pertenece el signo. Posteriormente,

Peirce expande esta clasificación abarcando sesenta y seis tipos de signos basándose en diez criterios, cada uno de los cuales determina un número igual de tricotomías, aunque no nos detendremos en este punto. En el siguiente esquema se muestran las diez clases de signos que componen esta primera clasificación (Figura 4.1).

Figura 4.1

Primera clasificación de los signos de Peirce



Nota. Las diez clases de signos según Peirce (Peirce, 1903, *Nomenclature and Division of Triadic Relations*, EP 2.296).

Ahora bien, siguiendo esta clasificación y según el interpretante, debemos clasificar un diagrama como un rhema, puesto que un diagrama es entendido como un signo que representa la forma de una relación y esta forma es un objeto general posible. En efecto, de

acuerdo con Peirce, “un rhema es un Signo que, para su Interpretante, es un Signo de posibilidad cualitativa, es decir, que es entendido como representando tal o cual tipo de Objeto posible” (EP 2.292)⁵⁰.

A Diagram (...) is (...) what is called a General sign; that is, it denotes a general Object. It is, indeed, constructed with that intention, and thus represents the Object of that intention. Now the Object of an intention, purpose, or desire is always General. The Diagram represents a definite Form of Relation. This Relation is usually one which actually exists, as in a map, or is intended to exist, as in a Plan. But this is so far from being essential to the Diagram as such, that if details are added to represented existential or experiential peculiarities, such additions are distinctly of an undiagrammatic nature. The pure Diagram is designed to represent and to render intelligible, the Form of Relation merely. Consequently, Diagrams are restricted to the representation of a certain class of relations; namely, those that are intelligible. (Peirce 1906, (PAP), NEM 4.315-6, n. 1)

Por otra parte, según la relación entre el signo y el objeto un diagrama es un ícono. Como dijimos, esta relación es la base o el fundamento de la significación, y es sólo sobre esta base que algo puede ser interpretado como un signo. Debemos distinguir entre un “ícono puro” y un “ícono impuro”. Un ícono puro es un signo que exhibe en su propia constitución aquello mismo que representa, exista o no el objeto representado. “Un ícono -afirma Peirce- es un signo que se refiere al Objeto que denota simplemente en virtud de sus propios caracteres, los cuales posee independientemente de que dicho Objeto exista en realidad o no”

50 “A Rheme is a sign which, for its Interpretant, is a sign of qualitative possibility, that is, is understood as representing such and such a kind of possible Object” (Peirce, 1903, *Nomenclature and Division of Triadic Relations*, EP 2.292, trad. María Fernanda Benitti, 2006).

(EP 2.291)⁵¹. Un “ícono impuro”, es un ícono que en virtud de elementos simbólicos o indexicales se refiere por similitud a otro objeto (Short, 2007, pp. 215-8). En *Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, encontramos una caracterización de los diagramas que nos permiten clasificarlos en la categoría de “íconos puros”. En efecto, en este texto, Peirce plantea que la forma representada por un diagrama es intrínseca al mismo diagrama. Esta unión, subraya, es análoga a la que existe entre la estructura molecular de una sustancia química y cualquier muestra de la misma sustancia, unión a causa de la cual distintas muestras resultan idénticas desde el punto de vista de la investigación.

It was not the particular sample that the chemist was investigating; it was the molecular *structure*. Now he was long ago in possession of overwhelming proof that all samples of the same molecular structure react chemically in exactly the same way; so that one sample is all one with another. But the object of the chemist’s research, that upon which he experiments, and to which the question he puts to Nature relates, is the Molecular Structure, which in all his samples has as complete an identity (...). Accordingly, he does, as you say, experiment upon the Very Object under investigation. But if you stop a moment to consider it, you slipped in implying that it is otherwise with experiments made upon diagrams. For what is there the Object of Investigation? It is the *form of a relation*. Now this Form of Relation is the very form of relation between the two corresponding parts of the diagram. (Peirce 1906, p. 493, subrayado en el original)

Por último, según el signo en sí mismo un diagrama es la “réplica” de un “legisigno” o el “token” de un “tipo”, ambas terminologías debidas a Peirce (NEM 4.315). “Un legisigno

51 "An Icon is a sign which refers to the Object that it denotes merely by virtue of characters of its own and which it possesses, just the same, whether any such Object actually exists or not" (Peirce, 1903, *Nomenclature and Division of Triadic Relations*, EP 2.291, trad. María Fernanda Benitti, 2006).

es una ley que es un signo” (EP 2.291)⁵². De acuerdo con Short (2007), en un sentido amplio toda ley, por ejemplo, una ley natural, es un legisigno. Pero en un sentido restringido, un legisigno es una ley o un tipo cuyo fin es significar, aunque esta finalidad no necesariamente es un propósito deliberado. Un legisigno sólo significa a través de sus réplicas. Una palabra como “triángulo”, por ejemplo, es un legisigno, que sólo significa a través de las instancias particulares en las que se escribe y pronuncia la palabra “triángulo”. Por otra parte, un legisigno puede ser simbólico, como en el caso de una palabra, pero también puede ser icónico o indexical. La réplica de un legisigno es un sinsigno, es decir, “una cosa o acontecimiento de existencia real, la cual es un signo (EP 2.291)”⁵³. Según esto, un diagrama es un “legisigno icónico” cuya réplica es un “sinsigno icónico”. En palabras de Peirce, "un diagrama, en mi sentido, es en primer lugar un Token, o un objeto singular usado como un Signo; porque es esencial que sea capaz de ser percibido y observado" (NEM 4.315-6, n. 1)⁵⁴.

Observemos que en el caso de un diagrama el sinsigno usualmente consiste en un conjunto de marcas sobre el papel o una pizarra, pero que esto no es esencial. Lo esencial es que sea algo perceptible. La representación diagramática, en el sentido de Peirce, no está ligada necesariamente a la visualización. Un diagrama visual, como una figura geométrica, sólo es un tipo particular de diagrama. También existen, según Peirce, otros tipos de íconos, como los audibles o los táctiles (Ketner 1985: 408, Stjernfelt 2000: 359). Podríamos agregar que un diagrama tampoco está limitado a ser una representación bidimensional.

52 "A *Legisign* is a law that is a sign" (Peirce, 1903, *Nomenclature and Division of Triadic Relations*, EP 2.291, trad. María Fernanda Benitti, 2006, subrayado en el original).

53 "A *Sinsign* (where the syllable *sin* is taken as meaning "being only once," as in *single*, *simple*, Latin *semel*, etc.) is an actual existent thing or event which is a sign (Peirce, 1903, *Nomenclature and Division of Triadic Relations*, EP 2.291, trad. María Fernanda Benitti, 2006, subrayado en el original).

54 "A Diagram, in my sense, is in the first place a Token, or singular Object used as a Sign; for it is essential that it should be capable of being perceived and observed" (Peirce 1906, (PAP), NEM 4.315-6, n. 1).

Finalmente notemos que el mismo conjunto de trazos sobre una hoja de papel puede ser interpretado como la réplica de distintos legisignos. Por ejemplo, puede ser interpretado como un triángulo, o de forma más específica como un triángulo equilátero. En el primer caso la igualdad entre los lados será considerada una característica puramente accidental. Mientras que en el segundo, será considerada esencial. A su vez, en ambos casos no serán consideradas relevantes ni el color del trazo ni las pequeñas irregularidades de la figura trazada. Entonces, para que el sinsigno pueda ser interpretado como la réplica de un legisigno, son necesarias reglas que permitan discriminar los caracteres esenciales de la representación. Estas reglas son hábitos que forman parte de la representación y deben ser aprendidas o inferidas del contexto (NEM 4: 317). Pero, la existencia de estas reglas no reduce la representación diagramática a una representación simbólica. En el caso de un símbolo, es la relación entre el signo y el objeto, la que se basa en hábitos, mientras que las reglas que gobiernan el tipo del diagrama, sólo dirigen la atención hacia los caracteres significativos de la representación⁵⁵.

Para concluir, entonces, de acuerdo con la primera clasificación de los signos de Peirce, un diagrama sería un Legisigno Icónico Rhemático, cuya réplica sería un Legisigno Icónico Rhemático.

4.3.3. Dos divisiones tricotómicas del interpretante

Hemos visto que solo un diagrama puede ofrecer la evidencia que exige el razonamiento, según el argumento que Peirce ofrece en PAP. Ahora bien, en este mismo texto Peirce nos dice que no es el diagrama estático el que aporta esta evidencia, sino la transformación de un diagrama. La razón de ello es que la deducción requiere la adición de

⁵⁵ Es difícil no notar aquí el conexión entre el rol del hábito en la representación diagramática y el rol de las tradiciones de representación y el contexto lingüístico, según Grosholz. Las tradiciones de representación justamente regulan el modo en el que se construyen las representaciones y sólo en el contexto de una tradición de representación es posible identificar un objeto como la representación icónica de otro objeto.

elementos que no están contenidos en las premisas⁵⁶. La caracterización, que hace Peirce, de este proceso nos obliga entonces a considerar dos divisiones tricotómicas del interpretante. Sin embargo, debemos notar que la distinción entre distintos tipos de interpretantes siempre fue tentativa y que Peirce nunca llegó a una clasificación definitiva (Short, 2007, p. 178). Por este motivo, siguiendo a Short (2007), consideraremos brevemente dos divisiones que se aproximan a las divisiones que Peirce introduce en PAP, sin ser las mismas. Aunque la correspondencia en este caso no sea exacta, dicha aproximación nos permitirá seguir la descripción que ofrece Peirce del proceso de razonamiento.

Una de las dos divisiones tricotómicas que debemos considerar es la división entre un interpretante “inmediato”, uno “dinámico” y uno “final”. Esta distinción corresponde aproximadamente a la distinción, que Peirce introduce en PAP, entre un interpretante “simbólico inicial” (*initial symbolic interpretant*), uno “dinámico o medio” (*dynamic or middle interpretant*), y uno “eventual o racional” (*eventual or rational interpretant*). De acuerdo con Short, el interpretante inmediato es una potencialidad y es el interpretante que corresponde a un entendimiento correcto del signo. Por otro lado, el interpretante dinámico es el interpretante efectivo de un signo en el acto de interpretación, que puede o no coincidir con el interpretante inmediato. Por último, el interpretante final es otra potencialidad, es el interpretante del signo al final de la investigación. Este interpretante es potencial, porque el término de la investigación es un punto inalcanzable, aunque progresivamente nos acerquemos a él (Short, 2007, p. 187).

La otra división tricotómica del interpretante que debemos considerar es la división entre un interpretante “emocional”, uno “energético” y otro “lógico”. El interpretante emocional es un sentimiento que provoca el signo como su efecto en una “cuasi-mente”.

56 Este punto será desarrollado con más detalle en el próximo capítulo.

Como veremos, en PAP la curiosidad aparece como un ejemplo de este tipo de interpretante. Por otra parte, el interpretante energético es una acción producida por el signo. Como ejemplo de este tipo de interpretante, en PAP encontramos la experimentación. Finalmente, el interpretante lógico es otro signo (Short, 2007, p. 200). En PAP íconos y símbolos aparecen como ejemplos de este tipo de interpretante.

Finalmente observemos que estas dos tricotomías no se excluyen. Así por ejemplo, el interpretante inmediato de un signo puede ser emocional, energético o lógico.

4.3.4. Deducción y experimentación diagramática

Peirce describe la deducción como un “laberíntico camino” que se inicia con la expresión simbólica de un teorema; sigue con la expresión diagramática de la hipótesis del teorema y su transformación; y culmina con la expresión simbólica de la conclusión. Este camino, asegura Peirce, es el único mediante el cual “es posible obtener Evidencia; y la Evidencia pertenece a toda Conclusión Necesaria” (NEM 4.319). Y es este camino el que explica la paradoja entre el carácter necesario del razonamiento matemático y la existencia de auténticos descubrimientos matemáticos.

Veamos como Peirce describe el proceso deductivo en PAP. El punto de partida es la expresión simbólica de un teorema. El interpretante inicial de esta expresión es un diagrama que expresa la hipótesis del teorema. Este diagrama representa un objeto general, por lo que, su interpretante inicial es otro símbolo. El interpretante dinámico o medio del diagrama es un estado de curiosidad que lleva a experimentar con el diagrama. Según la segunda de las dos divisiones tricotómicas del interpretante, mencionadas en la sección anterior, este interpretante podría ser considerado como un interpretante energético. La experimentación consiste en transformar el diagrama hasta observar la conclusión buscada. Estas transformaciones están contenidas en el diagrama como una posibilidad. El resultado de este

proceso es otro diagrama. El mismo es el interpretante eventual o racional del diagrama original. Finalmente, la conclusión se expresa de modo simbólico. Esta conclusión es el interpretante inicial del segundo diagrama.

It is not, however, the statical Diagram-icon that directly shows this; but the Diagram-icon having been constructed with an Intention, involving a Symbol of which it is the Interpretant (...). Now let us see how the Diagram entrains its consequence. The Diagram sufficiently partakes of the percussivity of a Percept to determine, as its Dynamic, or Middle, Interpretant, a state [of] activity in the Interpreter, mingled with curiosity. As usual, this mixture leads to Experimentation. It is the normal Logical effect; that is to say, it not only happens in the cortex of the human brain, but must plainly happen in every Quasi-mind in which Signs of all kinds have a vitality of their own. Now, sometimes in one way, sometimes in another, we need not to pause to enumerate the ways, certain modes of transformation of Diagrams of the system of diagrammatization used have become recognized as permissible (...). The transformate Diagram is the Eventual, or Rational, Interpretant of the transformand Diagram, at the same time being a new Diagram of which the Initial Interpretant, or signification, is the Symbolic statement, or statement in general terms, of the Conclusion. (NEM 4.318-9)

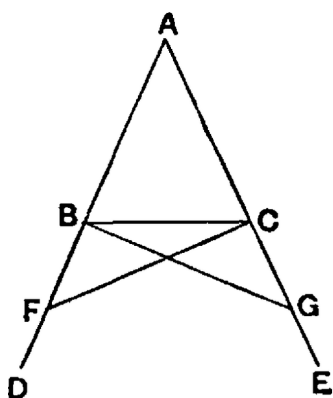
Para ilustrar este proceso podemos mencionar la demostración de la proposición 5 del libro 1 de los *Elementos* de Euclides. Esta proposición es uno de los ejemplos favoritos de Peirce. La deducción comienza en este caso con la expresión simbólica del teorema, según la cual en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales también son iguales⁵⁷. A esta expresión sigue la construcción del triángulo ABC (Figura 4.2). Esta figura es el

57 Ver p. e, NEM 4.205.

interpretante inicial de la hipótesis del teorema. La misma exhibe la forma de las relaciones que se asumen como dadas en esta hipótesis. El interpretante dinámico o medio de esta figura es la transformación del diagrama. El resultado de estas transformaciones es la figura obtenida seleccionando, primero, un punto arbitrario F sobre la línea AD, situado más allá de AB, y luego, trazando las líneas FC y GB, seleccionando G de modo tal que AF sea igual a AG. Este segundo diagrama es el interpretante eventual o racional de la figura ABC. Observando estas transformaciones se advierte que los triángulos AFC y AGB son iguales, según la proposición 4. De esto, a su vez, se sigue que los segmentos BF y CG también son iguales, según el axioma 3. Entonces, sobre la base de este resultado y apelando nuevamente a la proposición 4, se concluye que los triángulos BFC y CGB son iguales. Y de esto se sigue la igualdad entre los ángulos FBC y GCB. Finalmente, esta conclusión se expresa en términos generales. La misma es el interpretante inicial del segundo diagrama.

Figura 4.2

Igualdad de los ángulos opuestos a los lados iguales en un triángulo isósceles



Nota. Euclides, libro 1, proposición 5 (Heath, 1908, vol. 1, p. 251).

Este “laberíntico camino” es necesario para obtener evidencia debido a que el diagrama de la hipótesis del teorema no exhibe la tesis del teorema. No obstante, este diagrama contiene implícitas posibilidades de transformación que sí exhiben esta tesis. De

acuerdo con Peirce, “(...) el diagrama que resulta de la transformación (*transformate diagram*) está sustancialmente contenido en el diagrama que es transformado (*transformand diagram*)” (NEM 4.318-9)⁵⁸. Un diagrama es un signo que contiene información implícita, que se hace explícita “mediante un procedimiento más o menos complicado acompañado de observación” (Stjernfelt, 2000, p. 359). Es a través de este proceso dinámico de transformación de un diagrama que el razonamiento obtiene la evidencia que requiere. Y es esta concepción de la deducción la que permite resolver la paradoja entre la necesidad del razonamiento matemático y la existencia de auténticos descubrimientos matemáticos.

Para finalizar notemos que esta concepción del proceso deductivo es coherente con la visión de Cellucci acerca de la resolución de problemas. Efectivamente, de acuerdo con Cellucci la resolución de un problema no se reduce a hacer explícito aquello que se asume como dado en el planteo del problema. Además, requiere la adición de elementos que no están contenidos en estos supuestos. Y es justamente por este mismo motivo que Peirce plantea la necesidad de transformar el diagrama de las premisas del razonamiento. Veremos esto con más detalle en el próximo capítulo cuando nos ocupemos de la distinción entre deducción corolaria y deducción teoremaica.

Por otro lado, notemos que esta concepción también es coherente con la visión de Grosholz acerca del rol de la iconicidad en la resolución de problemas. Concretamente, la noción de diagrama, implícita en esta concepción del razonamiento deductivo, captura el tipo de iconicidad que interviene en la resolución de problemas, desde la perspectiva de Grosholz. Esta iconicidad es una iconicidad estructural. Por otra parte, la noción de diagrama es coherente con la visión de Grosholz de la iconicidad como un punto intermedio entre representar e intervenir. A su vez, esta misma noción de deducción revela el rol fundamental

58 “(...) the transformate Diagram is substantially contained in the transformand Diagram” (Peirce, 1906, (PAP), NEM 4.318-9).

de la manipulación de representaciones icónicas en la resolución de problemas. También para Peirce, los diagramas son como modelos de “lápiz y papel”. Finalmente, la concepción de la deducción de Peirce pone en primer plano la búsqueda de inteligibilidad como un elemento inherente al razonamiento matemático.

4.5. Las dos actividades comprendidas por la matemática

En 1870, Benjamin Peirce, padre de Charles Peirce, publicó un importante tratado titulado “*Linear Associative Algebra*”, que se inicia con su conocida definición de la matemática como “la ciencia que extrae conclusiones necesarias” (Peirce, 1870, p. 97)⁵⁹.

Charles Peirce compara esta definición con su propia concepción de la matemática, según la cual la matemática es el estudio de lo que es verdadero en un estado hipotético de cosas, y observa que ambas caracterizaciones coinciden, dado que sólo partiendo de hipótesis es posible arribar a consecuencias necesarias. Por el contrario, cuando se razona sobre hechos, sólo es posible arribar a conclusiones que poseen cierto grado de probabilidad.

Since it is impossible to draw necessary conclusions except from perfect knowledge, and no knowledge of the real world can be perfect, it follows that, according to this definition [B. Peirce] mathematics must exclusively relate to the substance of hypotheses. (Peirce, 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mahtematical Infinity*, NEM 4.265)

En esencia, afirma Peirce, ambas definiciones expresan el mismo concepto y es difícil decidirse por una u otra. La definición de su padre caracteriza la matemática desde el punto de vista del método: la extracción de consecuencias necesarias. Mientras que la suya desde el punto de vista de su interés y ámbito de incumbencia de la matemática: el estudio de la sustancia de ciertas hipótesis (Peirce, 1902, CP 4.228).

59 “(...) the science that draws necessary conclusions” (Peirce, 1870, *Linear Associative Algebra*, p. 97).

Pero a pesar del acuerdo fundamental entre ambos, Peirce plantea dudas acerca de si es posible limitar la matemática a la derivación de consecuencias necesarias. Desde luego, si la matemática sólo consistiera en deducir las consecuencias necesarias que se siguen de ciertas hipótesis, aparentemente la creación de importantes conceptos de la matemática debería considerarse como una actividad externa a la propia disciplina. Tales actos creativos, seguirían sin duda siendo considerados como una gran expresión del genio humano, tal vez del tipo “poético o creador”, pero no como un hito en la historia de la matemática (CP 4.229-43).

[I]t is an error to make mathematics consist exclusively in the tracing out of necessary consequences. For the framing of the hypotheses of the two-way spread of imaginary quantity, and the hypothesis of Riemann surfaces were certainly mathematical achievements (Peirce, 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mathematical Infinity*, NEM 4.268).

En *The Essence of Mathematics* reitera estas mismas dudas:

It is difficult to decide between the two definitions of mathematics; the one by its method, that of drawing necessary conclusions; the other by its aim and subject matter, as the study of hypothetical states of things. The former makes or seem to make the deduction of the consequences of hypotheses the sole business of the mathematician as such. But it cannot be denied that immense genius has been exercised in the mere framing of such general hypotheses as the field of imaginary quantity and the allied idea of Riemann's surface, in imagining non-Euclidean measurement, ideal numbers, the perfect liquid (...). Shall we exclude this work from the domain of mathematics? (Peirce, 1902, *The Essence of Mathematics*, CP 4.228-243).

La posición adoptada por Benjamin Peirce con respecto a esta cuestión, parece haber sido mantener que es asunto del lógico, y no del matemático, transformar una proposición empírica en una hipótesis matemática. En otras palabras, la formulación de las hipótesis que estudia la matemática no formaría parte de la actividad matemática. Aunque, Charles Peirce mantiene en este respecto un acuerdo mínimo con el planteo de su padre, se niega a aceptar que la formulación de tales hipótesis sea lógica aplicada, sobre la base de que la probabilidad empírica es irrelevante desde un punto de vista matemático (NEM 4.271). Su única coincidencia es la inclinación a considerar la creación de una hipótesis general basada en sugerencias empíricas como una actividad distinta de la derivación de consecuencias necesarias, aunque existan puntos de contacto.

Perhaps the definition of B. Peirce may be defended on the ground that the transformation of the suggestions of experience into exact mathematical hypotheses is effected by drawing necessary conclusions. The drawing of a necessary conclusion is by no means the simple act which it is commonly supposed to be, and among the acts of which it is made up there is some which would suffice or nearly suffice, to transform the result of experience into a mathematical hypothesis. The reply is that the two parts of the mathematician's functions are markedly dissimilar and therefore require to be distinguished in the definition (Peirce, 1895, *On Quantity, with Special Reference to Collectional and Mathematical Infinity*, NEM 4.271).

Por otra parte, Peirce considera que todo aquello que sea una parte indispensable para el desarrollo de la actividad matemática debe ser considerado como una parte intrínseca a la misma, y que por lo tanto debe ser mencionado en su definición. Así, refiriéndose a la definición de la matemática de su padre, afirma:

The only fault I should find with it is that if we conceive a science, not as a body of ascertained truth, but, as the living business which a group of investigators are engaged upon, which I think is the only sense which gives a natural classification of sciences, then we must include under mathematics everything that is an indispensable part of the mathematician's business; and therefore we must include the "formulation" of his hypotheses as well as the tracing out of their consequences. Certainly, into that work of formulation the mathematicians put an immense deal of intellectual power and energy. (Peirce, 1903, [*On Collections and Substantive Possibility*], PMSW 91)

En suma, Peirce arriba a una definición de la matemática que no es completamente equivalente a la definición de su padre, en tanto que considera que el estudio de las hipótesis, desde la perspectiva de la matemática, comprende dos actividades diferentes: la construcción de un estado hipotético de cosas y la derivación de consecuencias necesarias. Dos actividades que no se reducen a simples actos, y que a pesar de sus diferencias, comparten, de acuerdo con Peirce, rasgos comunes. Así pues, la definición de su padre sería demasiado restrictiva al excluir una de estas dos actividades, una tesis que como veremos a continuación ha sido cuestionada por Daniel Campos (2007).

4.5.1. Las definiciones de Benjamin y Charles Peirce

Campos (2007) ha cuestionado la distinción establecida en la definición de la matemática de Peirce entre la creación de un marco hipotético y la derivación de consecuencias necesarias. Campos plantea que esta distinción podría estar motivada por el interés de Peirce en la clasificación de las ciencias, como asimismo por su deseo de establecer la independencia de la matemática de las demás disciplinas, en particular de la lógica; pero que la misma entra en conflicto con su propio modelo de la investigación matemática. Efectivamente, como veremos en las secciones siguientes, de acuerdo con la propia

concepción del razonamiento matemático de Peirce, la deducción de consecuencias necesarias requiere la introducción de hipótesis, que Campos denomina experimentales, para diferenciarlas de las hipótesis que determinan el marco hipotético que es objeto de estudio. Luego, dado que la formulación de ambos tipos de hipótesis requiere una misma forma de creatividad, específica de la matemática, es mucho más coherente con la concepción global de la matemática de Peirce, así como con la práctica matemática, según Campos, considerar la formulación de un marco hipotético como una parte intrínseca del razonamiento matemático.

Observemos que de acuerdo con Peirce, el proceso que conduce de objetos y relaciones empíricas a una hipótesis matemática involucra distintas habilidades, tales como la generalización y abstracción, y que entre estas habilidades se destaca la capacidad creativa del matemático. En particular, la “creatividad matemática” se define como la habilidad de formar, reformar y transformar relaciones matemáticas corporizadas en diagramas. Esta habilidad, subraya Campos, no solo participa en la etapa inicial, cuando el matemático crea un nuevo estado hipotético de cosas, sino también posteriormente, cuando se derivan las consecuencias necesarias que se siguen de esas hipótesis.

Campos expresa el concepto de creatividad matemática, de acuerdo con Peirce, en los siguientes términos:

Strictly speaking, (...) *poietic* creation is not a reasoning method. In general, it is rather a mental activity that consists in originating signs in the imagination – in the case of mathematics, in conceiving the complex icons called “diagrams”.

Mathematical creativity consists in the ability to form, reform and transform mathematical relations as embodied in diagrams. (Campos, 2007, p. 445).

Esta habilidad se distingue, tanto de la creatividad artística como de la creatividad científica, por el tipo de restricciones a las que se encuentra sujeta. Con respecto a la creatividad artística, el mismo Peirce plantea la necesidad de establecer una clara distinción entre la formulación de hipótesis matemáticas y la actividad de escritores y poetas. Incluso, en diversas ocasiones sugiere que el artículo *Mathematics* de la novena edición de la Enciclopedia Británica, escrito por G. Chrystal, se dirige en la dirección correcta con respecto a delimitar el carácter específico de las hipótesis matemáticas (Peirce, 1895, 1898, 1902). Campos, por su parte, sugiere que la creatividad matemática se encuentra en un punto intermedio entre la creatividad científica y la creatividad artística. La primera limitada por restricciones mucho más severas que la segunda.

Frente a este argumento se podría objetar, siguiendo a Peirce, que aún cuando el planteo y la determinación de lo que implica una hipótesis, involucren la habilidad de crear y transformar un diagrama, de ello no se sigue que la creación de un estado hipotético de cosas sea una parte intrínseca del razonamiento necesario⁶⁰. Ahora bien, observa Campos – aunque a nuestro juicio no desarrolla suficientemente esta parte de su argumentación – no sólo los problemas empíricos motivan las hipótesis matemáticas. Por el contrario, ciertas hipótesis surgen a partir del desarrollo interno de la propia disciplina. Y en este caso, se disuelven los límites precisos entre plantear un marco hipotético y formular una hipótesis experimental.

Notemos que la distinción presente en la definición de la matemática de Peirce puede interpretarse no sólo como una distinción entre dos actividades distintas, sino también, y tal vez más claramente, como una distinción entre dos etapas sucesivas:

Thus, the mathematician does two different things: namely, he first frames a pure hypothesis stripped of all features which do not concern the drawing of consequences

60 Cf. NE 4:271, citado anteriormente.

from it, and this he does without inquiring or caring whether it agrees with the actual facts or not; and, secondly, he proceeds to draw necessary consequences from that hypothesis. (Peirce, 1898, *The Logic of Mathematics in Relation to Education*, CP 3.558)

Pero en ciertos casos, en los que las hipótesis se originan en el desarrollo de una rama de la matemática, la distinción entre dos etapas sucesivas y diferenciadas colapsa. Campos cita como ejemplo el origen de las geometrías no euclidianas, donde las hipótesis que luego dieron lugar al desarrollo de las geometrías elíptica e hiperbólica, nacieron del intento de demostrar la dependencia del quinto postulado de Euclides respecto de los otros cuatro. Así, a diferencia de la transformación de los resultados de la experiencia en una hipótesis matemática, en el caso de las geometrías no euclidianas resulta más problemático considerar la creación de un nuevo estado hipotético de cosas como una parte extrínseca del razonamiento necesario. En palabras de Campos:

This creation does not occur ex nihilo or in a void, so to speak, but in the context of a special sort of inquiry in which we ask, “what would be true of a world of such and such general character?” This special inquiry is a historical, communal process in which existing mathematical icons foster the creation or recreation of hypothetical states of things. The creation of the hypothetical space of Euclidean geometry, for instance, provides the context for imagining an alternative world in which we ask, “what if the fifth postulate does not hold?” This question leads to the creation of a pure mathematical hypothesis – namely non-Euclidean space – that the mathematician proceeds to explore according to her peculiar experimental method. (Campos, 2007, p. 481)

En conclusión, los argumentos que propone Campos relativizan la diferencia entre la definición de la matemática de Peirce y la de su padre, en virtud de la complejidad de la propia concepción del razonamiento deductivo de Peirce. De hecho, Campos considera que ambas definiciones son complementarias, o incluso que Peirce ofrece una definición dual de la matemática (Campos, 2010, p. 107). Siguiendo a Peirce, Campos plantea que una de ellas definiría la matemática desde el punto de vista del método, mientras que la otra desde el punto de vista del interés que persigue y su ámbito de incumbencia. Pero incluso, más allá de esta cuestión hermenéutica, la discusión en torno a la relación entre ambas definiciones revela la distancia que existe entre la concepción de Peirce y el enfoque ortodoxo de la matemática, de acuerdo con el cual la deducción se reduce a un simple proceso mecánico de derivación.

Conclusión

En este capítulo presentamos la visión de la matemática de Peirce a fin de mostrar que es coherente con la concepción heurística y que la misma nos ofrece un marco para abordar el estudio del razonamiento involucrado en la resolución de problemas. A este respecto, vimos en primer lugar, que Peirce al igual que Cellucci pone énfasis en la rica interacción entre problemas matemáticos y problemas extramatemáticos. La matemática tanto para Peirce como para Cellucci, es una actividad motivada por necesidades externas a la matemática. Por otro lado, vimos que la concepción del razonamiento deductivo, como un procedimiento que involucra la observación y la experimentación de un diagrama, es coherente con la concepción de Cellucci de la resolución de problemas. Efectivamente, tanto para Peirce como para Cellucci la resolución de problemas no se reduce al mero análisis de las premisas de razonamiento sino que requiere ir más allá de este análisis. Este es un aspecto que desarrollaremos con más detalle en el próximo capítulo.

Por otra parte, también notamos la coherencia entre la concepción diagramática de la deducción de Peirce y la visión de Grosholz acerca del rol de la iconicidad en la resolución de problemas. En primer lugar, notamos que la noción de diagrama, implícita en esta concepción del razonamiento deductivo, captura el tipo de iconicidad, que según Grosholz, interviene en la resolución de problemas matemáticos. Esta iconicidad, según Grosholz, es una iconicidad estructural y es la que la lleva a reconocer la dimensión icónica de las representaciones simbólicas. En segundo, lugar notamos que esta misma noción de diagrama es coherente con la concepción de Grosholz de la iconicidad como un punto intermedio entre representar e intervenir. La razón de ello es que, en la concepción de Peirce, la similitud no es fundamental para la representación diagramática. En tercer lugar, notamos que el rol de los diagramas en la deducción, desde la perspectiva de Peirce, es similar al de un modelo de “lápiz y papel”, modelo que permite ser manipulado, según Grosholz, para resolver problemas. Finalmente, notamos que la inteligibilidad es un ingrediente inseparable de la concepción del razonamiento de Peirce, algo que sobresale en su concepción de la deducción como una inferencia apoyada en evidencia que justifica el paso de las premisas a la conclusión.

V

Deducción corolaria y deducción teoremática

A simple vista las concepciones de Peirce y de Cellucci con respecto al razonamiento matemático pueden parecer contradictorias. Efectivamente, mientras que Peirce identifica el razonamiento matemático con el razonamiento deductivo, Cellucci rechaza tajantemente esta posibilidad. El razonamiento matemático, insiste Cellucci, es hipotético, experimental y observacional. Basta observar la práctica para comprobar no solo la semejanza entre el razonamiento matemático y el razonamiento científico, sino también el limitado rol que tiene la deducción en ambos casos. La deducción, subraya Cellucci, solo nos ayuda a hacer explícito el contenido de una hipótesis, pero es inútil para encontrar una hipótesis partiendo de un problema.

Sin embargo, desde la perspectiva de Peirce, el carácter hipotético, observacional y experimental del razonamiento matemático no se contraponen a su naturaleza deductiva. El hecho de que Peirce no vea aquí una incompatibilidad se debe a las diferentes perspectivas desde las que parten ambos. Mientras que Cellucci ve la deducción como una relación entre proposiciones, Peirce ve la deducción como un proceso. Concretamente, para Peirce la deducción es el proceso mediante el cual se determinan las consecuencias necesarias que se siguen de una hipótesis. Este proceso, advierte Peirce, no se reduce al mero análisis de los términos de una proposición. También exige, en ciertos casos, experimentar con un diagrama e introducir nuevas hipótesis. Este descubrimiento es justamente la base sobre la cual Peirce formula la distinción entre deducción corolaria y deducción teoremática, nombres que remiten a la distinción entre corolarios y teoremas en los *Elementos* de Euclides.

Peirce menciona por primera vez la distinción entre estas dos formas de deducción en 1901. Dicha mención tiene lugar en *Logic Notebook*, cuaderno de notas que Peirce llevó entre

1865 y 1909 (Stjernfelt, 2011, p. 362). Luego, en 1902 Peirce declara que la distinción entre deducción corolaria y deducción teoremaica es su primer descubrimiento de importancia con respecto a los procedimientos matemáticos (Peirce, 1902, NEM 4.49). Esta declaraci3n se encuentra plasmada en una solicitud presentada ante la *Carnegie Institution of Washington*, en d3nde Peirce solicita fondos para terminar la que ser3a una presentaci3n sistemática de su l3gica. Esta obra llevar3a el t3tulo de *Minute Logic*. Desafortunadamente, la solicitud fue rechazada y el proyecto qued3 inconcluso. Pese a este traspie, Peirce continu3 elaborando la distinción hasta su muerte. Sin embargo, debemos notar que los desarrollos de este per3odo son incompletos y est3n dispersos en distintos manuscritos (Stjernfelt 2013, p. 362).

En este cap3tulo intentaremos ofrecer una visi3n panorámica de los distintos esbozos que Peirce presenta de la distinción entre deducci3n corolaria y deducci3n teoremaica. El cap3tulo esta dividido en dos partes. La primera parte se ocupar3 de la noci3n de deducci3n corolaria, mientras que la segunda considera la noci3n de deducci3n teoremaica. Esta segunda parte es la m3s extensa y contendr3 un an3lisis m3s detallado de las distintas etapas que comprende la deducci3n teoremaica, as3 como su relaci3n con otras formas de razonamiento.

5.1. Deducci3n corolaria

Peirce ofrece al menos tres caracterizaciones distintas de la noci3n de deducci3n corolaria, no necesariamente equivalentes. Una identifica la deducci3n corolaria con el an3lisis de t3rminos. Otra limita la deducci3n corolaria a la sola acci3n de observar un diagrama y, finalmente, una tercera identifica la deducci3n corolaria con la acci3n de extraer lo que est3 impl3cito en resultados previos. Veamos con m3s detalle cada una de ellas.

Encontramos un ejemplo del primer tipo en *On the Logic of Drawing History from Ancient Documents Especially from Testimonies*⁶¹. Como dijimos, esta caracterización identifica la deducción corolaria con el análisis del significado de los términos de una proposición. En palabras de Peirce:

The corollaries are those reasonings by which all corollaries and the majority of what are called theorems are deduced... If you take the thesis of a corollary, - i.e. the proposition to be proved, and carefully analyze its meaning, by substituting for each term its definition, you will find that its truth follows, in a straightforward manner, from previous propositions similarly analyzed. (Peirce, 1901, EP 2.96)

Un ejemplo que ilustra esta forma de caracterizar la deducción corolaria es la demostración de que $7+5=12$ (NEM 4.59). De acuerdo con Peirce, esta proposición se sigue de la definición de los doce primeros números naturales y de la definición de suma. Peirce incluso observa que en este caso “no es necesario tomar en cuenta la definición general de un número entero” (NEM 4.59).

La demostración procede del siguiente modo: estipulando que “G” significa “el mayor inmediato de”, 12 se define como G11, 11 como G10, etc. Por su parte, la suma se define a partir de las siguientes igualdades: $Gx+y=G(x+y)$; $x+Gy=G(x+y)$; y $0+0=0$. Luego $7+5=12=G6+5=G11$, lo cual es implicado por $6+5=11$, ya que $G(6+5)=G11=G6+5$. A su vez, $6+5=11=G5+5=G10$, lo cual es implicado del mismo modo por $5+5=10$. Y así hasta $0+5=5$. Esto último a su vez es implicado por $0+4=4$, dado que $G(0+4)=G4=0+G4$. Y de este modo se llega aplicando las definiciones de los números correspondientes y de suma a $0+0=0$ lo cual es parte de la definición de suma (Peirce, 1902, *Parts of Carnegie Application (L75)*, NEM 4.58-9).

61 Definiciones similares del razonamiento corolario pueden encontrarse en (Peirce, 1901 NEM 4.1, Peirce 1907 MS [R] 318.48-9, 55).

De acuerdo con la segunda caracterización que hemos mencionado, Peirce define la deducción corolaria como aquella en la que basta observar el diagrama de las premisas para encontrar contenida la conclusión. Uno de los textos en los que Peirce ofrece este tipo de caracterización está en *Parts of Carnegie Application (L75)*. En palabras de Peirce, “la deducción corolaria es aquella en la que solo es necesario imaginar un caso en el que las premisas sean verdadera para percibir inmediatamente que la conclusión se mantiene en ese caso”(NEM 4.85)⁶². Como hemos visto, Peirce considera que la mayor parte de las proposiciones de Euclides y todos los corolarios, incluidos los 27 atribuidos a Euclides, son proposiciones de este tipo (NEM 4.1, NEM 4.214-5). Sin embargo, Peirce no menciona ningún corolario en particular para ilustrar la noción en este sentido. Tomemos, entonces, uno de los corolarios de la proposición I.32 de Euclides como ejemplo.

Según la proposición I.32 la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. Uno de los corolarios que se siguen de esta proposición es que “la suma de los ángulos interiores de una figura convexa rectilínea es igual a dos veces, tantos ángulos rectos como lados tenga la figura, menos cuatro” (Heath, 1908, vol. 1, p. 322)⁶³. Así, este corolario extiende el resultado de la proposición 1.32 a polígonos. El mismo se puede demostrar siguiendo dos caminos diferentes, según cómo se resuelva la figura (Figura 5.1). Apelando al primer diagrama (Figura 5.1, a), basta observar que el número de triángulos es igual al número de lados menos dos. Dado que según se ha establecido en I.32 la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos, de esto se sigue inmediatamente que la suma de los ángulos internos de la figura es igual al número de lados multiplicado por dos rectos,

62 “Corollarial deduction is where it is only necessary to imagine any case in which the premisses are true in order to perceive immediately that the conclusion holds in that case” (NEM 4.38). Caracterizaciones similares pueden encontrarse en (Peirce, 1909, NEM 3.869).

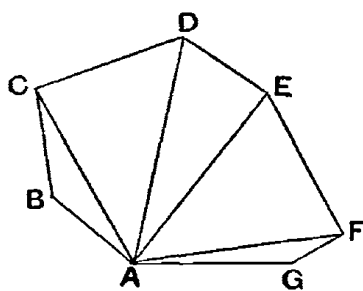
63 “The sum of the interior angles of a convex rectilinear figure is equal to twice as many right angles as the figure has sides, less four” (Heath, 1908, vol. 1, p. 322).

menos cuatro rectos (Heath, 1908, vol. 1, p. 322). Ahora bien, apelando a la segunda figura (Figura 5.1, b), observamos que el número de triángulos en los que se resuelve la figura es igual al número de lados y que la suma de los ángulos internos de la figura es igual a la suma de los ángulos de internos de los triángulos en los que se resuelve la figura menos la suma de los ángulos con vértice F. Luego, es un corolario de la proposición I.15 que esta suma es igual a cuatro rectos, por lo tanto la suma de los ángulos internos de la figura es igual a dos rectos multiplicados por la suma de los lados, menos cuatro rectos (Playfair, 1804, p. 33).

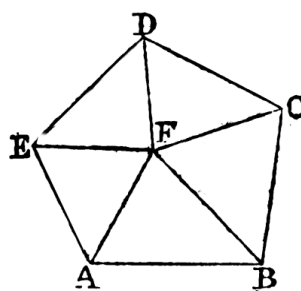
Figura 5.1

Suma de los ángulos internos de una figura rectilínea convexa

(a)



(b)



Nota. Euclides, Elementos 1.32, corolario. La figura *a* según Heath (1908, p. 322). La figura *b* según Playfair (1804, p. 33).

Notemos que las dos caracterizaciones que acabamos de considerar no son exactamente equivalentes. Como se ve a partir del último ejemplo, la observación de un diagrama no procede sólo a partir del análisis de términos, sino también a partir de resultados previos. Por otra parte, como es el caso de la proposición I.32 de los *Elementos*, algunos de estos resultados se demuestran de forma teorematizada. Por lo tanto, la demostración no podría retrotraerse al análisis de otras definiciones.

Esta observación anterior nos da pie para introducir la tercera caracterización de la deducción corolaria que ofrece Peirce. Según la misma, la deducción corolaria es aquella que

consiste en “mera explicación de lo que está implicado en resultados previos” (NEM 4.1). En vista del ejemplo anterior, esta última caracterización quizás sea más general, puesto que dichos resultados previos incluyen tanto definiciones como proposiciones demostradas de forma teorema. *tica*.

Encontramos una caracterización semejante en *Some Amazing Mazes* (Peirce, 1908). Partiendo de la división formal de las proposiciones de Euclides, Peirce afirma que la *apodeixis*⁶⁴ o demostración es una deducción corolaria.

This latter [ἀπόδειξις] contains mere corollarial reasoning, though, in consequence of it silently assuming the truth of all that has been previously proved or postulated ... this corollarial reasoning will sometimes be a little puzzling to a student who has not so thoroughly assimilated what went before as to have the approximate proposition ready to his mind (Peirce, 1908, p. 439)

Como vemos, en este contexto Peirce vuelve a caracterizar la deducción corolaria como aquella que recurre a la aplicación de resultados previos. Sin embargo, el interés principal de esta cita es que en ella Peirce también sugiere que la deducción teorema. *tica* contiene una parte que es corolaria. En consecuencia, según esto, la distinción entre deducción corolaria y teorema. *tica* no sería una distinción entre dos clases mutuamente excluyentes de deducción.

Finalmente, observemos que para demostrar el corolaria de la proposición I.32 es necesario construir un nuevo diagrama, distinto de aquel con el que se demuestra la proposición. Además, la figura se resuelve en triángulos de dos maneras distintas, con una consecuente variación en la demostración. Algo similar ocurre en el caso de la demostración de $7+5=12$. El diagrama se transforma cuando sustituimos los números por su definición. Así,

64 Según la geometría griega una proposición se divide formalmente en cinco elementos: ektesis, protasis, kataskeue, apodeixis, simperasma. (Heath, 1908, vol. 1, p. 129)

por ejemplo, la expresión anterior se convierte después del primer paso en $G6+5=G11$. De este modo, la deducción corolaria parece admitir ciertas transformaciones del diagrama de las premisas. Esto plantea la pregunta acerca de qué tipo de transformaciones distinguen a una deducción corolaria de una deducción teorematía. Una respuesta a este interrogante podría ser la que propone Stjernfelt, según la cual, estas dos formas de deducción formarían “un gradiente continuo más que dos clases mutuamente excluyentes” (Stjernfelt, 2011, p. 319).

5.2. Deducción teorematía

Al igual que ocurre con la noción de deducción corolaria, Peirce ofrece distintas caracterizaciones de la noción de deducción teorematía. Desde la perspectiva de Stjernfelt (2011), la caracterización básica de la deducción teorematía es negativa, es decir, Peirce define la deducción teorematía como aquella que excede los límites de la deducción corolaria (p. 325). De forma positiva, en cambio, Peirce caracteriza la deducción teorematía como “un tipo de razonamiento más demandante y creativo donde algunos nuevos elementos deben ser experimentalmente añadidos a las premisas antes de alcanzar la conclusión” (*ibid.*, p. 308)⁶⁵.

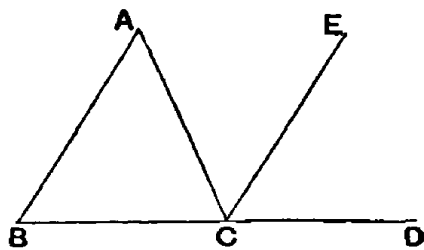
El ejemplo paradigmático de deducción teorematía son los teoremas de los Elementos de Euclides, de donde este tipo de deducción deriva su nombre. En particular el elemento distintivo de la deducción teorematía es la construcción (*kataskeue*), donde se añaden líneas a la figura, a fin de poder desarrollar la demostración. Estas líneas, que luego se descartan en la conclusión, no están contempladas en la condición del teorema. Por lo tanto, son elementos nuevos con respecto a las definiciones de los términos que aparecen en la proposición que se quiere demostrar.

65 “(...) a more demanding and creative type of reasoning where some new elements must be experimentally added to the premisses before reaching the conclusion” (Stjernfelt, 2011, p. 308).

Un ejemplo de este procedimiento es la proposición I.32 de los *Elementos*, que ya mencionamos en la sección anterior. De acuerdo con esta proposición, “si en cualquier triángulo, se extiende uno de sus lados, el ángulo exterior es igual a los dos ángulos interiores opuestos, y los tres ángulos interiores son iguales a dos rectos” (Heath, 1908, vol. 1, p. 316)⁶⁶. Para probar esta proposición, Euclides primero construye un diagrama (Figura 5.2). Este diagrama representa aquello que se asume como dado en el teorema, en este caso el triángulo ABC y la extensión CD del lado BC. Pero esto no es suficiente para demostrar el teorema. Antes es necesario transformar el diagrama. En este caso, Euclides añade la línea CE paralela a BA. Recién entonces es posible demostrar el teorema. La demostración procede del siguiente modo. Primero, Euclides demuestra que los ángulos BAC y ACE son iguales, apelando al hecho de que AC interseca las paralelas AB y CE y la proposición I.29 que establece que ángulos alternos son iguales. Luego, del mismo modo, demuestra que los ángulos ABC y ECD son iguales. Finalmente, puesto que la suma de los ángulos BCA, ACE y ECD es igual a dos rectos, Euclides concluye que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (Heath, 1908, vol. 1, pp. 316-7).

Figura 5.2

Suma de los ángulos interiores de un triángulo



Nota. Euclides, *Elementos* 1.32 (Heath, 1908, vol. 1, p. 317).

⁶⁶ “In any triangle, if one of the sides be produced, the exterior angle is equal to the two interior and opposite angles, and the three interior angles of the triangle are equal to two right angles” (Heath, 1908, vol. 1, p. 316).

En *The Essence of Mathematics*, Peirce (1902), encontramos justamente una caracterización general de todo el proceso involucrado en una deducción teoremaica, siguiendo las líneas de este ejemplo:

It is necessary to set down, or to imagine, some individual and definite schema, or diagram –in geometry, a figure composed of lines with letters attached; in algebra an array of letters of which some are repeated. This schema is constructed so as to conform to a hypothesis set forth in general terms in the thesis of the theorem...

[A]fter the schema has been constructed according to the precept virtually contained in the thesis, the assertion of the theorem is not evidently true, even for the individual schema; nor will any amount of hard thinking of the philosophers' corollarial kind ever render it evident. Thinking in general terms is not enough. It is necessary that something should be DONE. In geometry, subsidiary lines are drawn. In algebra permissible transformations are made. Thereupon, the faculty of observation is called into play. Some relation between the parts of the schema is remarked. But would this relation subsist in every possible case? Mere corollarial reasoning will sometimes assure us of this. But, generally speaking it may be necessary to draw distinct schemata to represent alternative possibilities. (CP 4.233)

Puntualicemos entonces los tres pasos que constituyen la estructura de la deducción teoremaica, de acuerdo con esta cita.

El primer paso es construir un diagrama de las premisas. Este diagrama debe exhibir todo aquello que se asume como dado en el enunciado de la proposición. El mismo está sujeto a dos requisitos, según Peirce: “debería haber algo muy similar en cada estado posible de cosas a los que sería aplicable la descripción hipotética de la tesis podría aplicarse” (*ibid.*)

y, por otra parte “no debe tener otros caracteres que puedan influir en el razonamiento” (*ibid.*).

Luego, el segundo paso es realizar algún tipo de acción. En esta cita Peirce menciona dos ejemplos, a saber, añadir líneas auxiliares a un diagrama geométrico, o realizar transformaciones permisibles en álgebra. Pero, como veremos, estas acciones son solo dos ejemplos ilustrativos. Estas acciones no se limitan a estas dos posibilidades, sino que comprenden una amplia variedad de procedimientos. En *Some Amazing Mazes* Peirce denomina a esta acción “paso teórico”.

I shall term the step of (...) introducing into a demonstration a new idea not explicitly or directly contained in the premisses of the reasoning or in the condition of the proposition which gets proved by the aid of this introduction, a *theō'ric step*. (Peirce, 1908, p. 436)

Esta acción tiene lugar en el curso de lo que en otros lugares Peirce denomina un experimento diagramático. Campos (2010) aclara este procedimiento indicando que en el curso de un experimento diagramático el matemático arriba a una “hipótesis experimental”, por ejemplo, que determinada reconfiguración del diagrama “corporeiza las relaciones formales deseadas”, y luego transforma el diagrama de acuerdo con esta hipótesis.

Finalmente, el tercer paso es observar si las relaciones buscadas efectivamente están corporizadas en el nuevo diagrama. Como Campos (2010) también subraya esta observación es “una actividad de razonamiento crítico informada por el conocimiento existente y guiada o enfocada por el objetivo del experimento” (p. 116).

En las secciones siguientes examinaremos con más detalle cada uno de estos pasos.

5.2.1. Razonamiento teoremató y razonamiento abductivo

Muchos autores han vinculado el “paso teórico” de la deducción teoremató con la abducción, estableciendo otro punto de contacto entre los procedimientos matemáticos y científicos. Por ejemplo, de acuerdo con Campos (2010), el proceso de experimentación con diagramas “es semejante a la abducción en las ciencias naturales” (p. 117). Del mismo modo, Ketner (1985) coincide con Campos, subrayando los vínculos entre la formulación de una hipótesis experimental y el razonamiento abductivo. Así, de acuerdo con Ketner, “es importante notar (...) que la producción de experimentos dentro del razonamiento teoremató, desde la perspectiva de Peirce, se hace a través de la abducción, la clase de razonamiento que resulta en la generación de una hipótesis para una prueba futura” (Ketner, 1985, p. 411)⁶⁷. Por último podemos citar a Stjernfelt como otro de los autores que ha detectado los referidos vínculos entre deducción teoremató y abducción. De acuerdo con Stjernfelt:

An important issue (...) -both related to the "addition of new elements or foreing ideas" and to the "experiment" aspects- is the relation between theorematic reasoning and abduction. A finished piece of theorematic reasoning, of course, is deductive -the conclusion follows with necessity from the premisses. But in the course of conducting the experiment, an abductive phase appears when investigating which experimental procedure, among many, to follow; which new elements or foreing ideas to introduce. This may require repeated, trial-and-error abductive guessing, until the final structure of the proof is found – maybe after years or centuries. Exactly the fact that neither premisses nor theorem needs to contain any mentioning of the experiment or the

67 “It is important to note (...) that the production of experiments within theorematic reasoning, on Peirce view, is done through abduction, the kind of reasoning that results in generation of a hypothesis for future test” (Ketner, 1985, p. 411).

introduction of new elements makes the abductive character of experimentation clear. Of course, once the right step has been found, abductive searching may cease and the deductive character of the final proof stands out. (Stjernfelt 2013, pp. 318-9)

A fin de situarnos en este debate, repasemos brevemente el desarrollo del concepto de abducción.

La noción de razonamiento abductivo evolucionó con el tiempo. En un principio, Peirce superpuso esta noción con la de inducción, considerando ambas como distintas formas de determinar la probabilidad de una hipótesis (Peirce, 1878). Pero finalmente, diferenció los dos conceptos. La abducción dejó de ser una fuente de evidencia para transformarse en el primer paso de la investigación empírica: la generación de una hipótesis explicativa (Anderson, 1986). Peirce caracteriza formalmente este paso como una inversión del *modus ponens*. Así, el punto del que parte la abducción es un hecho curioso y problemático, y el supuesto de que ese hecho se explicaría a partir de cierto estado de cosas. Y el resultado es una hipótesis plausible que explica ese hecho, pero sujeta a una posterior comprobación inductiva (CP5.180).

Peirce cita el siguiente ejemplo: entramos a una despensa y encontramos un puñado de porotos sobre una mesa. Como este hecho despierta nuestra curiosidad, observamos a nuestro alrededor y descubrimos que en uno de los estantes hay una bolsa de porotos abierta. Entonces, dado que la presencia del puñado de porotos se explicaría si hubieran sido tomados de esa bolsa, inferimos como una hipótesis plausible que los porotos provienen de esa bolsa (Peirce, 1878, CP 2.623). Debemos advertir que la conclusión a la que arribamos en este caso sólo posee un carácter hipotético. Es una explicación plausible de un hecho problemático. Pero la abducción no determina la probabilidad de esta hipótesis. Para determinar si una hipótesis plausible también es probable debemos apelar al razonamiento inductivo. La

función del razonamiento abductivo es generar hipótesis explicativas no aportar evidencia a favor de una hipótesis.

Ahora bien, podemos observar marcadas similitudes entre el paso teórico de una deducción teorema y esta caracterización del razonamiento abductivo. En un caso, el punto de partida es un hecho que requiere explicación; en el otro, un problema o un teorema que requiere ser demostrado. Luego, se asume cierta conjetura. En un experimento diagramático, la conjetura es que ciertas transformaciones permitirían arribar al resultado buscado. De forma análoga, en el razonamiento abductivo la conjetura es que ciertas condiciones explicarían un hecho problemático. Finalmente, en ambos casos la conclusión es una hipótesis plausible que debe ser evaluada. Esta evaluación se realiza en las ciencias empíricas mediante métodos inductivos, mientras que en la matemática se procede observando un diagrama.

Sin embargo, a pesar de estas similitudes también hay diferencias. Por ejemplo, la relación entre hipótesis explicativa y hecho problemático no es análoga a la relación entre hipótesis experimental y problema matemático. En el primer caso, la hipótesis es una explicación posible del hecho en cuestión, solo se plantea como una conjetura la aplicación de esta hipótesis al caso particular. Volviendo al ejemplo citado por Peirce, el origen de los porotos que encontramos sobre la mesa efectivamente se explicaría si alguien los hubiera sacado de la bolsa que hay en la despensa. Pero, dado que los porotos podrían haber salido de otro lado, no es seguro si la hipótesis explica estas circunstancias concretas. Por el contrario, en el caso de un problema matemático, la hipótesis experimental es o no es una condición suficiente para resolver el problema. Por lo tanto, la conjetura no se refiere a la aplicación de la hipótesis al problema, sino a la relación misma entre la hipótesis y el problema.

En vista de estas consideraciones, nos inclinamos a pensar que los dos procesos de razonamiento aquí mencionados pertenecen a distintas “especies de conjetura creativa”, tal como sugiere Campos (2010). En consecuencia, entre dichas especies podremos encontrar grandes similitudes pero también marcadas diferencias. En una nota al pie Campos introduce su punto de vista, con el cual coincidimos:

I do not mean to suggest that experimental hypothesis-making in mathematics is exactly the same as scientific abduction. There are similarities, but there are also relevant differences resulting from the different constraints placed upon reasoning by the mathematical and scientific objects of study and, especially, from the different aims of mathematical and scientific activity. My view is that there are various interrelated species of creative conjecturing in mathematics and the sciences.

(Campos 2010, p. 127, nota 26)

Como afirma Campos, este es un tópico que exige una investigación separada.

5.2.2. Paso teórico, restricciones y creatividad

La imaginación, según Peirce, es la capacidad de crear formas complejas. En sus palabras, la imaginación es “the power of distinctly picturing ourselves intricate configurations” (MS [R] 252, s.d., citado por Campos, 2010, p. 110). En el caso de la matemática es la capacidad de crear y transformar un diagrama. Es una facultad esencialmente creativa. Con respecto a su rol en la matemática, Campos (2010) observa que para Peirce “the imagination is the primary necessary epistemic condition of innovative mathematical reasoning” (p. 110). Sin esta capacidad, subraya Campos, el razonamiento matemático no sería posible. Efectivamente, la matemática depende de la imaginación en dos planos fundamentales. Por un lado, es necesaria para crear un estado hipotético de cosas. Y por otro, es necesaria para explorar ese mundo hipotético. En este último caso, la imaginación

es la facultad con la que se crean las hipótesis experimentales que luego el matemático introduce en el curso de una demostración teoremaica.

Ahora bien, esta facultad no opera en el vacío sino que se mueve dentro de ciertos límites. Al explorar un estado hipotético de cosas, la imaginación está sujeta tanto a las reglas de lo lógicamente posible, como a lo que implican las hipótesis adoptadas. En el caso de la geometría de Euclides, por ejemplo, estos límites están marcados por los axiomas, que niegan ciertas posibilidades, y por los postulados, que afirman ciertas posibilidades (NEM 4:8). Estos límites, sin embargo, no entran en conflicto con el hecho de que la matemática, según Peirce, “exige el ingenio más profundo, la imaginación más atletica (...) en comparación con la cual las realizaciones diarias (...) parecen simplemente débiles” (Peirce, 1908, 345)⁶⁸.

En un extenso pasaje de *Some Amazing Mazes* (Peirce, 1908), al cual pertenece la cita anterior, Peirce se explaya al respecto. Allí plantea enfáticamente que el razonamiento necesario dista de estar “limitado a una elección estrecha entre procesos cuasi-mecánicos” (*ibid.*, p.434). Aún más, considera una de las “herejías lógicas” más “malignas”, justamente afirmar que el razonamiento necesario “no puede desviarse más que una buena máquina puede desviarse de su propio modo de acción, y que su trabajo futuro puede concebiblemente ser dejado a una máquina -alguna máquina analítica de Babbage o alguna máquina lógica (*ibid.*, p. 434)⁶⁹. La concepción de que el razonamiento necesario es incompatible con la originalidad, nos explica Peirce, surge cuando se olvida que la originalidad “es una cuestión de *forma*, del modo en el que partes ninguna de las cuales la posee son puestas juntas (*ibid.*,

68 “(...) calls for the profoundest invention, the most athletic imagination... in comparison to whose every-day performances... seem simply puny” (Peirce, 1908, 345).

69 “(...) can no more deviate than a good machine can deviate from its proper way of action, and that its future work might conceivably be left to a machine -some Babbage’s analytical engine or some logical machine” (Peirce, 1908, p. 434).

p. 435)⁷⁰. En el próximo capítulo abordaremos con mayor profundidad este importante aspecto.

5.2.3. Tipos de pasos teóricos

Distintas caracterizaciones e ilustraciones de la noción de deducción teoremaica refieren a distintos tipos de pasos teóricos. La razón por detrás de esta divergencia quizás sea el carácter inacabado de esta noción. Peirce mismo consideraba que dichas caracterizaciones eran solo un esbozo, y que la exploración histórica de las distintas formas que puede adoptar un paso teórico, en la práctica matemática, era una tarea aún pendiente (Peirce, 1908, p. 438). Frente a esta diversidad, Stjernfelt (2011) ha agrupado las diferentes caracterizaciones que ofrece Peirce según el tipo de paso teórico invocado en ellas. En la presente sección, apoyándonos en la sistematización de Stjernfelt, haremos un repaso por los tres tipos de pasos teóricos más generales considerados por Peirce.

En diversos pasajes la distinción entre deducción corolaria y deducción teoremaica se basa, como observa Stjernfelt, en la necesidad de introducir un elemento externo con respecto a las premisas. El caso típico es la introducción de líneas auxiliares en las demostraciones geométricas, como vimos en el caso de las proposiciones I.5 y I.32 de los *Elementos*. Así, en algunos de estos pasajes los elementos invocados son “individuos” o instancias particulares de objetos generales, “la existencia de los cuales está garantizada por el universo del discurso” (EP 2.96). Dichos elementos se introducen, según Peirce, a través de un lema, *i. e.*, “una proposición demostrable fuera de la materia de investigación” (EP 2.96). Pero otras veces los elementos mencionados son “definiciones” o “ideas externas” (*foreign ideas*), o

70 “(...) is an affair of form, of the way in which parts none of which possess it are joined together (Peirce, 1908, p. 435).

“abstracciones” (EP 2.96). En este contexto, no resulta claro si la novedad se limita a aquello que garantiza el universo del discurso o puede ir más allá de eso.

Como ilustración, además de las demostraciones geométricas, en las que el paso teórico consiste en introducir ciertas líneas, otro ejemplo citado por Peirce es el uso de ideas externas en una prueba. Tal es el caso, por ejemplo, de la demostración de que “toda multitud es menor que una multitud” (NEM 4.5). Efectivamente, esta proposición, nos dice Peirce, no puede ser demostrada mediante la sola aplicación de las definiciones de conjunto, y de la relación “poseer menos elementos que” entre conjuntos (NEM 4.5). También es necesario introducir una idea externa. Dicha idea desempeña un rol análogo al de la construcción en una prueba geométrica (NEM 4.8).

La demostración que ofrece Peirce parte de dos postulados. El primero es que “todo aquello que es descriptible y distinguible, digamos, por un deseo o una fantasía, es una colección”, mientras que el segundo es que “si alguna cosa o cosas se añaden o se quitan de una colección esta se transforma en una nueva colección” (NEM 4.5-6)⁷¹. En particular, aclara Peirce, “nada, o ningún Xs debe contarse entre las posibles colecciones de Xs ” (NEM 4.5-6)⁷². Luego, la demostración procede por reducción al absurdo. Supongamos que X es el mayor de todos los conjuntos, y que X' es el conjunto de todos los posibles conjuntos formados con elementos de X . Por definición X' es menor que X si y solo si (a) toda relación R que vincule cada elemento de X con algún elemento de X' es tal que no existe para todo $x \in X$ un $x' \in X'$ con el que ningún otro elemento de X se relacione por R ; y (b) hay una relación R' que relaciona todo elemento de X' con un elemento de X , tal que para cada $x' \in X'$ hay un $x \in X$ con el que ningún otro elemento de X' se relaciona mediante R' .

71 “[E]very describable and distinguishable subject, we will say, for a wish or fancy, is a collection; and if any thing or things be added to or taken from the collection it becomes a different collection” (NEM 4.5-6).

72 “[N]othing, or no Xs is to be reckoned among the possible collections of Xs ” (NEM 4.5-6).

Para demostrar que (a) no se cumple entre X y X' , Peirce muestra que hay al menos una relación, R , que vincula a cada elemento de X con un elemento de X' con el que no está vinculado ningún otro $x \in X$, a saber, la relación que vincula cada elemento de X con el conjunto formado a partir de la exclusión de ese mismo elemento del conjunto X . En este caso para todo $x \in X$ existe un $x' \in X'$ con el que ningún otro elemento de X se relacione por R .

Luego, para demostrar que (b) no se cumple entre X' y X , Peirce define un $x_s' \in X'$ tal que:

$x \in x_s'$ sii hay un $x' \in X'$ tal que $x'R'x$ y $x \notin x'$, y

$x \notin x_s'$ sii hay un $x' \in X'$ tal que $x'R'x$ y $x \in x'$.

Ahora bien, de acuerdo con (b) hay un elemento $x_a \in X$ tal que $x_s'R'x_a$. Entonces, si $x_a \notin x_s'$, de acuerdo con la primera cláusula, x_a debería pertenecer a x_s' , lo cual es contradictorio. Y del mismo modo, si $x_a \in x_s'$, entonces, de acuerdo con la segunda cláusula, no debería pertenecer a x_s' , lo cual también resulta contradictorio. Por lo tanto, Peirce concluye que tampoco existe tal relación R' . Y de esto se sigue que los elementos de X son menos que los elementos de X' y que “toda colección es menor que alguna otra [colección]” (NEM 4.6).

La idea externa que Peirce introduce en esta demostración es la de “la colección de todas las posibles colecciones de miembros de una colección” (NEM 4.11). Esta idea, según Peirce, es una abstracción, es decir, “un objeto cuyo ser consiste en hechos acerca de otras cosas” (NEM 4.11)⁷³. La importancia de la abstracción en el razonamiento teoremató se evidencia a partir del hecho de que, de acuerdo con Peirce, el razonamiento teoremató se puede subdividir en “no abstractivo” (*non-abstractional*) y abstractivo (*abstractional*) (NEM

73 “[A]n object whose being consists in facts about other things” (NEM 4.11).

4.49). Sin embargo, queda abierta la pregunta acerca de si, la deducción teoremaática basada en la abstracción comprende todos los casos en los que se introducen ideas externas (Stjernfelt 2011, p. 316).

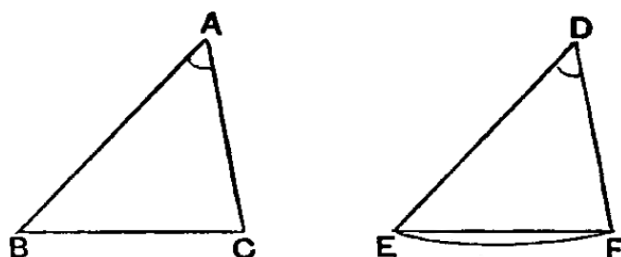
Por otra parte, en un segundo conjunto de pasajes, Peirce indica que el elemento distintivo de la deducción teoremaática es la necesidad de realizar un “experimento ingenioso” sobre el diagrama de las premisas, para luego, observando el resultado, descubrir relaciones que explícitamente no habían sido mencionadas. En algunos de estos pasajes la introducción de instancias particulares es presentada como un tipo de experimento diagramático. Un ejemplo frecuente en estos casos vuelve a ser la construcción en los teoremas de Euclides (p. e., CP 4.233, NEM 4.206, entre otros). En otros pasajes, sin embargo, Peirce se refiere a estos experimentos como “acciones realizadas sobre el diagrama”, sin que estas acciones involucren la introducción de algún elemento externo. Un ejemplo al respecto es la acción de “seguir la trayectoria a lo largo de una curva”, caso que podemos encontrar en un borrador de las *Lowell Lectures* (MS [R] 456) (Stjernfelt, 2011, pp. 316-9). Otro ejemplo de este tipo aparece en *Reason's Conscience* (1904). Este texto tiene además la particularidad de que en él se ilustran las dos formas de experimentación anteriormente mencionadas. Los ejemplos seleccionados por Peirce en este caso son las proposiciones I.4 y I.5 de los *Elementos* (NEM 4.203). Justamente, en la proposición I.4 el núcleo del proceso de experimentación consiste en superponer una figura sobre otra sin introducir ningún elemento nuevo.

En este último caso la proposición establece que si un triángulo posee dos lados iguales a los de otro triángulo, y si los ángulos determinados por los lados correspondientes de cada triángulo también son iguales, entonces ambos triángulos son iguales. Para demostrar esta proposición, primero, Euclides construye un diagrama de las premisas (Figura 5.3), y luego, “superpone” los lados AB y DE, y AC y DF de las figuras. Finalmente, la igualdad

entre los triángulos se demuestra apelando a la noción común 4, *i. e.*, “cosas que coinciden una con otra son iguales entre sí” (Heath 1908, p. 155)⁷⁴.

Figura 5.3

Igualdad entre triángulos según Euclides



Nota. Euclides, Elementos, libro I, proposición 4 (Heath, 1908, vol. 1, p. 247).

Notemos que algunas de las restricciones a las que está sujeta la experimentación diagramática en este caso se encuentran implícitas. Efectivamente, Peirce observa que el procedimiento utilizado aquí por Euclides, conocido como método de aplicación de áreas, se apoya en ciertos postulados implícitos acerca de la naturaleza del espacio (NEM 4.204)⁷⁵.

Finalmente, encontramos un tercer tipo de paso teórico en lo que Peirce denomina la “transformación teórica” (*theoric transformation*) de un diagrama. Como en el caso anterior, en este caso tampoco se añade ningún elemento externo, sino que el paso teórico consiste en un cambio de interpretación del diagrama. El ejemplo paradigmático, a este respecto, es la resolución del teorema de Desargues, que Peirce denomina el “problema de los diez puntos” (*ten point problem*).

El problema puede ser enunciado de este modo: si seleccionamos tres líneas arbitrarias en un plano, las cuales se intersectan en un mismo punto, que podemos llamar *o*, y

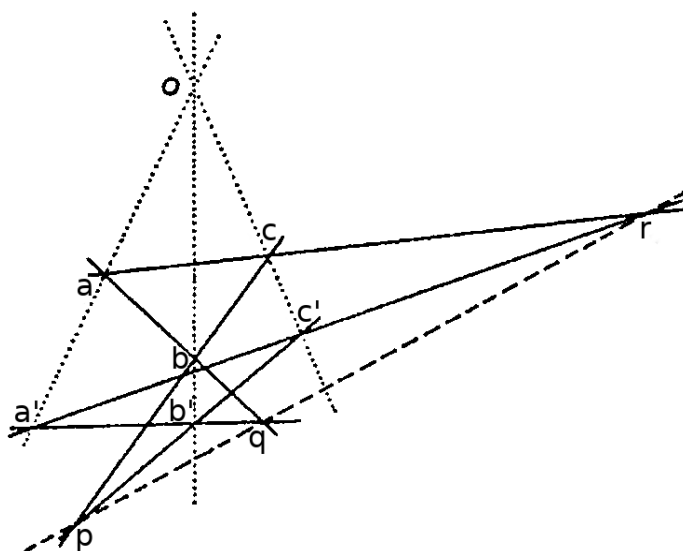
⁷⁴ “[T]hings which coincide with one another are equal to one another” (Heath 1908, p. 155).

⁷⁵ De acuerdo con Heath (1968), en la proposición 14, Euclides emplea, no sin reticencia y por primera vez, el método de aplicación de áreas (p. 249).

luego se seleccionan dos puntos arbitrarios sobre cada una de ellas, a saber, los puntos a y a' sobre la primera, los puntos b y b' sobre la segunda, y los puntos c y c' sobre la tercera, entonces las líneas ab y $a'b'$ se intersectarán en un punto q , las líneas ac y $a'c'$, en un punto r , y las líneas bc y $b'c'$ en un punto p , y estos tres puntos de intersección se encontrarán sobre una misma línea (Figura 5.4).

Figura 5.4

Teorema de Desargues o problema de los diez puntos



Nota. El teorema de Desargues según Peirce (1875), *Elements of Mathematics* (NEM 2.212)

Peirce atribuye a von Staud el hallazgo de la solución al problema. Según Peirce, Von Staud se dio cuenta de que el diagrama podía ser interpretado como una configuración en la que las líneas aa' , bb' y cc' se encuentran en distintos planos. Y de esto, observa Peirce, la solución se sigue corolariamente (MS[R] 318, *Pragmatism*, 1907, citado por Hoffmann 2010, p. 582). Para ver cómo procede esta demostración, sigamos los pasos de la demostración que Peirce ofrece de este teorema en los *Elements of Mathematics* (1875). La demostración se divide en dos partes. Asumiendo que las líneas aa' , bb' y cc' no se encuentran en un mismo

plano, la primera parte consiste en mostrar que los puntos p , q y r se encuentran en una misma línea. Esto se demuestra del siguiente modo. Dado que las rectas ab y $a'b'$ se encuentran en el plano $a'ob'$, ambas rectas se intersectan en q . Luego, dado que ab se encuentra en el plano abc , y $a'b'$ en el plano $a'b'c'$, el punto q se encuentra en la intersección de estos dos planos. De modo análogo se demuestra que los puntos r y p se encuentran en la intersección de los planos abc y $a'b'c'$, y de esto se sigue que p , q y r se encuentran en una misma línea. La segunda parte simplemente consiste en considerar la configuración plana como el límite de la configuración sólida cuando los dos planos se aproximan entre sí (NEM 2.211-217).

Para cerrar esta sección, notemos que los tres tipos de pasos teóricos que someramente hemos examinado ofrecen indicios de la amplia variedad de formas que puede adquirir una deducción teorema. A este respecto, consideramos oportuno volver a remarcar el carácter inacabado de la noción de deducción teorema y el lugar que podría ocupar una investigación de casos históricos en el perfeccionamiento de esta noción, algo que Peirce mismo consideraba fundamental. Aún más, según sus propias palabras, esta investigación debería concentrarse en “todos los pasos dignos de mención y clases notables de pasos teóricos” (Peirce, 1908, p. 438), y no debería reducirse a “una mera narrativa, sino a un examen crítico” (*ibid.*). En último término, tal estudio permitiría construir “una clasificación lógica de los diferentes pasos teóricos” (*ibid.*), y finalmente desarrollar una “metodéutica del razonamiento necesario” (*ibid.*)⁷⁶.

76 “I wish a historical study were made of all the remarkable theoretic steps and noticeable classes of theoretic steps. I do not mean a mere narrative, but a critical examination of just what and of what mode the logical efficacy of the different steps has been. Then, upon this work as foundation, should be erected a logical classification of theoretic steps; and this should be crowned with a new methodéutic of necessary reasoning” (Peirce, 1908, p. 438).

5.2.4. Observación

Según el esquema que presentamos en la segunda sección de este capítulo, una vez dado el paso teórico, es necesario observar el diagrama para comprobar si las transformaciones producidas permiten efectivamente resolver el problema. También mencionamos, en la misma sección que, de acuerdo con Campos, esta observación es una “actividad de razonamiento crítico informada por el conocimiento existente y guiada o enfocada en el propósito del experimento” (Campos, 2010, p. 116). Ahora bien, ¿cómo debemos entender más concretamente esta actividad de razonamiento crítico?

Una respuesta a esta pregunta podría hallarse si tomamos en cuenta aquellos pasajes en los que Peirce distingue una parte corolaria en el razonamiento teoremático⁷⁷, y si, en este contexto, entendemos “corolario” en un sentido amplio. Es decir, si entendemos por razonamiento corolario aquella forma de deducción que apela tanto al análisis de términos como todas las proposiciones previamente demostradas. Entonces esta actividad de razonamiento crítico se podría acomodar al esquema regla-caso-resultado con el cual Peirce suele caracterizar el razonamiento deductivo. Así, por ejemplo, en la demostración de la proposición I.32 (Figura 5.2), Euclides parte de la proposición I.29 (regla) y de la observación de que “*AB* is parallel to *CE*, and *AC* has fallen upon them” (caso) para concluir que los ángulos *BAC* y *ACE* son iguales (resultado) (Heath, 1908, vol. 1, p. 317).

⁷⁷ Otro pasaje que expresa esta idea, además del pasaje citado en la primera sección de este capítulo, es el siguiente: "I formely, quite dubiosly, divided Deductions into the Corollarial & the Theorematic. Explain these. Deduction will better be called Demonstration. But further study leads me to lop off a corollarial part from the Theorematic Deductions, which follows that part that originates a new point of view. (MS[R] 754, notes for a talk to the Phil. Club, April 12, 1907, citado por Stjernfelt 2013, p. 321).

Uno de los pasajes finales del texto *Reason Conscience* (1904), en el que Peirce sintetiza los hechos relativos a esta fase de la deducción teoremaica, parece apuntar en esta direccin.

Of course, the unfailing universality of the mathematician's conclusions are due to every conclusive step being evidently nothing but the application of a plain rule to a manifest instance under that rule. In that sense, those logicians are quite right who say that the mathematician's whole inferential proceeding is of the type called *Barbara*, or the form of

Any M is P ;

S is an M ;

$\therefore S$ is P .

On the other hand, the very same general fact justifies those who say that all the mathematician's reasoning consists in observation; for whatever is "evident", or "plain", or "manifest" is so only to observation of it. (Peirce, 1904, *Reason Conscience*, NEM 4.214)

Siendo esto as, debemos notar que la segunda premisa de este esquema se basa en la observacin de las relaciones exhibidas por el diagrama. Por otra parte, debemos notar que estas relaciones son generales, y por lo tanto admiten un rango completo de variaciones. En el caso de la proposicin I.32 (Figura 5.2), el ngulo BAC , por ejemplo, puede variar en correlacin con otros cambios en la figura. Este hecho hace que sea necesario explorar el rango de todas las posibles variaciones de un diagrama. A este respecto, Peirce mismo aclara que dado que este rango se encuentra dentro de lo que es posible imaginar, este examen no presenta, en principio, dificultades.

Ahora bien, este proceso exploratorio se asemeja a un proceso inductivo. Así, por ejemplo, Campos señala que el matemático “puede repetir el experimento, para convencerse a si mismo de que el resultado experimental que ha observado puede ser generalizado en un teorema” (Campos, 2007, p. 447). Del mismo modo se expresa Peirce, confirmando esta concepción en varios pasajes, por ejemplo, en el siguiente texto:

This is a proceeding extremely similar to induction, from which, however, it differs widely, in that it does not deal with a course of experience, but with whether or not a certain state of things can be *imagined*. Now, since it is part of the hypothesis that only a very limited kind of condition can affect the result, the necessary experimentation can be very quickly completed; and it is seen that the conclusion is compelled to be true by the conditions of the construction of the diagram. (Peirce, 1902, CP 2.778)⁷⁸

También se expresa de este modo en *Parts of Carnegie Application* (1902), dónde subraya que “el juicio es el resultado de un proceso físico de experimentación, considerablemente similar a la inducción. Pero difiere de cualquier otra clase de razonamiento en no estar sujeto a control” (Pierce, 1902, *Parts of Carnegie Application*, NEM 4.42)⁷⁹.

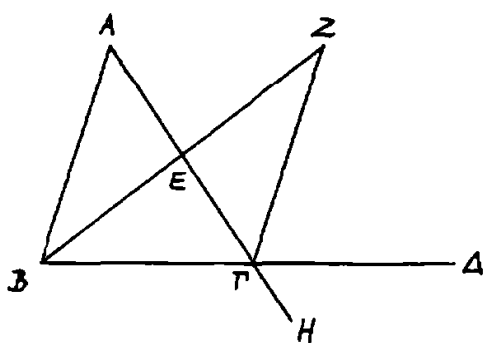
78 4th, by repeating the experiment, or by the similarity of the experiment to many others which have often been repeated without varying the result, the reasoner infers inductively, with a degree of probability practically amounting to certainty, that every diagram constructed according to the same precept would present the same relation of parts which has been observed in the diagram experimented upon. (MS[R] 15, 1895, citado por K. L. Ketner, Peirce and Turing: comparisons and conjectures, p. 48)

79 “(...) the judgement is the result of a physical process of experimentation, considerably like an induction. But it differs from any kind of reasoning in not being subject to control” (Pierce, 1902, *Parts of Carnegie Application*, NEM 4.42).

En este último texto también plantea que el único obstáculo que podría frustrar este proceso es la falta de atención, ignorando alguna de las variaciones posibles del diagrama. Peirce ofrece un ejemplo de este tipo citando la proposición I.16 de Euclides. Veamos este ejemplo. De acuerdo con la proposición I.16 si se extiende uno de los lados de un triángulo, el ángulo exterior es mayor que los ángulos opuestos. Es decir, el ángulo $A\Gamma\Delta$ es mayor que los ángulos $AB\Gamma$ y $BA\Gamma$ (Figura 5.3). Para demostrar este teorema, Euclides primero biseca $A\Gamma$ en E , a continuación une los puntos B y E con una recta y extiende BE hasta Z , de modo tal que $BE=EZ$. Y finalmente une los puntos Z y Γ con una recta. Esta construcción es el “paso teórico” de la deducción. Luego sigue la parte corolaria, dónde se apela a la observación del diagrama. De acuerdo con Euclides, dado que los triángulos ABE y ΓEZ son iguales (prop. 4), los ángulos BAE y ETZ también son iguales. Por otra parte, ETZ es una parte de $E\Gamma\Delta$. Por lo tanto, $A\Gamma\Delta > BA\Gamma$. Y de modo similar, Euclides prueba que $A\Gamma\Delta > AB\Gamma$, bisecando el lado $B\Gamma$.

Figura 5.3

Ángulo exterior y los ángulos interiores opuestos de un triángulo



Nota. Euclides, Elementos I.16 según Peirce (NEM 4.43).

En la construcción Euclides solo invoca los primeros dos postulados. Pero ninguno de estos postulados, observa Peirce, excluye el caso que ilustra la siguiente figura (Figura 5.4). Lo cual se pone en evidencia desde el punto de vista ventajoso que ofrece el análisis de

Conclusión

En este capítulo intentamos ofrecer una visión panorámica de la distinción entre deducción corolaria y deducción teoremaica. El objetivo fue mostrar que la misma da cuenta del razonamiento involucrado en la resoluci3n de problemas y, por lo tanto, que responde al interrogante planteado por la concepci3n heurística. Como pudimos apreciar, la noci3n que soporta la mayor carga a este respecto es la noci3n de deducci3n teoremaica. Dicha noci3n responde a la pregunta planteada en la medida en que representa una forma creativa de razonamiento, y en tanto en cuanto exige tanto experimentar con un diagrama como introducir elementos ajenos a las premisas.

Este recorrido puso adem1s en evidencia la cercanía entre las concepciones del razonamiento matem1tico de Peirce y de Cellucci. En primer lugar, porque ambas concepciones responden al hecho de que, a fin de resolver ciertos problemas matem1ticos no alcanza con extraer el contenido implícito en las premisas, sino que a su vez es necesario introducir elementos externos. Y en segundo lugar, porque las dos concepciones evocan paralelos entre el m3todo de la matem1tica y el m3todo de las ciencias empíricas. La diferencia entre las visiones de Cellucci y Peirce est1, sin embargo, en el modo de entender la deducci3n. Mientras que Cellucci ve la deducci3n como una relaci3n entre proposiciones, Peirce ve la deducci3n como un proceso. La deducci3n justamente es para Peirce el proceso mediante el cual se determinan las consecuencias necesarias de una hip3tesis.

Finalmente, pudimos distinguir el rol de la observaci3n y manipulaci3n de diagramas en la concepci3n del razonamiento matem1tico de Peirce. Este rol es esencial en la medida en que para resolver un problema es necesario, primero, construir un diagrama de las premisas, y luego, en los casos m1s complejos, transformar el diagrama hasta observar la soluci3n. As3, el rol que Peirce atribuye a las operaciones con diagramas coincide con el rol de estas mismas

operaciones en los casos analizados por Grosholz. Por lo tanto, consideramos que la concepción del razonamiento matemático de Peirce podría explicar el uso de representaciones icónicas en la práctica matemática en consonancia con las descripciones de Grosholz.

VI

Deducción teoremaica y concepción heurística

Como vimos en el primer capítulo, Cellucci propone el método analítico como un esquema general del proceso de resolución de problemas en el marco de la concepción heurística. Por esta última entendemos una concepción de la matemática como una actividad de resolución de problemas en un sistema abierto de hipótesis, hipótesis que no son fijas, y dónde la resolución de un problema no se reduce al análisis del contenido implícito en el planteo del problema. Con este esquema Cellucci intenta ofrecer una respuesta a una cuestión central planteada por la concepción heurística: cuál es el tipo de razonamiento involucrado en la resolución de problemas.

En este capítulo nos proponemos mostrar, a través de la consideración de dos casos paradigmáticos desde la perspectiva de Cellucci, que la noción de deducción teoremaica, propuesta por Peirce, ofrece una respuesta alternativa a dicho interrogante. Puntualmente, nos concentraremos en la resolución del problema de la duplicación del cuadrado que Platón presenta en el *Menón* y el método de cuadraturas descubierto por Leibniz durante su período de formación matemática (1672-1676) en París. Desde nuestra perspectiva, este análisis no solo muestra que la noción de deducción teoremaica ofrece una respuesta adecuada al interrogante que plantea la concepción heurística. También muestra que la noción de Peirce da cuenta con mayor exactitud del razonamiento involucrado en la resolución de problemas.

6.1. La duplicación del cuadrado, *Menón* 81c-85d

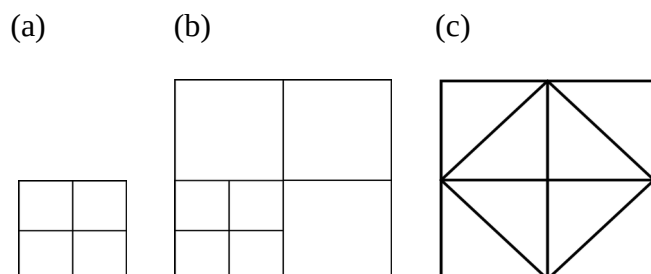
El *Menón* es un diálogo platónico que data aproximadamente del año 385 a. e. c. Aunque el tema principal del diálogo es la virtud, el mismo contiene dos extensos pasajes geométricos. Estos pasajes constituyen la fuente más antigua que poseemos de la geometría griega (Fowler, 1999, p. 7). El primer pasaje contiene la resolución del problema de la

duplicación del cuadrado (Menón 81c-85d). El otro contiene la primera formulación del método analítico (Menón 86e-87b). Cellucci cita ambos pasajes, uno para ilustrar la concepción heurística de la matemática, y el otro, para indicar su origen. Mientras que la interpretación del primer pasaje no presenta serias dificultades, la interpretación del segundo es objeto de acaloradas controversias.

La resolución del problema de la duplicación del cuadrado es una digresión en la que Sócrates se propone demostrar a través de un ejemplo la teoría de la reminiscencia. Con este propósito, Sócrates plantea a un joven esclavo de Menón el problema de encontrar el lado de un cuadrado que duplique el área de un cuadrado dado. El diálogo puede dividirse en tres etapas:

1. Primero, Sócrates comprueba la familiaridad del esclavo con las nociones involucradas y plantea el problema.
2. Luego, alentado por Sócrates, el esclavo propone dos hipótesis. La primera es que para duplicar la superficie hay que duplicar los lados. La segunda es que el lado buscado es tres veces la mitad del lado del cuadrado dado. En ambos casos, Sócrates construye un diagrama y ayuda al esclavo a corroborar que ambas soluciones son incorrectas.
3. Finalmente, Sócrates propone la solución, a saber, que la línea buscada es la diagonal del cuadrado dado, traza otro diagrama, y demuestra que la solución es correcta.

Observemos con más detalle el camino que Sócrates y el esclavo siguen para resolver este problema. Una vez planteado el problema, el primer paso es representar el cuadrado dado mediante un diagrama. Este diagrama es un cuadrado formado por cuatro cuadrados iguales (Figura 6.1, a). Luego, animado por Sócrates, el esclavo afirma que para resolver el problema hay que duplicar los lados.

Figura 6.1*La duplicación del cuadrado según Platón*

Nota. Diagramas construidos por Sócrates según la interpretación estándar (Platón, 1997, pp. 303, 306 y 310 respectivamente).

SERVIDOR - Evidentemente, Sócrates, el doble⁸¹.

SÓC. - (...) ¿afirmas que de la línea doble se forma la superficie doble? Me refiero a una superficie que no sea larga por aquí y corta por allí, sino que sea igual por todas partes, como ésta, pero es el doble que ésta, de ocho pies. Fíjate si todavía te parece que resultará el doble de la línea.

SERVIDOR - A mí sí. (Menón 82e)

Para poner a prueba la hipótesis del esclavo, Sócrates transforma el diagrama original añadiendo tres cuadrados. La nueva figura es un cuadrado formado por cuatro cuadrados iguales al cuadrado dado (Figura 6.1, b).

SÓC. - ¿No resultará ésta el doble de aquella, si agregamos desde aquí otra cosa así?

SERVIDOR - Por supuesto.

SÓC. - ¿Y de ésta, afirmas que resultará una superficie de ocho pies, si hay cuatro de ellas iguales?

SERVIDOR - Sí.

81 En lo que sigue, citaremos la traducción de Julio Calonge Ruiz, Eduardo Acosta, Francisco J. Olivieri y José Luis Calvo Martínez, publicada por Editorial Gredos (Platón, 1997).

SÓC. - Dibujemos, pues, a partir de ella, cuatro iguales. ¿No sería ésa la superficie de ocho pies que tú afirmas?

SERVIDOR - Por supuesto. (Menón 83a)

A continuación, Sócrates y el esclavo observan la figura construida para corroborar si la hipótesis planteada es correcta. En esta etapa, Sócrates asume el rol de guía, ayudando al esclavo a percatarse de las relaciones entre las áreas:

SÓC. - ¿Pero no hay en esta superficie estos cuatro cuadrados, cada uno de los cuales es igual a ése de cuatro pies?

SERVIDOR - Sí.

SÓC. - ¿De qué tamaño resultaría entonces? ¿No es cuatro veces mayor?

SERVIDOR - Desde luego.

SÓC. - ¿Y es el doble lo que es cuatro veces mayor?

SERVIDOR - ¡No por Zeus!

SÓC. - ¿Cuántas veces entonces?

SERVIDOR - El cuádruple.

SÓC. - Entonces, de la línea doble, muchacho, no resulta una superficie doble sino cuádruple.

SERVIDOR - Es verdad. (Menón 83b-83c)

Llegados a este punto, Sócrates alienta al esclavo a seguir intentando y lo anima a proponer una nueva hipótesis. Con este propósito, vuelven a examinar el diagrama, e inmediatamente advierten que la línea buscada debe ser mayor que el lado de la figura dada, pero menor que su doble. Entonces, el esclavo propone que debe triplicarse la mitad del lado. Como en el caso anterior, trazan un diagrama para corroborar la hipótesis, pero el resultado negativo deja perplejo al esclavo.

Finalmente, Sócrates toma la iniciativa. Su primer paso es construir un diagrama de la figura dada. Luego modifica este diagrama yuxtaponiendo al cuadrado dado otros tres cuadrados, con el fin de obtener un cuadrado cuatro veces mayor. A continuación, divide los cuadrados a la mitad seleccionando una de sus diagonales. Llega así a una figura, que exhibe la solución del problema (Figura 6.1, c) y que le permite demostrar que la diagonal es la línea que permite resolver el problema.

SÓC. - (...) esta línea que va de un ángulo a otro, ¿no corta en dos cada una de estas superficies?

SERVIDOR - Sí.

SÓC. - ¿No son cuatro estas líneas iguales que encierran esta superficie?

SERVIDOR - Lo son, en efecto.

SÓC. - Observa ahora: ¿qué tamaño tiene esta superficie?

SERVIDOR - No entiendo.

SÓC. - De estas, que son cuatro, ¿no ha cortado cada línea en su interior la mitad de cada una?, ¿o no?

SERVIDOR - Sí.

SÓC. - ¿Y cuantas mitades hay en ésta?

SERVIDOR - Cuatro.

SÓC. - ¿Y cuántas en ésa?

SERVIDOR - Dos.

SÓC. - ¿Qué es cuatro de dos?

SERVIDOR - El doble.

SÓC. - ¿Y esta superficie? ¿cuántos pies tiene?

SERVIDOR - Ocho pies.

SÓC. - ¿De cuál línea?

SERVIDOR - De ésta.

SÓC. - ¿De la que habíamos trazado de ángulo a ángulo en la superficie de cuatro pies?

SERVIDOR - Sí. (Menón 85a-85b)

Finalmente, Sócrates enuncia la conclusión en términos generales: “Los sofistas la llaman diagonal, y puesto que si diagonal es su nombre, de la diagonal se llegará a obtener, como tu dices, servidor de Menón, la superficie doble” (Menón 85a).

6.1.1. La duplicación del cuadrado según el método analítico

Como dijimos, de acuerdo con Cellucci, el Menón ofrece un ejemplo paradigmático del método analítico y, por lo tanto, en él encontramos un caso que muestra que el razonamiento matemático no se reduce meramente al razonamiento deductivo. Recordemos que el “método analítico” involucra dos “movimientos” sucesivos y en direcciones opuestas: un movimiento “ascendente”, desde un problema y otra información disponible hasta una hipótesis que no está contenida en el problema; y un movimiento “descendente”, mediante el cual se determina, por un lado, si la hipótesis es plausible, y por otro, si es una condición suficiente para resolver el problema. Y solamente esta última parte es deductiva. En contraposición, argumenta Cellucci, la búsqueda de una hipótesis procede de acuerdo a patrones de razonamiento no deductivos y esto prueba que es inapropiado identificar razonamiento matemático y razonamiento deductivo.

Concretamente en el Menón, plantea Cellucci, Sócrates y el esclavo resuelven el problema de la duplicación del cuadrado mediante un procedimiento de prueba y error (Cellucci, 2000, p. 10). En la sección anterior dividimos este procedimiento en tres etapas. En consecuencia, siguiendo el modelo de Cellucci, dentro de cada etapa deberíamos encontrar un

movimiento ascendente no deductivo, i. e., la búsqueda de una hipótesis, y un movimiento descendente deductivo en el que se determina su plausibilidad y si es una condición suficiente para resolver el problema. Las dos primeras etapas comprenden los intentos fallidos del esclavo por resolver el problema, mientras que la tercera corresponde a la solución ofrecida por Sócrates. Puntualmente, en esta última etapa, el movimiento ascendente no deductivo consiste en la construcción un cuadrado formado por cuatro cuadrados iguales, divididos por una de sus dos diagonales (Figura 3). El análisis de este diagrama, junto con las condiciones bajo las cuales el problema debería ser resuelto, conduce a una hipótesis: que la diagonal divide el cuadrado en dos partes iguales. De acuerdo con Cellucci, la regla lógica que aplica Sócrates en este caso para llegar a la hipótesis es la así llamada “inferencia diagramática”, que explota la similitud entre una representación y su objeto. Luego, comienza el movimiento descendente deductivo. Aquí, Sócrates simplemente asume la plausibilidad de la hipótesis y prueba que la misma es una condición suficiente para resolver el problema.

Ahora bien, la imposibilidad de caracterizar el razonamiento involucrado en la resolución de este problema como razonamiento deductivo no deja de resultar algo paradójica. Por un lado, porque la resolución del problema por parte de Sócrates y el esclavo parece estar contenida en la definición de la matemática como la exploración de lo que es verdadero en un estado hipotético de cosas, planteada por Peirce, ya que la relación que descubre Sócrates entre la diagonal de un cuadrado y su doble es una relación necesaria. Por otro lado, porque aunque la hipótesis no esté contenida en el planteo del problema, podemos suponer que si está virtualmente contenida, al menos en principio, en el marco de supuestos más generales que delimita el tipo de hipótesis que pueden ser formuladas para resolver un problema. Decimos que la hipótesis solo está en principio contenida en ese marco, porque solo se prueba su plausibilidad con respecto a ese marco. Esta prueba, de acuerdo con

Cellucci, consiste en sopesar las razones a favor y contra la consistencia de la hipótesis con el conocimiento admitido y con los resultados de observaciones y experimentos – en la forma particular que adquieren estas operaciones en matemática. Aún más, ese conjunto de hipótesis generales puede no estar completamente definido y es posible que se asuma parcialmente de forma tácita, e incluso que esté sujeto a revisión y controversias.

6.1.2. La resolución platónica como un caso de deducción teorema

Desde mi punto de vista, la distinción que realiza Peirce entre deducción corolaria y deducción teorema resuelve este aspecto paradójico. Efectivamente, el razonamiento que conduce a Sócrates y al esclavo a la solución del problema puede ser analizado como un caso de deducción teorema. Una vez enunciado el problema en términos generales, el primer paso que sigue Sócrates es la construcción de un diagrama. Este diagrama encarna las relaciones que definen un cuadrado, y que Sócrates explicita al comienzo del diálogo (figura 1). Notemos que ningún examen atento de este diagrama permite arribar a la solución buscada. Dado que esto es todo lo que se asume como dado, la solución no está contenida en el planteo del problema. Por este motivo, Sócrates y el esclavo se ven forzados a transformar el diagrama. Esta etapa de experimentación diagramática comprende, en el caso del Menón, tres fases consecutivas. En cada fase se propone cierta “hipótesis experimental” -la conjetura de que determinada transformación del diagrama contendrá la solución del problema- y se transforma el diagrama. Luego, se observa juiciosamente el resultado del experimento, y si el resultado es negativo, se repite el procedimiento hasta encontrar la solución. El resultado final de todo este proceso de experimentación diagramática es el diagrama construido por Sócrates (Figura 3). Este diagrama muestra que la diagonal es la solución buscada. Sócrates constata este hecho frente al esclavo y enuncia la conclusión en términos generales.

Dentro de este proceso de deducción teoremaica, la parte no deductiva que Cellucci identifica en el proceso de resoluci3n del problema, i. e., la construcci3n y el an3lisis sucesivo de los diferentes diagramas, procedimiento que conduce finalmente a la hip3tesis que resuelve el problema, constituye lo que Peirce denomina “experimentaci3n diagram3tica”. Ahora bien, Peirce considera la experimentaci3n diagram3tica como una parte constitutiva de la deducci3n teoremaica. Por lo tanto, desde la perspectiva de Peirce, todo el razonamiento que conduce a la resoluci3n del problema es deductivo. Incluso, a3n cuando esta fase sea una fase abductiva o cuasiabductiva, como consideran algunos autores, lo que coincide con la caracterizaci3n que hace Cellucci de esta fase, como una fase guiada por reglas no deductivas de razonamiento, la misma tiene lugar en el curso de una deducci3n teoremaica y por lo tanto es una parte integral de este tipo de deducci3n.

6.1.3. Razonamiento matem3tico y razonamiento deductivo

Volviendo entonces a la imposibilidad de reducir el razonamiento matem3tico al razonamiento deductivo, que detecta Cellucci, vemos que tal imposibilidad puede relativizarse a cierta concepci3n de la deducci3n. La posibilidad de analizar el razonamiento de S3crates como un caso de deducci3n teoremaica muestra que la concepci3n de la matem3tica como resoluci3n de problemas es coherente con la caracterizaci3n del razonamiento matem3tico como un modo de razonamiento deductivo. Desde mi perspectiva hay tres supuestos impl3citos en la conclusi3n a la que arriba Cellucci. El primero es que la resoluci3n de un problema implica apelar a hip3tesis que no est3n contenidas en el planteo del problema. El segundo es que el razonamiento deductivo solo nos permite hacer expl3cito lo que ya est3 contenido en el planteo del problema. Y el tercero es que la resoluci3n de un problema es un proceso racional, susceptible de un an3lisis l3gico en t3rminos de reglas de inferencia.

El primer supuesto parece ser correcto con respecto a la resolución del problema de la duplicación de cuadrado. La hipótesis de que la diagonal divide el cuadrado a la mitad no está contenida en la definición de cuadrado. Y esta hipótesis es necesaria para resolver el problema. Así, concluye Cellucci sobre la relación que hay entre un problema y las hipótesis que son necesarias para su resolución:

Being obtained from the problem, and possibly other data already available, by some non-deductive rule, a solution is not contained in the problem or other data already available, but possesses novelty with respect to them since non-deductive rules are ampliative. This explains why solving a problem can yield something new. (Cellucci, 2013, p. 63)

El segundo supuesto es que la deducción consiste en hacer explícito lo que ya está contenido implícitamente en las premisas del razonamiento. Por ejemplo, afirma Cellucci: “las reglas deductivas son no-ampliativas, esto es la conclusión está contenida en las premisas. Esto significa que la conclusión o es literalmente una parte de las premisas, o no implica nada que no está ya implicado por las premisas” (Cellucci, 2013, p. 54)⁸². Y de modo similar se expresa en otro pasaje del mismo texto:

(...) deductive rules are non-ampliative. As a fruit juicer cannot extract more from fruits than what is contained in them, deductive rules cannot extract more from premises than what is contained in them. Therefore, the conclusion of a deduction is contained in the premises. (Cellucci, 2013, p. 284)

En base a estos supuestos, Cellucci concluye que no es posible explicar el carácter ampliativo de la resolución de problemas apelando al razonamiento deductivo. Y esta

82 “(...) deductive rules are non-ampliative, that is the conclusion is contained in the premises. This means that the conclusion either is literally a part of the premises, or implies nothing that is not already implied by the premises” (Cellucci, 2013, p. 54).

conclusión lo enfrenta a dos alternativas. Una de ellas es apelar a la teoría romántica del genio creativo, expresada paradigmáticamente por Novalis. Una alternativa que Cellucci rechaza de plano por ser contraria a la racionalidad del proceso de resolución de problemas. Y la otra es apelar al razonamiento no deductivo. Un camino que Cellucci finalmente escoge.

Like all myths, however, the Romantic myth of genius is at odds with facts.

Mathematical discovery is not based on leaps of intuition, but on rational processes that can be analysed in terms of rules. (...) Indeed, it proceeds according to the rules of the analytic method. Moreover, mathematical discovery is not the result of an extraordinary thought processes, but of ordinary thought processes that produce an extraordinary outcome. (Cellucci, 2013, p. 234)

Ahora bien, esta disyuntiva no se presenta cuando contemplamos el supuesto acerca de la naturaleza del razonamiento deductivo en el que se apoya Cellucci a la luz de la distinción que formula Peirce entre deducción corolaria y deducción teoremaica. Ese supuesto puede ser enmarcado dentro de lo que Peirce denomina “la concepción kantiana de la deducción”, es decir, la concepción de que la deducción “meramente explica lo que está implícitamente afirmado en las premisas” (CP 4.204). Pero esta concepción de la deducción, de acuerdo con Peirce, no es completamente exacta. Peirce observa que la concepción kantiana de la deducción solo es adecuada con respecto a la deducción corolaria, pero no se aplica estrictamente a la deducción teoremaica. La razón de ello es que en la deducción teoremaica para determinar lo que es verdadero bajo ciertas hipótesis es necesario introducir elementos que no están contenidos en las premisas – aunque posibles en el marco de los supuestos más generales que asume el planteo del problema – tales como lemas, definiciones o abstracciones. Ya hemos notado esto en el caso del Menón. El diagrama que construye Sócrates, no está contenido en las nociones con las cuales se formula el problema, pero sí está

contenido virtualmente en el marco hipotético que Sócrates y el esclavo asumen como dado. Y es por este hecho que, según Peirce, la caracterización de la deducción como meramente explicativa resulta una media verdad.

Kant's view of deduction, namely, that it merely explicates what is implicitly asserted in the premisses... is what is called a half-truth. Deductions are of two kinds, which I call corollarial and theorematic. The corollarial are those reasonings by which all corollaries and the majority of what are called theorems are deduced; the theorematic are those by which the major theorems are deduced. If you take the thesis of a corollary, - i. e. the proposition to be proved, and carefully analyze its meaning, by substituting for each term its definition, you will find that its truth follows, in a straightforward manner, from previous propositions similarly analyzed. But when it comes to proving a major theorem, you will very often find you have need of a lemma, which is a demonstrable proposition about something outside the subject of inquiry; and even if a lemma does not have to be demonstrated, it is necessary to introduce the definition of something which the thesis of the theorem does not contemplate. In the most remarkable cases, this is some abstraction; that is to say, a subject whose existence consists in some fact about other things. Such, for example, are operations considered as in themselves subject to operation; lines, which are nothing but descriptions of the motion of a particle, considered as being themselves movable; collections; numbers; and the like. When the reform of mathematical reasoning now going on is complete; it will be seen that every such supposition ought to be supported by a proper postulate. At any rate Kant himself ought to admit, and would admit if he were alive today, that the conclusion of reasoning of this kind, although it is strictly deductive, does not flow from definitions alone, but that

postulates are requisite for it. (Peirce, 1901, *The Logic of Drawing History from Ancient Documents*, CP 4.204)

Recapitulando, el razonamiento deductivo, de acuerdo con Peirce, consiste en determinar lo que sería verdadero, si un estado hipotético de cosas fuera el caso. No obstante, nos dice Peirce, esto no significa que en el razonamiento deductivo la conclusión esté explícita o implícitamente contenida en las premisas del razonamiento. Hay cierta clase de deducciones en las cuales para arribar a la conclusión es necesario introducir elementos posibles dentro del mundo hipotético que se asume como dado, pero que no están contenidos en las premisas del razonamiento. Es por eso justamente que Peirce distingue entre deducciones corolarias y deducciones teoremáticas. Ahora bien, si asumimos como correcta esta distinción, como muchos autores contemporáneos hacen, el conflicto entre la concepción heurística de la matemática y la concepción de la matemática como la exploración de lo que es verdadero en un estado hipotético desaparece. En otras palabras, Peirce nos ofrece una herramienta conceptual para resolver el conflicto que Cellucci detecta entre la concepción de la matemática como una “ciencia” deductiva y la concepción de la matemática como una actividad de resolución de problemas, tal como ejemplifica el caso del Menón.

6.1.4. Irreductibilidad de la representación icónica en el caso del Menón

Antes de concluir esta sección me gustaría añadir dos observaciones que considero pertinentes. La primera es que la noción de deducción teoremática ilumina de forma más adecuada el rol del diagrama en la resolución del problema que el recurso a la noción de “inferencia diagramática”. Desde la perspectiva de la noción de deducción teoremática, todo el razonamiento de Sócrates es diagramático. Por el contrario, Cellucci atribuye al diagrama solo la función de servir como herramienta para la obtención de una hipótesis. Y su rol se limita a la fase que Cellucci identifica como no deductiva. En contraposición, en la deducción

teorematía el razonamiento no deja en ningún punto de ser diagramático para pasar a ser “proposicional”. Efectivamente, en el caso de Sócrates, la observación y manipulación del diagrama constituyen una parte fundamental de todo el razonamiento. El uso del diagrama no solo interviene en la fase de búsqueda, sino que el resultado de esa búsqueda es un diagrama que exhibe las relaciones requeridas. Y son estas relaciones, entre las cuales se encuentra el hecho de que la diagonal divide el cuadrado en dos partes iguales, relaciones que no están contenidas en el planteo del problema, las que permiten arribar a la solución deseada. La otra observación que quisiera plantear aquí se refiere a la distinción entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación. Notemos que en la reconstrucción de Cellucci todavía es posible trazar una distinción entre descubrimiento y justificación. Esto lleva a Cellucci a plantear la existencia de una lógica del descubrimiento, que se ocupa de las reglas de inferencia mediante las cuales se encuentran hipótesis, y una lógica de la justificación, *i. e.*, la lógica deductiva. Por el contrario, estas dos etapas no se pueden distinguir en la noción de razonamiento teorematío. Por lo tanto, la noción de Peirce también nos ofrece un modo de superar una dicotomía que marcó gran parte de la epistemología contemporánea.

6.2. Leibniz y la cuadratura aritmética del círculo la elipse y la hipérbola

El camino que condujo a la elaboración del cálculo nos ofrece otro terreno fértil para explorar la noción de deducción teorematía. Asimismo, nos brinda la oportunidad de confrontar la noción de deducción teorematía con la respuesta dada por Cellucci al interrogante planteado por la concepción heurística. Justamente, puesto que el cálculo, tanto en las versiones de Newton como de Leibniz, emplea hipótesis que no están contenidas en el marco de la geometría cartesiana, Cellucci plantea la dificultad de analizar los pasos dados por estos autores en términos de la noción estándar de deducción.

Many mathematical problems cannot be solved by deductive proofs from premisses held by mathematicians to be true. For example, Newton and Leibniz did not solve problems in Calculus by deductive proofs from premisses held by mathematicians to be true, because it was impossible. They introduced some new hypotheses that were sufficient conditions to deduce solutions to the problems but could not be inferred deductively from premisses held by mathematicians to be true. The new hypotheses were controversial, Leibniz and Newton gave arguments for them, while others, such as Nieuwentijdt, Gassendi, and Berkeley, gave arguments against them. But, by evaluating the arguments for and against the hypotheses, the mathematical community eventually concluded that the arguments for them were stronger than those against them. Therefore, the mathematical community accepted the hypotheses as plausible, and considered plausible the solutions to problems deduced from them. (Cellucci, 2017, p. s. d.)

En este marco de referencia, en la presente sección nos proponemos analizar las estrategias que empleó Leibniz para obtener la cuadratura aritmética del círculo entre 1672 y 1676, apelando a la noción de deducción teoremaica. En aquellos años, Leibniz descubre un método general para expresar el área de cualquier curva mediante una serie infinita convergente de números racionales, resultado que abrió el camino hacia la posterior elaboración del cálculo. Conocemos este método a través de las varias versiones de un tratado que Leibniz nunca publicó, titulado, *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. La reconstrucción y publicación de la versión final del mismo se la debemos a Knobloch (2016). El problema que Leibniz se propone resolver en este tratado ya había sido resuelto para ciertas curvas, como la parábola y la hipérbola, dónde la abscisa es conmensurable con la ordenada. En este respecto, Leibniz

destaca los métodos empleados por Brounckner, Mercator y Wallis. Pero estos métodos no podían aplicarse a curvas, como el círculo, en las que resulta imposible “liberar las ordenadas dirigidas desde la curva a cualquier eje del signo radical, supuesto que su medida es expresada en relación a las abscisas” (AVII6, 1, p.31, citado por Crippa, 2019, p. 118)⁸³.

Leibniz superó este obstáculo basándose en una idea fundamental: transformar geoméricamente una curva intratable con los métodos hasta ahí disponibles, en una curva que pudiera ser tratada analíticamente. De este modo, Leibniz divide el problema en dos: transformación geométrica y solución analítica. En esta sección abordaremos la transformación geométrica.

6.2.1. El método de transmutación

La estrategia adoptada por Leibniz para encontrar la cuadratura aritmética de curvas como el círculo, en las que la relación entre abscisas y ordenadas es irracional, consiste en reducir el problema al problema de determinar el área de una curva en la que esta relación es racional. La segunda curva será la cuadratriz de la primera. Leibniz llama a esta curva, “anónima” o “*figura segmentorum*”, y al método geométrico mediante el cual logra la reducción, “teorema de transmutación”.

Siguiendo a Leibniz, podemos enunciar el teorema de transmutación del siguiente modo: si, dado un arco ${}_1C_nC$ de una curva C que pasa por el origen A , de un sistema de coordenadas ortogonales, trazamos la ordenada ${}_iC {}_iB$ de cada punto ${}_iC$ del arco, y luego la tangente a la curva que pasa por dicho punto, intersecando al eje de las ordenadas en ${}_iT$. Y desde cada punto ${}_iT$, trazamos una perpendicular hasta intersecar ${}_iC {}_iB$ en ${}_iD$. Entonces el locus de los puntos ${}_iD$ será la curva D ; y la superficie delimitada por la curva D , las dos ordenadas extremas ${}_1B {}_1D$ y ${}_nB {}_nD$ y el segmento ${}_1B {}_nB$ del eje de las abscisas, será el doble de la

83 “(...) to free from the radical sign the ordinates directed from the curve to any axis, provided their measure is expressed in a relation to the abscissas (AVII6, 1, p.31, citado por Crippa, 2019, p. 118).

casos el razonamiento utilizado por Leibniz puede ser analizado en términos de la noción de deducción teorema. La diferencia entre ambas pondrá en evidencia las particularidades entre dos formas de deducción teorema.

6.2.2. Prueba indirecta del teorema de transmutación

La prueba indirecta responde al ideal de rigor clásico. La misma es una variante del método de exhaustión utilizado por los geómetras griegos. Pero diferencia del método de exhaustión, basado en una doble reducción al absurdo, Leibniz utiliza una sola reducción. Su rol, como dijimos, es “ofrecer una fundamentación rigurosa del método de los indivisibles” (Mancosu, 1996, p. 126). Encontramos esta demostración en la proposición VII de la versión final de DQA. La misma involucra los siguientes pasos:

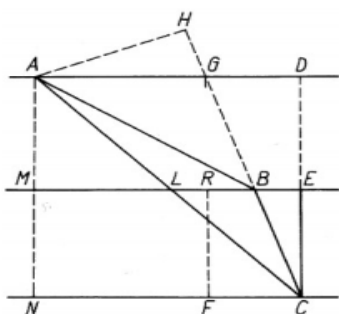
(1) La construcción de un polígono inscripto en la trilinea C , delimitada por el arco ${}_1C_nC$ y las líneas, A_1C y A_nC , que unen los extremos de ese arco con el origen de las coordenadas. Para ello, se selecciona un número arbitrario de puntos ${}_iC$ del arco ${}_1C_nC$, y se traza la cuerda que une cada punto ${}_iC$ con ${}_{i+1}C$. Y finalmente, se trazan las líneas A_1C y A_nC . Este polígono se resuelve en triángulos ${}_iCA_{i+1}C$ (Figura 6.2) (Knobloch, 2016, p. 32).

(2) La construcción de un polígono gradiforme circunscripto a la cuadrilínea Q , delimitada por el segmento ${}_1D_nD$ de la curva D , las líneas ${}_1D_1B$ y ${}_nD_nB$, y el segmento ${}_1B_nB$ del eje de las abscisas. Para ello, primero se extiende cada cuerda ${}_iC_{i+1}C$ intersectando en el punto ${}_iM$ del eje de las ordenadas. Luego, desde cada punto ${}_iM$ se traza una perpendicular intersectando la ordenada ${}_iC_iB$ en ${}_iN$ y la ordenada ${}_{i+1}C_{i+1}B$ en el punto ${}_iS$. El polígono gradiforme es la figura delimitada por el segmento ${}_1B_nB$ del eje de las ordenadas, los segmentos ${}_1N_1B$ y ${}_{n-1}S_{n-1}B$, y las líneas ${}_1N_1S_2N_2 \dots {}_{n-1}S_{n-1}$. Este polígono se resuelve en rectángulos ${}_iB_iN_iS_{i+1}B$ (Figura 6.2) (Knobloch, 2016, p. 32).

(3) La prueba del siguiente lema que relaciona un triángulo con un rectángulo, cuya área es dos veces mayor que la del triángulo: Sean, ABC un triángulo, y AD , BE , CF tres paralelas que pasan por los vértices del triángulo (Figura 6.3). Luego, prolongar el lado BC del triángulo hasta intersectar la paralela AD en G . Desde A trazar una perpendicular intersectando BE en M y CF en N . Entonces, el rectángulo AG , MN , igual al rectángulo MN , MR , es el doble del triángulo ABC ⁸⁵.

Figura 6.3

Trasmutación de un triángulo en un rectángulo



Nota. Leibniz, *De quadratura arithmetica*, proposición 1 (Knobloch, 2016, p. 5).

La demostración procede del siguiente modo. Sea T el doble de C . Leibniz asume, por un lado que $T > Q$ – llamando Z a la diferencia entre T y Q –, y por otro que la diferencia entre la figura inscrita en C y C , y la figura circunscrita en Q y Q es menor a $Z/4$, dado que la diferencia entre una curva y una figura inscrita o circunscrita siempre puede ser menor a cualquier cantidad dada. Por el lema 1, cada triángulo $A_i C_{i+1} C$, en los que se resuelve la figura inscrita en C , es la mitad del rectángulo correspondiente, ${}_i B_i N_i S_{i+1} B$, de la figura

85 La demostración de este lema ya es una demostración teorematizada. Para demostrar dicha relación, Leibniz añade al diagrama de las premisas los triángulos BCE y AHG . Este último se forma prolongando el lado BC y trazando AH perpendicular a esta línea. Este paso corresponde con el paso teórico de la demostración teorematizada. Luego, analizando el diagrama se observa que BCE y AHG son semejantes, y por lo tanto $AG : AH = BC : EC$. De esto se sigue que $AG \cdot EC$ (o $MR \cdot EC$) = $BC \cdot AH$. Pero $BC \cdot AH$ es el doble de ABC , por lo tanto $MN \cdot MR$ es el doble de ABC . Leibniz utiliza este teorema en las dos demostraciones del teorema de transmutación.

circunscripta en Q. Por lo tanto, la suma de todos estos triángulos, i. e., la figura circunscripta en C, es la mitad de la suma de todos los rectángulos, i. e., la figura circunscripta en Q.

Llamemos P al doble de la figura inscrita en C. Entonces, a partir de lo que hemos supuesto, $Q - P < Z/4$ y $T - P < 2/4$ de Z. De esto se sigue, por (4), que $T - Q < 3/4$ de Z. Pero, dado que hemos supuesto que $T - Q = Z$ la diferencia entre T y Q será menor a si misma, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $T = Q$.

6.2.3. La prueba indirecta como un caso de deducción teorematizada

Peirce define una demostración teorematizada como aquella que se basa en un paso teórico. Según algunas caracterizaciones, este paso consiste en introducir “algo no implicado en absoluto en las concepciones adquiridas hasta el momento, que ni la definición del objeto de investigación ni ninguna cosa ya conocida al respecto podría por si misma sugerir, aunque dan lugar a ello” (NEM 4.49)⁸⁶. Ahora bien, esta forma de caracterizar un paso teórico coincide con la forma en la que procede Leibniz para probar el teorema de transmutación. Los nuevos elementos que constituirían el paso teórico, en este caso, serían la construcción del polígono inscrito y la construcción del polígono circunscripto, el lema de la transmutación de un triángulo en un rectángulo, y los dos supuestos de los que parte la demostración indirecta. Como vemos, estos elementos no se introducen en la demostración de forma descoordinada sino articulados en un todo que permite probar el teorema.

A fin de precisar con mayor exactitud de que modo la noción de razonamiento teorematizado podría capturar el razonamiento en el que se basa la prueba de Leibniz, debemos repasar brevemente la discusión en torno a la naturaleza de un paso teórico. Concretamente, abordaremos la pregunta acerca cómo interpretar la afirmación de Peirce de que un paso

86 “(...) something not implied at all in the conceptions so far gained, which neither the definition of the object of research nor anything yet known about could of themselves suggest, although they give room for it” (Peirce, 1902, Parts of Carnegie Application, NEM 4.49).

teórico es una “nueva idea” a la que el objeto de investigación y el conocimiento ya alcanzado “da lugar”.

De acuerdo con Campos (2010), un paso teórico es una transformación posible del diagrama de las premisas. Esta posibilidad está determinada por las restricciones que imponen los supuestos del sistema matemático dentro del cual se trabaja. En el caso de Euclides, por ejemplo, estas restricciones son los postulados y las nociones comunes (o axiomas). Puntualmente, los postulados delimitan lo posible dentro del sistema, mientras que las nociones comunes delimitan lo imposible (Peirce, 1901, NE 4.8, Campos 2010, p. 115). Por lo tanto, según esta descripción, si bien la idea introducida en un paso teórico no está contenida en las premisas o en la condición del teorema que se intenta probar, si está contenida virtualmente en la descripción del mundo hipotético que se estudia.

De modo análogo, Sun-Joo Shin (2016) considera que en una demostración teorematizada, un paso teórico es un paso “deductivamente” válido que se distingue de cualquier otro paso deductivamente válido, pero trivial, por la presencia de tres componentes:

- a La existencia de múltiples alternativas, i. e., hay más de un paso deductivamente válido posible.
- b La ausencia de algoritmos para determinar cuál es el objeto que es necesario introducir.
- c Evaluación retrospectiva acerca del éxito de la elección tomada (Shin, 2016, p. 64).

Estos tres componentes explican, de acuerdo con Shin, lo que él llama el “misterio de la deducción”, a saber, por qué una demostración matemática puede demorar siglos en obtenerse, aunque los pasos que la componen estén virtualmente contenidos en los axiomas del sistema.

Notemos, por otra parte, que podemos expresar la interpretación de Campos en términos de los componentes identificados por Shin. Así, un paso teórico sería que (a) se enfrenta a un sinnúmero de transformaciones posibles de un diagrama, (b) no hay un algoritmo que determine cuál es la transformación correcta, (c) solo con posterioridad es posible evaluar si las transformaciones producidas exhiben las relaciones buscadas.

Retomemos entonces, con estos elementos, la discusión en torno a la demostración indirecta del teorema de transmutación. En primer lugar, vemos que esta demostración es deductiva en el sentido establecido por Peirce. Efectivamente, la demostración busca determinar algo necesariamente verdadero bajo ciertas hipótesis, a saber, la relación que establece el teorema entre las áreas de la curva C y la curva D. En segundo lugar, la demostración no se sigue de las definiciones involucradas en las premisas, sino que procede a través de la introducción de elementos nuevos. Ahora bien, claramente la introducción de estos elementos cae bajo la caracterización que ofrecen Campos y Shin de un paso teórico. Por un lado, tales pasos están permitidos en el marco de la geometría cartesiana que establece el canon de rigor que debe satisfacer la prueba. Por otro lado, (a) los mismos no constituyen la única construcción permitida, ni las únicas hipótesis posibles (b) no son el resultado de la aplicación de un algoritmo, y (c) la evaluación de si es posible a partir de la introducción de estos elementos resolver el problema es posterior a su introducción. Por lo tanto, nos inclinamos a calificar la demostración indirecta de Leibniz como un caso de deducción teorema.

6.2.4. Deducción teorema y creatividad

Es importante remarcar que los pasos teóricos están contenidos en los supuestos que definen un mundo hipotético solo de forma virtual. La búsqueda de un paso teórico no se reduce a la mera elección dentro de un menú preestablecido de opciones, sino que exige

creatividad. La creatividad, nos dice Peirce, refiriéndose al alto grado de creatividad que la matemática exige, “es una cuestión de forma, del modo en el que partes ninguna de las cuales posee esta son puestas juntas” (Peirce 1908, p. 435)⁸⁷. Peirce ofrece un ejemplo para ilustrar la idea, “Napoleón era tal como un tratado de fisiología debería describir. Caminaba, comía, dormía, trabajaba en su estudio, montaba su caballo, hablaba con sus compañeros, tal como cualquier otro hombre hace. Pero él combinó esos elementos en formas que no habían sido combinadas en tiempos modernos” (Peirce, 1908, p. 435)⁸⁸. Así, aunque los elementos que constituyen un paso teórico estén explícitamente contenidos en los postulados y definiciones, la forma en la que se requiere combinar estos elementos para resolver un problema no es un asunto trivial.

Teniendo en cuenta el grado de ingenio que exige un paso teórico, Peirce sugiere incluso utilizar esta exigencia como un criterio para clasificar los teoremas. Esta clasificación, por otra parte, vincula los pasos teóricos con los métodos matemáticos.

[W]hen a theoretic step has once been invented, it may be imitated, and its analogues applied in proving other propositions. This consideration suggests the property of distinguishing between varieties of theorems, although the distinctions cannot be sharply drawn... If a proposition requires, indeed, for its demonstration, a theoretic step, but only one of a familiar kind, that has become quite a matter of course, it may be called a *theoremation*. If the needed theoretic step is a novel one, the proposition which employs it most fully may be termed a *major theorem*; for even if it does not, as yet, appear particularly important, it is likely eventually to prove so. If the theoretic

87 “(...) it is an affair of form, of the way in which parts none of which possess it are joined together” (Peirce 1908, *Some Amazing Mazes*, p. 435).

88 “Napoleon was such as treatise on physiology ought to describe. He walked, ate, slept, worked in his study, rode his horse, talked to his fellows, just as every other man does. But he combined those elements into shapes that have not been matched in modern times” (Peirce 1908, *Some Amazing Mazes*, p. 435).

invention is susceptible of wide application, it will be the basis of a mathematical method. (Peirce, 1908, *Some Amazing Mazes*, p. 437)

De acuerdo con este criterio y dado que la prueba de Leibniz se inspira en el modelo de las pruebas clásicas por exhaustión, podríamos clasificar el teorema de transmutación como una teorematización (*theoremation*). Leibniz aplica aquí un paso teórico que constituye la base de un método matemático, el método de exhaustión. Por otra parte, Leibniz no aplica literalmente el método, sino que lo transforma, utilizando una única reducción al absurdo. Y esta forma de aplicar el método es novedosa con respecto a la pruebas clásicas por exhaustión. Como Leibniz mismo mismo señala en el esolío de la proposición VII: “La prueba tiene la particularidad de que no resuelve el problema a través de polígonos inscriptos y circunscriptos al mismo tiempo, sino solo a través de inscriptos” (Knobloch, 2016, p. 37)⁸⁹. Por lo tanto, dada la novedad del paso teórico, también podríamos clasificar el teorema de transmutación como un “teorema mayor”. De todos modos, más allá de esta clasificación, desde mi perspectiva, la prueba indirecta del teorema de transmutación responde a la noción de deducción teoremática. Por un lado, es una prueba deductiva en el sentido de Peirce. Pero por otro, no es una prueba en la que la conclusión se derive mediante reglas, de forma mecánica, de las premisas del sistema. La misma involucra la introducción creativa de elementos que no están contenidos en la condición del teorema.

6.2.5. La prueba directa como un caso de deducción teoremática

Pasemos ahora a la prueba directa para ver si la misma también puede ser caracterizada como un caso de deducción teoremática. El análisis de esta prueba es mucho más sencillo si el teorema se expresa como un problema: encontrar la cuadratriz de una curva.

89 “Das Beweis hat jenes Besondere, dass er das Problem nicht durch Einbeschriebenes und Umbeschriebenes zugleich, sondern nur durch Einbeschriebenes löst” (Knobloch, 2016, p. 37).

Para resolver este problema Leibniz nuevamente se apoya en el lema que relaciona las áreas de un triángulo y un rectángulo que utiliza en la prueba indirecta (ver p. 145). Pero esta vez, el lema relaciona un triángulo infinitesimal, el triángulo ABC, y un rectángulo infinitesimal, el rectángulo MNRF (Figura 6.3, p. 146). Esta relación se establece a partir de la relación entre un triángulo infinitamente pequeño, el triángulo BCE, que Leibniz denomina triángulo característico, y un triángulo finito, el triángulo AHG en la misma figura.

La prueba procede del siguiente modo (Figura 6.2, p. 144). Tomemos la trilinea formada por el arco ${}_1C_nC$ de la curva C y las líneas ${}_1CA$ y ${}_nCA$, que unen los extremos de dicho arco con el origen de las coordenadas; y descompongamos esta figura en infinitos triángulos, infinitamente pequeños, ${}_iC_{i+1}CA$. En virtud del lema anterior, podemos transformar cada uno de estos triángulos en un rectángulo infinitesimal prolongando el lado ${}_iC_{i+1}C$ hasta intersecar el eje de las abscisas en ${}_iM$, y luego trazando la perpendicular que interseca las ordenadas correspondientes en ${}_iN$ y ${}_iS$. Puesto que en este caso la distancia entre ${}_iC$ y ${}_{i+1}C$ será infinitamente pequeña, la cuerda ${}_iC_{i+1}C$ será parte de la tangente a la curva, ${}_iM$ coincidirá con ${}_iT$, y ${}_iN$ y ${}_iS$ coincidirán con ${}_iD$. Ahora bien, la suma de todos los rectángulos obtenidos mediante este procedimiento será igual a la figura delimitada por el sector ${}_1D_nD$ de la curva D, las ordenadas ${}_1D_1B$, ${}_nB_nD$, y el segmento ${}_1B_nB$ del eje de las abscisas; y dado que cada uno de los rectángulos infinitamente pequeños en los que se resuelve esta figura es el doble de los triángulos infinitamente pequeños en los que se resuelve la primera figura, dicha área será el doble del área de la primera figura (Crippa, 2019, pp. 120-124).

¿Es esta prueba un caso de razonamiento teoremático? Como en el caso anterior, vemos que Leibniz introduce elementos que no están contenidos en las premisas. Entre estos elementos se encuentran, la resolución de la figura en triángulos elementales, la semejanza entre un triángulo infinitamente pequeño, el triángulo característico, y un triángulo finito, y la

concepción de una curva como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños. Este paso sugiere que la noción de razonamiento teoremático en principio captura el tipo de razonamiento involucrado en la prueba indirecta de Leibniz. Sin embargo, debemos advertir que la introducción de estos elementos no coincide con la caracterización de un paso teórico que ofrecen Shin y Campos. Efectivamente, a diferencia de la prueba anterior, en este caso la introducción de cantidades infinitamente pequeñas cae fuera del marco establecido de la geometría cartesiana. Esta es justamente la razón por la que se plantea la discusión en torno a la legitimidad del uso de estas cantidades en geometría, como menciona Cellucci, y es el motivo por el cual Leibniz intenta establecer la legitimidad de su uso. No obstante desde nuestro punto de vista el razonamiento involucrado en esta prueba aún puede ser clasificado como un caso de razonamiento teoremático. Aún más, la diferencia entre ambos casos nos fuerza a reinterpretar la afirmación de Peirce acerca de que un paso teórico es “algo” a lo que las nociones involucradas “dan lugar” (NEM 4.49). La caracterización de un paso teórico como un paso deductivamente válido o una construcción permitida por los postulados del sistema, podría capturar únicamente la novedad de un paso teórico dentro de un sistema cerrado. Por el contrario, Leibniz trabaja dentro de un sistema abierto, lo cual requiere una caracterización más débil de la novedad que implica este paso.

6.2.6. El razonamiento que subyace al paso teórico

El paso teórico es el resultado final de un proceso que no podemos ver en la prueba. Este hecho plantea la pregunta acerca de si este proceso forma parte de la deducción teorematológica. En apariencia, algunos autores consideran que no. Por ejemplo, Campos (2010) afirma que “la estructura final de una deducción teorematológica euclídea y la práctica real del matemático tratando de encontrar una prueba del teorema son diferentes cosas” (p. 116)⁹⁰. De

90 “(...)the final structure of an Euclidean theorematic deduction and the actual practice of the mathematician in trying to find a proof of the theorem are different matters” (Campos, 2010, p. 116).

modo similar se expresa Stjernfelt (2011), “una vez que el paso correcto ha sido encontrado, la búsqueda abductiva cesa y el carácter deductivo de la prueba final se destaca” (p. 9)⁹¹.

Estas opiniones incluso parecen coincidir con la opinión de Peirce. Por ejemplo, en *Parts of Carnegie Application* (Peirce, 1902) encontramos la siguiente afirmación.

[T]he process of invention of the proof is not of the nature of that demonstrative reasoning which we call mathematical. There is nothing evident about it except that, as it turns out, it evidently answers the purpose. It is in fact a piece of probable reasoning in regard to which a good logical methodic may be a great aid. (NEM 4.46)

No obstante, en otros escritos Peirce parece afirmar lo contrario. Por ejemplo en *Some Amazing Mazes* (Peirce, 1908) Peirce subraya enfáticamente que todo el trabajo matemático es razonamiento necesario, y atribuye la exclusión de la invención de hipótesis al error de suponer que el razonamiento necesario se reduce a un proceso cuasi mecánico.

[Existe la concepción equivocada de que] in necessary reasoning one is always limited to a narrow choice between quasi-mechanical process; so that little room is left for the exercise of invention. Even the great mathematician, Sylvester, perhaps the mind the most exuberant in original ideas of pure mathematics of any since Gauss, was infected with this error; and consequently, conscious of his own inventive power, was led to preface his “Outline Trace of the Theory of Reducible Cyclodes,” with a footnote which seems to mean that mathematical conclusions are not always derived by an apodictic procedure of reason. If he meant that a man might, by happy guess, light upon a truth which might have been made a mathematical conclusion, what he said was a truism. If he meant that the hint of the way of solving a mathematical

91 “(...) once the right step has been found, abductive searching may cease and the deductive character of the final proof stands out” (Stjernfelt, 2011, p. 9).

problem might be derived from any sort of accidental experience, it was equally a matter of course. But the truth is that all genuine mathematical work, except the formation of the initial postulates (if this be regarded as mathematical work) is necessary reasoning. (Peirce, 1908, p. 434)

La pregunta anterior se relaciona con la cuestión acerca del tipo de razonamiento que está por detrás de un paso teórico. Aquí también las opiniones divergen. Algunos autores coinciden en caracterizar esta fase como una fase abductiva (p. e. Ketner, 1985, Stjernfelt, 2011, Sun-Joo Shin, 2016). Otros, consideran que esta fase se caracteriza por un modo de razonamiento similar, pero no idéntico, al razonamiento abductivo (p. e. Campos, 2010). Otros incluso, identifican esta fase con un subtipo de razonamiento abductivo (p. e. Magnani 2009, Park 2017). Finalmente, hay autores que se niegan a identificar la fase creativa del razonamiento teorematizado con el razonamiento abductivo (p. e. Niiniluoto, 2018). Por otra parte, Peirce nunca vinculó explícitamente el razonamiento teorematizado y el razonamiento abductivo (Sun-Joo Shin, 2016, p. 66).

Lo que sí hizo Peirce fue caracterizar la fase creativa del razonamiento teorematizado como un proceso de experimentación diagramática. De acuerdo con Peirce, la experimentación diagramática involucra operaciones análogas a las de la experimentación en las ciencias empíricas, pero no idénticas. En la experimentación diagramática un diagrama ocupa el lugar de un objeto físico.

[O]ne can make experiments upon uniform diagrams; and when one does so, one must keep a bright lookout for unintended and unexpected changes thereby brought about in the relations of different significant parts of the diagram to one another. Such operations upon diagrams, whether external or imaginary, take the place of the experiments upon real things that one performs in chemical and physical research.

Chemist have ere now, I need not say, described experimentation as the putting of questions to Nature. Just so, experiments upon diagrams are questions put to the Nature of the relations concerned. (Peirce, 1906, *Prolegomena to an Apology for Pragmaticism*, p. 493)

Como Campos (2010) observa, la experimentación diagramática involucra la observación y la formulación de “hipótesis experimentales” que guían la realización de los experimentos sobre los diagramas. Esta actividad también incluye la abstracción hipotética y la generalización. Pero es ante todo una actividad creativa. La creatividad, como ya hemos mencionado, consiste, según Peirce, en establecer relaciones novedosas. Como lo expresa en sus propias palabras, “la originalidad (...) es una cuestión de forma, del modo en el que partes que no la poseen son puestas juntas” (Peirce, 1908, p. 435). Con respecto al rol de la creatividad en matemática Peirce afirma lo siguiente.

[I]t is hardly credible however that there is anybody who does not know that mathematics calls for the profoundest invention, the most athletic imagination, and for a power of generalization in comparison to whose every-day performances the most vaunted performances of metaphysical, biological, and cosmological philosophers in this line seem simply puny (...). (Peirce, 1908, *Some Amazing Mazes*, p. 435)

Ahora bien, la abundancia de material que existe en torno al camino que siguió Leibniz en la resolución del problema de la cuadratura aritmética junto a sus reflexiones sobre su propia práctica, nos dan la oportunidad de observar con más atención los distintos procesos y la complejidad que comprende esta fase. Desde mi perspectiva, es posible que las preguntas anteriormente planteadas se puedan responder, al menos parcialmente, a través del estudio de casos históricos como este. Para ilustrar el alcance de este enfoque, que por otra

parte, es el que propone Grosholz (2007), haremos un breve repaso por la influencia que ejerció sobre Leibniz la demostración de Pascal de la superficie de la esfera.

6.2.7. La influencia de Pascal sobre Leibniz

Hay consenso entre los especialistas en que Leibniz encontró una pista crucial en el método usado por Pascal para determinar la superficie de la esfera. Veamos brevemente entonces, cómo Pascal resuelve este problema, para luego ver cómo Leibniz explota el mismo procedimiento.

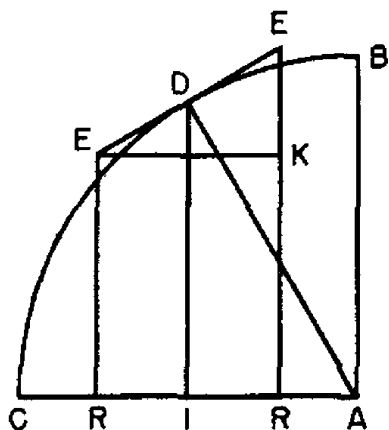
La demostración de Pascal procede a través de cuatro pasos:

(1) Preparación:

Let ABC be a quadrant of a circle of which the radius AB will be considered the axis and the perpendicular radius AC the base; let D be any point on the arc from which the sine [definición] DI will be drawn to the radius AC; and let DE be the tangent on which we chose the points E arbitrarily, and from these points we draw the perpendiculars ER to the radius AC. (Pascal, 2014, *On the Sines of a Quadrant of the Circle*, p. 239)

Figura 6.4

Método del triángulo característico según Pascal



Nota. Pascal, *On the Sines of a Quadrant of the Circle* (Pascal, 2014, p. 239).

(2) Primer paso.

El primer paso de Pascal es mostrar que “el rectángulo formado por el seno DI y la tangente EE es igual al rectángulo formado por la porción de la base (encerrada por las paralelas) y el radio AB” (Pascal, 2014, p. 239)⁹². Para probar este hecho, Pascal observa que los ángulos EEK, EDI, EAI son iguales y que por lo tanto, EEK y DAI son triángulos semejantes. De esto se sigue que $AD:DI = EE:EK$, y por lo tanto que $AD \cdot EK = EE \cdot DI = AB \cdot RR$.

(3) Segundo paso.

El segundo paso es probar que “la suma de los senos de cualquier cuadrante de círculo es igual a la porción de la base comprendida entre los senos extremos multiplicada por el radio” (Pascal, 2014, p. 239). Para probar esto, Pascal traza la tangente DE correspondiente a cada punto D del arco, siendo E el punto de intersección entre tangentes de puntos contiguos. Del resultado anterior se sigue que cada DI multiplicado por EE es igual al radio AB multiplicado por la porción RR de la base, correspondiente. Por lo tanto, la suma de todos los cuadriláteros DI, EE, es igual a la suma de todos los cuadriláteros AB, RR. Ahora bien, cuando el número de senos es infinito, EE es igual a una pequeña porción DD del arco, y la suma de todos los segmentos RR es igual a la porción de la base comprendida entre los dos senos extremos. Esta porción DD es siempre la misma. Por lo tanto, DD multiplicado por la suma de todos los senos DI, es igual al radio AB multiplicado por la porción de la base comprendida entre los senos extremos.

(4) Tercer paso.

Finalmente, el tercer paso consiste en determinar la superficie de la esfera partiendo del hecho de que $2\pi \cdot DD \cdot DI$ es el área infinitamente pequeña de una semiesfera que se

92 “(...) the rectangle formed by the sine DI and the tangent EE is equal to the rectangle formed by a portion of the base (enclosed by the parallels) and the radius AB” (Pascal, 2014, p. 239).

produce al rotar el arco alrededor de la base. Entonces, del resultado anterior se sigue que en el caso del arco de un cuarto de círculo, DD multiplicado por la suma de todos los senos DI es igual al cuadrado del radio. Por lo tanto, la superficie de la esfera, $4\pi AB^2$.

Veamos ahora cómo Leibniz explota el método de Pascal y qué nos muestra esto sobre el razonamiento que hay detrás de un paso teórico. Ante todo, notemos que el razonamiento empleado por Pascal es teoremático. El paso teórico en este caso es la construcción del triángulo característico EEK relacionado con el triángulo finito DIA . Este paso define un método, que Leibniz descubre como generalizar, si en lugar del radio se toma la normal a una curva (Leibniz, 2005, p. 38). Este descubrimiento, nos informa Leibniz, lo llevó inmediatamente a formular el siguiente teorema: “Porciones de una línea recta normal a una curva, intersecada entre la curva y el eje, cuando son tomados en orden y aplicados en ángulos rectos al eje dan lugar a una figura equivalente al momento de la curva en torno al eje” (Leibniz, 2005, p. 38)⁹³. Tenemos aquí entonces la generalización de un paso teórico a partir de un cambio en la interpretación de un diagrama.

El hecho de que Pascal no haya notado la generalidad de su método, causa incluso un gran asombro en Leibniz. Esto lo lleva a explorar la potencialidad del método de Pascal para resolver distintos tipos de problemas:

Our young friend, stimulated by this and pondering on the fertility of this point of view, since previously he had considered infinitely small things such as the intervals between the ordinates in the method of Cavalieri and such only, studied the triangle ${}_1YD_2Y$ which he called Characteristic Triangle, whose sides D_1Y , D_2Y are respectively

93 “Portions of a straight line normal to a curve, intercepted between the curve and the axis, when taken in order and applied at right angles to the axis give rise to a figure equivalent to the moment of the curve about the axis” (Leibniz, 2005, p. 38).

cierto procedimiento es teoremático y luego avanzar sobre la cuestión planteada, tal como intentamos ilustrar en la presente sección.

Conclusión

En este capítulo nos propusimos mostrar que la noción de deducción teoremática ofrece una respuesta al problema planteado por la concepción heurística, a saber, qué tipo de razonamiento involucra la resolución de problemas. A fin de lograr nuestro objetivo, analizamos dos casos considerados como ejemplos paradigmáticos de la concepción heurística por Cellucci : la duplicación del cuadrado según Platón y el procedimiento geométrico que Leibniz utiliza en la *De quadratura arithmetica* para transformar una curva irracional en una curva racional.

Con respecto al problema de la duplicación del cuadrado pudimos comprobar que el proceso involucrado en la resolución de este problema puede ser representado mediante la noción de deducción teoremática. Por un lado, se trata de un proceso deductivo en el sentido de Peirce, i. e., este consiste en determinar una relación necesaria bajo ciertas hipótesis. Por otro lado, el problema no se resuelve mediante el análisis de términos, sino introduciendo elementos que no están contenidos en el planteo mismo del problema. Finalmente, no es posible separar dicho procedimiento de la construcción y manipulación de diagramas.

En este último aspecto, notamos una diferencia con respecto a la concepción de Cellucci. Como hemos visto, para explicar el rol de los diagramas Cellucci apela a la noción de inferencia diagramática. La misma consiste en explotar la similitud entre un objeto y su representación para obtener una hipótesis de la cual derivar la solución a un problema. Así, de acuerdo con Cellucci, Sócrates utiliza un diagrama para arribar a la hipótesis de que la diagonal divide el cuadrado en dos partes iguales y de esta hipótesis deriva la solución buscada. Sin embargo, dicho análisis relega la representación diagramática a la etapa de

búsqueda. En contraposición, la noción de deducción teoremaica plantea que el razonamiento matemático es íntegramente diagramático. Razonar exige observar las relaciones propuestas en un diagrama y estas relaciones son la base sobre la que se asienta la conclusión. Esto, como hemos comprobado, da cuenta con más exactitud del rol de los diagramas en este caso. Efectivamente, Sócrates no solo utiliza un diagrama para arribar a una hipótesis, sino que el diagrama exhibe relaciones entre la diagonal y los cuadrados, sin las cuales no sería posible resolver el problema.

Por otra parte, llegamos a conclusiones similares en relación al método de transmutación que Leibniz utiliza en *De Quadratura Arithmetica*. Aquí también comprobamos que el procedimiento empleado en la prueba coincide con la descripción que ofrece Peirce de la noción de deducción teoremaica. Como en el caso anterior, este procedimiento es deductivo en el sentido de Peirce. El mismo consiste en determinar, bajo ciertas hipótesis, una relación necesaria entre dos curvas. Por otra parte ninguna de las dos pruebas del teorema de transmutación se reduce al análisis de los términos involucrados en la condición del teorema. Por el contrario, las mismas requieren la introducción de elementos externos. Finalmente, el razonamiento de Leibniz es diagramático en el sentido de Peirce. Igual que Sócrates, Leibniz construye un diagrama que expresa las relaciones buscadas en virtud de elementos que no están contenidos en las premisas del problema.

La prueba directa del teorema de transmutación demostró la necesidad de precisar, bajo qué condiciones un paso teórico es un paso legítimo en una deducción teoremaica. Como hemos visto, de acuerdo con Peirce, un paso teórico es algo que ni el problema ni el estado del conocimiento sugieren, pero a lo que ambos dan lugar. Esto da lugar a distintas interpretaciones. Shin, por ejemplo, interpreta que un paso teórico es un paso deductivamente válido que posee tres características distintivas: no es el único paso válido, no existe un

algoritmo que permita seleccionar el paso correcto y solo puede ser evaluado con posterioridad. De modo análogo se expresa Campos, tomando como ejemplo la geometría griega. De acuerdo con Campos, un paso teórico es una transformación de un diagrama permitida por los postulados y las definiciones. Pero en la demostración directa Leibniz introduce cantidades infinitamente pequeñas que están fuera del marco teórico en el que se plantea el problema. Esto sugiere que las restricciones a las que en la práctica estaría sujeto un paso teórico podrían ser más débiles que las planteadas por Shin o por Campos.

Por último, notamos la complejidad que encierra un paso teórico mediante una breve excursión por el proceso que condujo a Leibniz al método del triángulo característico. Dicha complejidad sugiere que el problema relativo al tipo de razonamiento que subyace a un paso teórico podría ser atacado apelando al estudio de casos históricos.

VII

Conclusiones

La noción de deducción teoremaica supera ampliamente las limitaciones que Carlo Cellucci y Emily Grosholz encuentran en la lógica. La principal crítica de estos autores es que la lógica no sirve como instrumento para analizar cómo se resuelven problemas en matemática. De acuerdo con Cellucci, en la medida en que para resolver un problema es necesario introducir elementos nuevos, la lógica deductiva clásica es incapaz de explicar dichos procedimientos. En efecto, la lógica, tal como está planteada, se concentra en procedimientos explicativos, mientras que la resolución de problemas constituye un procedimiento ampliativo. Esta es la razón principal por la cual Cellucci llama a repensar la lógica. Por su parte, Grosholz plantea que la lógica ignora el rol de la representación en la resolución de problemas, en particular el rol irreductible de las representaciones icónicas. Además, cuestiona Grosholz, la lógica ignora el hecho de que el matemático no solo busca obtener resultados correctos, sino también entender por qué son correctos.

Ahora bien, las mismas limitaciones que conducen a Cellucci a cuestionar la lógica, son las que conducen a Peirce a formular la noción de deducción teoremaica. Como Cellucci, Peirce reconoce que es imposible resolver un problema matemático únicamente por medio del análisis tradicional de términos. Por eso plantea la existencia de dos tipos de deducción: corolaria y teoremaica. Mientras que la primera se limita al análisis de términos, la segunda exige introducir elementos externos a las premisas, a fin de arribar a la conclusión. Sin estos elementos la deducción es imposible en el segundo caso que Peirce denomina deducción teoremaica. Esta noción no encaja en la distinción estándar entre razonamiento explicativo y razonamiento ampliatorio. En ella Peirce encuentra una solución a la paradoja entre la existencia de auténticos descubrimientos matemáticos y la necesidad de esos resultados.

A simple vista, parece haber un profundo desacuerdo entre Peirce y Cellucci sobre la naturaleza del procedimiento de resolución de problemas en matemática. En efecto, mientras que Cellucci considera imposible reducir el razonamiento matemático al razonamiento deductivo, para Peirce todo razonamiento matemático es razonamiento deductivo y todo razonamiento deductivo es razonamiento matemático. Sin embargo la discrepancia es en algún punto superficial y se basa en dos formas distintas de entender la deducción. Mientras que Cellucci entiende la deducción como una relación entre proposiciones, Peirce entiende la deducción como un complejo procedimiento, a saber, el procedimiento mediante el cual se determina lo que sería necesariamente verdadero bajo ciertas hipótesis. Desde la perspectiva de Peirce, la concepción tradicional de deducción es una concepción limitada, puesto que no toda deducción es meramente explicativa.

La concordancia entre Peirce y Cellucci se hace evidente cuando comprobamos que casos paradigmáticos de la concepción heurística que interesan a este último, también son casos de deducción teoremaica en el sentido propuesto por Peirce. Pudimos comprobar esta consonancia entre ambos en el caso de la resolución del problema de la duplicación del cuadrado según Platón y el método para obtener la cuadratriz de una curva inventado por Leibniz entre 1673 y 1676. En efecto, por una parte, los dos problemas requieren determinar relaciones necesarias: en el caso platónico, la relación entre dos cuadrados, y en el caso de Leibniz, la proporción entre dos curvas. Por otra parte, la resolución de estos problemas exige introducir elementos externos. En el caso platónico, estos elementos son necesarios para mostrar la relación necesaria entre las áreas de un cuadrado y el cuadrado construido sobre su diagonal, y en el caso de Leibniz, la proporción entre una curva y su cuadratriz.

El acuerdo entre Peirce y Cellucci se extiende incluso a la concepción global de la matemática. En efecto, al igual que Cellucci, Peirce entiende la matemática como una actividad de resolución de problemas. Si bien, Peirce no expresa esta visión explícitamente, sí lo hace a través de los ejemplos que usa para ilustrar los procedimientos matemáticos. Al respecto, podemos comparar

la proposición I.5 de los Elementos, una de las ilustraciones preferidas de Peirce, con la reducción de Hipócrates, uno de los ejemplos favoritos de Cellucci. No obstante, notemos que el criterio que utiliza Peirce para caracterizar los problemas matemáticos es distinto del que utiliza Cellucci.

Mientras que Cellucci apela al estado del conocimiento, Peirce apela a la diferencia entre problemas matemáticos y problemas empíricos. Por eso, Cellucci caracteriza un problema como una cuestión abierta y Peirce, en cambio, como la búsqueda de lo necesariamente verdadero bajo ciertas hipótesis. Pero estas dos caracterizaciones no son contradictorias, sino complementarias.

Del mismo modo, Peirce, como Cellucci, encuentra una relación directa entre problemas extramatemáticos y problemas matemáticos. De acuerdo con Peirce, el matemático crea un mundo hipotético como un medio abstracto para lidiar con una situación demasiado intrincada y compleja para las capacidades humanas. Con este universo intenta representar estructuralmente dicha situación a fin de resolver algún problema planteado por ella, aunque, una vez que ha formulado sus hipótesis, se desentienda completamente de su verdad. Aún más, en este sentido Peirce plantea, como Cellucci, y como Grosholz, la unidad fundamental entre el razonamiento científico y el razonamiento matemático. Aunque, a diferencia de Cellucci, la amplia visión de Peirce del razonamiento deductivo captura la esencia misma de los procedimientos matemáticos.

Otra virtud de la visión de Peirce del razonamiento deductivo es que permite articular el análisis que hace Cellucci del procedimiento de resolución de problemas con el análisis planteado por Grosholz. En particular, la noción de deducción teoremaica subraya, tanto la necesidad de añadir elementos nuevos para resolver un problema, como la irreductibilidad de la representación icónica en matemática. Como hemos visto, Grosholz plantea, por un lado, que el tipo de iconicidad en la que se apoya la resolución de problemas en matemática es una iconicidad estructural, y que la denotación icónica de un objeto se ubica en un punto intermedio entre representar e intervenir. Por otro lado, Grosholz plantea que el matemático usa las representaciones icónicas como modelos de “lápiz y papel” para experimentar con ellas. Y que este tipo de experimentación desempeña un rol

fundamental en la resolución de problemas. Finalmente, Grosholz pone de relieve que el razonamiento matemático no solo sirve para probar, sino también para exhibir las condiciones de inteligibilidad de objetos, problemas y procedimientos.

En armonía con Grosholz, la noción de diagrama, implícita en la noción de deducción teorema, captura la noción de iconicidad estructural a la que hace referencia Grosholz. En efecto, un diagrama para Peirce es un ícono de la forma de una relación. Un ícono no representa tanto las partes, sino más bien la relación que existe entre ellas. Este tipo de iconicidad se encuentra en las figuras geométricas pero también en las fórmulas algebraicas. Así como Grosholz, Peirce también reconoce que las representaciones simbólicas contienen una dimensión icónica. Por otra parte, este mismo tipo de iconicidad es el que Cellucci llama similitud estructural.

De igual modo, la noción de diagrama, es coherente con la visión de Grosholz acerca del estatus intermedio de la denotación icónica entre la representación y la intervención. Peirce no plantea explícitamente este punto de vista. Pero la concepción de un diagrama como un símbolo que denota relaciones que el mismo exhibe, despejan toda duda, pues un diagrama denota estas relaciones independientemente de que exista algún objeto que las posea. Por lo tanto, la iconicidad no requiere la similitud entre un signo y un objeto distinto del mismo signo.

Por otra parte, la noción de deducción teorema enfatiza el rol de las representaciones icónicas como modelos de “lápiz y papel”, modelos con los que el matemático experimenta para resolver problemas. Peirce concibe este uso de las representaciones icónicas como un procedimiento de experimentación diagramática. El mismo es análogo al procedimiento de experimentación con objetos físicos y es allí donde Peirce encuentra la unidad fundamental entre el razonamiento matemático y el razonamiento científico. La experimentación diagramática es justamente lo que distingue la deducción teorema de la deducción corolario, pues durante esta fase se manifiestan los rasgos creativos de la deducción. Y es justamente en el curso de un

experimento diagramático cuando se añaden los nuevos elementos que hacen posible resolver un problema.

Finalmente, a semejanza de Grosholz, Peirce mantiene que una concepción adecuada del razonamiento matemático no se puede limitar a considerar la corrección. En efecto, la existencia de un control crítico, según Peirce, es el rasgo que distingue al razonamiento, propiamente dicho, de un procedimiento mecánico de derivación de fórmulas correcto. Y este control lo da la evidencia de que ciertas relaciones involucran necesariamente otras relaciones. En términos de Grosholz, podríamos expresar la misma distinción diciendo que el razonamiento matemático exhibe las condiciones de inteligibilidad de un objeto, mientras que una mera derivación mecánica no lo hace. Es justamente este rasgo distintivo el que lleva a Peirce a postular el carácter diagramático del razonamiento deductivo. Puesto que, de acuerdo con Peirce, a diferencia de un símbolo o un índice solo un diagrama puede ofrecer esta evidencia.

La noción de deducción teoremaica plantea una multitud de cuestiones que exceden los límites de nuestro trabajo. Entre ellas, a qué tipo de restricciones está sujeta y cuál es el rol de la plausibilidad en ella, cómo se vincula la deducción teoremaica con la abducción y la inducción, cuál es la variedad de pasos teóricos que una deducción teoremaica involucra, qué hace más ventajosas a ciertas representaciones diagramáticas sobre otras, o cuál es la variedad de diagramas en los que se basa la deducción teoremaica, por solo citar algunas. En todos estos casos el estudio de casos históricos podría resultar fundamental.

Bibliografía

- Anderson, D. R. (1986). The evolution of Peirce's concept of abduction. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 22(2), 145-164.
- Barwise, J., Etchemendy, J. (1996). Visual information and valid Reasoning. En G. Allwein, J. Barwise (Eds.), *Logical Reasoning with Diagrams*, (pp. 3-23). Oxford University Press.
- Campos, D. G. (2007). Peirce on the role of poietic creation in mathematical reasoning. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 43(3), 470-489.
- Campos, D. G. (2009). Imagination, concentration, and generalization: Peirce on the reasoning abilities of the mathematician. *Transactions of the Charles S. Peirce Society: A Quarterly Journal in American Philosophy*, 45(2), 135-156.
- Campos, D. G. (2010). The imagination and hypothesis-making in mathematics: a Peircean account. En M. E. Moore (Ed.), *New essays on Peirce's mathematical philosophy*, (pp.105-128). Open Court Publishers.
- Carter, J. (2012). The Role of Representation in Mathematical Reasoning. *Philosophia Scientiae*, 16(1), 55-70.
- Carter, J. (2010). Diagrams and proofs in analysis. *International Studies in the Philosophy of Science*, 24(1), 1-14.
- Cartwright, N. (1999). *The Dappled World: A Study of the Boundaries of Science*. Cambridge University Press
- Cellucci, C. (2020). Reconnecting logic with discovery. *Topoi*, 39(4), 869-880.
- Cellucci, C. (2019). Diagrams in Mathematics. *Foundations of Science*, 24(3), 583-604.
- Cellucci, C. (2017a). *Rethinking Knowledge: The Heuristic View*. Springer.

- Cellucci, C. (2017b). Is mathematics problem solving or theorem-proving? *Foundations of Science* 22(1), 183-199.
- Cellucci, C. (2013). *Rethinking logic: Logic in relation to mathematics, evolution, and method*. Springer.
- Cellucci, C. (2000). The Growth of Mathematical Knowledge: An Open World View. En E. Grosholz, H. Breger (Eds.), *The Growth of Mathematical Knowledge*, (pp. 153-176). Springer-Science+Business Media, B.V.
- Chemla, K. (2004). *History of Science, History of Texts*. Springer.
- Chemla, K. (2003). Generality above Abstraction: The General Expressed in Terms of the Paradigmatic in Mathematics in Ancient China. *Science in Context* 16(3), 413–458.
- Chemla, K. (1998). Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus. *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(2), 163-190.
- Child J. M. (2005). *The Early Mathematical Manuscripts Of Leibniz*. Dover Publications.
- Crick, F. (1982). *Life itself: Its origin and nature*. Simon & Schuster.
- Crippa, D. (2019). *The Impossibility of Squaring the Circle in the 17th Century. A Debate Among Gregory, Huygens and Leibniz*. Springer International Publishing-Birkhäuser.
- Eutocius (2004). As Eratosthenes. En R. Netz, *The Works of Archimedes*, (pp. 294-98). Cambridge University Press.
- Feyerabend, P. (1993). *Against method*. Verso.
- Fowler, D. (1999). *The Mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*. Clarendon Press.
- Giaquinto, M. (2008). Visualizing in mathematics. En P. Mancosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice*, (22-42). Oxford University Press.

- Galilei, G. (1954). *Dialogues concerning two new sciences*. Dover Publications.
- Gillies, D. (2014). Serendipity and mathematical logic. En C. Cozzo, E. Ippoliti (Eds.), *From a heuristic point of view*, (pp. 23-39). Cambridge Scholars Publishing.
- Goethe, N. B., Friend, M. (2010). Confronting ideals of proof with the ways of proving of the research mathematician. *Studia Logica*, 96(2), 273-288.
- Goodman, N. (1972, 1976). *Languages of art: An approach to a theory of symbols*. Hackett publishing.
- Grosholz, E. R. (2016). *Starry Reckoning: Reference and Analysis in Mathematics and Cosmology*. Springer.
- Grosholz, E. R. (2007). *Representation and productive ambiguity in mathematics and the sciences*. Oxford University Press.
- Heath, S. T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol. 1 (Books I-II). Cambridge University Press.
- Heath, S. T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol. 2 (Books III-IX). Cambridge University Press.
- Heath, S. T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol. 3 (Books X-XIII). Cambridge University Press.
- Hendry, R. F. (2001). Mathematics, representation and molecular structure. En U. Klein (Ed.), *Tools and modes of representation in the laboratory sciences*, (pp. 221-236). Springer.
- Hendry, R. F., Psillos, S. (2007). How to do things with theories: An interactive view of language and models in science. En J. Brzeziński, A. Klawiter, T. A. Kuipers (Eds.), *The Courage of Doing Philosophy: Essays Presented to Leszek Nowak*, (pp. 123-157). Rodopi.
- Hersh, R., Ekeland, I. (1997). *What is mathematics, really?* Oxford University Press.

- Hersh, R. (1991). Mathematics has a front and a back. *Synthese*, 88(2), 127-133.
- Hoffmann, M. H. G. (2010). Theoric Transformations and a New Classification of Abductive Inferences. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 46(4), 570-590.
- Kantorovich, A. (1993). *Scientific discovery: Logic and tinkering*. State University of New York Press.
- Kemp, C. (2002). Law's Inertia: Custom in Logic and Experience. En A. Sarat, P. Ewick (Eds.), *Studies in Law, Politics, and Society*, (pp. 135–149). Elsevier Science.
- Ketner, K. L. (1985). How Hintikka misunderstood Peirce's account of theorematic reasoning. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 21(3), 407-418.
- Klein, U. (2003). *Experiments, models, paper tools: Cultures of organic chemistry in the nineteenth century*. Stanford University Press.
- Knobloch, E. (2016). *Gottfried Wilhelm Leibniz. De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Springer Spektrum.
- Knorr, W. R. (1986). *The Ancient Tradition of Greek Geometric Problems*. Birkhäuser Verlag.
- Leibniz, G. W. (2005). Historia et Origo Calculi Differentialis. En J. M. Child (Ed.), *The Early Mathematical Manuscripts Of Leibniz*, (pp. 22-58). Dover Publications.
- Macbeth, D. (2010). Diagrammatic reasoning in Euclid's Elements. En B. Van Kerkhove, J. De Vuyst, J. Van Bendegem, V. F. Hendricks, J. Symons (Eds.), *Philosophical perspectives on mathematical practice*, (pp. 235-267). College Publications.
- Magnani, L. (2009). *Abductive cognition: The epistemological and eco-cognitive dimensions of hypothetical reasoning*. Springer.
- Manders, K. (2008). The Euclidean diagram. En P. Mancosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice*, (pp. 80–133). Oxford University Press.

- Mancosu, P. (2008). *The philosophy of mathematical practice*. Oxford University.
- Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford University Press.
- Mumma, J. (2010). Proofs, pictures, and Euclid. *Synthese*, 175(2), 255-287.
- Netz, R. (1999). *The shaping of deduction in Greek mathematics: A study in cognitive history*. Cambridge University Press.
- Newman, M. H. (1928). Mr. Russell's "Causal Theory of Perception". *Mind*, 37(146), 137-148.
- Niiniluoto, I. (2018). *Truth-seeking by abduction*. Springer Nature Switzerland AG.
- Panza, M. (2012). The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry. *Synthese*, 186(1), 55-102.
- Park, W. (2017). *Abduction in Context: The Conjectural Dynamics of Scientific Reasoning*. Springer.
- Pascal, B. (2014). On the Sines of a Quadrant of the Circle. In D. J. Struik (Ed.), *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, (pp. 239-241). Princeton University Press.
- Peirce, C. S. (2010). *Philosophy of Mathematics: Selected Writings*. Matthew E. Moore (Ed.). Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce: Selected philosophical writings (1893–1913)*. Peirce Edition Project (Ed.). Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (1992). *The essential Peirce: Selected philosophical writings (1867–1893)*. Nathan Houser & Christian Kloesel (Eds.). Indiana University Press.
- Peirce, C. S. (1976). *The new elements of mathematics* (vol. 1-4). Carolyn Eisele (Ed.). Mouton.

- Peirce, C. S. (1931-1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (vol. 1-8). Charles Hartshorne, Paul Weiss (Eds.). Harvard University Press.
- Peirce, C. S. (1908). Some amazing mazes (conclusion). *The Monist*, 18(3), 416-464.
- Peirce, C. S. (1906). Prolegomena to an Apology for Pragmaticism. *The Monist* 16(4), 492-546.
- Peirce, C. S. (1885). On the algebra of logic: A Contribution to the Philosophy of Notation. *American journal of mathematics*, 7(2), 180–202 (CP 3.359-403).
- Peirce (1880). On the algebra of logic. Chapter I: Syllogistic. Chapter II: The logic of non-relative terms. Chapter III: The logic of relatives. *American Journal of Mathematics*, 3(1), 15–57 (CP 3.104–157).
- Pietarinen, A. V., Bellucci, F. (2014). New Light on Peirce's Conceptions of Retroduction, Deduction, and Scientific Reasoning. *International Studies in the Philosophy of Science*, 28(4), 353-373.
- Platón (1987). *Diálogos II: Gorgias, Menéxeno, Eutidemo, Menón, Crátilo*. Editorial Gredos.
- Playfair, J. (1804). *Elements of Geometry; Containing the First Six Books of Euclid, With a Supplement On the Quadrature of the Circle, and the Geometry of Solids; to Which are Added Elements of Plane and Spherical Geometry*. Bell & Bradfute, G. & J. Robinson.
- Poincaré, H. (1952). *Science and hypothesis*. Dover Publications.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press.
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press.

- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving, Combined Edition*. John Willey & Sons.
- Robadey, A. (2004). Exploration d'un mode d'écriture de la généralité: l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905). *Revue d'histoire des mathématiques*, 10(2), 257-318.
- Saito, K. (1995). Doubling the cube: A new interpretation of its significance for early Greek geometry. *Historia Mathematica*, 22(2), 119-137.
- Shin, S. J. (2016). The role of diagrams in abductive reasoning. En S. Krämer, C. Ljungberg (Eds.), *Thinking with Diagrams: The Semiotic Basis of Human Cognition*, (pp. 57-76). Walter de Gruyter Inc.
- Short, T. L. (2007). *Peirce's Theory of Signs*. Cambridge University Press.
- Simonton, D. K. (2004). *Creativity in science: Chance, logic, genius, and Zetigeist*. Cambridge University Press.
- Starikova, I. (2012). From practice to new concepts: Geometric properties of groups. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, 16(1), 129-151.
- Starikova, I. (2010). Why do mathematicians need different ways of presenting mathematical objects? The case of Cayley graphs. *Topoi*, 29(1), 41-51.
- Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as centerpiece of a Peircean epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce society*, 36(3), 357-384.
- Stjernfelt, F. (2011). Peirce's Notion of Diagram Experiment. Corrollarial and Theoretical Experiments with Diagrams. En R. Heinrich, E. Nemeth, W. Pichler (Eds.), *Image and Imaging in Philosophy, Science and the Art: Proceedings of the 33rd International Ludwig Wittgenstein-Symposium in Kirchberg, 2010* (vol. 2, pp. 305-340). De Gruyter.

Toffoli, S. D., Giardino, V. (2015). An inquiry into the practice of proving in low-dimensional topology. En G. Lolli, G. Venturi, M. Panza (Eds.), *From Logic to Practice*, (pp. 315-336). Springer.

Toffoli, S. D., Giardino, V. (2014). Forms and roles of diagrams in knot theory. *Erkenntnis*, 79(4), 829-842.



Universidad Nacional de Córdoba
2022 - Las Malvinas son argentinas

**Hoja Adicional de Firmas
Informe Gráfico**

Número:

Referencia: SARACHO - Tesis. Doc en Filosofía

El documento fue importado por el sistema GEDO con un total de 190 pagina/s.