

К.А. БАТЕНКОВ

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУКТУР СЕТЕЙ СВЯЗИ*Батенков К.А. Числовые характеристики структур сетей связи.*

Аннотация. При решении задач, связанных с анализом и синтезом сетей связи по показателям устойчивости, особое место занимают вопросы описания структур сетей связи с позиций теории графов. При этом традиционным является подход, подразумевающий формальное представление телекоммуникационной сети как неориентированного графа. В данной работе рассматриваются возможные варианты представления графов не в форме их диаграмм (рисунков в двумерной плоскости), а на основе различного набора чисел, либо же вообще одного числа. Подобное описание в ряде случаев позволяет существенно упростить процедуры, связанные с вычислением показателей не только устойчивости исходной сети, но иногда и других показателей качества. При этом появляется возможность алгоритмического решения задач синтеза структур телекоммуникационных сетей, а не только переборными визуальными методами. Приведены примеры расчетов характеристик структур сетей связи для простейших вариантов. Кроме того, в работе не только описан аналитический аппарат формирования числовых описаний структур сетей, но и представлены соотношения, выполняющие трансформацию подобных описаний друг в друга.

Ключевые слова: сеть связи, граф, структура, инвариант, матрица смежностей, матрица инцидентий, мини-код, макси-код.

1. Введение. При решении задач, связанных с анализом и синтезом сетей связи по показателям устойчивости [1, 2], особое место занимают вопросы описания структур сетей связи с позиций теории графов [3, 4]. При этом традиционным является подход [5, 6], подразумевающий формальное представление телекоммуникационной сети как неориентированного графа (множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек [7, 8]).

Структура сети задается в общем случае взвешенным графом $G = \{D, \Phi, P\}$ [2], где $D = \{d_i\}$ — множество элементов графа такое, что $D = V \cup L$, где, в свою очередь, $V = \{v_i\}$ и $L = \{l_{i,j}\}$ — множества вершин и ребер графа такие, что $V \cap L = \emptyset$ (здесь \cup и \cap — символы объединения и пересечения соответственно, а \emptyset — пустое множество); очевидно, что вершина графа есть узел связи на сети, а ребро — линия связи; $\Phi(l_{i,j}) = v_i \& v_j$ — отображение инцидентии и смежности элементов графа; если вершина v_i соединена с v_j ребром $l_{i,j}$, то говорят, что ребро $l_{i,j}$ инцидентно

вершинам v_i и v_j , а последние, в свою очередь, смежны по ребру $l_{i,j}$, при этом v_i и v_j являются вершинами граничной пары ребра $l_{i,j}$, $P = \{p(d_i)\} = \{p_i\}$ — множество статистически независимых вероятностей исправного состояния элементов графа. Следует также отметить, что при описании неориентированного ребра порядок следования индексов вершин его граничной пары безразличен. Тем не менее обычно вначале пишется меньший номер вершины, а затем больший.

В отличие от наиболее часто используемого подхода — представления графов в форме диаграмм (рисунков в двумерной плоскости), данная работа посвящена вариантам отображения графов на основе наборов чисел (векторов, матриц, скаляров или инвариантов). В результате появляется возможность значительного упрощения расчетов как показателей устойчивости сетей, так и ряда других параметров, зависящих от их структур сетей связи. Кроме того, синтез телекоммуникационных сетей, традиционно выполняемый на основе переборных методов, может быть сведен к задаче последовательной оптимизации.

2. Основные понятия теории графов. Два графа G и H являются изоморфными (обозначается как $G \cong H$ или иногда $G = H$), если между их множествами вершин наблюдается взаимно однозначное сохраняющее смежность соответствие. Например, графы G_1 и G_2 на рисунке 1 изоморфны, а граф G_3 изоморфен каждому из них. Очевидно, что изоморфизм — это отношение эквивалентности на графах.

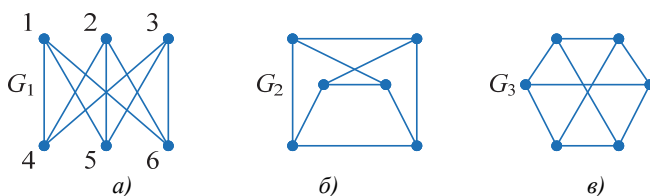


Рис. 1. Графы: а) помеченный, б, в) непомеченные

Инвариант графа G — это число, взаимосвязанное с графом G , принимающее одинаковые значения для любого графа, изоморфного графу G . Так, количество вершин v и ребер l — это инварианты. С точностью до изоморфизма граф задается полным набором инвариантов. Так, для всех графов с количеством вершин, не

превышающем трех, числа v и l формируют полный набор инвариантов. На данный момент неизвестно ни одной нетривиальной полной системы инвариантов для графов.

Структура графа помимо ее типа характеризуется такими показателями, как мощность его множеств и степень вершин.

Мощность множества — число элементов, входящих в данное множество. В графе различают множества элементов D , V и L , поэтому мощности этих множеств обозначают следующим образом: $d = |D|$, $v = |V|$ и $l = |L|$, при этом всегда $d = v + l$.

Степень вершины v_i — число инцидентных ей ребер. Заметим, что сама вершина и число инцидентных ей ребер обозначается одним и тем же символом. В дальнейшем, в случае неоднозначности, будет конкретно указываться, что имеется в виду. Иногда степень вершины также называется валентностью [10]. В структуре графа мощности множеств и степени вершин взаимосвязаны. Действительно, например, мощность множества ребер можно вычислить по формуле:

$$l = \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{\substack{j=1 \\ l_{i,j} \in L}}^{v_i} a_j, a_j = \begin{cases} 1, & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases}$$

Кроме того, справедлива теорема 1 (Эйлера) (первая в истории теории графов [11]): удвоенное количество ребер графа равно сумме степеней его вершин:

$$\sum_{i=1}^n v_i = 2l. \quad (1)$$

В (v, l) -графе $0 \leq v_i \leq l - 1$ для произвольной вершины v_i . Используются следующие обозначения: минимальная степень вершин графа G — $\mindeg G = v_{\min}(G)$, максимальная — $\maxdeg G = v_{\max}(G)$. Если $v_{\min}(G) = v_{\max}(G) = r$, то степень всех вершин одинаковы и такой граф G называют регулярным (или однородным) степени r . В данном контексте используют понятие степени графа и обозначают $\deg G = r$.

Регулярный граф степени 0 не имеет ребер, и все его вершины изолированы. У регулярного графа G степени 1 каждая его компонента включает лишь одно ребро; у регулярного графа степени

2 — цикл и, естественно, наоборот. Однородный граф степени $v-1$ является v -кликкой. Вершину со степенью $v_i = 0$ называют изолированной, а со степенью $v_i = 1$ — концевой (или висячей).

3. Вектор степеней и его обращение. Пусть v_1, v_2, \dots, v_v — степени вершин графа G , выписанные в порядке неубывания: $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_v$. Упорядоченную систему $[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_v]^T$ называют *вектором степеней* графа v_1, v_2, \dots, v_v и кратко обозначают $v(G) = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_v]^T$ [12], где T — оператор транспонирования. Вместо вектора степеней часто пользуются его обращением $v'(G) = [v'_1 \ v'_2 \ \dots \ v'_v]^T$, где $v'_i = v_{n-i}$, $i = 1, \dots, v$ — те же степени вершин, но упорядоченные в порядке невозрастания $v'_1 \geq v'_2 \geq \dots \geq v'_v$. Здесь и далее для общности обозначений будем подразумевать, что все векторы являются вектор-столбцами.

Задача 1. Диаграммы графов изображены на рисунке 2 (каждая вершина обозначена ее степенью). Определить векторы степеней и их обращения.

Дано: G_1, G_2 .

Найти: $v(G_1), v(G_2), v'(G_1), v'(G_2)$.

Для графа, изображенного слева на рисунке 2, упорядочим вершины в порядке невозрастания их степеней. Тогда $v(G_1) = [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3]^T$. Упорядочив вершины в порядке их неубывания, получаем $v'(G_1) = [3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]^T$. Аналогично для графа, изображенного справа на рисунке 2 — $v(G_2) = [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3]^T$ и $v'(G_2) = [3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]^T$.

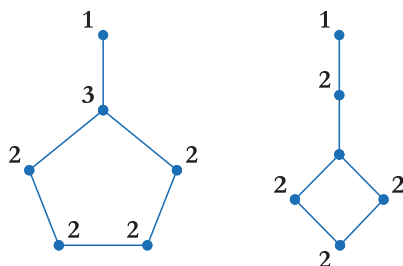


Рис. 2. Неизоморфные графы

Очевидно, что для изоморфизма графов G_1 и G_2 необходима эквивалентность векторов их степеней $v(G_1) = v(G_2)$, но данное условие не является достаточным, как показано в задаче 1 (на рисунке 2 представлена пара неизоморфных графов с одинаковыми векторами степеней).

4. Инварианты. *Плотность (кликое число)* $\phi(G)$ — число вершин наибольшего полного подграфа (наибольшей клики) в G или по-другому — наибольшее число попарно смежных вершин [12]. Инвариантность данной характеристики определяется тем, что при изоморфном соответствии двух графов каждому подмножеству вершин одного графа, порождающему клику, соответствует в другом графе подмножество с тем же количеством вершин и тоже порождающее клику.

Неплотность $\varepsilon(G)$ — число вершин наибольшего безреберного подграфа графа G , то есть наибольшее количество его попарно несмежных вершин.

Число компонент $\kappa(G)$. Граф G является связным, если множество его вершин невозможно разделить на попарно непересекающиеся непустые подмножества так, чтобы никакие две вершины из разных подмножеств не были смежны. Несвязный же граф, естественно, однозначно разделяется указанным образом на подграфы, далее уже не разбиваемые, последние называются компонентами графа G , и их количество обозначается через $\kappa(G)$, если G связан, то $\kappa(G) = 1$.

5. Матрица и вектор смежностей. Задать граф возможно на основе его смежностей или его инцидентий. Наиболее подходящей формой отображения подобной информации является матричная.

Матрицей смежностей (смежности) $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ графа G с v вершинами называется $(v \times v)$ -матрица, в которой:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & l_{i,j} \in L, \\ 0, & l_{i,j} \notin L, \end{cases}$$

то есть $a_{i,j} = 1$, если вершина v_i смежна с v_j , и $a_{i,j} = 0$, если нет.

Следовательно, между помеченными v -вершинными графами и симметрическими бинарными квадратными матрицами

размером $(v \times v)$, главная диагональ которых заполнена нулями, наблюдается взаимно однозначное соответствие.

Задача 2. Диаграмма графа изображена слева на рисунке 3. Определить матрицу смежностей.

Дано: G .

Найти: $A(G)$.

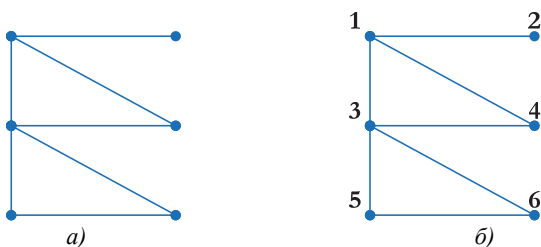


Рис. 3. Графы: а) исходный, б) помеченный

Пронумеруем вершины слева направо, сверху вниз, как показано справа на рисунке 3. Число вершин $v = 6$, следовательно, матрица смежностей имеет размер (6×6) :

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что степени вершин графа G эквивалентны суммам по строкам элементов матрицы A . В целом же вследствие отождествления графов и матриц с любой графой абстракцией возможно сопоставить описание, определяемое матрицей смежностей. Например, связный граф. Так, некоторый граф G является связным, если не существует такого разбиения $V = V_1 \cup V_2$ множества вершин графа G , что вершины из V_1 и вершины из V_2 не соединимы ребрами графа G . С точки зрения матриц данное определение трактуется следующим образом: граф G связан, если матрица смежностей не имеет приведенную форму

$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$, где A' и A'' — квадратные матрицы при любой

возможной нумерации вершин графа G .

Если матрицы смежностей A' и A'' определяются на основе различных нумераций графа G , то для матрицы перестановки P : $A' = P^{-1}A''P$. Возможны варианты, когда задание фиксированной последовательности вершин графа не влияет на анализируемые результаты, например, на физический смысл элементов степеней матрицы смежностей.

Теорема 2. Пусть G — помеченный граф, а его матрица смежностей задается как A . Тогда элемент $a_{i,j}$ матрицы A^n эквивалентен числу маршрутов из v_i в v_j длины n .

Следствие 1. Число простых (v_i, v_j) -цепей длины n равно элементу $a_{i,j}$ матрицы A^n , $i \neq j$.

Следствие 2. Расстояние между вершинами v_i и v_j для $i \neq j$ равно наименьшему целому числу степеней n , для которых элемент $a_{i,j}$ матрицы A^n не равен нулю.

Задача 3. Диаграмма помеченного графа изображена на рисунке 3б. Определить число маршрутов длины 2 из третьего узла в третий и из четвертого в пятый.

Дано: G .

Найти: $(v_3, v_3)_2$, $(v_4, v_5)_2$.

Используем матрицу смежности $A(G)$, полученную в задаче 2. Тогда возведение в квадрат данной матрицы дает все возможные пути длиной два:

$$A^2(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $[A^2(G)]_{3,3} = 4$, а $[A^2(G)]_{4,5} = 1$, то число маршрутов из третьего узла в третий равно $(v_3, v_3)_2 = 4$, а из четвертого в пятый — $(v_4, v_5)_2 = 1$. Заметим, что число путей из вершины в саму себя соответствует ее степени.

Следует отметить, что вектор степеней v получается как сумма соответствующих строк матрицы смежностей A , то есть:

$$v = A1_v,$$

где $1_v = [1, 1, \dots, 1]^T$ — единичный вектор размера $(v \times 1)$, либо вектор степеней v может быть определен как вектор, составленный из элементов главной диагонали квадрата матрицы смежностей A^2 , то есть:

$$v = \text{diag}(A^2),$$

где $\text{diag}(X)$ — вектор, составленный из элементов главной диагонали матрицы X .

Необходимо заметить, что два вышеприведенных равенства справедливы при условии упорядочения матрицы смежностей A в порядке неубывания степеней вершин соответствующего ей графа.

Поскольку матрица смежности A симметричная (в случае неориентированных графов) для ее задания достаточно разместить в определенном порядке лишь элементы над главной диагональю, то есть на основе матрицы смежностей A задать *вектор смежностей* a : $A > a$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,v} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{v,1} & a_{v,2} & \cdots & a_{v,v} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow a = [a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,v}, a_{2,3}, a_{2,4}, \dots, a_{2,v}, \dots, a_{v-1,v}]^T.$$

Длина вектора равна $C_v^2 = \frac{v!}{(v-2)!2!}$, где C_i^j — число сочетаний из j по i . Заметим, что данный порядок записи элементов

матрицы смежностей несколько отличается от порядка, используемого в [12]. Это связано, во-первых, с произвольностью выбора элементов над главной диагональю, а во-вторых, как будет показано ниже, подобный порядок позволяет проще формировать коды графов.

Кроме того, согласно теореме Эйлера, число ребер можно рассчитать исходя из вектора смежностей:

$$l = a^T 1_{C_v^2}.$$

6. Мини-код и макси-код. Представление бинарного вектора смежностей a в десятичной форме позволяет сформировать двоичный код матрицы A :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= a_{1,2} 2^{C_v^2-1} + a_{1,3} 2^{C_v^2-2} + \dots + a_{1,v} 2^{C_v^2-v} + a_{2,3} 2^{C_v^2-v+1} + \\ &+ a_{2,4} 2^{C_v^2-v+2} + \dots + a_{2,v} 2^{C_v^2-2v-1} + \dots + a_{v-1,v} 2^0 = \\ &= \sum_{i=1}^{v-1} \sum_{j=i+1}^v a_{i,j} 2^{\frac{(i-v-1)(i-v)}{2} + k-j+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, двоичный код μ матрицы A представляет собой запись, в которой количество единиц равно $a_{v-1,v}$, количество двоек $a_{v-2,v}$, количество четверок $a_{v-2,v-1}$ и т. д. Двоичные коды матриц смежностей одного и того же графа, соответствующие различным нумерациям его вершин, в общем случае не идентичны, поэтому задают двоичный код матрицы, но не графа.

Наименьший из этих кодов (при всевозможных $v!$ нумерациях) называют мини-кодом $\dot{\mu}(G)$, а наибольший — макси-кодом $\mu(G)$ заданного графа G . Оба эти кода — инварианты, а кроме того, на основе любого из них и числа вершин достаточно просто восстанавливается одна из матриц смежностей графа, а следовательно, и с точностью до изоморфизма сам граф. Следует отметить, что формирование мини-кода $\dot{\mu}$ и макси-кода μ графа G упрощается, если пронумеровать вершины в порядке невозрастания или неубывания, то есть использовать вектор степеней v или обращенный вектор степеней v' соответственно.

Алгоритм расчета мини-кода μ можно представить следующим образом.

Первоначально формируется вектор размера $((v-1) \times 1)$, соответствующий первой строке элементов матрицы смежностей над главной диагональю (первому столбцу под главной диагональю):

$$a_1 = [a_{1,2}, a_{1,3}, \dots, a_{1,v}]^T$$

согласно условию:

$$a_1 = \left\{ a_1 : a_1 = \arg \min_{a_1} \left(\sum_{j=2}^v a_{1,j} 2^{v-j} \right), [v]_1 = [v_1]_1, v_1 \leq v \right\}, \quad (2)$$

где вектор степеней имеет форму:

$$v_1 = A_1 1_v,$$

а матрица смежностей заполнена только вектором a_1 (все остальные ее элементы равны нулю):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T \\ a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее последовательно находятся все векторы a_i размером $((v-i) \times 1)$:

$$a_i = [a_{1,i+1}, a_{1,i+1}, \dots, a_{1,v}]^T, i = 2, 3, \dots, v-1,$$

согласно условию:

$$a_i = \left\{ a_i : a_i = \arg \min_{a_i} \left(\sum_{j=i+1}^v a_{i,j} 2^{v-j} \right), [v]_i = [v_i]_i, v_i \leq v \right\}, \quad (3)$$

где вектор степеней имеет форму:

$$v_i = A_i 1_v,$$

а матрица смежностей заполнена только векторами от a_1 до a_i включительно (все остальные ее элементы равны нулю):

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & & & a_1^T & & \\ & 0 & & a_2^T & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ a_1 & & & 0 & a_i^T & \\ & a_2 & \ddots & & & \\ & & & a_i & 0 & \end{bmatrix}.$$

В результате формируется матрица смежностей A_{v-1} , соответствующая мини-коду μ исходного графа.

Для определения макси-кода μ следует использовать ту же последовательность вычислений, за исключением того, что в условиях (2) и (3) требуется вместо вектора степеней v использовать его обращение v' и поменять минимизацию на максимизацию, то есть использовать равенство:

$$a_i = \arg \max_{a_i} \left(\sum_{j=i+1}^v a_{i,j} 2^{v-j} \right), i = 1, 2, \dots, v-1.$$

Задача 4. Диаграмма помеченного графа изображена на рисунке 3б. Определить мини-код и макси-код графа.

Дано: G .

Найти: $\mu(G)$, $\mu(G)$.

Для решения можно использовать матрицу смежностей $A(G)$, полученную в задаче 2, либо ее квадрат $A^2(G)$, вычисленный в задаче 3. В первом случае степени вершин получаются как сумма соответствующих строк матрицы смежностей $A(G)$, а во втором степени вершин есть элементы главной диагонали квадрата матрицы смежностей $A^2(G)$. Таким образом, вектор степеней и его обращение имеют вид:

$$v(G) = [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4]^T, v'(G) = [4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]^T.$$

Условие (2) требует размещение по вектору a_1 , столбца соответствующего смежностям вершины с минимальной степенью $[v]_1 = 1$. Тогда:

$$a_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T,$$

так как $\min_{a_1} \left(\sum_{j=2}^v a_{1,j} 2^{v-j} \right) = 1$.

Матрица смежностей принимает вид:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а вектор степеней — $v_j = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Отметим, что условие $v_1 \leq v$ в (2) выполняется, а сам вектор v_1 является неупорядоченным в порядке невозрастания.

Далее проводится размещение по вектору a_2 , соответствующему смежностям вершины с минимальной степенью $[v]_2 = 2$. Тогда

$$a_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T,$$

так как $\min_{a_2} \left(\sum_{j=2}^v a_{2,j} 2^{v-j} \right) = 3$.

Матрица смежностей принимает вид:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а вектор степеней:

$$v_2 = [1 \ 2 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2]^T.$$

Продолжая подобную процедуру, получаем:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_5 = [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4]^T.$$

Следует также отметить, что в действительности на четвертом шаге матрица оказывается уже полностью заполненной, а пятый шаг — тривиальным.

Вектор смежностей:

$$a = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]^T.$$

Соответствующий мини-код:

$$\mu(G) = \mu(A_5) = 1246.$$

Макси-код графа G вычисляется схожим образом. В результате процедур получается:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, v_5 = [4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1]^T.$$

Вектор смежностей:

$$a = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

Соответствующий макси-код:

$$\mu(G) = \mu(A_5) = 31489.$$

Количество вершин можно не сообщать, если заранее известно, что у графа нет изолированных вершин. При задании же графа его макси-кодом ясно, что если последний отличен от нуля, то он точно содержит единицу старшего разряда $2^{C_v^2-1}$, то есть отвечает такой нумерации вершин графа, при которой пара $((v-1), v)$ является ребром, в силу чего число вершин v однозначно определяется из условия:

$$C_v^2 - 1 = \lceil \log_2 \mu \rceil,$$

где $\lceil x \rceil$ — округление в большую сторону до ближайшего целого числа x . Отсюда:

$$v = \frac{1}{2} + \sqrt{2 \lceil \log_2 \mu \rceil + \frac{1}{4}}. \quad (4)$$

Следует отметить, что лишь в случае $\mu = 0$, то есть когда рассматривается безреберный граф, число v его вершин может быть любым.

Задача 5. Макси-код первого графа равен 60. Второй граф имеет 4 вершины, а его мини-код равен 15. Определить, являются ли данные графы изоморфными.

Дано: $\mu(G_1) = 60$, $\mu(G_2) = 15$, $v(G_2) = 4$.

Найти: $G_1 \cong G_2$ или $G_1 \not\cong G_2$.

Первоначально необходимо удостовериться, что число вершин в графах совпадает. Для второго графа число вершин дано, а для вычисления количества вершин первого воспользуемся формулой (4):

$$\begin{aligned} v(G_1) &= \frac{1}{2} + \sqrt{2 \lceil \log_2 \mu \rceil} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \sqrt{2 \lceil \log_2 60 \rceil} + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{2 \lceil 5,907 \rceil} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + 3,5 = 4. \end{aligned}$$

Таким образом, количество вершин совпадает, и графы могут быть изоморфными.

Далее рассчитываются векторы смежностей обоих графов. Для этого макси-код и мини-код представляются в двоичной системе исчисления:

$$a(G_1) = [111100]^T, a(G_2) = [001111]^T.$$

Соответствующие матрицы смежностей:

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что $A(G_1) = A^T(G_2)$, что предполагает изоморфизм данных графов. В общем случае целесообразно найти векторы степеней:

$$v(G_1) = [1223]^T, v(G_2) = [1223]^T$$

и для точности построить их диаграммы (на рисунке 4а изображен граф G_1 , а на рисунке 4б — G_2), что также говорит об изоморфизме графов, то есть $G_1 \cong G_2$.

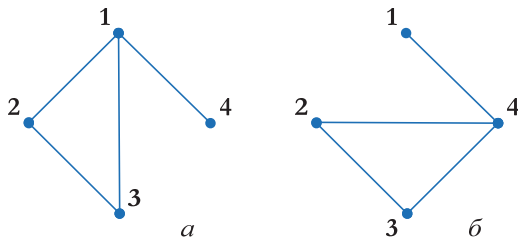


Рис. 4. Два изоморфных графа

7. Матрица инциденций. Матрицей инциденций $V = \{b_{i,j}\}_{i=1,\dots,v, j=1,\dots,l}$ помеченного графа G с v вершинами и l ребрами называется $(v \times l)$ -матрица, в которой

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, & l_j \in L, \\ 0, & l_j \notin L, \end{cases}$$

то есть $b_{i,j} = 1$, если вершина v_i инцидентна ребру l_j , и $b_{i,j} = 0$, если нет. Аналогично матрице смежностей матрица инциденций задает граф G с точностью до изоморфизма. Кроме того, любые $v-1$ строки матрицы инциденций V определяют граф G , так как сумма по модулю 2 любых $v-1$ строк эквивалента оставшейся v -й строке.

Существует теорема, определяющая взаимосвязь матриц смежностей и инциденций графа G .

Теорема 3. Для любого графа G с v вершинами и l ребрами с матрицей инциденций V

$$A = V^T V - 2I_l,$$

где I_l — единичная матрица размером l ; V^T — матрица, транспонированная к матрице V .

Задача 6. Макси-код графа равен 60. Определить матрицу смежности данного графа.

Дано: $\mu = 60$.

Найти: V .

Воспользуемся результатами задачи 5 для первого графа, у которого матрица смежностей имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда, пронумеровав ребра в порядке их упоминания в максикод, получаем, что их количество равно 4: $l_1 = (v_1, v_2)$, $l_2 = (v_1, v_3)$, $l_3 = (v_1, v_4)$, $l_4 = (v_2, v_3)$. При этом матрица инцидентий имеет размер (4×4) :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Матрица циклов. Рассмотрим граф G , у которого пронумерованы простые циклы и ребра. Матрицей циклов (цикломатической матрицей) $C = \{c_{i,j}\}_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,l}$, где n — количество циклов графа G , называется $(n \times l)$ -матрица, в которой элемент $c_{i,j} = 1$, если i -й цикл включает ребро l_j и $c_{i,j} = 0$, если нет.

Существует теорема, указывающая на взаимосвязь матриц циклов и инцидентий. Данный результат в комбинаторной топологии перефразируется так: «граница границы любой цепи нулевая».

Теорема 4. Для графа G с матрицами инцидентий B и циклов C справедливо:

$$CB^T = 0 \pmod{2}.$$

Задача 7. Макси-код графа равен 60. Определить матрицу циклов данного графа.

Дано: $\mu = 60$.

Найти: C .

Воспользуемся результатами задачи 5 для первого графа, у которого матрица смежностей имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проще всего для определения матрицы циклов использовать диаграмму графа (рисунок 4б). Видно, что в данном графе присутствует всего один цикл (v_1, v_2, v_3) или, согласно задаче 6, (l_1, l_4, l_2) , что приводит к векторно-строчному виду матрицы циклов:

$$C = [1101]$$

Для проверки корректности полученной матрицы циклов целесообразно использовать равенство (5):

$$\begin{aligned} CB^T(\text{mod } 2) &= [1101] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} (\text{mod } 2) = \\ &= [2220] (\text{mod } 2) = [0000], \end{aligned}$$

то есть матрица циклов соответствует матрице инцидентий.

Матрица циклов не задает граф с точностью до изоморфизма (в отличие от матриц смежностей и инцидентий). Естественно, что матрица циклов не содержит информации о принадлежности ребра к графу, если оно не содержится ни в одном цикле. Но и при условии исключения подобных ребер, матрица циклов C не идентифицирует однозначно граф G , что иллюстрируется графами, изображенными на рисунке 5. Данные графы содержат одинаковые циклы, а значит, имеют схожую матрицу циклов.

Подобным же образом задается матрица коциклов (разрезов) C' . Каждая вершина двусвязного графа G задает коцикл (минимальный

разрез), состоящий из инцидентных ей ребер. Следовательно, матрица коциклов блока включает его матрицу инцидентий.

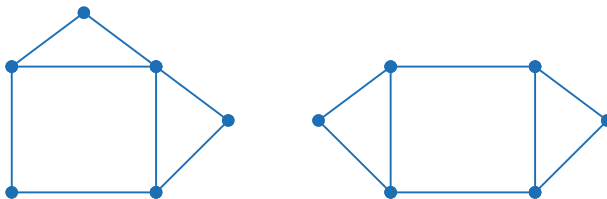


Рис. 5. Два графа с одной и той же матрицей циклов

9. Матрица Кирхгофа. Матрицей Кирхгофа $K = \{k_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ помеченного графа G с v вершинами называется $(v \times v)$ -матрица, в которой:

$$k_{i,j} = \begin{cases} \deg v_i, & i = j, \\ -1, & l_{i,j} \in L, \\ 0, & l_{i,j} \notin L, \end{cases}$$

то есть $k_{i,i} = \deg v_i$ для всех диагональных элементов, $k_{i,j} = -1$, если вершина v_i смежна с v_j , и $k_{i,j} = 0$ в противном случае [10]. Следует отметить, что данное определение является частным случаем матрицы Кирхгофа для единичных проводимостей у всех ребер рассматриваемого графа [10]. Таким образом, можно установить следующие равенства для некоторого неориентированного графа G :

$$K = \text{diag}(A1_v) - A,$$

а в случае упорядоченности строк и столбцов матрицы смежностей в порядке неубывания:

$$K = v - A.$$

Задача 8. Макси-код графа равен 60. Определить матрицу Кирхгофа данного графа.

Дано: $\mu = 60$.

Найти: K .

Воспользуемся результатами задачи 5 для первого графа, у которого матрица смежностей имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} K = \text{diag}(A1_v) - A &= \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что матрицу Кирхгофа можно получить также на основе диаграммы графа (рисунок 4а), однако ее вид может несколько отличаться из-за перестановки строк и столбцов.

10. Матрица достижимостей. Матрицей достижимостей $D = \{d_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ помеченного v -вершинного графа G называется $(v \times v)$ -матрица, содержащая элементы $d_{i,j} = 1$, если вершина v_i достижима из v_j , и $d_{i,j} = 0$, если нет. Матрицы достижимостей и смежностей связаны следующим соотношением:

$$D = \bigcup_{i=1}^{v-1} A^i \cup \text{diag}(1_v),$$

где \cup — символ объединения.

Последнее: объединяемая матрица $\text{diag}(1_v)$ включена для учета того, что сам любой узел доступен самому себе.

Вектор достижимостей определяется выражением:

$$d = D1_v.$$

11. Заключение. Выбор той или иной формы представления телекоммуникационной сети напрямую связан с типом решаемых задач [6, 7]. Так, при анализе надежности и живучести сети [15] на основе числа остовых деревьев удобным оказывается использование матрицы Кирхгофа; при исследовании свойств связности сети больше подходит матрица достижимостей, а при необходимости передать структуру сложноразветвленной сети на расстояние уже больше подходит представление графа в форме мини-кода или макси-кода. В результате при широком спектре решаемых задач оказывается просто необходимым применение алгоритмических способов преобразования различных представлений структур сетей связи в форме отдельных чисел и инвариантов [16-22]. В данной работе не только приводится аналитический аппарат формирования числовых описаний структур сетей, но и представлены соотношения, выполняющие трансформацию подобных описаний друг в друга.

Литература

1. *Форман Дж.* Много цифр: Анализ больших данных при помощи Excel // М.: Альпина Паблишер. 2016. 464 с.
2. *Остроумова Л.А.* Математические ожидания k -х входящих степеней вершин в случайных графах в модели Боллобаша-Риордана // Труды Московского физико-технического института. 2012. Т. 4. № 1(13). С. 29–40.
3. *Лакеев А. В.* Элементы теории обыкновенных графов : учеб. пособие // Иркутск: Изд-во ИГУ. 2014. 83 с.
4. *Колганов А.С.* Параллельная реализация алгоритма поиска минимальных остовных деревьев с использованием центрального и графического процессоров // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016). 2016. С. 530–543.
5. *Arefin A.S., Riveros C., Berretta R., Moscato P.* kNN-MST-Agglomerative: A fast and scalable graph-based data clustering approach on GPU // 7th International Conference on Computer Science & Education (ICCSE). 2012. pp. 585–590.
6. *Chen P.-Yu, Choudhury S., Hero A.O.* Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection. 2016. URL: <http://de.arxiv.org/abs/1512.07372v1>. (дата обращения: 24.01.2017).
7. *Kalofolias S.V., Bresson X., Bronstein M.M., Vandergheynst P.* Robust principal component analysis on graphs. CoRR. 2015. vol. abs/1504.06151. URL: <http://arxiv.org/abs/1504.06151>. (дата обращения: 24.01.2017).
8. *Кристофидес Н.* Теория графов: пер. с англ. // М.: Мир. 1978. 432 с.

9. *Дудник Б.Я., Овчаренко В. Ф.* Надежность и живучесть систем // М.: Радио и связь. 1984. 216 с.
10. *Tam T.* Теория графов: пер. с англ // М.: Мир. 1988. 424 с.
11. *Харари Ф.* Теория графов: пер. с англ., изд. 2-е // М.: Едиториал УРСС. 2003. 296 с.
12. *Зыков А.А.* Основы теории графов // М.: Наука. 1987. 384 с.
13. *Батенков К.А.* Особенности оценки качества функционирования сетей связи // Ресурсоэффективные системы в управлении и контроле: взгляд в будущее: сборник научных трудов V Международной конференции школьников, студентов, аспирантов, молодых ученых. 2016. Том 1. С. 30–31.
14. *Батенков К.А.* Об анализе живучести сетей связи на основе вероятностного подхода // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2016. С. 6–8.
15. *Егунов М.М., Шувалов В.П.* Анализ структурной надёжности транспортной сети // Вестник СибГУТИ. 2012. №1. С. 54–60.
16. *Tsitsiashvili G.Sh.* Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // Reliability: Theory and Applications. 2012. vol.1. no.1. pp. 154–159.
17. *Bollobás B., Riordan O.* The diameter of a scale-free random graph // Combinatorica. 2004. vol. 24. no. 1. pp. 5–34.
18. *Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G.* The degree sequence of a scale-free random graph process // Random Structures Algorithms. 2001. vol. 18. no.3. pp. 279–290.
19. *Grechnikov E.A.* An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2011. vol. 1. no. 2. pp. 40–73.
20. *Drinea E., Enachescu M., Mitzenmacher M.* Variations on random graph models for the web // Technical report. Department of Computer Science. Harvard University. 2001.
21. *Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F., Samukhin A.N.* Structure of growing networks with preferential linking // Phys. rev. lett. 2000. vol. 85. pp. 4633.
22. *Kumar R. et al.* Stochastic models for the web graph // Proc. 41st Symposium on Foundations of Computer Science. 2000.
23. *Батенков К.А.* Устойчивость сетей связи // Орел: Академия ФСО России. 2017. 277 с.

Батенков Кирилл Александрович – канд. техн. наук; сотрудник Академии Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: статистическая теория связи, модели и методы обработки сигналов, анализ качества сетей связи. Число научных публикаций – 140. pustur@yandex.ru; Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, ул. Приборостроительная, д. 35, Орёл, 302034, РФ.

K.A. BATENKOV
NUMERIC FEATURES OF NETWORKING

Batenkov K.A. Numeric Features of Networking.

Abstract. Networking description issues, in respect to graph theory, occupy a special place in tasks connected with communications network analysis and synthesis by stability indexes. An approach, implying formal representation of a telecommunications network as a non-oriented graph, is traditional. Graph representation variants based on different number stacks or one number instead of diagrams are considered. In some cases, such description significantly simplifies procedures of stability and other index computation. Thus, the tasks of telecommunications network synthesis can be solved not only by enumeration visual methods but also algorithmically. Examples of computing net-working numeric features for elementary versions are given. In the paper, we not only describe analytical instruments for networking structure declaration but also introduce relationships transforming such descriptions into one another.

Keywords: communications network, graph, structure, invariant, adjacency matrix, incidence matrix, mini-code, maxi-code.

Batenkov Kirill Aleksandrovich – candidate of technical sciences; employee of Academy of Federal Guard Service. Research interests: statistical communication theory, models and methods of signal processing, communications network quality analysis. The number of scientific publications – 140. pustur@yandex.ru; Academy of Federal Guard Service, Pribrorostroitel'naya str., 35, Orel, 302034, Russian Federation.

References

1. Forman Dzh. *Mnogo cifr: Analiz bol'shih dannyh pri pomoshchi Excel* [Lot numbers: analysis of large data using Excel]. M: Al'pina Pablisher. 2016. 464 p. (In Russ.).
2. Ostroumova L.A. [The expectations k-th incoming vertex degrees of random graphs in Bollobasha-Riordan model]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*. 2012. Issue 4, vol. 1(13), pp. 29–40. (In Russ.).
3. Lakeev A.V. *Elementy teorii obyknovennyh grafov* [Elements of common graph theory]. Irkutsk: Izd-vo IGU. 2014. 83 p. (In Russ.).
4. Kolganov A.S. [Parallel implementation of the search algorithm of minimum spanning Dere-vev using the CPU and GPU]. *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2016)* [Parallel computational technologies (PCT'2016)]. 2016. pp. 530–543. (In Russ.).
5. Arefin A.S., Riveros C., Berretta R., Moscato P. kNN-MST-Agglomerative: A fast and scalable graph-based data clustering approach on GPU. 7th International Conference on Computer Science & Education (ICCSE). 2012. pp. 585–590.
6. Chen P.-Yu, Choudhury S., Hero A.O. Multi-centrality graph spectral decompositions and their application to cyber intrusion detection. 2016. Available at: <http://de.arxiv.org/abs/1512.07372v1> (accessed: 24.01.2017).
7. Kalofolias S.V., Bresson X., Bronstein M.M., Vandergheynst P. Robust principal component analysis on graphs. CoRR. 2015. vol. abs/1504.06151. Available at: <http://arxiv.org/abs/1504.06151>. (accessed: 24.01.2017).
8. Christofides N. *Graph Theory. An algorithmic approach*. Academic Press. 1975. 415 p. (Russ. ed.: Kristofides N. *Teoriya grafov*. M.: Mir. 1978. 432 p.).

9. Dudnik B. YA., Ovcharenko V. F. *Nadezhnost' i zhivuchest' sistem svyazi* [The reliability and survivability of communication systems]. M.: Radio i svyaz'. 1984. 216 p. (In Russ.).
10. Tutte W.T. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company. 1984. 333 p. (Russ. ed.: Tatt U. *Teoriya grafov*. M.: Mir. 1988. 424 p.).
11. Harary F. *Graph theory*. Addison-Wesley Publishing Company. 1969. 274 p. (Russ. ed.: Harari F. *Teoriya grafov*. M.: Editorial URSS. 2003. 296 p.).
12. Zykov A.A. *Osnovy teorii grafov* [The basics of graph theory]. M.: Nauka. Gl. red fiz.-mat. lit. 1987. 384 p. (In Russ.).
13. Batenkov K.A. [Features of an estimation of quality of functioning of communication networks]. *Resursoehfektivnye sistemy v upravlenii i kontrole: vzglyad v budushchee* [Resource-efficient system management and control: a look into the future]. 2016. pp. 30–31. (In Russ.).
14. Batenkov K. A. [On the analysis of survivability of communication networks based on probabilistic approach]. *Nedelya nauki SPbPU* [Science week of SPbSPU]. SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta. 2016. pp. 6–8. (In Russ.).
15. Egunov M.M., Shuvalov V.P. [Analysis of the structural reliability of the transport network]. *Vestnik SibGUTI – Herald of SibGUTI*. 2012. vol. 1. pp. 54–60. (In Russ.).
16. Tsitsiashvili G.Sh. Complete calculation of disconnection probability in planar graphs. *Reliability: Theory and Applications*. 2012. vol.1. no.1. pp. 154–159.
17. Bollobás B., Riordan O. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*. 2004. vol. 24. no.1. pp. 5–34.
18. Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*. 2001. vol. 18. no.3. pp. 279–290.
19. Grechnikov E.A. An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*. 2011. vol. 1. no. 2. pp. 40–73.
20. Drinea E., Enachescu M., Mitzenmacher M. Variations on random graph models for the web. Technical report. Department of Computer Science. Harvard University. 2001.
21. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F., Samukhin A.N. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys. rev. lett.* 2000. vol. 85. pp. 4633.
22. Kumar R. et al. Stochastic models for the web graph. Proc. 41st Symposium on Foundations of Computer Science. 2000.
23. Batenkov K. A. *Ustojchivost' setej svyazi* [Network stability]. Orel: Akademiya FSO Rossii. 2017. 277 p. (In Russ.).