ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2023 Управление, вычислительная техника и информатика № 64
Tomsk State University Journal of Control and Computer Science

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

CONTROL OF DYNAMICAL SYSTEMS

Научная статья
УДК 517.977
doi: 10.17223/19988605/64/1

О необходимых условиях оптимальности первого порядка в задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка

Жаля Билал кызы Ахмедова

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан, Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана, Баку, Азербайджан, akja@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления для систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с дробной производной Капуто. Функционал качества является функционалом терминального типа. Применяя аналог модифицированного метода приращений, установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Ключевые слова: задача оптимального управления; функция Гамильтона–Понтрягина; принцип максимума; необходимое условие оптимальности; дробная производная Капуто.

***Для цитирования*:** Ахмедова Ж.Б. О необходимых условиях оптимальности первого порядка в задаче управления, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2023. № 64. С. 4–10. doi: 10.17223/19988605/64/1

Original article
doi: 10.17223/19988605/64/1

On necessary first-order optimality conditions in a control problem described by a system of fractional-order integro-differential equations

Zhala B. Ahmadova

Baku State University, Baku, Azerbaijan, Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan, akja@rambler.ru

Abstract. The optimal control problem for systems of Volterra-type integro-differential equations with Caputo fractional derivative is considered. The quality functional is a functional of terminal type. Using an analogue of the modified increment method, a necessary first-order optimality condition is established in the form of the L.S. Pontryagin.

Keywords: optimal control problem; Hamilton-Pontryagin function; maximum principle; necessary optimality condition; fractional Caputo derivative.

***For citation*:** Ahmadova, Z.B. (2023) On necessary first-order optimality conditions in a control problem described by a system of fractional-order integro-differential equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitelnaja tehnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 64. pp. 4–10. doi: 10.17223/19988605/64/1

Введение

Принцип максимума Л.С. Понтрягина, являясь одним из основных результатов теории необходимых условий оптимальности первого порядка, доказан для различных задач оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (см., напр.: [1–3]). В последние годы стали интенсивно изучаться задачи оптимального управления объектами, описываемые различными дифференциальными уравнениями с дробными производными (см., напр., [4–8]).

В [4] исследуется задача оптимального управления динамическими системами дробного порядка с использованием метода моментов.

В [5], применяя классическую теорию управления к дробно-дифференциальной системе в ограниченной области, рассмотрена дробная задача оптимального управления для дифференциальной системы с запаздыванием. Дробная производная по времени рассматривается в смысле Римана–Лиувилля. Изучены существование и единственность решения системы дробных дифференциалов с запаздыванием в гильбертовом пространстве. В работе также показано, что рассматриваемая задача оптимального управления имеет единственное решение.

Точное представление многих динамических систем приводит к набору дробных дифференциальных уравнений (ДДУ). В статье [6] представлены общая формулировка и схема решения класса дробных задач оптимального управления (ДЗОУ). Дробная производная используется в смысле Римана–Лиувилля. Показатель эффективности ДДУ рассматривается как функция состояния и управляющих переменных, а динамические ограничения определяются набором ДДУ. Вариационное исчисление, множители Лагранжа и формулы дробного интегрирования по частям используются в задачах ДДУ для получения уравнений Эйлера–Лагранжа.

В работе [7] рассматривается задача оптимального управления для линейной стационарной динамической системы дробного порядка. Исследованы такие условия, при которых проблема моментов может быть поставлена и является разрешимой. Рассмотрены частные случаи (одномерная линейная стационарная система, двойной интегратор и маятник), для которых получены решения задачи и исследованы вопросы качественной динамики. Продемонстрирована возможность постановки и исследования задачи оптимального управления в форме обобщенной проблемы моментов для системы, описываемой уравнением переноса с производной дробного порядка по времени.

В [8] рассматривается новая общая формулировка дробных задач оптимального управления, показатель качества которых представлен в форме дробного интеграла, а динамика задается системой дробных дифференциальных уравнений в смысле Капуто. Использован новый подход для доказательства необходимых условий оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина для дробно нелинейных задач оптимального управления.

В [9] исследована задача оптимального управления, описываемая интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра с дробной производной Капуто. В рассматриваемой задаче функционал качества является функционалом терминального типа. Установлен аналог принципа максимума Понтрягина.

В [10] рассматривается класс нелинейных фрактально-дробных задач оптимального управления в смысле Атанганы–Римана–Лиувилля с невырожденным ядром Миттаг-Леффлера. Предложен численный метод, основанный на обобщенных вейвлетах Лукаса и методе Ритца. В работе также показано преимущество предлагаемого метода на численных примерах.

Отметим также, что в работе [11] в отличие от нашей работы рассмотрена дискретная задача оптимального управления, в которой доказан дискретный аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина.

В настоящей работе рассматриваются процессы, описываемые обыкновенными интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра дробного порядка. С помощью схемы, основанной на методе приращений, доказан аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается дробной системой интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau,\ t \in T = [t_0,t_1] \tag{1} $$

с начальным условием

$$ x(t_0) = x_0, \tag{2} $$

где

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{x'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \quad \alpha \in [0,1], $$

левая дробная производная Капуто [8, 12, 13], α – показывает степень дробной производной, C – означает дробную производную Капуто, t_0 – начальная точка заданного отрезка, на котором задан управляемый непрерывный процесс, $u(t)$ – r-мерная кусочно-непрерывная (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества, т.е.

$$ u(t) \in U \subset R^r,\ t \in [t_0,t_1], \tag{3} $$

(допустимое управление), x_0 – заданный постоянный вектор, $f(t,\tau,x,u)$ – заданная n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x.

Рассмотрим задачу о минимизации терминального функционала

$$ S(u) = \varphi(x(t_1)) \tag{4} $$

при ограничениях (1)–(3). Здесь $\varphi(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая скалярная функция.

Допустимое управление $u(t)$, доставляющее минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1)–(3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t), x(t))$ – оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества

Пусть $(u(t), x(t))$ и $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$ – два допустимых процесса.

Запишем приращение функционала качества

$$ \Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)). \tag{5} $$

Ясно, что приращение $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$ является решением следующей задачи:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) = \int_{t_0}^{t} [f(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)) - f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))] d\tau, \tag{6} $$

$$ \Delta x(t_0) = 0. \tag{7} $$

Пусть $\psi = \psi(t)$ – пока произвольная n-мерная вектор-функция. Умножая обе стороны уравнения (6) скалярно на $\psi(t)$ и интегрируя полученное соотношение по t на интервале от t_0 до t_1, получим

$$ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) \left[\int_{t_0}^{t} [f(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)) - f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))] d\tau \right] dt. \tag{8} $$

По формуле интегрирования по частям для дробных производных (см., напр.: [12, 13]) и при начальном условии (7) имеем

$$ \int_{t_0}^{t_1} \psi'(t)\, {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha} \Delta x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} {}_{t}^{C}D_{t_1}^{\alpha} \psi'(t) \Delta x(t) dt + {}_{t}I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = $$

$$=\int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1) + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_0)\Delta x(t_0) =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1), \tag{9}$$

где ${}_t I_{t_1}^{1-\alpha}$ – правый интеграл Римана-Лиувилля [12, 13].

Используя формулу Фубини, можно записать

$$\int_{t_0}^{t_1}\psi'(t)\left[\int_{t_0}^{t}\left[f(t,\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)) - f(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\right]d\tau\right]dt =$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\left[f(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - f(\tau,t,x(t),u(t))\right]d\tau\right]dt. \tag{10}$$

Поэтому формулу приращения (5) функционала качества (4) можем записать следующим образом:

$$\begin{gathered}\Delta S(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t}^{t_1}\psi'(\tau)\left[f(\tau,t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)) - f(\tau,t,x(t),u(t))\right]d\tau\right]dt.\end{gathered} \tag{11}$$

Введем аналог функции Гамильтона–Понтрягина:

$$H(t,x(t),u(t),\psi(t)) = \int_{t}^{t_1}\psi'(\tau) f(\tau,t,x(t),u(t))d\tau.$$

Тогда формулу (11) можно написать в виде:

$$\begin{gathered}\Delta S(u) = \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1) - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]dt.\end{gathered} \tag{12}$$

Используя формулу Тейлора (см. напр.: [13, 14]), из (12) получим

$$\begin{gathered}\Delta S(u) = \frac{\partial\varphi'(x(t_1))}{\partial x}\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1)\Delta x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi'(t)\Delta x(t)dt - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]dt - \int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial H'(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x}\Delta x(t)dt - \\ -\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial H(t,x(t),\bar{u}(t),\psi(t))}{\partial x} - \frac{\partial H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x}\right]'\Delta x(t)dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2(\|\Delta x(t)\|)dt.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь $\|\alpha\|$ есть норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ – величина, имеющая более высокий порядок малости, чем α, т.е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Пусть вектор-функция $\psi(t)$ является решением следующей дробной системы интегро-дифференциальных уравнений:

$${}_t^C D_{t_1}^{\alpha}\psi(t) = \frac{\partial H(t,x(t),u(t),\psi(t))}{\partial x}, \tag{14}$$

с начальным условием

$${}_t I_{t_1}^{1-\alpha}\psi'(t_1) = -\frac{\partial\varphi(x(t_1))}{\partial x}. \tag{15}$$

Задачу (14), (15) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи. Учитывая формулы (14) и (15), из (13) получим, что

$$\Delta S(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \left[H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \right] dt + o_1\left(\left\| \Delta x(t_1) \right\| \right) -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t))}{\partial x} - \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x} \right]' \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} o_2\left(\left\| \Delta x(t) \right\| \right) dt. \tag{16}$$

3. Оценка нормы приращения траектории

Полученная формула приращения (16) позволяет доказать необходимое условие оптимальности. Для этого нам понадобится оценка нормы приращения $\Delta x(t)$ траектории $x(t)$.

Из (6), (7), используя определение дробной производной Капуто, получаем, что

$$\Delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} \frac{f(\tau, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(\tau, s, x(s), u(s))}{(s-\gamma)^{1-\alpha}} ds\, d\tau =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} (s-\gamma)^{\alpha-1} [f(\tau, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(\tau, s, x(s), \bar{u}(s)) +$$
$$+ f(\tau, s, x(s), \bar{u}(s)) - f(\tau, s, x(s), u(s))] ds d\tau = \tag{17}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} (s-\gamma)^{\alpha-1} \left[f(\tau, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(\tau, s, x(s), \bar{u}(s)) \right] ds\, d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{\tau} (s-\gamma)^{\alpha-1} \Delta_{\bar{u}} f(\tau, s, x(s), u(s)) ds\, d\tau,$$

где по определению

$$\Delta_{\bar{u}} f(\tau, s, x(s), u(s)) = f(\tau, s, x(s), \bar{u}(s)) - f(\tau, s, x(s), u(s)).$$

Так как в силу сделанных предположений функция f удовлетворяет условию Липшица по x, то, переходя к норме и используя условию Липшица, получаем, что

$$\left\| \Delta x(t) \right\| \le L_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{\tau}^{t} (\tau-\gamma)^{\alpha-1} \left\| \Delta x(s) \right\| ds\, d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{\tau}^{t} (\tau-\gamma)^{\alpha-1} \Delta_{\bar{u}} f(\tau, s, x(s), u(s)) ds\, d\tau, \tag{18}$$

где $L_1 = const > 0$ – некоторая постоянная.

Применяя аналог формулы Гронуолла–Беллмана [15], получим

$$\left\| \Delta x(t) \right\| \le L_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \int_{\tau}^{t} (\tau-\gamma)^{\alpha-1} \Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau)) ds\, d\tau. \tag{19}$$

где $L_2 = const > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ – произвольная точка непрерывности управляющей функции $u(t)$, а $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число, такое что $\theta + \varepsilon < t_1$, $v \in U$ – произвольный вектор.

Специальное приращение управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta+\varepsilon), \\ 0, & t \in [t_0, t_1] \setminus [\theta, \theta+\varepsilon). \end{cases} \tag{20}$$

Через $\Delta x_\varepsilon(t)$ обозначим специальное приращение траектории $x(t)$, соответствующее специальному приращению игольчатой вариации (20) управления $u(t)$.

Из неравенства (19) следует, что

$$\left\| \Delta x_\varepsilon(t) \right\| \le L_3 \varepsilon, \tag{21}$$

где $L_3 = const > 0$ – некоторая постоянная.

Принимая во внимание оценку (21) и формулу (20), из формулы приращения (16) на основании теоремы о среднем получаем справедливость разложения

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u+\Delta u_\varepsilon) - S(u) = -\int_{t_0}^{t_1}\left[H(t,x(t),u(t)+\Delta u_\varepsilon(t),\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]dt =$$

$$= -\int_{\theta}^{\theta+\varepsilon}\left[H(t,x(t),v,\psi(t)) - H(t,x(t),u(t),\psi(t))\right]dt + o(\varepsilon) = \tag{22}$$

$$= -\varepsilon\left[H(\theta,x(\theta),v,\psi(\theta)) - H(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta))\right] + o(\varepsilon).$$

Если предполагать, что $u(t)$ – оптимальное управление, то из разложения (22) следует, что

$$H(\theta,x(\theta),v,\psi(\theta)) - H(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta)) \ge 0,$$

т.е.

$$\max_{v\in U} H(\theta,x(\theta),v,\psi(\theta)) = H(\theta,x(\theta),u(\theta),\psi(\theta)) \ge 0. \tag{23}$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема (принцип максимума Понтрягина). Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы условие максимума (23) выполнялось для всех $v\in U$, $\theta\in\left[t_0,t_1\right)$.

Доказанная теорема является аналогом принципа максимума Понтрягина в рассматриваемой задаче.

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления для объекта, описываемого интегро-дифференциальным уравнением типа Вольтерра с дробной производной Капуто. Минимизируемый критерий качества является функционалом терминального типа. Область управления – произвольное, непустое и ограниченное множество, а управляющая функция является кусочно-непрерывной (с конечным числом точек разрыва первого порядка) вектор-функцией. Используя введенную сопряженную систему, получена формула для приращения функционала качества. Установлен соответствующий аналог принципа максимума Понтрягина.

Список источников

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. : Изд-во МЦНМО, 2011. Кн. 2. 434 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск : Четыре четверти, 2011, 472 с.
3. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М. : МГУ, 2004, 168 с.
4. Постнов С.С. Исследование задач оптимального управления динамическими системами дробного порядка методом моментов : автореферат дис. … канд. физ.-мат. наук. М. : ИПУ РАН, 2015. 26 с.
5. Bahaa G.M. Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // Advances in Difference Equations. 2017. № 1. P. 32–51.
6. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems // Nonlinear Dynamics. 2004. V. 38. P. 323–337.
7. Кубышкин В.А., Постнов С.С. Оптимальное управление линейными динамическими системами нецелого порядка // XII Всерос. совещание по проблемам управления – ВСПУ 2014. Москва, 16–19 июня. М., 2014. С. 2562–2573.
8. Ali H.M., Pereira F.L., Gama S.M.A. A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems // Mathematics. Optimization and Control. arXiv:1503.07720. 2015. pp. 1–17. doi: 10.1002/mma.3811
9. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3 (58). С. 5–10.
10. Sabermahani S., Ordokhani Y., Rahimkhani P. Application of generalized Lucas wavelet method for solving nonlinear fractal-fractional optimal control problems // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. V. 170. Art. 113348. doi: 10.1016/j.chaos.2023.113348
11. Алиева С.Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 54. С. 4–11.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Yverdon ; Philadelphia, Pa : Gordon and Breach Science publishers. 1993. xxxvi, 976 p.

13. Usero D. Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes : preprint // Universidad Complutense. Informática. Madrid, 2008. 1–18 p. URL: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paper_usero.pdf
14. Odibat Z., Shawagfeh N. Generalized Taylor's formula // Appl. Math. Comput. 2007. V. 186. P. 286–293.
15. Lin S.Y. Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // Journal of Inequalities and Applications. 2013. Art. 549. doi: 10.1186/1029-242X-2013-549

References

1. Vasiliev, F.P. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Vol. 2. Moscow: MTsNMO.
2. Gabasov, R., Kirillova, F.M. & Alsevich, V.V. (2011) *Metody optimizatsii* [Optimization Methods]. Minsk: Chetyre chetverti.
3. Milyutin, A.A., Dmitruk, A.V. & Osmolovsky, N.P. (2004) *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [The maximum principle in optimal control]. Moscow: MSU.
4. Postnov, S.S. (2015) *Issledovanie zadach optimal'nogo upravleniya dinamicheskimi sistemami drobnogo poryadka metodom momentov* [Investigation of problems of optimal of dynamic systems of fractional order by the method of moments]. Abstract of Physics and Mathematics Cand. Diss. Moscow.
5. Bahaa, G.M. (2017) Fractional optimal control problem for differential system with delay argument. *Advances in Difference Equations*. 1. pp. 32–51. DOI: 10.1186/s13662-017-1121-6
6. Agrawal, O.P. (2004) A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems. *Nonlinear Dynamics.* 38. pp. 323–337. DOI: 10.1007/s11071-004-3764-6
7. Kubyshkin, V.A. & Postnov, S.S. (2014) Optimal'noe upravlenie lineynymi dinamicheskimi sistemami netselogo poryadka [Optimal control of linear dynamical systems of non-integer order]. *XII Vseros. soveshchanie po problemam upravleniya – VSPU 2014* [The 12th All-Russian meeting on control problems. VSPU–2014]. Moscow, June 16-19. pp. 2562–2573.
8. Ali, H.M., Pereira, F.L. & Gama, S.M.A. (2015) A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems. *Mathematics. Optimization and Control.* arXiv:1503.07720. pp. 1–17. https://doi.org/10.1002/mma.3811
9. Mansimov, K.B. & Akhmedova, Zh.B. (2022) An analogue of the Pontryagin maximum principle in the optimal control problem for a system of differential equations with a fractional Caputo derivative and with a multipoint quality criterion. *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika – Perm University Bulletin. Mathematics. Mechanics. Computer science.* 3(58). pp. 5–10.
10. Sabermahani, S., Ordokhani, Y. & Rahimkhani, P. (2023) Application of generalized Lucas wavelet method for solving nonlinear fractal-fractional optimal control problems. *Chaos, Solitons & Fractals*. 170. Art. 113348. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113348
11. Alieva, S.T. (2021) The Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional order difference equations. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika – Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 54. pp. 4–11. DOI: 10.17223/19988605/54/1
12. Samko, S.G., Kilbas, A.A. & Marichev, O.I. (1993) *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science.
13. Usero, D. (2008) *Fractional Taylor series for Caputo fractional derivatives Construction of numerical schemes*. Preprint. Madrid. Spain. pp. 1–18. [Online] Available from: http://www.fdi.ucm.es/profesor/lvazquez/calcfrac/docs/paper_usero.pdf
14. Odibat, Z. & Shawagfeh, N. (2007) Generalized Taylor's formula. *Applied Mathematics and Computation*. 186. pp. 286–293. DOI: 10.1016/j.amc.2006.07.102
15. Lin, S.Y. (2013) Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations. *Journal of Inequalities and Applications.* Art. 549. DOI: 10.1186/1029-242X-2013-549

***Информация об авторе*:**

Ахмедова Жаля Билал кызы – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математическая кибернетика» Бакинского государственного университета (Баку, Азербайджан); Институт систем управления Министерства науки и образования Азербайджана (Баку, Азербайджан). E-mail: akja@rambler.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

***Information about the author*:**

Ahmadova Zhala B. (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics, Baku State University, Baku, Azerbaijan; Institute of Control Systems of the Ministry of Science and Education of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan). E-mail: akja@rambler.ru

The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию 30.03.2023; принята к публикации 04.09.2023

Received 30.03.2023; accepted for publication 04.09.2023