MATHunesa
Jurnal Ilmiah Matematika
e-ISSN : 2716-506X | p-ISSN : 2301-9115

Volume 11 No 03
Tahun 2023

KAJIAN DASAR RUANG METRIK P-ADIC

Novita Dahoklory
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pattimura
*novitadahoklory93@gmail.com

Henry W. M. Patty
Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pattimura
henrywmpatty81@gmail.com

Abstrak

Diberikan himpunan semua bilangan rasional $\mathbb{Q}$. Pada penelitian ini akan dijelaskan metrik p −adic untuk suatu bilangan prima p yang dikonstruksikan menggunakan nilai mutlak p −adic pada himpunan $\mathbb{Q}$. Dalam penelitian ini juga akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik khusus yaitu ruang metrik non-Archimedean. Selanjutnya, akan diberikan beberapa sifat $(\mathbb{Q}, d_p)$ dengan menggunakan beberapa barisan khusus dalam $\mathbb{Q}$. Lebih lanjut, dengan menggunakan sifat-sifat barisan tersebut, akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Q}, d_p)$ bukan merupakan ruang metrik lengkap.

Kata Kunci: ruang metrik p −adic, ruang metrik non- Archimedean metric space, ruang metrik lengkap

Abstract

Let $\mathbb{Q}$.be the set of all rational numbers. In this paper, we will describe the p-adic metric for some prime number p constructed using the p-adic absolute value in $\mathbb{Q}$. In this study, we will also show that $(\mathbb{Q}, d_p)$ is a particular metric space that is a non-Archimedean metric space. Moreover, we will give some properties of $(\mathbb{Q}, d_p)$ using some of special sequences in $\mathbb{Q}$. Furthermore, using the properties of those sequences, we will show that $(\mathbb{Q}, d_p)$ is not a complete metric space.

Keywords: *p-adic metric space, non-Archimedean metric space, complete metric space*

PENDAHULUAN

Salah satu topik kajian yang terus dikembangkan dalam analisis adalah ruang metrik. Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi beberapa sifat khusus (Kreyszig, 1989). Salah satu ruang metrik yang sangat dikenal adalah ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik biasa $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Diketahui bahwa pendefinisian metrik biasa diinduksi menggunakan fungsi norm yaitu nilai mutlak pada himpunan $\mathbb{R}$. Hal ini kemudian memotivasi munculnya pendefinisian metrik dengan menggunakan fungsi norm pada suatu himpunan.

Salah satu pendefinisian metrik dengan menggunakan fungsi norm adalah metrik $p-$adic pada himpunan $\mathbb{Q}$ dengan p suatu bilangan prima. Dalam hal ini, fungsi norm yang dimaksudkan adalah nilai mutlak $p-$adic. Fungsi nilai mutlak $p-$ adic sendiri dikonstruksikan dengan memanfaatkan pendefinisian order dari suatu bilangan bulat pada suatu bilangan prima p.

Diberikan himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan suatu bilangan prima p. Order dari suatu $a \in \mathbb{Z}$ dengan $a \neq 0$ merupakan suatu bilangan bulat terbesar m sedemikian sehingga p^m habis membagi a (Baker, 2002). Order dari a pada p kemudian dinotasikan dengan $ord_p(ab)$. Salah satu karakteristik dari order dari suatu bilangan di $\mathbb{Z}$ adalah $ord_p(ab) = ord_p a + ord_p b$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$. Sifat tersebut kemudian memotivasi pendefinisian order pada sebarang bilangan rasional $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ yaitu $ord_p x = ord_p a - ord_p b$.

Dengan memanfaatkan sifat dari order suatu bilangan rasional pada bilangan prima p, dapat dikonstruksikan suatu fungsi $|\cdot|_p$ yang didefinisikan dengan

$$|x|_p = \begin{cases} \dfrac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{Q}$. Fungsi tersebut kemudian disebut sebagai nilai mutlak p-adic (*p-adic absolute value*) (Gouvea, 2012).

Sama seperti pendefinisian metrik biasa yang menggunakan nilai mutlak, dengan menggunakan sifat mutlak p-adic pada $\mathbb{Q}$, dapat dikonstruksikan suatu metrik yang definisikan dengan

$$d_p(x, y) = |x - y|_p.$$

Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ kemudian disebut sebagai ruang metrik p −adic (Baker, 2002).

Dalam penelitian ini dijelaskan beberapa sifat-sifat dasar ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ serta contoh barisan Cauchy dan konvergen dalam $(\mathbb{Q}, d_p)$. Selanjutnya, pada penelitian ini akan diselidiki apakah ruang metrik $p -$ adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik lengkap.

KAJIAN TEORI

Pada bagian ini akan diberikan beberapa dasar teori yang menunjang penelitian ini yang meliputi fungsi norm, ruang metrik, ruang metrik lengkap dan ruang metrik non-Archimedean.

Definisi 2.1.
Suatu fungsi $N: X \to \mathbb{R}$ disebut norm pada X jika berlaku

(i) $N(x) \geq 0; N(x) = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
(ii) $N(xy) = N(x)N(y)$;
(iii) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

untuk setiap $x, y \in X$ (Baker, 2002).
Secara khusus, suatu norm $N: X \to \mathbb{R}$ disebut sebagai norm non-Archimedean jika memenuhi $N(x + y) \leq maks\{N(x), N(y)\}$ (Baker, 2002).

Contoh 2.2
Diberikan himpunan $\mathbb{Q}$ dan nilai mutlak yang didefinisikan dengan

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

merupakan norm pada $\mathbb{Q}$.

Definisi 2.3
Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

(i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Ketaksamaan segitiga)

untuk setiap $x, y, z \in X$. Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi metrik d (yang dinotasikan dengan (X, d)) disebut sebagai ruang metrik. (Kreyszig, 1989).

Contoh 2.4.
Himpunan $(\mathbb{Q}, d)$ dengan metrik biasa

$$d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

dengan $d(x, y) = |x - y|$ merupakan ruang metrik.

Definisi 2.5
Diberikan ruang metrik (X, d). Suatu barisan (x_n) dalam X dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2011).
Selanjutnya, barisan (x_n) yang konvergen ke x dinotasikan dengan $(x_n) \to x$ dan $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Definisi 2.6
Diberikan ruang metrik (X, d). Suatu barisan (x_n) di X disebut sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq n_0$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2011).

Definisi 2.7
Suatu ruang metrik (X, d) disebut ruang metrik lengkap jika setiap barisan Cauchy di X merupakan barisan konvergen (Maddox, 1970).

Definisi 2.8 Suatu ruang metrik (X, d) disebut sebagai ruang metrik non-Archimedian jika memenuhi ketaksamaan segitiga kuat yaitu

$$d(x, y) \leq maks\ \{d(x, z), d(z, y)\}$$

untuk setiap $x, y, z \in X$ (Rao dan Kishore, 2008).

Contoh 2.9
Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d)$ bukan merupakan ruang metrik non-Archemedean. Terdapat 7,1,3 $\in \mathbb{Q}$ dengan

$$\begin{aligned} d(7,1) &= |7 - 1| \\ &= 6 \\ &> maks\{|7 - 3|, |3 - 1| \\ &= maks\{d(7,3), d(3,1)\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Q}, d)$ bukan merupakan ruang metrik non-Archimedean.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan menjelaskan nilai mutlak p-adic sebagai norm pada $\mathbb{Q}$. Namun sebelumnya dijelaskan terlebih dahulu order dari suatu bilangan bulat a pada suatu bilangan prima p.

Definisi 3.1.
Diberikan suatu bilangan bulat prima p dan suatu bilangan $a \in \mathbb{Z}$. **Order dari $\boldsymbol{a}$ pada $\boldsymbol{p}$** merupakan fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

$$\boldsymbol{ord_p a} = \begin{cases} maks\{m| \quad p^m|a, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

(Baker, 2002).
Berdasarkan definisi di atas, diketahui bahwa $ord_p a$ merupakan suatu bilangan bulat terbesar m sedemikian sehingga p^m habis membagi a.

Contoh 3.2.
Diberikan bilangan prima $p = 5$. Diperoleh

1. $ord_5 35 = 1$ karena bilangan 1 merupakan bilangan terbesar sedemikian sehingga 5^1 habis membagi 35.
2. $ord_5 3 = 0$ karena 0 merupakan bilangan terbesar dengan 5^0 habis membagi 3.

Selanjutnya, akan diberikan sifat-sifat yang berhubungan dengan order suatu bilangan bulat pada bilangan prima p yang disajikan dalam Lema berikut ini.

Lema 3.3
Diberikan p suatu bilangan prima dengan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Belaku

i. $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$;
ii. $ord_p(ad + bc) \geq min\{ord_p ad, ord_p bc\}$

(Baker, 2002).

Bukti.
Diketahui p prima. Diambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Misalkan $ord_p a = m, ord_p b = n$ dan $ord_p ab = q$.

i. Pertama-tama, akan ditunjukkan terlebih dahulu $ord_p a + ord_p b \leq ord_p ab$ yaitu $m + n \leq q$. Karena $ord_p a = m, ord_p b = n$ dan $ord_p ab = q$, yang berarti
$$p^m p^n | ab$$
$$p^{m+n} | ab.$$
Karena $ord_p ab = q$, diperoleh $m + n \leq q$.
Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $ord_p ab \leq ord_p a + ord_p b$ yaitu $q \leq m + n$ dengan metode kontradiksi. Diandaikan $q > m + n$. Dengan kata lain $q = m + n + r$ untuk suatu $r > 0$. Jadi,
$$p^{m+n+r} | ab.$$
Karena, $ord_p a = m$, diperoleh
$$p^{n+r} | b.$$
Hal ini menimbulkan kontradiksi, karena $ord_p b = n$. Oleh karena itu, diperoleh $q \leq m + n$.
Dengan demikian diperoleh $q = m + n$ yaitu $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$.

ii. Misalkan $min\{ord_p ad, ord_p bc\} = x$ yang berarti $x \leq ord_p ad$ dan $x \leq ord_p bc$. Jadi,
$$p^x | ad \text{ dan } p^x | bc$$
sehingga $p^x | ad + bc$. Dengan demikian, diperoleh $ord_p(ad + bc) \geq x$ yang berarti $ord_p(ad + bc) \geq min\{ord_p ad, ord_p bc\}$. ■

Berdasarkan sifat di atas, diperoleh $ord_p ab = ord_p a + ord_p b$. Sifat kemudian memotivasi pendefinisian order dari suatu bilangan rasional $x = \frac{a}{b}$ pada p yaitu
$$ord_p x = ord_p a - ord_p b$$
untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $b \neq 0$. Selanjutnya, akan diberikan contoh order dari suatu bilangan rasional pada contoh berikut.

Contoh 3.4
Diberikan $p = 5$ dengan $x = \frac{3}{125}$ dan $y = \frac{25}{7}$. Diperoleh
$$ord_5 \frac{3}{125} = ord_5 3 - ord_5 125 = 0 - 3 = -3$$
dan
$$ord_p \frac{25}{7} = ord_5 125 - ord_5 7 = 2 - 0 = 2.$$
Selanjutnya akan diberikan sifat order pada himpunan $\mathbb{Q}$ yang disajikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.5
Diberikan p suatu bilangan prima dengan $x, y \in \mathbb{Q}$. Berlaku

(1) $ord_p xy = ord_p x + ord_p y$;
(2) $ord_p(x + y) \geq min\{ord_p x, ord_p y\}$.

Bukti
Diberikan $x, y \in \mathbb{Q}$ yaitu $x = \frac{a}{b}$ dan $y = \frac{c}{d}$ untuk suatu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $b, d \neq 0$. Menurut pendefinisian order pada $\mathbb{Q}$ dan **Lema 3.3**, didapatkan

(1)
$$\begin{aligned} ord_p xy &= ord_p(\tfrac{a}{b} \cdot \tfrac{c}{d}) \\ &= ord_p(\tfrac{ac}{bd}) \\ &= ord_p(ac) - ord_p(bd) \\ &= ord_p a + ord_p c - ord_p b - ord_p d \\ &= ord_p a - ord_p b + ord_p c - ord_p d \end{aligned}$$

$$= ord_p \frac{a}{b} + ord_p \frac{c}{d}$$
$$= ord_p x + ord_p y.$$

(2) $ord_p(x+y) = ord_p(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$
$$= ord_p \frac{ad+bc}{bd}$$
$$= ord_p(ad+bc) - ord_p bd$$
$$\geq min\{ord_p ad, ord_p bc\} - ord_p bd$$
$$= min\{ord_p ad - ord_p bd, ord_p bc - ord_p bd\}$$
$$= \min\{ord_p \frac{ad}{bd}, ord_p \frac{bc}{bd}\}$$
$$= \min\{ord_p \frac{a}{b}, ord_p \frac{c}{d}\}$$
$$= min\{ord_p x, ord_p y\}.$$

Dengan demikian, diperoleh $ord_p xy = ord_p x + ord_p y$ dan $ord_p(x+y) \geq min\{ord_p x, ord_p y\}$. ∎

Pendefinisian order suatu bilangan rasional pada p kemudian memotivasi fungsi nilai mutlak $p-adic$ $|\cdot|_p$ pada $\mathbb{Q}$ yang didefinisikan dengan

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Berikut akan diberikan contoh nilai mutlak $p-adic$ dari suatu bilangan di $\mathbb{Q}$.

Contoh 3.6

Diberikan $p = 5$ dengan $x = \frac{3}{125}$ dan $y = \frac{25}{7}$. Menurut **Contoh 3.4,** didapatkan

$$\left|\frac{3}{125}\right|_5 = \frac{1}{5^{ord_5 \frac{3}{125}}} = \frac{1}{5^{-3}} = 125$$

dan

$$\left|\frac{25}{7}\right|_5 = \frac{1}{5^{ord_5 \frac{25}{7}}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}.$$

Selanjutnya, akan diberikan sifat yang menunjukkan bahwa fungsi $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ merupakan norm pada $\mathbb{Q}$.

Proposisi 3.7

Diberikan lapangan $\mathbb{Q}$ dengan fungsi $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ yang didefinisikan dengan

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{ord_p x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

merupakan norm non-Archimedean pada $\mathbb{Q}$ (Koblitz, 2012).

Bukti.

Diambil sebarang $x, y \in \mathbb{Q}$ dengan $x = \frac{a}{b}$ dan $y = \frac{c}{d}$. Didapatkan,

i. Pertama-tama, akan ditunjukkan $|x|_p \geq 0$. Karena $p \geq 0$, jelas bahwa $\frac{1}{p^{ord_p x}} \geq 0$. Jadi, diperoleh $|x|_p \geq 0$.
Selanjutnya, jika $x = 0$. Berdasarkan definisi norm $|\cdot|_p$, didapatkan $|x|_p = 0$. Sebaliknya, jika $|x|_p = 0$ berarti $\frac{1}{p^{ord_p x}} = 0$. Berdasarkan pendefinsian order, diperoleh $x = 0$.

ii. Dengan menggunakan **Proposisi 3.5**, diperoleh
$$|xy|_p = \frac{1}{p^{ord_p xy}}$$
$$= \frac{1}{p^{(ord_p x + (ord_p y)}}$$
$$= \frac{1}{p^{(ord_p x)}} \cdot \frac{1}{p^{(ord_p y)}}$$
$$= |x|_p |y|_p$$

iii. Berdasarkan **Proposisi 3.5**, didapatkan
$$|x+y|_p = \frac{1}{p^{ord_p x+y}}$$
$$\leq \frac{1}{p^{min(ord_p x, ord_p y)}}$$
$$= maks\{\frac{1}{p^{ord_p x}}, \frac{1}{p^{ord_p y}}\}$$
$$= maks\{|x|_p, |y|_p\}.$$

Dari (i), (ii), dan (iii), dapat disimpulkan bahwa $|\cdot|_p$ merupakan norm non-Archimedean. ∎

Dengan menggunakan norm $|\cdot|_p$, dikonstruksikan suatu metrik pada $\mathbb{Q}$ yang didefinisikan sebagai

$$d_p(x,y) = |x-y|_p$$

Selanjutnya akan ditunjukkan $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean. dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.8

Himpunan $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean.

Bukti.

Diketahui himpunan $(\mathbb{Q}, d_p)$ dengan fungsi d_p.

Diambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Q}$. Akan dibuktikan $d_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ merupakan metrik yang memenuhi ketaksamaan segitiga kuat pada $\mathbb{Q}$.

1. Perlu ditunjukkan bahwa (i) $d_p(x,y) \geq 0$ dan (ii) $d_p(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
   i. Karena p bilangan positif, diperoleh $\frac{1}{p^{ord_p x-y}} \geq 0$. Jadi, $d_p(x,y) \geq 0$.
   ii. ⇒ Diketahui $d_p(x,y) = 0$, berarti

$$d_p(x,y) = 0$$
$$|x-y|_p = 0$$

Berdasarkan **Proposisi 3.5**, didapatkan $x - y = 0$ yaitu $x = y$.

2. Selanjutnya, akan dibuktikan $d_p(x,y) = d_p(y-x)$. Menurut **Proposisi 3.7,** diperoleh
$$\begin{aligned} d_p(x,y) &= |x-y|_p \\ &= |(-1)(y-x)|_p \\ &= |-1|_p|y-x|_p \\ &= |(y-x|_p \\ &= d_p(y,x). \end{aligned}$$
3. Lebih lanjut, akan ditunjukkan $d_p(x,z) \leq maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$. Menurut **Proposisi 3.7**, didapatkan
$$\begin{aligned} d_p(x,z) &= |x-z|_p \\ &= |x-y+z-y|_p \\ &\leq maks\{|x-y|_p, |z-y|_p\} \\ &= maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}. \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean. ■

Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ kemudian disebut sebagai **ruang metrik p −adic** (Baker, 2002).

Selanjutnya, akan diberikan sifat ruang metrik $p-$ adic $(\mathbb{Q}, d_p)$ sebagai ruang metrik non-Archimedean yang disajikan dalam Teorema berikut.

Teorema 3.9

Diberikan ruang metrik $p-$ adic $(\mathbb{Q}, d_p)$. Untuk setiap $x,y,z \in \mathbb{Q}$ berlaku jika $d_p(x,z) \neq d_p(y,z)$ maka $d_p(x,y) = maks\{d_p(x,z), d_p(y,z)\}$.

Bukti.

Diambil sebarang $x,y,z \in \mathbb{Q}$ dengan $d_p(x,z) \neq d_p(y,z)$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan
$$d_p(x,z) > d_p(y,z).$$
Akan dibuktikan $d_p(x,z) = maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)$.

Berdasarkan **Proposisi 3.8**, diperoleh
$$d_p(x,y) \leq maks\{d_p(x,z), d_p(y,z)\} = d_p(x,z).$$
Di lain pihak,
$$d_p(x,z) \leq maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\}$$
Diperhatikan juga bahwa $d_p(x,z) > d_p(y,z)$ yang berarti $maks\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} = d_p(x,y)$. Jadi,
$$d_p(x,z) \leq d_p(x,y).$$
Diperoleh $d_p(x,y) \leq d_p(x,z)$ dan $d_p(x,z) \leq d_p(x,y)$. Dengan demikian, dapat disimpulkan $d_p(x,y) = d_p(x,z)$ yaitu $d_p(x,y) = maks\{d_p(x,z), d_p(y,z)\}$. ■

Pada pembahasan selanjutnya, akan diberikan sifat-sifat yang berlaku pada beberapa barisan di ruang metrik p −adic $(\mathbb{Q}, d_p)$.

Sifat 3.10

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Barisan $(x_n) = p^n$ merupakan barisan konvergen dengan $(x_n) \to 0$.

Bukti.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ yang berarti $\frac{1}{\varepsilon} > 0$. Menurut sifat Archimedes, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$ yaitu $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$, berlaku
$$\begin{aligned} d_p(x_n, 0) &= |x_n|_p \\ &= |p^n|_p \\ &= \frac{1}{p^{ord_p p^n}} \\ &= \frac{1}{p^n} \\ &\leq \frac{1}{p^{n_0}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$
Terbukti, barisan $(x_n) \to 0$. ■

Lema 3.11

Diberikan ruang metrik non-Archimedean $(\mathbb{Q}, d_p)$ dengan Suatu barisan (x_n) di $\mathbb{Q}$. Jika $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n \to 0$ maka barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy (Gouvea, 2012).

Bukti.

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Diketahui bahwa barisan $x_{n+1} - x_n$ merupakan barisan yang konvergen ke 0. Jadi, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku
$$d(x_{n+1} - x_n\ ,0) < \varepsilon.$$
Misalkan $m,n \in \mathbb{N}$ dengan $m,n \geq n_0$ dan $m = n + r > n$, didapatkan
$$\begin{aligned} &d_p(x_m, x_n) = |x_m - x_n|_p \\ &= |x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - x_{n+r-2} \ldots + x_{n+1} - x_n|_p \\ &\leq maks\{|x_{n+r} - x_{n+r-1}|_p, \ldots, |x_{n+1} - x_n|_p\} \\ &= maks\{d_p(x_{n+r} - x_{n+r-1}, 0), d_p(x_{n+r-1} - x_{n+r-2}, 0) \\ &\quad , \ldots, d_p(x_{n+1} - x_n, 0\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$
Dapat disimpulkan bahwa barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy.

Sifat 3.12

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Barisan
$$(x_n) = (a^{p^n})$$

dengan $1 < a < p - 1$ merupakan barisan Cauchy (Gouvea, 2012).

Bukti

Diketahui barisan

$$(x_n) = (a^{p^n})$$

dengan $1 < a < p - 1$. Selanjutnya akan dibuktikan (x_n) merupakan barisan Cauchy. Dengan menggunakan **Lema 3.11**, cukup dibuktikan barisan

$$(x_{n+1} - x_n) \to 0.$$

Pertama-tama, perlu diperhatikan bentuk fungsi Euler totient untuk setiap bilangan prima p yaitu

$$\phi(p^{n+1}) = p^n(p - 1). \quad (1)$$

Selanjutnya, diperhatikan juga Teorema Euler-Fermat pada fungsi Euler totient berlaku jika $\gcd(a, m) = 1$ maka

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \; mod \; m. \quad (2)$$

Diketahui bahwa $\gcd(a, p^{n+1}) = 1$. Berdasarkan fungsi Euler-Fermat, dengan mensubtitusikan $m = p^{n+1}$ pada (2), didapatkan

$$a^{\phi(p^{n+1})} \equiv 1 \; mod \; p^{n+1}.$$

Dengan memanfaatkan (1), diperoleh

$$a^{p^n(p-1)} \equiv 1 \; mod \; p^{n+1}.$$

Jadi, $p^{n+1} \middle| a^{p^n(p-1)} - 1$. Hal ini mengakibatkan $p^n \middle| a^{p^n(p-1)} - 1$ sehingga

$$p^n \middle| a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1).$$

Didapatkan, $n \le ord_p(a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)$. Berarti,

$$\begin{aligned} d_p(x_{n+1} - x_n) &= |x_{n+1} - x_n|_p \\ &= \left|a^{p^n}(a^{p^n(p-1)} - 1)\right|_p \\ &= \frac{1}{p^{ord_p(a^{p^n}(a^{p^n(p-1)}-1)}} \\ &\le \frac{1}{p^n} \\ &\le \frac{1}{p^{n_0}} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} - x_n \to 0$. Dapat dsimpulkan bahwa $(x_n) = (a^{p^n})$ merupakan barisan Cauchy. ∎

Teorema 3.13

Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ bukan merupakan ruang metrik lengkap (Gouvea, 2012).

Bukti

Dibentuk barisan

$$(x_n) = (a^{p^n})$$

dengan $1 < a < p - 1$. Berdasarkan **Sifat 3.12**, diketahui bahwa (x_n) merupakan barisan Cauchy. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa (x_n) bukan merupakan barisan konvergen dengan metode pembuktian kontradiksi.

Diandaikan (x_n) merupakan barisan konvergen yaitu (x_n) konvergen ke x. Diperhatikan bahwa dengan menggunakan sifat limit, diperoleh

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} (a^{p^n})^p \\ &= (\lim_{n\to\infty} (x_n))^p \\ &= x^p. \end{aligned}$$

Jadi,

$$x = x^p \quad (3)$$

Selanjutnya, diperhatikan juga bahwa karena (x_n) konvergen ke x, untuk $|x - a|_p > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \ge n_0$ berlaku

$$d_p(x_n, x) < d_p(x, a)$$

yaitu

$$\left|a^{p^n} - x\right|_p < |x - a|_p \quad (4)$$

Diperhatikan juga bahwa

$$\begin{aligned} |x - a|_p &= \left|x - a^{p^n} + a^{p^n} - a\right|_p \\ &\le maks\left\{\left|x - a^{p^n}\right|_p, \left|a^{p^n} - a\right|_p\right\}. \end{aligned}$$

Karena $\left|a^{p^n} - x\right|_p < |x - a|_p$, diperoleh

$$\left|x - a^{p^n}\right|_p \ne \left|a^{p^n} - a\right|_p$$

dan

$$maks\left\{\left|x - a^{p^n}\right|_p, \left|a^{p^n} - a\right|_p\right\} = \left|a^{p^n} - a\right|_p \quad (5)$$

Menurut **Teorema 3.9** dan (5)**,** didapatkan

$$|x - a|_p = \left|a^{p^n} - a\right|_p = |a|_p\left|a^{p^n} - 1\right|_p$$

Karena, $1 < a < p - 1$ berlaku $p \nmid a$, diperoleh $|a|_p = 1$. Jadi,

$$|x - a|_p = \left|a^{p^n} - 1\right|_p$$

Dengan menggunakan teorema kecil Fermat yaitu $a^{p^n} \equiv 1 \; mod \; p$. Didapatkan $p \middle| a^{p^n} - 1$. Hal ini berarti $ord_p a^{p^n} - 1 \ge 1$ yang mengakibatkan $\left|a^{p^n} - 1\right|_p < 1$. Oleh karena itu, didapatkan

$$\begin{aligned} &|x - a|_p < 1. \\ \Leftrightarrow\; &\frac{1}{p^{ord_p x - a}} < 1 \\ \Leftrightarrow\; &p^{ord_p x - a} > p^0 \end{aligned}$$

Karena p positif, diperoleh $ord_p x - a > 0$, Jadi,

$$p^n | x - a$$

untuk suatu n bilangan positif yang berarti

$$p | x - a \quad (6)$$

Diperhatikan kembali (3) yaitu $x = x^p$ sehingga $x =$

$-1, x = 0$ atau $x = 1$. Karena $1 < a < p - 1$ dan dengan menggunakan (6), berlaku $x \neq 0$ dan $x \neq -1$ mengakibatkan $x = 1$. Dengan memanfaatkan (6), diperoleh juga bahwa

$$pk = 1 - a$$

sehingga

$$a = -pk + 1$$

- Untuk $k < 0$, didapatkan $a > p$;
- Untuk $k = 0$, didapatkan $a = 1$;.
- Untuk $k > 0$, didapatkan $a < 1$.

Hal ini menimbulkan kontradiksi, karena diketahui bahwa $1 < a < p - 1$. Dengan demikian, diperoleh ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ bukan merupakan ruang metrik lengkap. ■

PENUTUP

SIMPULAN

Diberikan ruang metrik $p - adic$ $(\mathbb{Q}, d_p)$. Berlaku

1. Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ merupakan ruang metrik non-Archimedean;
2. Ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$ bukan merupakan ruang metrik lengkap.

SARAN

Sebagai kelanjutan dari penelitian ini, perlu diselidiki sifat-sifat topologi pada ruang metrik $(\mathbb{Q}, d_p)$. Lebih khusus, dapat juga diselidiki sifat-sifat pada $(\mathbb{Q}, d_p)$ dengan $p = 2$.

DAFTAR PUSTAKA

Baker, A.J. (2002). An Introduction to p-adic Number and p-adic Analysis. Glasgow, Scotland.

Bartle, R. G., & Sherbert. D. R. (2011). Introduction to Real Analysis 4th Edition. John Wiley and Sons, New York.

Gouvea, F. Q. (2012). p-adic numbers: An introduction, Universitext. Springer, Berlin Heidelberg.

Koblitz, N. (2012). P-adic Numbers, P-adic Analysis, and Zeta-Functions. Amerika Serikat: Springer New York.

Kreyszig, E. (1989). Introductional Functional Analysis with Application. John Wiley and Sons, New York.

Maddox, I. J. (1970). Element of Functional Analysis. Cambridge at The University Press.

Rao, K.P.R & Kishore, G.N.V. (2008). Common Fixed Point Theorems in Ultrametric Spaces. Journal of mathematics Acharya Nagarjuna University.