

**PELABELAN ANGGUN GRAF BERLIAN RANGKAP BERBINTANG, BEBERAPA KELAS GRAF POHON, DAN GRAF CORONA KHUSUS**

**Lilla Afiffah**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
e-mail : [lilla.19030214049@mhs.unesa.ac.id](mailto:lilla.19030214049@mhs.unesa.ac.id)

**I Ketut Budayasa**

Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Surabaya  
Penulis Korespondensi : [ketutbudayasa@unesa.ac.id](mailto:ketutbudayasa@unesa.ac.id)

**Abstrak**

Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (edge) atau himpunan titik (vertex) ke bilangan bilangan bulat positif, yang disebut label. Sebuah fungsi  $f$  disebut pelabelan anggun graf  $G$  dengan  $m$  sisi jika  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$  adalah injektif dan fungsi terinduksi  $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$  didefinisikan sebagai  $f^*(e = uv) = |f(u) - f(v)|$  adalah bijektif. Graf yang mempunyai pelabelan anggun disebut graf anggun. Pada penelitian ini akan ditunjukkan konstruksi pelabelan anggun pada graf berlian rangkap berbintang ( $BRB(n)$ ), beberapa kelas graf pohon dan graf corona khusus ( $K_{n,n} \odot K_1$ ).

**Kata kunci:** Pelabelan anggun, graf berlian rangkap berbintang, kelas graf pohon, graf  $K_{n,n} \odot K_1$

**Abstract**

Labeling of a graph is a mapping that brings every graph element, namely the edge or vertex, to the positive integers, which is called label. A function  $f$  is called graceful labeling of graph  $G$  with  $m$  edge if  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$  is injective and induced function  $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$  defined as  $f^*(e = uv) = |f(u) - f(v)|$  is bijective. A graph that has graceful labeling is called a graceful graph. The construction of graceful labeling in the double-star diamond graph ( $BRB(n)$ ), some classes of tree graphs, and certain corona graph ( $K_{n,n} \odot K_1$ ) will be shown in this paper.

**Keywords:** Graceful labeling, double-star diamond graph, class of tree graph,  $K_{n,n} \odot K_1$  graph.

**1. PENDAHULUAN**

Ilmu yang perkembangannya sangat pesat dan paling banyak diterapkan dalam kehidupan manusia adalah matematika. Salah satu cabang matematika yang berkembang pesat adalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan matematika yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736, ketika ingin memecahkan permasalahan jembatan Konigsberg di atas Sungai Pregel, Rusia. Permasalahan Jembatan Konigsberg, mungkin tidaknya melewati tujuh jembatan yang ada dengan setiap jembatan hanya dilewati tepat satu kali. Euler memodelkan

permasalahan tersebut dalam graf, dimana daratan sebagai titik dan jembatan sebagai garis yang menghubungkan titik yang bersesuaian (Budayasa, 2007). Banyak hal yang dikaji dalam teori graf, salah satunya pelabelan. Pelabelan graf menjadi topik yang menarik dan berguna, baik aplikasi maupun teoritis. Pelabelan dari suatu graf adalah suatu pemetaan yang membawa setiap elemen graf yaitu himpunan sisi (edge) atau himpunan titik (vertex) ke bilangan bilangan bulat positif (Chang et al., 2000).

Sebuah fungsi  $f$  disebut pelabelan anggun graf  $G$  dengan  $m$  sisi jika  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$  adalah injektif dan fungsi

terinduksi  $f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$  didefinisikan sebagai  $f^*(e = uv) = |f(u) - f(v)|$  adalah bijektif. Graf yang mempunyai pelabelan anggung disebut graf anggung. Pelabelan anggung pertama kali diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967, hasil dari penelitiannya menunjukkan bahwa graf caterpillar adalah graf anggung (Rosa, 1967). Beberapa penelitian yang relevan dengan pelabelan anggung diantaranya, penelitian Golomb yang menyebutkan bahwa semua graf bipartit lengkap adalah anggung (Golomb, 1972), penelitian Gallian yang menunjukkan bahwa  $K_n$  anggung jika dan hanya jika  $n \leq 4$  (Gallian, 2017), penelitian Sethurman dan Elumalai yang menyebutkan bahwa graf bipartit lengkap dengan sisi pendent, yaitu  $K_{m,n} \odot K_1$  adalah anggung untuk  $n \leq m \leq 2n + 4$  jika  $n$  genap, dan untuk  $n \leq m \leq 2n - 1$  jika  $n$  ganjil (G. Sethuraman & Elumalai, 2001). Serta penelitian oleh Ayu Nur Hidayah mengkaji tentang pelabelan anggung super pada graf lengkap, tripartit lengkap, gabungan bintang dan caterpillar (Hidayah, 2021).

Berdasarkan penelitian terdahulu, penulis tertarik untuk meneliti pelabelan anggung pada graf berlian rangkap berbintang dan beberapa kelas graf pohon. Selain itu, penulis juga tertarik untuk meneliti pelabelan anggung pada graf bipartit lengkap  $K_{n,n}$  khususnya pada kelas graf yang diperoleh dari hasil operasi corona  $K_{n,n} \odot K_1$ . Jurnal acuan yang dipakai dalam penelitian ini adalah *graceful labeling of pendant edge extension of complete bipartite graph* (Bhoumik & Mitra, 2014), *graceful labeling on twig diamond graph with pendant edges* (Jesintha et al., 2020) dan *an extensive survey of graceful trees* (Robeva, 2015).

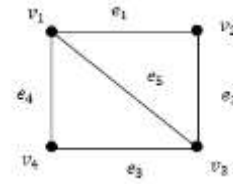
**2. KAJIAN TEORI**

**A. Graf**

Graf  $G$  terdiri atas dua himpunan, yaitu himpunan berhingga tak kosong  $V(G)$  dari objek-objek yang disebut titik dan himpunan berhingga (bisa kosong)  $E(G)$  yang elemennya disebut sisi sedemikian hingga setiap elemen  $e$  dalam  $E(G)$  merupakan pasang tak berurutan titik-titik di  $V(G)$ . Himpunan  $V(G)$

disebut himpunan titik  $G$ , dan himpunan  $E(G)$  disebut himpunan sisi  $G$ . (Budayasa, 2007).

Contoh 2.1 :

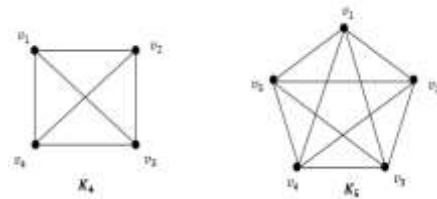


Gambar 2.1 Graf

**B. Graf Komplet**

Sebuah graf komplet (graf lengkap) dengan  $n$  titik, dilambangkan dengan  $K_n$  adalah graf sederhana dengan  $n$  titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi (Budayasa, 2007).

Contoh 2.3 :

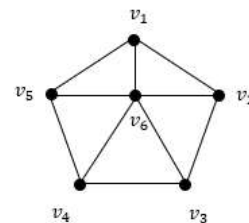


Gambar 2.3 Graf Komplet

**C. Graf Roda**

Graf Roda  $W_n$  (Wheel Graph) merupakan graf yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik baru pada graf siklus  $C_n$  sedemikian hingga setiap titik pada graf siklus  $C_n$  berhubungan langsung dengan titik baru tersebut. Banyak titik graf roda adalah  $n + 1$ , sedangkan banyak sisinya adalah  $2n$  (dimana  $n \geq 3$ ).

Contoh 2.5 :

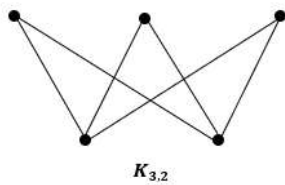


Gambar 2.5 Graf Roda

**D. Graf Bipartit**

Sebuah graf  $G$  disebut graf bipartit jika himpunan titik  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian  $A$  dan  $B$  sedemikian hingga setiap sisi dari  $G$  menghubungkan sebuah titik di  $A$  dan sebuah titik di  $B$ . Kita sebut  $(A, B)$  bipartit dari  $G$ . Selanjutnya apabila  $G$  sederhana dan bipartit dengan bipartit  $(A, B)$  sedemikian hingga setiap titik di  $A$  berhubungan langsung dengan setiap titik di  $B$ , maka  $G$  disebut graph bipartit lengkap, dilambangkan dengan  $K_{m,n}$  dengan  $|A| = m$  dan  $|B| = n$  (Budayasa, 2007).

Contoh 2.6 :



Gambar 2.6 Graf Bipartit Lengkap

**3. PEMBAHASAN**

**A. Pelabelan Anggun Graf Berlian Rangkap Berbintang**

**Definisi 3.1 :**

Misalkan  $G$  graf dengan  $m$  sisi. Pelabelan anggun pada  $G$  adalah fungsi injektif

$$f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}$$

sedemikian hingga, fungsi terinduksi

$$f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m\}$$

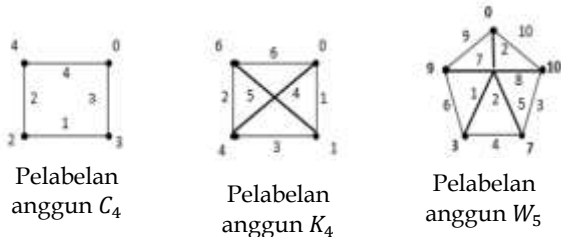
bijektif dan untuk setiap sisi  $uv \in E(G)$  berlaku

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$$

Seanjutnya, graf  $G$  yang memiliki pelabelan anggun disebut graf Anggun.

**Contoh 3.1 :**

Pelabelan anggun graf sikel  $C_4$ , graf komplit  $K_4$ , dan graf roda  $W_5$  diperlihatkan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Contoh Pelabelan Anggun

Catatan :

- (i) Akibat dari fungsi  $f^*$  bijektif,  $m$  menjadi label sisi. Karena  $m$  label sisi maka  $m =$

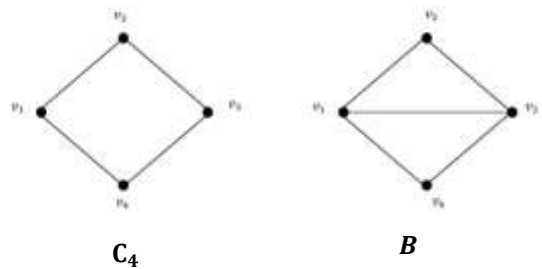
$|m - 0|$ . Dengan demikian, dalam pelabelan anggun,  $m$  dan  $0$  menjadi label titik.

- (ii) Jika  $\{l_1, l_2, \dots, l_r\}$  merupakan label - label dari pelabelan anggun, maka  $\{m - l_1, m - l_2, \dots, m - l_r\}$  juga menjadi label - label dari pelabelan anggun tersebut.

**Definisi 3.2 :**

Misalkan  $C_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$  graf sikel dengan 4 titik. Graf Berlian  $B$  dibentuk dari  $C_4$  dengan menambahkan sebuah sisi yang menghubungkan titik  $v_1$  dan titik  $v_3$  dengan sebuah sisi.

**Contoh 3.2 :**



Gambar 3.2 Graf  $C_4$  dan Graf Berlian

Catatan :

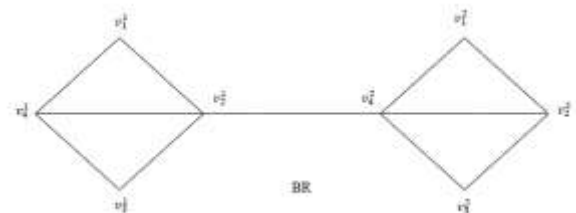
Jika  $K_4$  graf komplet dengan 4 titik dan  $e \in E(K_4)$ , maka graf berlian  $B$  isomorfik dengan  $K_4 - \{e\}$ .

**Definisi 3.3 :**

Misalkan  $B_1$  dan  $B_2$  dua graf berlian saling lepas ( $V(B_1) \cap V(B_2) = \emptyset, E(B_1) \cap E(B_2) = \emptyset$ ) ;  $x \in V(B_1)$  dengan  $d(x) = 3$  dan  $y \in V(B_2)$  dengan  $d(y) = 3$ . Graf berlian rangkap, dilambangkan dengan  $BR$ , dibentuk dari  $B_1$  dan  $B_2$  dengan menghubungkan titik  $x$  dan titik  $y$  dengan sebuah sisi.

**Contoh 3.3 :**

Graf berlian rangkap  $BR$  dapat dilihat pada Gambar 3.3



Gambar 3.3 Graf  $BR$

Perhatikan bahwa graf berlian rangkap mempunyai 4 titik berderajat 2; 2 titik berderajat

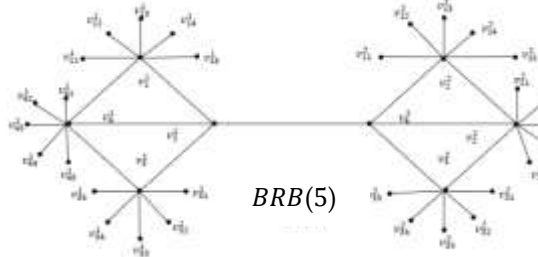
3 dan 2 titik berderajat 4. Graf  $BR$  mempunyai 8 titik dan 11 sisi.

**Definisi 3.4 :**

Misalkan  $G$  graf berlian rangkap, tambahkan  $n$  sisi pendants pada setiap titik  $G$  yang berderajat dua atau tiga. Maka graf yang dihasilkan dinamakan graf berlian rangkap berbintang, dilambangkan dengan  $BRB(n)$

**Contoh 3.4 :**

Graf  $BRB(5)$  diperlihatkan pada Gambar 3.4



Gambar 3.4 Graf  $BRB(5)$

Perhatikan graf  $BRB(n)$  mempunyai  $6n + 8$  titik dan  $6n + 11$  sisi.

**Teorema 3.1 :**

Graf berlian rangkap berbintang  $BRB(n)$  adalah graf anggun.

**Bukti :**

Misalkan graf  $G = BRB(n)$  titik-titik subgraf  $BR$  pembentuk  $G$  dilabel dengan  $v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2$ , seperti tampak pada gambar 3.3.

Untuk  $i \in \{1,3,4\}$  himpunan titik - titik pendants yang berhubungan langsung dengan titik  $v_i^1$  adalah

$$A_i^1 = \{v_{ij}^1 / 1 \leq j \leq n\}$$

Untuk  $i \in \{1,2,3\}$  himpunan titik - titik pendants  $G$  yang berhubungan langsung dengan titik  $v_i^2$  dilambangkan dengan

$$A_i^2 = \{v_{ij}^2 / 1 \leq j \leq n\}$$

Karena banyak sisi  $G$  adalah  $6n + 11$  konstruksi sebuah pelabelan titik  $G$

$$f : V(G) \rightarrow \{0,1,2, \dots, 6n + 11\}$$

Sedemikian hingga

(i)  $f(v_1^k) = (k - 1)(n + 3), 1 \leq k \leq 2$

(ii)  $f(v_2^k) = (n + 1) + (k - 1)(2n + 8), 1 \leq k \leq 2$

(iii)  $f(v_3^k) = k(n + 2), 1 \leq k \leq 2$

(iv)  $f(v_4^k) = 5n - (k - 1)(n + 2) + 11, 1 \leq k \leq 2$

(v)  $f(v_{1j}^1) = 6n - j + 12, 1 \leq j \leq n$

(vi)  $f(v_{3j}^1) = 4n + j + 10, 1 \leq j \leq n$

(vii)  $f(v_{4j}^1) = n - j + 10, 1 \leq j \leq n$

(viii)  $f(v_{1j}^2) = \begin{cases} 4n + 10, & j = 1 \\ 4n - j + 10, & 2 \leq j \leq n \end{cases}$

(ix)  $f(v_{2j}^2) = \begin{cases} n + 4 + j, & 1 \leq j \leq n - 1 \\ 2j + 5, & j = n \end{cases}$

(x)  $f(v_{3j}^2) = \begin{cases} 3n + 8 - j, & 1 \leq j \leq 2 \\ 3n + 6 - j, & 3 \leq j \leq n \end{cases}$

Selanjutnya, ambil dua titik  $G$  yang berbeda, namakan titik  $x$  dan titik  $y$ . Akan ditunjukkan  $f(x) \neq f(y)$ . Ada banyak kemungkinan untuk titik-titik  $x$  dan  $y$  pada  $G$ .

Salah satu kemungkinan  $x$  dan  $y$  adalah titik - titik pendants  $G$  terletak pada subkelas yang sama yaitu  $A_i^k$  untuk suatu  $i$  dan  $k$  dengan  $1 \leq k \leq 2, 1 \leq i \leq 4$ . Misal  $x, y \in A_1^2$  dan tanpa menghilangkan keumuman, misal  $x = v_{1t}^2$  dan  $y = v_{1l}^2$ .

Sehingga  $f(x) = f(v_{1t}^2) = \begin{cases} 4n - t + 10, & t \geq 2 \\ 4n + 10, & t = 1 \end{cases}$

Dan  $f(y) = f(v_{1l}^2) = \begin{cases} 4n - l + 10, & l \geq 2 \\ 4n + 10, & l = 1 \end{cases}$

Karena  $t \neq l$ , maka  $f(x) \neq f(y)$

Kemungkinan lain adalah  $x$  dan  $y$  terletak pada subkelas titik pendants yang berbeda. Misalkan  $x \in A_1^1$  dan  $y \in A_1^2$ .

Tanpa menghilangkan kemungkinan, misal  $x = v_{1t}^1$  untuk suatu  $t, 1 \leq t \leq n$  dan  $y \in A_{1l}^2$  untuk suatu  $l, 1 \leq l \leq n$  maka

$f(x) = f(v_{1t}^1) = 6n - t + 12, 1 \leq t \leq n$

dan  $f(y) = f(v_{1l}^2) = \begin{cases} 4n + 10, & l = 1 \\ 4n - l + 10, & 2 \leq l \leq n \end{cases}$  sehingga  $f(x) \neq f(y)$

karena  $\forall x, y \in V(G), x \neq y, f(x) \neq f(y)$ , maka fungsi  $f$  adalah fungsi injektif. Selanjutnya, akan ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^* : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, |E(G)|\}$$

dengan  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall u, v \in E(G)$

adalah fungsi bijektif.

Untuk  $v_1^k v_2^k \in E(G), 1 \leq k \leq 2$  diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_1^k v_2^k) &= |f(v_1^k) - f(v_2^k)| \\ &= |(k-1)(n+3) \\ &\quad - \{(n+1) + (k-1)(2n+8)\}| \\ &= |4 - kn - 5k| \end{aligned}$$

Untuk  $v_2^k v_3^k \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_2^k v_3^k) &= |f(v_2^k) - f(v_3^k)| \\ &= |(n+1) + (k-1)(2n+8) - k(n \\ &\quad + 2)| \\ &= |k(n+6) - n - 7| \end{aligned}$$

Untuk  $v_3^k v_4^k \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_3^k v_4^k) &= |f(v_3^k) - f(v_4^k)| \\ &= |k(n+2) - (5n - (k-1)(n+2) \\ &\quad + 11)| \\ &= |2k(n+2) - 6n - 13| \end{aligned}$$

Untuk  $v_4^k v_1^k \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_4^k v_1^k) &= |f(v_4^k) - f(v_1^k)| \\ &= |5n - (k-1)(n+2) + 11 \\ &\quad - (k-1)(n+1)| \\ &= |7n + k(2n+5) + 16| \end{aligned}$$

Untuk  $v_2^k v_4^k \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_2^k v_4^k) &= |f(v_2^k) - f(v_4^k)| \\ &= |(n+1) + (k-1)(2n+8) - 5n \\ &\quad + (k-1)(n+2) - 11| \\ &= |k(3n+10) - 7n - 20| \end{aligned}$$

Untuk  $v_2^1 v_4^2 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_2^1 v_4^2) &= |f(v_2^1) - f(v_4^2)| \\ &= |n+1 - (5n - n - 2 + 11)| \\ &= |-3n - 8| \\ &= |3n + 8| \end{aligned}$$

Selanjutnya, selidiki peta - peta sisi - sisi pendant G oleh fungsi  $f^*$

Untuk  $j, 1 \leq j \leq n$ , sisi pendaan  $v_1^1 v_{1j}^1 \in E(G)$ , didapat

$$\begin{aligned} f^*(v_1^1 v_{1j}^1) &= |f(v_1^1) - f(v_{1j}^1)| \\ &= |0 - (6n - j + 12)| \\ &= 6n + 12 - j \end{aligned}$$

Untuk sisi pendaan  $v_3^1 v_{3j}^1 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_3^1 v_{3j}^1) &= |f(v_3^1) - f(v_{3j}^1)| \\ &= |n+2 - (4n+j+10)| \\ &= |-3n-j-8| \\ &= |3n+j+8| \end{aligned}$$

Untuk sisi pendaan  $v_4^1 v_{4j}^1 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_4^1 v_{4j}^1) &= |f(v_4^1) - f(v_{4j}^1)| \\ &= |5n+11 - (n-j+1)| \\ &= |4n+10+j| \end{aligned}$$

Untuk sisi pendaan  $v_1^2 v_{1j}^2 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_1^2 v_{1j}^2) &= |f(v_1^2) - f(v_{1j}^2)| \\ &= \begin{cases} |n+3 - (4n+10)|, & j=1 \\ |n+3 - (4n-j+10)|, & 2 \leq j \leq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} |3n+10|, & j=1 \\ |3n+7-j|, & 2 \leq j \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

Untuk sisi pendaan  $v_2^2 v_{2j}^2 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_2^2 v_{2j}^2) &= |f(v_2^2) - f(v_{2j}^2)| \\ &= \begin{cases} |n+1+2n+8 - (n+4+j)|, & 1 \leq j \leq n-1 \\ |n+1+2n+8 - (2j+5)|, & j=n \end{cases} \\ &= \begin{cases} |2n+5-j|, & 1 \leq j \leq n-1 \\ |3n+4-2j|, & j=n \end{cases} \end{aligned}$$

Untuk sisi pendaan  $v_3^2 v_{3j}^2 \in E(G)$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_3^2 v_{3j}^2) &= |f(v_3^2) - f(v_{3j}^2)| \\ &= \begin{cases} |2n+4 - (3n+8-j)|, & 1 \leq j \leq 2 \\ |2n+4 - (3n+6-j)|, & 3 \leq j \leq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} |n+4-j|, & 1 \leq j \leq 2 \\ |n+2-j|, & 3 \leq j \leq n \end{cases} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa semua peta dari fungsi  $f^*$  berbeda, sehingga  $f^*$  fungsi injektif, kodomain fungsi  $f$  adalah

$$B = \{0, 1, 2, \dots, 6n + 11\}$$

Karena domain fungsi  $f$  adalah  $V(G)$  dengan  $|V(G)| = 6n + 8$  dan  $f$  fungsi injektif, maka terdapat sebanyak  $|B| - |V(G)| = 4$  anggota B

yang bukan merupakan peta fungsi  $f$  (bukan label titik  $G$ ) yaitu :

$$C = \{n + 4, 3n + 4, 3n + 5, 3n + 8\}$$

Perhatikan fungsi terinduksi  $f^*$

$$f^*(v_2^1 v_3^1) = 1 ; f^*(v_3^2 v_{3n}^2) = 2 ; f^*(v_3^2 v_{3(n-1)}^2) = 3 ; \dots ; f^*(v_1^1 v_{11}^1) = 6n + 11$$

ini berarti  $R_{fx} = \{1, 2, 3, \dots, 6n + 11\}$

karena  $|E(G)| = 6n + 11$ , maka fungsi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 6n + 11\}$$

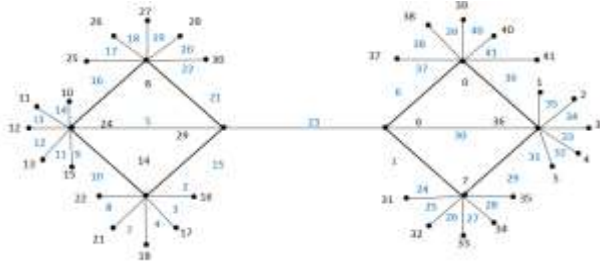
Memenuhi

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall u, v \in E(G)$$

merupakan fungsi bijektif

Dengan demikian, teorema terbukti .

Contoh sebuah pelabelan anggung graf BRB(5) dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.5 Pelabelan Anggung Graf BRB(5)

**B. Pelabelan Anggung Beberapa Kelas Pohon**

Ingat bahwa pohon adalah graf terhubung tanpa siklus. Jika pohon  $T$  mempunyai  $n$  titik, maka banyak sisi  $T$  adalah  $n - 1$ . Lemma berikut simpel tetapi esensial.

**Lemma 3.2 :**

Jika  $T$  pohon dengan  $n$  titik dan fungsi  $f: V(T) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  sebuah pelabelan anggung pada  $T$ , maka fungsi  $f_1: V(T) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$  dengan  $f_1(v) = n + 1 - f(v), \forall v \in V(T)$  juga merupakan sebuah pelabelan anggung pada  $T$ .

Bukti :

Karena  $f$  pelabelan anggung pada  $T$  maka berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  injektif dan fungsi terinduksi  $f^*$  bijektif. Akibatnya fungsi  $f_1$  juga injektif dan selanjutnya, untuk setiap  $uv \in E(T)$ , berlaku

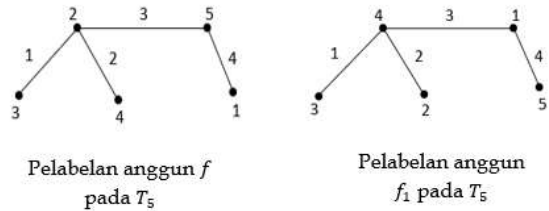
$$\begin{aligned} f_1^*(uv) &= |f_1(u) - f_1(v)| \\ &= |n + 1 - f(u) - n - 1 + f(v)| \\ &= |f(u) - f(v)| \\ &= f^*(uv) \end{aligned}$$

Ini berarti

$$Rf_1^* = Rf^*$$

Karena  $f^*$  bijektif dengan  $Rf^* = \{1, 2, \dots, n - 1\}$ , maka  $Rf_1^* = \{1, 2, \dots, n - 1\}$  dan  $Rf_1^*$  bijektif. Berdasarkan definisi 3.1, fungsi  $f_1$  adalah sebuah pelabelan anggung pada  $T$ . Dengan demikian, lemma terbukti ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan anggung  $f$  dan  $f_1$  pada pohon  $T_5$  berikut ini



Gambar 3.6 Pelabelan anggung pohon  $T_5$

**Teorema 3.3 :**

Untuk  $n \geq 1$ , lintasan  $P_n$  adalah graf anggung

**Bukti :**

Misalkan lintasan

$$P_n = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

Definisikan fungsi

$$f: V(P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

dengan

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}; & i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq n \\ n - \left(\frac{i-2}{2}\right); & i \text{ genap}, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Selanjutnya, ditunjukkan  $f$  fungsi injektif. Ambil dua titik  $P_n$  yang berbeda, namakan  $v_i$  dan  $v_j$  dengan  $i \neq j$ .

Kasus 1 :  $i$  ganjil dan  $j$  ganjil maka  $f(v_i) = \frac{i+1}{2} \neq \frac{j+1}{2} = f(v_j)$

Kasus 2 :  $i$  genap dan  $j$  genap maka  $f(v_i) = n - \left(\frac{i-2}{2}\right) \neq n - \left(\frac{j-2}{2}\right) = f(v_j)$

Kasus 3 :  $i$  ganjil dan  $j$  genap maka diperoleh  $f(v_i) = \frac{i+1}{2} \neq n - \left(\frac{j-2}{2}\right) = f(v_j)$

Kasus 4 :  $i$  genap dan  $j$  ganjil maka diperoleh  $f(v_i) = n - \left(\frac{i-2}{2}\right) \neq \frac{j+1}{2} = f(v_j)$

Sehingga fungsi  $f$  injektif

Perhatikan bahwa

$$E(P_n) = \{v_i v_{i+1} / 1 \leq i \leq n - 1\}$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^*: E(P_n) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$$

dengan

$$f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall uv \in E(P_n)$$

adalah fungsi bijektif

Untuk  $i$  ganjil dan  $1 \leq i \leq n - 1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= |f(v_i) - f(v_{i+1})| \\ &= \left| \frac{i+1}{2} - \left( n - \frac{i+1-2}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{2i-2n}{2} \right| \\ &= |n - i| \end{aligned}$$

- i. Untuk  $n$  genap, peta dari himpunan sisi  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-1}v_n\}$  oleh fungsi  $f^*$  adalah  $A_1 = \{n-1, n-3, n-5, \dots, 1\}$
- ii. Untuk  $n$  ganjil, peta dari himpunan sisi  $\{v_1v_2, v_3v_4, \dots, v_{n-2}v_{n-1}\}$  oleh fungsi  $f^*$  adalah  $A_2 = \{n-1, n-3, n-5, \dots, 2\}$

Untuk  $i$  genap,  $1 \leq i \leq n-1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(v_i v_{i+1}) &= |f(v_i) - f(v_{i+1})| \\ &= \left| \left( n - \frac{i-2}{2} \right) - \frac{i+2}{2} \right| \\ &= \left| \frac{2n-2i}{2} \right| \\ &= |n-i| \end{aligned}$$

- i. Jika  $n$  genap, maka peta dari himpunan sisi  $\{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-2}v_{n-1}\}$  oleh fungsi  $f^*$  adalah  $B_1 = \{n-2, n-4, \dots, 2\}$
- ii. Jika  $n$  ganjil, maka peta dari himpunan sisi  $\{v_2v_3, v_4v_5, \dots, v_{n-1}v_n\}$  oleh fungsi  $f^*$  adalah  $B_2 = \{n-2, n-4, \dots, 1\}$

Sehingga, untuk  $n$  genap diperoleh

$$Rf^* = A_1 \cup B_1 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Untuk  $n$  ganjil, di dapat

$$Rf^* = A_2 \cup B_2 = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$$

Karena domain fungsi  $f^*$  adalah

$$Df^* = E(P_n)$$

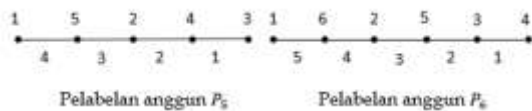
maka  $|Df^*| = |E(P_n)| = n-1$

Karena

$$|Df^*| = |Rf^*| = n-1$$

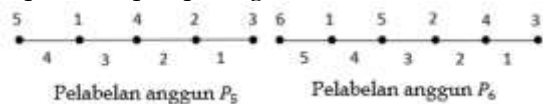
maka fungsi  $f^*$  bijektif

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  adalah pelabelan anggung pada  $P_n$ . Dengan demikian, bukti teorema lengkap. Sebagai ilustrasi, pelabelan anggung lintasan  $P_5$  dan  $P_6$  dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.7 Pelabelan anggung  $P_5$  dan  $P_6$

menggunakan Lemma 3.2 diperoleh pelabelan anggung dari lintasan  $P_5$  dan  $P_6$  yang berbeda, seperti tampak pada gambar berikut.



Gambar 3.8 Pelabelan anggung  $P_5$  dan  $P_6$  sesuai Lemma 3.2

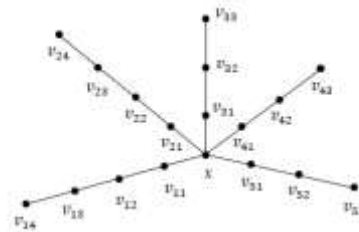
**Definisi 3.5 :**

Misalkan  $P_{n_1}^1, P_{n_2}^2, \dots, P_{n_k}^k$  dengan  $k \geq 1$  adalah sebanyak  $k$  lintasan berbeda, secara berturut-turut,  $n_1, n_2, \dots, n_k$  titik. Jika titik-titik pangkal semua lintasan "dihimpitkan" menjadi satu

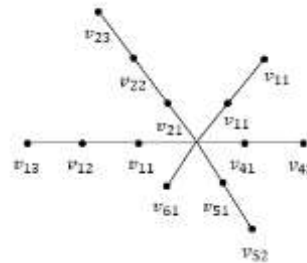
titik, namakan titik  $x$ , maka graf yang terbentuk dinamakan pohon laba-laba (spider tree) dengan titik  $x$  disebut titik pusat (badan) dan  $P_{n_i}^i$  dinamakan "kaki",  $1 \leq i \leq k$ . Selanjutnya, pohon laba-laba tersebut, disimbolkan dengan  $ST(n_1, n_2, \dots, n_k)$ . Selanjutnya, titik  $ST$  yang terletak pada kaki ke  $i$  dan berjarak  $j$  dari titik pusat  $x$ , dilambangkan dengan  $v_{ij}; 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n_i - 1$ .

**Contoh 3.5 :**

Pohon laba - laba  $ST(5, 5, 4, 4, 4)$  dan  $ST(4, 4, 3, 3, 3, 2)$  dapat dilihat pada gambar berikut.



Graf  $ST(5, 5, 4, 4, 4)$



Graf  $ST(4, 4, 3, 3, 3, 2)$

Gambar 3.9 Graf  $ST(5, 5, 4, 4, 4)$  dan  $ST(4, 4, 3, 3, 3, 2)$

**Lemma 3.4 :**

Jika pohon laba-laba  $ST(n_1, n_2, \dots, n_k)$  mempunyai  $n$  titik dan  $m$  sisi, maka  $n = N + 1 - k$  dan  $m = N - k$  dengan  $N = \sum_{i=1}^k n_i$

**Bukti :**

Untuk setiap  $i, 1 \leq i \leq k$ , pada kaki  $P_{n_i}^i$  terdapat  $n_i - 1$  titik di luar titik pusat.

$$\begin{aligned} \text{maka } \sum_{i=1}^k (n_i - 1) &= \sum_{i=1}^k n_i - k \\ &= N - k \end{aligned}$$

Karena jumlah semua titik pada  $ST$  di luar titik pusat adalah  $n - 1$ . Sehingga,  $n - 1 =$

$$N - k, \text{ ekuivalen dengan } n = N - k + 1$$

Karena  $ST(n_1, n_2, \dots, n_k)$  pohon, maka

$$\begin{aligned} |E(ST(n_1, n_2, \dots, n_k))| &= |V(ST(n_1, n_2, \dots, n_k))| - 1 \\ &= n - 1 \\ &= (N - k + 1) - 1 \\ &= N - k \end{aligned}$$

Dengan demikian, lemma terbukti ■

Berikut dibuktikan, jika selisih panjang dua kaki dalam pohon laba-laba tidak melebihi satu, maka pohon laba-laba tersebut merupakan graf anggung.

**Teorema 3.5 :**

Jika  $T$  pohon laba - laba dengan  $k$  kaki dan setiap kaki mempunyai panjang  $t$  atau  $t + 1$ , untuk suatu  $t \geq 1$ , maka  $T$  adalah graf anggun.

**Bukti :**

Untuk  $k \leq 2$ , berdasarkan Definisi 3.5, maka  $T$  adalah lintasan. Berdasarkan Teorema 3.3,  $T$  anggun. Misalkan  $k \geq 3$ , ditinjau dua kasus, yaitu  $k$  ganjil dan  $k$  genap.

**Kasus 1 :  $k$  ganjil**

Misalkan  $T$  mempunyai sebanyak  $k_0$  kaki dengan panjang  $t$  dan  $k_1$  kaki dengan panjang  $t + 1$ , maka  $k = k_0 + k_1$ .

Jika banyak titik  $T$  adalah  $n$ , maka

$$\begin{aligned} n &= k_0 t + k_1(t + 1) + 1 \\ &= k_0 t + k_1 t + k_1 + 1 \\ &= (k_0 + k_1)t + k_1 + 1 \\ &= kt + k_1 + 1 \end{aligned}$$

Jika banyak sisi  $T$  adalah  $m$ , maka

$$m = n - 1 = kt + k_1$$

Misalkan  $L_1, L_2, \dots, L_k$  kaki-kaki  $T$  dan  $L_1, L_2, \dots, L_{k_1}$  adalah kaki-kaki  $T$  dengan panjang  $t + 1$  dan  $L_{k_1+1}, L_{k_1+2}, \dots, L_k$  adalah kaki-kaki  $T$  dengan panjang  $t$ .

Misalkan  $x$  titik pusat  $T$  dan  $v_{ij}$  adalah titik  $T$  pada kaki ke  $-i$  dan berjarak  $j$  dari titik  $x$ , dengan  $1 \leq i \leq k_1; 1 \leq j \leq t + 1$  dan  $k_1 + 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq t$ .

Didefinisikan fungsi  $f$  pada  $V(T)$  sedemikian hingga,

$$f(u)$$

$$= \begin{cases} n - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-1)k}{2}; u = v_{ij}, i, j \text{ ganjil} \\ n - 1 - \frac{k-1}{2} - \frac{(j-2)k}{2}; u = v_{ij}, i, j \text{ genap} \\ \frac{i}{2} + \frac{(j-1)k}{2} + 1; u = v_{ij}, i \text{ genap}, j \text{ ganjil} \\ \frac{k-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)k}{2} + 1; u = v_{ij}, i \text{ ganjil}, j \text{ genap} \end{cases}$$

Perhatikan, titik pusat  $x$  di  $T$  berlabel 1 dan titik  $v_{11}$  berlabel  $n$  (banyak titik  $T$ ).

Dapat dicek, bahwa fungsi

$$f: V(T) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, kt + k_1 + 1\}$$

adalah injektif dan fungsi tereduksi

$$f^*: E(T) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, kt + k_1\}$$

dengan  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall uv \in E(T)$

Merupakan fungsi bijektif. Berdasarkan Definisi 3.2, pohon laba-laba  $T$  adalah anggun.

**Kasus 2 :  $k$  genap**

Tanpa menghilangkan keumuman, misalkan kaki ke  $-k$   $L_k$  dari  $T$  mempunyai panjang  $t$ . Hapus titik - titik  $L_k$ , kecuali titik pusat  $x$  dari  $T$ , diperoleh pohon laba - laba baru  $T_0$  dengan banyak kaki  $k - 1$  (ganjil). Berdasarkan kasus 1,  $T_0$  graf anggun. Banyak titik  $T_0$  adalah  $n_0 =$

$n - t$ . Misalkan  $f_0$  pelabelan anggun pada  $T_0$ , seperti kasus 1. Berdasarkan Lemma 3.2, Pelabelan  $f_0^1$  dengan  $f_0^1(v) = n_0 + 1 - f_0(v), \forall v \in V(T_0)$  adalah pelabelan anggun pada  $T_0$ . Selanjutnya, konstruksi pohon laba - laba baru  $T_1$  dari  $T_0$  dengan menambahkan sebuah titik baru, namakan  $w_1$  dan menghubungkan titik  $w_1$  dengan titik pusat  $T_0$  yaitu  $x$ . Definisikan pelabel baru  $f_1$  pada pohon  $T_1$  sedemikian hingga

$$f_1(w_1) = 1 \text{ dan } f_1(v) = f_0^1(v) + 1, \forall v \in V(T_0).$$

Perhatikan  $f_1$  adalah pelabelan anggun pada  $T_1$ . Berdasarkan Lemma 3.2 pelabelan  $f_1^1$  dengan  $f_1^1(v) = n_0 + 2 - f_1(v), \forall v \in V(T_1)$  juga merupakan pelabelan anggun pada  $T_1$ . Selanjutnya, konstruksi pohon laba - laba baru, namakan  $T_2$ , dari  $T_1$  dengan menambahkan satu titik baru, namakan  $w_2$  dan menghubungkan titik  $w_2$  dengan titik  $w_1$  pada  $T_1$ .

Definisikan pelabelan anggun  $f_2$ , pada  $T_2$  sedemikian hingga

$$f_2(w_2) = 1 \text{ dan } f_2(v) = f_1^1(v) + 1, \forall u \in V(T_1).$$

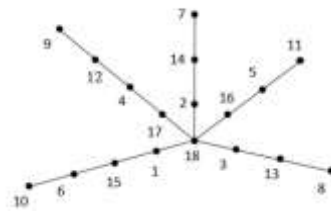
Berdasarkan Lemma 3.2, pelabelan  $f_1(v) = f_2^1$  dengan

$$f_2^1(v) = n_0 + 3 - f_2(v), \forall v \in V(T_2).$$

Adalah pelabelan anggun pada pohon  $T_2$

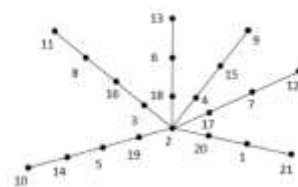
Proses ini dilanjutkan sampai diperoleh ada pelabelan anggun pada  $T_t$ . Karena pohon laba - laba  $T = T_t$ , maka  $T$  anggun. Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Sebagai ilustrasi, pelabelan anggun pohon laba - laba  $T = ST(5, 5, 4, 4, 4)$  dapat dilihat seperti gambar berikut. Perhatikan, banyak titik  $T$  adalah  $n = 18$  dan banyak sisi  $T$  adalah  $m = 17$ . Banyak kaki  $T$  adalah  $t = 5$ .



Gambar 3.10 Pelabelan anggun pada  $T = ST(5, 5, 4, 4, 4)$

Pelabelan anggun pohon laba - laba  $T = ST(5, 5, 4, 4, 4)$  mengikuti pengkonstruksian kasus 2 dalam pembuktian teorema diatas dapat dilihat pada gambar berikut.





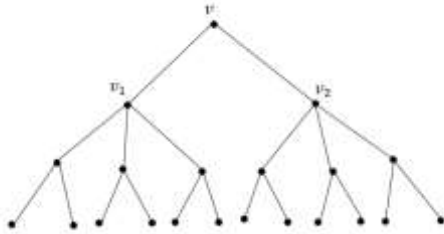
Gambar 3.11 Pelabelan anggun pada  $T = ST(5, 5, 4, 4, 4, 4)$

**Definisi 3.6 :**

Sebuah pohon berakar dimana setiap level memuat titik-titik berderajat sama disebut pohon simetris.

Contoh 3.6 :

Contoh pohon simetris dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.12 T pohon simetris

Perhatikan titik  $v$  sebagai titik akar  $T$ , terletak pada level-0, dan berderajat 2. Titik - titik  $v_1$  dan  $v_2$ , titik-titik yang berhubungan langsung dengan titik akar  $v$ , sering disebut "titik-titik anak"  $v$ , pada level-1, masing-masing berderajat 4.

Titik-titik  $T$  yang terletak pada level-2, masing - masing berderajat 3. Begitu juga titik-titik  $T$  pada level-3, masing-masing berderajat 1.

**Catatan :**

Misalkan  $T$  sebuah pohon simetris dengan titik akar  $v$ . Misalkan titik-titik anak  $v$  adalah  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Sub pohon  $T$  dengan titik akar  $v_i, 1 \leq i \leq k$ , disimbolkan dengan  $T_i$ .

Dari contoh diatas,  $T_1$  adalah sub pohon  $T$  dengan titik akar  $v_1$  dan  $T_2$  adalah sub pohon  $T$  dengan titik akar  $v_2$ . Perhatikan bahwa,  $T_1$  dan  $T_2$  masing - masing merupakan pohon simetris dan isomorfik.

**Lemma 3.6 :**

Misalkan  $T$  pohon simetris dengan titik akar  $v$  dan  $v_1, v_2, \dots, v_k$  titik-titik awal  $v$  dan  $T, T_2, \dots, T_k$  sub pohon-sub pohon simetris dengan titik-titik akar  $v_1, v_2, \dots, v_k$  secara berturut-turut maka  $T, T_2, \dots, T_k$  saling isomorfik ■

**Bukti :**

Misalkan tinggi pohon  $T$  adalah  $t$  maka  $\forall i, 1 \leq i \leq k$ , tinggi pohon  $T_i$  adalah  $t - 1$ . Misalkan untuk  $0 \leq j \leq t - 1, n_j =$  banyak titik pada level- $j$  pada pohon  $T_i$ .

Misalkan  $x_{i,j,s}$  menyatakan titik ke- $s$ , pada level- $j$ , pada pohon  $T_i, 1 \leq i \leq k; 0 \leq j \leq t - 1; 1 \leq s \leq n_j$ . Jelas bahwa  $v_i = x_{i,0,1}$  titik akar dari  $T_i$ . Karena  $T$  pohon simetris, maka  $T_i$  juga pohon simetris  $\forall i, 1 \leq i \leq k$ . Untuk  $2 \leq r \leq k$ , didefinisikan fungsi

$$\psi_r: V(T_1) \rightarrow V(T_r)$$

dengan  $\psi_r(x_{i,j,s}) = x_{r,j,s}; 0 \leq j \leq t - 1, 1 \leq s \leq n_j$ . Jelas bahwa fungsi  $\psi_r$  bijektif.

Karena  $v_1(x_{1,1,s}) \in (T_1)$ , maka

$$\begin{aligned} \psi_r(v_1 x_{1,1,s}) &= \psi_r(v_1) \psi_r(x_{1,1,s}) \\ &= v_r x_{r,1,s} \in E(T_r) \end{aligned}$$

Karena  $\forall j, 1 \leq j \leq t - 1, x_{1,j,s_1} x_{1,j+1,s_2} \in E(T_1)$  maka untuk suatu  $s_1, s_2$  dengan  $r \leq s_1 \leq n_j$  dan  $1 \leq s_2 \leq n_{j+1}$ ,

$$\begin{aligned} \psi_r(x_{1,j,s_1} x_{1,j+1,s_2}) &= \psi_r(x_{1,j,s_1}) \psi_r(x_{1,j+1,s_2}) \\ &= x_{i,j,s_1} x_{i,j+1,s_2} \in E(T_r) \end{aligned}$$

Ini berarti fungsi  $\psi_r$  melestarikan "keterhubungan langsung" dua titik. Akibatnya,  $T_1$  isomorfik  $T_r$  untuk  $\forall i, 2 \leq i \leq k$ . Jadi  $T_1, T_2, \dots, T_k$  pohon-pohon simetris saling isomorfik. Dengan demikian, bukti lemma lengkap ■

**Teorema 3.7 :**

Jika  $T$  pohon simetris, maka  $T$  graf anggun

Bukti :

Misalkan  $T$  pohon simetris dengan titik akar  $v$  dan tinggi  $T$  adalah  $t$ . Pembuktian teorema, menggunakan induksi matematika pada  $t$  dengan  $t \geq 0$ .

Untuk  $t = 0$ , maka  $T$  adalah pohon trivial yaitu pohon yang terdiri dari satu titik saja yaitu titik akar  $v$ . Label titik akar  $v$  dengan 1, jelas pelabelan tersebut pelabelan anggun.

Asumsikan pernyataan benar untuk  $0 \leq t \leq \ell - 1$ . Artinya, asumsikan bahwa setiap pohon  $T$  dengan tinggi tidak melebihi  $\ell - 1$  adalah graf anggun dan titik akar  $T$  berlabel 1.

Misalkan  $T$  pohon simetris dengan tinggi  $\ell$ . Misalkan  $v$  titik akar  $T$  dan  $v_1, v_2, \dots, v_k$  adalah titik-titik anak  $v$  pada  $T$ . Misalkan  $\forall i, 1 \leq i \leq k, T_i$  sub pohon  $T$  berakar di  $v_i$ . Berdasarkan lemma 3.6,  $T_1, T_2, \dots, T_k$  masing-masing pohon simetris dan yang satu dengan yang lainnya saling isomorfik maka  $|V(T_i)| = |V(T_j)|, \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq k$ . Misalkan  $|V(T_i)| = n, \forall i, 1 \leq i, \leq k$ . Untuk setiap  $i, 1 \leq i \leq k$ , tinggi pohon simetris  $T_i$  adalah  $\ell - 1$ . Sehingga berdasarkan asumsi  $T_i$  graf anggun.

Misalkan  $f_1: V(T_1) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  pelabelan anggun pada  $T_1$  dengan  $f_1(v_1) = 1$ . maka  $f_1$  menginduksi pelaban anggun  $f_i: V(T_i) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  dengan  $f_i(v_i) = 1, \forall i, 2 \leq i \leq k$  pada  $T_i$ .

Perhatikan bahwa  $|V(T)| = kn + 1$

Selanjutnya, didefinisikan pelabelan  $f$  pada  $T$  sebagai berikut

$$f: V(T) \rightarrow \{1, 2, \dots, nk + 1\}$$

Sedemikian hingga

- (i)  $f(v) = nk + 1, v$  titik akar  $T$
- (ii)  $f(v_i) = 1 + (i - 1)n, \forall i, 1 \leq i \leq k, v_i$  titik akar  $T_i$

- (iii) Titik-titik di level- $\ell$  pada  $T_1$  adalah  $x_{1,\ell,1}, x_{1,\ell,2}, \dots, x_{1,\ell,n_\ell}$  maka titik-titik di level- $\ell$  pada  $T_1$ ,  $1 \leq i \leq k$ , adalah  $\psi_i(x_{1,\ell,1})\psi_i(x_{1,\ell,2}), \dots, \psi_i(x_{1,\ell,n_\ell})$ . Untuk  $\ell$  ganjil dan  $\ell \geq 1$ , misalkan  $f(\psi_i(x_{i,\ell,s})) = f_i(\psi_i(x_{i,\ell,s})) + (i-1)n$   
 $= f_1(x_{i,\ell,s}) + (i-1)n$   
 Untuk  $\ell$  genap dan  $\ell \geq 2$ , misalkan  $f(\psi_i(x_{i,\ell,s})) = f_i(\psi_i(x_{i,\ell,s})) + (k-i)n$   
 $= f_1(x_{i,\ell,s}) + (k-i)n$

Perhatikan bahwa fungsi  $f$  injektif dengan titik  $v_1$  berlabel 1 dan titik  $v$  berlabel  $kn + 1$ .

Selanjutnya, dapat ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^*: E(T) \rightarrow \{1, 2, \dots, nk\}$$

dengan  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall uv \in E(T)$  adalah fungsi bijektif.

Sehingga berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  sebuah pelabelan anggung pada  $T$  dengan titik akar  $v$  berlabel  $nk + 1$ . Selanjutnya, transformasi pelabelan  $f$  menjadi  $f'$  sedemikian hingga

$$f'(v) = nk + 2 - f(v), \forall v \in V(T)$$

Berdasarkan Lemma 3.2, fungsi  $f'$  adalah pelabelan anggung pada  $T$  dengan titik akar  $v$  dari  $T$  berlabel 1. Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

Sebagai ilustrasi, pelabelan anggung pohon simetris  $T_0, T_1, T_2, T_3$ , dengan tinggi berturut-turut, 0, 1, 2, 3 dapat dilihat pada gambar berikut.

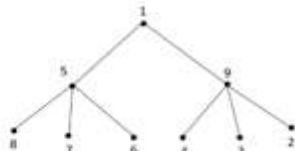
$T_0$ :



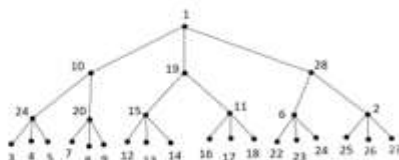
$T_1$ :



$T_2$ :



$T_3$ :



Gambar 3.13 Pelabelan anggung pohon simetris  $T_0, T_1, T_2$ , dan  $T_3$

**Teorema 3.8:**

Jika  $T$  pohon laba-laba dan panjang semua kaki  $T$  sama, maka  $T$  graf anggung.

Bukti :

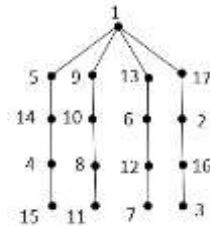
Misalkan  $T$  pohon laba-laba dengan titik pusat  $v$  dan tinggi  $t$ . Misalkan  $d(v) = k$  dan  $v_1, v_2, \dots, v_k$  adalah titik-titik yang berhubungan langsung dengan titik  $v$  di  $T$ . Sehingga  $T$  adalah pohon berakar dititik  $v$ . Karena tinggi  $T$  adalah  $t$  dan setiap kaki  $T$  panjangnya sama yaitu  $t$ . Jika  $t = 0$ , maka  $T$  pohon trivial dan jelas  $T$  pohon simetris.

Jika  $t = 1$ , maka titik  $T$  pada level  $-0$  (titik akar). Berderajat  $k$  dan setiap titik  $T$  pada level  $-1$  berderajat 1. Sehingga  $T$  pohon simetris.

Jika  $t \geq 2$  dan  $v_i$  adalah titik  $T$  pada level  $-i$ ,  $0 \leq i \leq t$ , maka

$$d(v_i) = \begin{cases} k, & i = 0 \\ 2, & \forall i, 1 \leq i \leq t - 1 \\ 1, & i = t \end{cases}$$

Berdasarkan Definisi 3.6,  $T$  pohon simetris. Sehingga berdasarkan Teorema 3.7,  $T$  graf anggung. Dengan demikian, teorema terbukti ■ Sebagai ilustrasi, pelabelan anggung pohon laba-laba  $ST(5,5,5,5)$  dengan panjang setiap kaki adalah 4, dapat dilihat pada gambar berikut.



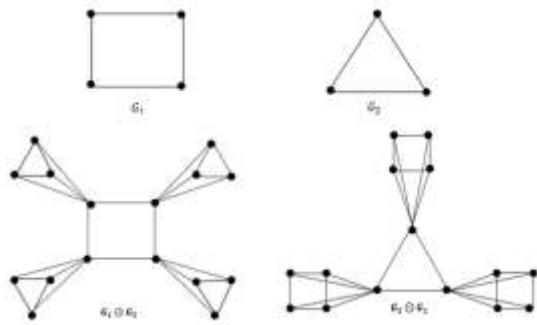
Gambar 3.14 Pohon laba-laba  $ST(5,5,5,5)$

**Definisi 3.2 :**

Diberikan dua graf  $G_1$  dan  $G_2$ . Corona dari  $G_1$  dan  $G_2$ , dilambangkan dengan  $G_1 \odot G_2$  adalah graf yang diperoleh dari graf  $G_1$  dengan  $p$  titik dan  $p$  salinan  $G_2$  dan menghubungkan titik ke- $i$  di  $G_1$  dengan titik-titik di salinan ke- $i$  di  $G_2$ .

**Contoh 3.2 :**

Graf  $G_1, G_2, G_1 \odot G_2$  dan  $G_2 \odot G_1$  dapat dilihat pada Gambar 3.2

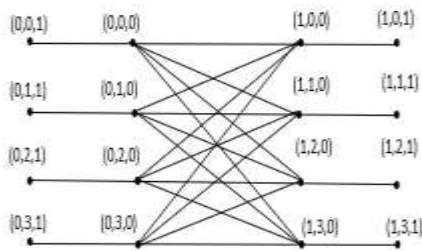


Gambar 3.15  $G_1 \odot G_2$  dan  $G_2 \odot G_1$

Catatan :

Jadi graf  $G_1 \odot G_2 \not\cong G_2 \odot G_1$ . Secara umum corona dua graf tidak komutatif.

Pada bagian ini, akan ditunjukkan bahwa corona dari graf bipartit komplet  $K_{n,n}$  dan graf komplet  $K_1$  merupakan graf anggun. Untuk mempermudah pembahasan, gambar graf  $G = K_{n,n} \odot K_1$  dibuat "tegak". Sehingga setiap titik  $G$  dapat diabel dengan tripel  $(i, j, k)$  dengan  $i \in \{0, 1\}, j \in \{0, 2, \dots, n - 1\}$  dan  $k \in \{0, 1\}$ . Untuk  $(i, j, k) \in V(G)$ ,  $i$  menyatakan apakah titik terletak di kiri (apabila  $i = 0$ ) atau terletak di kanan (apabila  $i = 1$ );  $k$  menyatakan apakah titik merupakan bagian dari  $K_{n,n}$  (jika  $k = 0$ ) atau titik merupakan titik pendant  $K_1$  (jika  $k = 1$ );  $j$  menyatakan urutan titik dari atas ke bawah  $j \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ . Sebagai contoh graf  $K_{4,4} \odot K_1$  dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.16 Graf  $K_{4,4} \odot K_1$

Berikut ditunjukkan graf  $K_{n,n} \odot K_1$  untuk  $n$  genap merupakan graf anggun

**Lemma 3.8 :**

Untuk  $n$  genap, graf  $K_{n,n} \odot K_1$  adalah graf anggun.

**Bukti :**

Misalkan  $G = K_{n,n} \odot K_1$  maka  $|V(G)| = 4n$  dan  $|E(G)| = n^2 + 2n = n(n + 2)$ .

Didefinisikan fungsi  $f$  sebagai berikut

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n(n + 2)\}$$

$$f(i, j, k) = \begin{cases} n(n + 2) - j - k(n + j + 1), & i = 0 \\ k, & i = 1, \quad j = 0 \\ nj - k(j + 1), & i = 1, j = 1, \dots, n - 2 \\ n(n + k - 1), & i = 1, j = n - 1 \end{cases}$$

Akan ditunjukkan fungsi  $f$  injektif terdapat 6 kemungkinan (kasus)

**Kasus 1 :**  $(0, j_1, 0), (0, j_2, 1) \in V(G)$  dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(0, j_1, 0) = n(n + 2) - j_1 = n^2 + 2n - j_1$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = n(n + 2) - j_2 - (n + j_2 + 1) = n^2 + n - 2j_2 - 1$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(0, j_2, 1)$

maka

$$n^2 + 2n - j_1 = n^2 + n - j_2 - 1$$

ekuivalen dengan

$$j_1 = n + 2j_2 + 1 > n$$

Kontradiksi, jadi  $f(0, j_1, 0) \neq f(0, j_2, 1)$ .

**Kasus 2 :**  $(1, j_1, 0), (0, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 0) = \begin{cases} 0, & j_1 = 0 \\ nj_1, & 1 \leq j_1 \leq n - 2 \\ n^2 - n, & j_1 = n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = n^2 + n - 2j_2 - 1$$

Andaikan  $f(1, j_1, 0) = f(0, j_2, 1)$

Sub kasus 2.1 :  $n^2 + n - 2j_2 - 1 = 0$  sehingga

$2j_2 = n^2 + n - 1$ . Karena  $j_2 \leq n - 1$ , maka

$2(n - 1) \geq n^2 + n - 1$  atau  $n^2 + n - 1 \leq 0$ .

Kontradiksi, karena  $n \geq 2$

Sub kasus 2.2 :  $nj_1 = n^2 + n - 2j_2 - 1$  atau

$2j_2 = n^2 + n - nj_1 - 1$ . Karena  $j_1 \leq n - 1$ , maka

$2j_2 \geq n^2 + n - n(n - 1) - 1 = 2n - 1$

Sehingga  $j_2 \geq n - \frac{1}{2} > n - 1$  (kontradiksi)

Sub kasus 2.3 :  $n^2 - n = n^2 + n - 2j_2 - 1$  atau

$2j_2 = 2n - 1$  sehingga  $j_2 = n - \frac{1}{2} > n - 1$

(kontradiksi).

Dengan demikian,  $f(1, j_1, 0) \neq f(0, j_2, 1)$ .

**Kasus 3 :**  $(1, j_1, 1), (0, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 1) = \begin{cases} 1, & j_1 = 0 \\ nj_1 - (j_1 + 1), & 1 \leq j_1 \leq n - 2 \\ n^2, & j_1 = n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = n^2 + n - 2j_2 - 12$$

Andaikan  $f(1, j_1, 1) = f(0, j_2, 1)$

Sub kasus 3.1 :  $j_1 = 0$

$1 = n^2 + n - 2j_2 - 1$  atau  $2j_2 = n^2 + n - 2$

Karena  $j_2 \leq n - 1$ , maka  $2(n - 1) \geq n^2 + n - 2$

ekuivalen dengan  $n^2 + n \leq 0$ . Kontradiksi, karena  $n \geq 2$

Sub kasus 3.2 :  $1 \leq j_1 \leq n - 2$

Diperoleh,  $nj_1 - j_1 - 1 = n^2 + n - 2j_2 - 1$  atau

$2j_2 = n^2 + n - (n - 1)j_1$ . Karena  $j_1 \leq n - 1$ ,

maka  $2j_2 \geq n^2 + n - n(n - 1)(n - 1) = 3n - 1$ .

Sehingga  $j_2 \geq \frac{3n - 1}{2} > n - 1$  (kontradiksi)

Sub kasus 3.3 :  $j_1 = n - 1$

Diperoleh,  $n^2 = n^2 + n - 2j_2 - 1$  atau  $2j_2 = n - 1$  sehingga  $j_2 = \frac{n-1}{2} \notin Z^+ \cup \{0\}$  (kontradiksi).

Dengan demikian,  $f(1, j_1, 1) \neq f(0, j_2, 1)$ .

**Kasus 4** :  $(1, j_1, 0), (1, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 0) = \begin{cases} 0, & j_1 = 0 \\ nj_1, & 1 \leq j_1 \leq n - 2 \\ n^2 - n, & j_1 = n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(1, j_1, 1) = \begin{cases} 1, & j_2 = 0 \\ nj_2 - (j_2 + 1), & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Untuk setiap kemungkinan nilai  $j_1$  dan  $j_2$ , mudah dicek bahwa

$$f(1, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 1)$$

**Kasus 5** :  $(0, j_1, 0), (1, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Berdasarkan definisi  $f$  diperoleh,

$$f(0, j_1, 0) = n^2 + 2n - j_1$$

dan

$$f(1, j_1, 1) = \begin{cases} 1, & j_2 = 0 \\ nj_2 - j_2 - 1, & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(1, j_2, 1)$

Sub kasus 5.1 :  $j_2 = 0$

Diperoleh  $n^2 + 2n - j_1 = 1$  atau  $j_1 = n^2 + 2n - 1 > n - 1$ , kontradiksi.

Sub kasus 5.2 :  $1 \leq j_2 \leq n - 2$

Diperoleh,  $n^2 + 2n - j_1 = nj_2 - j_2 - 1$  atau  $j_1 = n^2 + 2n - (n - 1)j_2 + 1$ . Karena  $j_2 \leq n - 2$ , maka  $j_1 \geq n^2 + 2n - (n - 1)(n - 2) + 1 = 5n - 1 > n - 1$  (kontradiksi).

Sub kasus 5.3 :  $j_2 = n - 1$

Diperoleh,  $n^2 + 2n - j_1 = n^2$  atau  $j_1 = 2n > n - 1$ , karena  $n \geq 2$  kontradiksi.

Dengan demikian,  $f(0, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 1)$ .

**Kasus 6** :  $(0, j_1, 0), (1, j_2, 0) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(0, j_1, 0) = n^2 + 2n - j_1$$

dan

$$f(1, j_2, 0) = \begin{cases} 0, & j_2 = 0 \\ nj_2, & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2 - n, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(1, j_2, 0)$

Sub kasus 6.1 :  $j_2 = 0$

Diperoleh,  $n^2 + 2n - j_1 = 0$  atau  $j_1 = n^2 + 2n > n - 1$ , kontradiksi.

Sub kasus 6.2 :  $1 \leq j_2 \leq n - 2$

Diperoleh,  $n^2 + 2n - j_1 = nj_2$  sehingga  $j_1 = n^2 + 2n - nj_2$ . Karena  $j_2 \leq n - 2$ , maka  $j_1 \geq n^2 + 2n - n(n - 2) = 4n > n - 1$ , kontradiksi.

Sub kasus 6.3 :  $j_2 = n - 1$

Diperoleh,  $n^2 + 2n - j_1 = n^2 - n$  atau  $j_1 = 3n > n - 1$ , kontradiksi.

Dengan demikian,  $f(0, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 0)$ .

Dari kasus-1 sampai dengan kasus-6, disimpulkan bahwa fungsi  $f$  injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n(n + 2)\}$$

dengan  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall uv \in E(G)$

adalah fungsi bijektif.

Perhatikan terdapat 3 tipe sisi  $G$ , yaitu:

**Tipe-1** : sisi-sisi pendant "kiri"

$$\forall j, 0 \leq j \leq n - 1, (0, j, 0)(0, j, 1) \in E(G)$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} f^*(0, j, 0)(0, j, 1) &= |f(0, j, 0) - f(0, j, 1)| \\ &= |n^2 + 2n - j - n^2 - n + 2j + 1| \\ &= |n + j + 1| \\ &= n + j + 1 \end{aligned}$$

Sehingga himpunan label sisi-sisi pendant "kiri" adalah  $A_1 = \{n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 2n\}$ .

**Tipe-2** : sisi-sisi pendant "kanan"

$$\forall j, 0 \leq j \leq n - 1, (1, j, 0)(1, j, 1) \in E(G)$$

Diperoleh

$$f^*(1, j, 0)(1, j, 1) = |f(1, j, 0) - f(1, j, 1)| = \begin{cases} |0 - 1|, & j = 0 \\ |nj - nj + j + 1| = j + 1, & 1 \leq j \leq n - 2 \\ |n^2 - n - n^2| = n, & j = n - 1 \end{cases}$$

Sehingga himpunan label sisi-sisi pendant "kanan" adalah  $A_2 = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .

**Tipe-3** : sisi-sisi  $G$  pada  $K_{n,n}$

$$\begin{aligned} \forall j_1, j_2, 0 \leq j_1 \leq n - 1, 0 \leq j_2 \leq n - 1, \\ (0, j_1, 0)(1, j_2, 0) \in E(G) \end{aligned}$$

Diperoleh

$$f^*(0, j_1, 0)(1, j_2, 0) = |f(0, j_1, 0) - f(1, j_2, 0)| = \begin{cases} n^2 + 2n - j_1, & j_2 = 0 \\ n^2 + 2n - j_1 - nj_2, & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2 + 2n - j_1 - n^2 + n = 3n - j_1, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk  $j_1 = n - 1$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, n - 1, 0) - (1, n - 1, 0)) = 3n - (n - 1) = 2n + 1$

Begitu juga, untuk  $j_1 = n - 2$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, n - 2, 0) - (1, n - 1, 0)) = 3n - (n - 2) = 2n + 2$ .

Dan seterusnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, n - 1, 0)) = 3n - 0 = 3n$ .

Untuk  $j_1 = n - 1$  dan  $j_2 = n - 2$ , diperoleh  $f^*((0, n - 1, 0) - (1, n - 2, 0)) = n^2 + 2n - (n - 1) - n(n - 2) = 3n + 1$ .

Dan seterusnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = n - 2$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, n - 2, 0)) = n^2 + 2n - 0 - n(n - 2) = 4n$ .

Akhirnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = 0$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, 0, 0)) = n^2 + 2n$ .

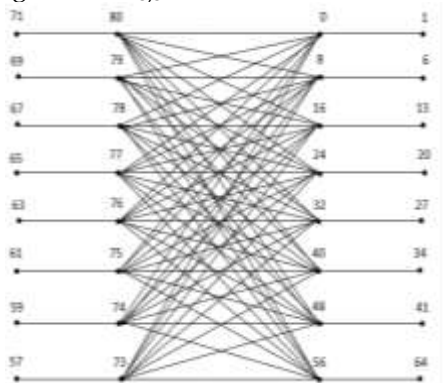
Sehingga himpunan sisi-sisi pada  $k_{n,n}$  adalah  $A_3 = \{2n + 1, 2n + 2, 2n + 3, \dots, n^2 + 2n\}$ .

Maka himpunan fungsi  $f^*$  adalah

$Rf^* = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 2n\}$   
 karena  $|E(G) = n^2 + 2n = |Rf^*|$  maka fungsi  $f^*$  bijektif.

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  adalah pelabelan anggun pada graf  $G = K_{n,n} \odot K_1$  dengan  $n$  genap. Dengan demikian lemma terbukti ■

Sebagai ilustrasi, perhatikan pelabelan anggun pada graf  $G = K_{8,8} \odot K_1$  berikut ini



Gambar 3.17 Pelabelan anggun graf  $K_{8,8} \odot K_1$

**Lemma 3.9**

Untuk  $n$  ganjil, graf  $K_{n,n} \odot K_1$  adalah graf anggun

**Bukti :**

untuk  $n = 1$ , pelabelan anggun graf  $G = K_{n,n} \odot K_1 = K_{1,1} \odot K_1 = P_4$ , dapat dilihat pada gambar.



Gambar 3.18 Pelabelan anggun graf  $K_{1,1} \odot K_1$

untuk  $n = 3$ , pelabelan anggun graf  $G = K_{n,n} \odot K_1 = K_{3,3} \odot K_1$ , dapat dilihat pada gambar.



Gambar 3.19 Pelabelan anggun graf  $K_{3,3} \odot K_1$

Untuk  $n$  ganjil dan  $n \geq 5$ , misalkan  $G = K_{n,n} \odot K_1$  maka  $|V(G)| = 4n$  dan  $|E(G)| = n^2 + 2n$

Didefinisikan fungsi  $f$  sebagai berikut

$$f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n(n + 2)\}$$

Sedemikian hingga,

$$f(i, j, k) = \begin{cases} n^2 + 2n - j - k(n + j + 1), & i = 0, 0 \leq j \leq n - 2 \\ n^2 + 2n - j - nk, & i = 0, j = n - 1 \\ k, & i = 0, j = 0 \\ nj - k(j + 1), & i = 1, 1 \leq j \leq n - 2 \\ nj + 2nk, & i = 1, j = n - 1 \end{cases}$$

Akan ditunjukkan fungsi  $f$  injektif terdapat 6 kemungkinan (kasus)

**Kasus 1 :**  $(0, j_1, 0), (0, j_2, 1) \in V(G)$   
 dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(0, j_1, 0) = n^2 + 2n - j_1$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = \begin{cases} n^2 + 2n - j_2 - (n + j_2 + 1), & 0 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2 + n - j_2, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(0, j_2, 1)$

**Sub kasus 1.1 :**  $0 \leq j_2 \leq n - 2$

$n^2 + 2n - j_1 = n^2 + n - 2j_2 - 1$  sehingga  $j_1 = n + 2j_2 + 1 > n$  (kontradiksi, karena  $n \geq 5$ ).

**Sub kasus 1.2 :**  $j_2 = n - 1$

$n^2 + 2n - j_1 = n^2 + n - j_2$  atau  $j_1 = n + j_2$ .

karena  $j_2 \leq n - 1$ , maka  $j_1 \geq n + (n - 1)$  sehingga  $j_1 \geq 2n - 1 > n - 1$  (kontradiksi).

Dengan demikian,  $f(0, j_1, 0) \neq f(0, j_2, 1)$ .

**Kasus 2 :**  $(1, j_1, 0), (0, j_2, 1) \in V(G)$  dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 0) = \begin{cases} 0, & j_1 = 0 \\ nj_1, & 1 \leq j_1 \leq n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = \begin{cases} n^2 + 2n - j_2 - (n + j_2 + 1), & 0 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2 + n - j_2, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Untuk setiap kemungkinan nilai  $j_1$  dan  $j_2$ , mudah dicek bahwa

$$f(1, j_1, 0) \neq f(0, j_2, 1)$$

**Kasus 3 :**  $(1, j_1, 1), (0, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 1) = \begin{cases} 1, & j_1 = 0 \\ nj_1 - j_1 - 1, & 1 \leq j_1 \leq n - 2 \\ nj_1 + 2n, & j_1 = n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(0, j_2, 1) = \begin{cases} n^2 + n - 2j_2 - 1, & \text{if } 0 \leq j_2 \leq n - 2 \\ n^2 + n - j_2, & \text{if } j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Untuk setiap kemungkinan nilai  $j_1$  dan  $j_2$ , mudah dicek bahwa

$$f(1, j_1, 1) \neq f(0, j_2, 1)$$

**Kasus 4 :**  $(1, j_1, 0), (1, j_2, 1) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(1, j_1, 0) = \begin{cases} 0, & j_1 = 0 \\ nj_1, & 1 \leq j_1 \leq n - 1 \end{cases}$$

dan

$$f(1, j_2, 1) = \begin{cases} 1, & j_2 = 0 \\ nj_2 - j_2 - 1, & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ nj_2 + 2n, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Untuk setiap kemungkinan nilai  $j_1$  dan  $j_2$ , mudah dicek bahwa

$$f(1, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 1)$$

**Kasus 5 :**  $(0, j_1, 0), (1, j_2, 1) \in V(G)$  dengan  $j_1 j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Berdasarkan definisi  $f$  diperoleh,  
 $f(0, j_1, 0) = n^2 + 2n - j_1$

dan

$$f(1, j_2, 1) = \begin{cases} 1, & j_2 = 0 \\ nj_2 - j_2 - 1, & 1 \leq j_2 \leq n - 2 \\ nj_2 + 2n, & j_2 = n - 1 \end{cases}$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(1, j_2, 1)$

Sub kasus 5.1 :  $n^2 + 2n - j_1 = 1$  maka  $j_1 = n^2 + 2n - 1 > n - 1$ , kontradiksi.

Sub kasus 5.2 :  $n^2 + 2n - j_1 = nj_2 - j_2 - 1$  atau  $j_1 = n^2 + 2n - (n - 1)j_2 + 1$ .

Karena  $j_2 \leq n - 2$ , maka  $j_1 \geq n^2 + 2n - (n - 1)(n - 2) + 1 = 5n + 1 > n - 1$  (kontradiksi)

Sub kasus 5.3 :

$n^2 + 2n - j_1 = nj_2 + 2n$  atau  $j_1 = n^2 - nj_2$

Karena  $j_2 \leq n - 1$ , maka  $j_1 \geq n^2 - n(n - 1)$ .

Sehingga  $j_1 \geq n > n - 1$  (kontradiksi).

Dengan demikian,  $f(0, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 1)$ .

**Kasus 6 :**  $(0, j_1, 0), (1, j_2, 0) \in V(G)$

dengan  $j_1, j_2 \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$

Diperoleh,

$$f(0, j_1, 0) = n^2 + 2n - j_1$$

dan

$$f(1, j_2, 0) = \begin{cases} 0, & j_2 = 0 \\ nj_2, & 1 \leq j_2 \leq n - 1 \end{cases}$$

Andaikan  $f(0, j_1, 0) = f(1, j_2, 0)$

Sub kasus 6.1 :  $n^2 + 2n - j_1 = 0$  atau  $j_1 = n^2 + 2n > n - 1$ , kontradiksi.

Sub kasus 6.2 :  $n^2 + 2n - j_1 = nj_2$  atau  $j_1 = n^2 + 2n - nj_2$ .

Karena  $j_2 \leq n - 1$ , maka  $j_1 \geq n^2 + 2n - n(n - 1) = 3n > n - 1$  (kontradiksi).

Dengan demikian,  $f(0, j_1, 0) \neq f(1, j_2, 0)$ .

Dari kasus-1 sampai dengan kasus-6, disimpulkan bahwa fungsi  $f$  injektif.

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi terinduksi

$$f^*: E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n(n + 2)\}$$

dengan  $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|, \forall uv \in E(G)$

adalah fungsi bijektif

perhatikan terdapat 3 tipe sisi  $G$ , yaitu

**Tipe-1 :** sisi-sisi pendent "kiri"

$$\forall j, 0 \leq j \leq n - 1, (0, j, 0)(0, j, 1) \in E(G)$$

Diperoleh

$$f^*(0, j, 0)(0, j, 1) = |f(0, j, 0) - f(0, j, 1)| = \begin{cases} |n^2 + 2n - j - n^2 - n + 2j + 1| = n + j + 1, & 0 \leq j \leq n - 2 \\ |n^2 + 2n - j - n^2 - 2n + j + n| = j + 1, & j = n - 1 \end{cases}$$

Sehingga himpunan label sisi-sisi pendent "kiri" adalah  $A_1 = \{n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 2n - 1\}$

**Tipe-2 :** sisi-sisi pendent "kanan"

$$\forall j, 0 \leq j \leq n - 1, (1, j, 0)(1, j, 1) \in E(G)$$

Diperoleh

$$f^*(1, j, 0)(1, j, 1) = |f(1, j, 0) - f(1, j, 1)| = \begin{cases} |0 - 1|, & j = 0 \\ |nj - nj + j + 1| = j + 1, & 1 \leq j \leq n - 2 \\ |nj - nj - 2n| = 2n, & j = n - 1 \end{cases}$$

Sehingga himpunan label sisi-sisi pendent "kanan" adalah  $A_2 = \{1, 2, 3, \dots, 2n, n - 1\}$

**Tipe-3 :** sisi-sisi  $G$  pada  $K_{n,n}$

$$\forall j_1, j_2, 0 \leq j_1 \leq n - 1, 0 \leq j_2 \leq n - 1, (0, j_1, 0)(1, j_2, 0) \in E(G)$$

Diperoleh

$$f^*(0, j_1, 0)(1, j_2, 0) = |f(0, j_1, 0) - f(1, j_2, 0)| = \begin{cases} n^2 + 2n - j_1, & j_2 = 0 \\ n^2 + 2n - j_1 - nj_2, & 1 \leq j_2 \leq n - 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa untuk  $j_1 = n - 1$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, n - 1, 0) - (1, n - 1, 0)) = n^2 + 2n - (n - 1) - n(n - 1) = 2n + 1$

Begitu juga, untuk  $j_1 = n - 2$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, n - 2, 0) - (1, n - 1, 0)) = n^2 + 2n - (n - 2) - n(n - 1) = 2n + 2$

Dan seterusnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = n - 1$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, n - 1, 0)) = 3n - 0 = 3n$

Untuk  $j_1 = n - 1$  dan  $j_2 = n - 2$ , diperoleh  $f^*((0, n - 1, 0) - (1, n - 2, 0)) = n^2 + 2n - (n - 1) - n(n - 2) = 3n + 1$

Dan seterusnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = n - 2$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, n - 2, 0)) = n^2 + 2n - 0 - n(n - 2) = 4n$

Akhirnya, untuk  $j_1 = 0$  dan  $j_2 = 0$ , diperoleh  $f^*((0, 0, 0) - (1, 0, 0)) = n^2 + 2n$

Sehingga himpunan sisi-sisi pada  $K_{n,n}$  adalah  $A_3 = \{2n + 1, 2n + 2, 2n + 3, \dots, n^2 + 2n\}$

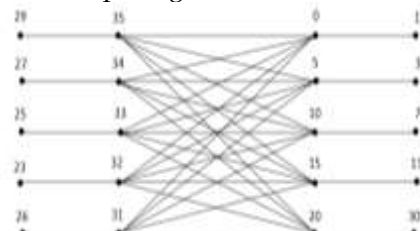
Maka himpunan fungsi  $f^*$  adalah

$$Rf^* = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 2n\}$$

karena  $|E(G)| = n^2 + 2n = |Rf^*|$  maka fungsi  $f^*$  bijektif.

Berdasarkan Definisi 3.1, fungsi  $f$  adalah pelabelan anggung pada graf  $G = K_{n,n} \odot K_1$  dengan  $n$  ganjil. Dengan demikian lemma terbukti ■

Sebagai contoh pelabelan anggung graf  $K_{5,5} \odot K_1$  dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 3.18 Pelabelan anggung graf  $K_{5,5} \odot K_1$

**Teorema 3.10 :**

Untuk bilangan bulat  $n \geq 1$ , graf corona  $K_{n,n} \odot K_1$  adalah graf anggun

**Bukti :**

Untuk ngenap, Lemma 3.8, menjamin bahwa  $G = K_{n,n} \odot K_1$  graf anggun sedangkan  $n$  ganjil, lemma 3.9, menjamin  $G = K_{n,n} \odot K_1$  graf anggun. Dengan demikian, bukti teorema lengkap ■

**4. PENUTUP****Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan pada skripsi ini, maka diperoleh hasil berikut :

- 1) Graf berlian rangkap berbintang dengan  $n$  titik ( $BRB(n)$ ) adalah graf anggun
- 2) Graf pohon dengan  $n$  titik  $T_n$  adalah graf anggun
- 3) Lintasan  $P_n$  untuk  $n \geq 1$ , adalah graf anggun
- 4) Graf pohon laba-laba dengan  $k$  kaki dan setiap kaki mempunyai panjang  $t$  atau  $t + 1$ , untuk suatu  $t \geq 1$ , adalah graf anggun
- 5) Graf pohon simetris  $T_t$  adalah graf anggun
- 6) Graf pohon laba-laba dengan panjang kaki sama adalah graf anggun
- 7) Graf  $K_{n,n} \odot K_1$  adalah graf anggun

**Saran**

Dalam skripsi ini telah dibahas mengenai pelabelan anggun pada beberapa kelas graf. Untuk graf berlian rangkap berbintang, permasalahan sudah terjawab tuntas karena karakteristiknya sudah ditemukan, tetapi untuk graf pohon hanya beberapa subkelas saja yang ditunjukkan merupakan graf anggun. Secara umum, pertanyaan apakah graf pohon merupakan graf anggun, masih belum terjawab.

Begitu juga dengan graf  $K_{n,n} \odot K_n$  hanya graf  $K_{n,n} \odot K_1$  yang telah ditunjukkan merupakan graf anggun. Secara umum, pertanyaan apakah graf  $K_{n,n} \odot K_n$  merupakan graf anggun, masih belum terjawab. Sehingga peneliti berikutnya dapat melanjutkan penelitian graf anggun pada graf yang lebih umum.

**DAFTAR PUSTAKA**

Bhoumik, S., & Mitra, S. (2014). Graceful labeling of pendant edge extension of complete bipartite graph. *International Journal of Mathematical Analysis*, 8(57-60), 2885-2897.

- <https://doi.org/10.12988/ijma.2014.410334>
- Budayasa, I. (2007). *Teori Graph dan Aplikasinya*. Unesa University Press.
- Chang, G. J., Ke, W., Kuo, D., Liu, D. D., & Yeh, R. K. (2000). *On  $L(d; 1)$ -labelings of graphs*. 220, 2005.
- G. Sethuraman, & Elumalai, A. (2001). On graceful graphs: Pendant edge extensions of a family of complete bipartite and complete tripartite graphs. *Indian Journal of Pure & Applied Mathematics*, 32.
- Gallian, J. A. (2017). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 1(DynamicSurveys), 1-256.
- Golomb, S. W. (1972). How to Number A Graph A Statement of the Problem. In *Graph Theory and Computing*. Academic Press, Inc. <https://doi.org/10.3139/B978-1-4832-3187-7.50008-8>
- Hidayah, A. N. (2021). Pelabelan Anggun Super pada Graf Komplet, Tripartit Komplet, Gabungan Bintang dan Caterpillar. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 09(01).
- Jesintha, J. J., Subashini, K., & Sabu, A. M. (2020). Graceful labeling on twig diamond graph with pendant edges. *Bulletin of Pure & Applied Sciences- Mathematics and Statistics*, 39e(2), 188-192. <https://doi.org/10.5958/2320-3226.2020.00018.1>
- Robeva, E. (2015). *An Extensive Survey of Graceful Trees An Extensive Survey of Graceful Trees*. August.
- Rosa, A. (1967). On certain Valuations of The Vertices of A Graph. *International Symposium of Theory of Graphs*, March, 349-355. <http://www.cs.columbia.edu/~tim/teaching/cs4203/Rosa-GracefulLabelings.pdf>