

ANALISIS KESTABILAN MODEL SVIQR PADA PENYEBARAN PENYAKIT DIFTERI DENGAN PENGARUH VAKSINASI DAN KARANTINA

Inas Dafa Nurhana

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : inas.19061@mhs.unesa.ac.id

Abadi

Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya
e-mail : inas.19061@mhs.unesa.ac.id

Abstrak

Difteri adalah penyakit akut yang disebabkan oleh bakteri (*Corynebacterium Diphtheriae*). Penyakit ini menular melalui udara dan tetesan (setetes cairan yang sangat kecil) dari individu yang terinfeksi. Vaksinasi dapat dilakukan sebagai tindakan pencegahan agar tidak terinfeksi bakteri (*Corynebacterium Diphtheriae*) dan karantina dilakukan sebagai proses penyembuhan karena penyakit ini merupakan salah satu jenis penyakit yang termasuk didalam sumber data STP (Surveilans Terpadu Penyakit) berbasis rumah sakit. Penelitian ini bertujuan untuk menyusun dan menganalisis model penyebaran penyakit Difteri menggunakan model SVIQR. Model ini memuat lima subpopulasi yaitu rentan (S), terinfeksi (I), sembuh (R), dikarantina (Q) dan tervaksinasi (V). Selanjutnya menentukan simulasi numerik dengan melakukan estimasi parameter. Dari hasil simulasi numerik dari model matematika penularan penyakit difteri dengan pengaruh vaksinasi dan karantina menunjukkan bahwa dengan pemilihan parameter laju memudarnya vaksinasi diperoleh $R_0 = 0.3795491181 < 1$, yang berarti titik kesetimbangan bebas penyakit stabil. Titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik yang diperoleh $R_0 = 1.207495030 > 1$. Semakin kecil nilai parameter laju memudarnya vaksinasi ϵ maka semakin stabil asimtotik titik bebas penyakit artinya penyebaran penyakit atau endemik dapat dicegah apabila vaksin yang diberikan tidak mudah pudar khasiatnya.

Kata Kunci: Analisis Kestabilan, Model Matematika, Difteri, Karantina, Vaksinasi.

Abstract

Diphtheria is an acute disease caused by bacteria (Corynebacterium Diphtheriae). This disease is transmitted through the air and droplets (very small drops of fluid) from infected individuals. Vaccination can be carried out as a preventive measure so as not to be infected with bacteria (Corynebacterium Diphtheriae) and quarantine is carried out as a healing process because this disease is one type of disease included in the hospital-based STP (Integrated Disease Surveillance) data source. This study aims to compile and analyze a model of the spread of diphtheria using the SVIQR model. This model contains five subpopulations, namely susceptible (S), infected (I), cured (R), quarantined (Q) and vaccinated (V). Then determine the numerical simulation by estimating the parameters. From the results of numerical simulations of the mathematical model of diphtheria transmission under the influence of vaccination and quarantine, it shows that by selecting the vaccination fade rate parameter, $R_0 = 0.3795491181 < 1$, which means that the disease-free equilibrium point is stable. The asymptotically stable endemic equilibrium point obtained is $R_0 = 1.207495030 > 1$. The smaller the value of the vaccination fading rate parameter ϵ , the more asymptotically stable the disease-free point means that the spread of disease or endemic disease can be prevented if the vaccine given does not fade easily.

Keywords: Stability Analysis, Mathematical Models, Diphtheria, Quarantine, Vaccination.

PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan salah satu teknik yang digunakan untuk mempresentasikan suatu sistem yang kompleks ke model matematika (Z. Ndi, 2022). Salah satu penyakit menular akut yang dapat dimodelkan dalam bentuk model matematika dalam bidang kesehatan yaitu Penyakit

difteri yang disebabkan oleh bakteri *Corynebacterium Diphtheriae*. Penyakit difteri masih menjadi sorotan karena penyebarannya masih terus terjadi. Penyakit ini menular melalui udara dan tetesan (setetes cairan yang sangat kecil) dari individu yang terinfeksi. Penularan terjadi ketika orang mengeluarkan tetesan cairan kecil karena batuk, bersin, atau bahkan berbicara. Tetesan cairan

tersebut menyentuh tangan atau permukaan lain, yang bersentuhan dekat dengan yang rentan. Penularan juga terjadi ketika berbagi makanan atau peralatan dapur dengan individu yang terinfeksi. Penyakit ini ditandai dengan peradangan pada tempat infeksi terutama pada selaput lendir faring, laring, amandel, hidung dan kulit (Kemenkes, 2017). Penyakit difteri telah menyebar di seluruh dunia.

Menurut laporan WHO, pada tahun 2008 sebanyak 72 terjadi berturut-turut di negara regional Afrika, 102 kasus di Amerika, 133 kasus di Eastern Mediteran, 95 kasus di Western Pacific Region dan di South East Asia Region 6.502 kasus (World Health Organization. Diphtheria., 2008). Data terakhir tahun 2022, Dinas Kesehatan Kabupaten Probolinggo melaporkan 3 orang meninggal karena difteri di sebuah desa Gili Ketapang, membuktikan bahwa difteri masih ada dan terus mengancam masyarakat. Supaya penyakit difteri tidak terus mengancam masyarakat, maka terdapat beberapa program pencegahan dan pengendalian penyakit difteri dari pemerintah (Kementerian Kesehatan RI, 2022).

Metode umum yang digunakan untuk pengendalian penyakit menular khususnya difteri yaitu program vaksinasi. Vaksinasi difteri termasuk dalam daftar program nasional vaksinasi dasar lengkap di Indonesia dan direkomendasikan oleh Kementerian Kesehatan serta Ikatan Dokter Anak Indonesia (IDAI) (World Health Organization. Diphtheria., 2019).

Metode lain yang digunakan untuk pengendalian semua orang yang terinfeksi penyakit Difteri selain program vaksinasi yaitu dirujuk ke Rumah Sakit dan dirawat di ruang isolasi atau karantina. Berdasarkan Keputusan Menteri Kesehatan Republik Indonesia Nomor. 1479/MENKES/SK/2/2003 tentang Pedoman Penyelenggaraan Sistem Surveilans Epidemiologi Penyakit Menular dan Penyakit Tidak Menular Terpadu disebutkan bahwa penyakit difteri merupakan salah satu jenis penyakit yang termasuk didalam sumber data STP (Surveilans Terpadu Penyakit) berbasis rumah sakit. Orang yang mengidap penyakit ini harus segera mendapatkan pertolongan medis, bahkan membutuhkan perawatan di ruang isolasi (Kemenkes, 2003).

Dalam penelitian ini, peneliti memodifikasi penelitian Puspita (2017) dan Aryani &

Widyaningsih (2020) dengan judul “Analisis Pemodelan Matematika Model SVIQR Penyebaran Penyakit Difteri dengan Pengaruh Vaksinasi dan Karantina” ini menjadikan efektifitas vaksin (V) menjadi kompartemen yang dapat mempengaruhi individu yang rentan langsung terinfeksi sehingga diperoleh model SVIQR (Suspected, Vaccine Infected, Quarantined, Recovery) untuk mengetahui upaya yang dapat berpengaruh pada penurunan banyaknya kasus difteri di Indonesia dengan pengaruh vaksinasi dan karantina.

KAJIAN TEORI

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL

Sistem persamaan diferensial adalah kumpulan dari dua atau lebih persamaan differensial. Sistem persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear (Boyce & DiPrima, 2009).

Secara umum, sistem persamaan diferensial berbentuk:

$$\dot{x}(t) = f(x), x \in R^n$$

Dengan

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

adalah fungsi dalam x_1, x_2, \dots, x_n

TITIK KESETIMBANGAN

Titik kesetimbangan adalah hal yang penting ketika menganalisis perilaku sistem pada titik. Titik kesetimbangan disebut sebagai titik stasioner (tetap) atau suatu posisi yang menetap (steady state) dari variabel (Robinson, 2004).

Definisi 2.1

Titik kesetimbangan dari sistem persamaan differensial persamaan (2.4) adalah solusi titik kesetimbangan yang tetap konstan meskipun waktu berubah. Nilai kesetimbangan dari sistem persamaan (2.4) diperoleh $\dot{x} = 0$. Titik \bar{x} disebut titik kesetimbangan jika $f(\bar{x}) = 0$. Titik \bar{x} disebut juga titik ekuilibrium, titik stasioner dan titik kritis (Perko, 2001).

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Bilangan reproduksi dasar R_0 adalah ukuran potensi adanya kasus baru penularan penyakit pada suatu populasi. Secara matematis, R_0 merupakan ambang batas stabilitas kesetimbangan bebas penyakit serta terkait dengan puncak dan ukuran akhir epidemi (Brauer, van den Driessche, & Wu, 1945). Bilangan reproduksi dasar R_0 didefinisikan sebagai jumlah yang diperlukan dari infeksi sekunder yang didapatkan oleh kasus indeks pada populasi yang rentan. Untuk mencari R_0 dapat menggunakan *Next Generation Matrix*.

Menurut Rost dan Wu (2008), teorema tentang bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

1. Titik kesetimbangan bebas penyakit (disease free equilibrium) stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$.
2. Jika $R_0 < 1$ maka semua solusi konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit (disease free equilibrium).
3. Titik kesetimbangan endemik (endemic equilibrium) stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.
4. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit tersebut endemik.

METODE

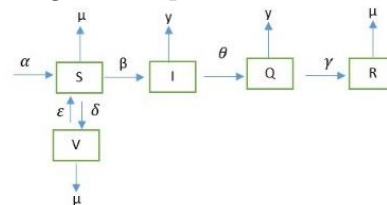
Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah studi literature atau kajian pustaka dengan tahap-tahap: (1) penentuan masalah; (2) perumusan masalah; (3) studi pustaka; (4) analisis dan pemecahan masalah (5) penarikan kesimpulan. Dalam pembahasan masalah dilakukan beberapa langkah pokok yaitu: (1) menentukan batasan-batasan masalah atau asumsi; (2) menganalisis model seperti menentukan titik kesetimbangan, analisis titik kesetimbangan, menentukan bilangan reproduksi dasar menggunakan metode *Next Generation Matrix*; (3) menentukan simulasi numerik.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada model matematika terdapat beberapa asumsi yaitu: (1) setiap individu yang baru lahir diasumsikan dalam keadaan sehat; (2) tidak ada proses imigrasi (populasi berasumsi tertutup); (3) pada populasi hanya terdapat penyakit difteri; (4) Individu yang terinfeksi dapat sembuh dan dapat

meninggal akibat terinfeksi penyakit; (5) setiap individu yang sembuh dari terinfeksi pasti melalui proses karantina; (6) individu yang melakukan proses karantina dapat sembuh dan dapat meninggal akibat terinfeksi penyakit; (7) terdapat individu yang mati karena alami; (8) setiap individu yang terinfeksi penyakit dianggap tidak mengalami masa inkubasi; (9) individu rentan dapat terinfeksi akibat interaksi dengan individu yang terinfeksi; (10) setiap individu yang rentan (S) dapat divaksinasi; (11) individu yang sehat saja yang dapat divaksinasi, yang terinfeksi sudah tidak bisa divaksinasi; (12) individu yang sudah divaksinasi bisa menjadi individu yang rentan dan dapat terinfeksi sehingga vaksinasi belum bekerja dengan baik sehingga individu belum sepenuhnya kebal terhadap penyakit. Pada model matematika SVIQR populasi dibagi menjadi 6 kompartemen yaitu: (1) S adalah individu yang rentan terinfeksi penyakit, (2) V adalah Individu yang divaksinasi, (3) I adalah Individu yang terinfeksi, (4) Q adalah individu yang dikarantina, dan (5) R adalah Individu yang sembuh.

Diagram kompartemen model SVIQR adalah:



Gambar 2. 1 Diagram Kompartemen SIQR

Berdasarkan gambar diatas diperoleh parameter sebagai berikut:

Parameter	Keterangan
α	Laju kelahiran
μ	Laju kematian alami
β	Laju penularan penyakit
γ	Laju kematian akibat terinfeksi
θ	Laju terinfeksi yang dikarantina
γ	Laju kesembuhan
ϵ	Laju memudarnya vaksinasi
δ	Laju vaksinasi

Berdasarkan diagram kompartemen diatas, dapat dirumuskan model S, V, I, Q, R dalam persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha + \varepsilon V - \mu S - \beta SI - \delta S \\ \frac{dV}{dt} &= \delta S - \varepsilon V - \mu V \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - \theta I \\ \frac{dQ}{dt} &= \theta I - \gamma Q - \gamma Q \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma Q - \mu R \end{aligned}$$

PENENTUAN TITIK KESETIMBANGAN

- Titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh $E^0 = S^0, V^0, I^0, Q^0, R^0$, diperoleh :

$$\begin{aligned} E^0 &= (S^0, V^0, I^0, Q^0, R^0) \\ &= \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)}, \frac{\alpha\delta}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)}, 0, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

- Titik kesetimbangan endemik E^* = S^*, V^*, I^*, Q^*, R^* diperoleh :

$$S^* = \frac{y + \theta}{\beta}$$

$$V^* = \frac{\delta(y + \theta)}{\beta(\varepsilon + \mu)}$$

$$I^* = \frac{(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma)}{\beta(\varepsilon + \mu)(y + \theta)}$$

$$Q^* = \frac{\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma)}{\beta(\gamma\mu\theta + \gamma\mu\gamma + \gamma\theta\varepsilon + \gamma\gamma\varepsilon + \mu\gamma\theta + \mu\gamma^2 + \theta\gamma\varepsilon + \gamma^2\varepsilon)}$$

$$R^* = \frac{\gamma\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma)}{\beta\mu(\gamma\mu\theta + \gamma\mu\gamma + \gamma\theta\varepsilon + \gamma\gamma\varepsilon + \mu\gamma\theta + \mu\gamma^2 + \theta\gamma\varepsilon + \gamma^2\varepsilon)}$$

BILANGAN REPRODUKSI DASAR

Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar dapat menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM). Untuk membentuk NGM dapat dicari dari kompartemen dengan kasus yang terinfeksi, yaitu kompartemen I sebagai berikut:

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S - \gamma - \theta)I$$

1. Linearisasi terhadap subsistem terinfeksi (I) pada titik ekuilibrium bebas penyakit

$$J = \left[\frac{\partial(\beta S - \gamma - \theta)I}{\partial I} \right]$$

$$J = [(\beta S - \gamma - \theta)]$$

Substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0 = \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)}, \frac{\alpha\delta}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)}, 0, 0, 0 \right)$ ke matriks J

$$J = \left[\beta \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)} \right) - \gamma - \theta \right]$$

Sehingga $F = \left[\beta \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)} \right) \right]$ dan $V = [-\gamma - \theta]$

2. R^0 diperoleh dengan cara menghitung radius spectral ρ dari FV^{-1} yaitu dengan mencari akar karakteristik terbesar dari FV^{-1}

- Hitung nilai V^{-1}

$$V^{-1} = [y + \theta]^{-1} \quad \text{Ikemudian} \quad FV^{-1} = \left[\frac{\alpha\beta(\mu + \varepsilon)}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)(y + \theta)} \right]$$

Dari sistem di atas, terdapat nilai eigen. Bilangan reproduksi dasar didapatkan dari nilai eigen terbesar. Sehingga, diperoleh bilangan reproduksi dasar sebagai berikut:

$$\det[\lambda I - FV^{-1}] = 0$$

$$\begin{aligned} \left[\lambda(1 \ 0 \ 0) - \frac{\alpha\beta(\mu + \varepsilon)}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)(y + \theta)} \right] &= 0 \\ \left[\lambda = \frac{\alpha\beta(\mu + \varepsilon)}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)(y + \theta)} \right] \end{aligned}$$

Keterangan: I merupakan matriks identitas ordo 1x1

Dari konstruksi *The Next Generation Matrix* (NGM) terdapat bilangan reproduksi dasar yaitu:

$$R_0 = \frac{\alpha\beta(\mu + \varepsilon)}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)(y + \theta)}$$

PENENTUAN ANALISIS KESTABILAN

Matriks Jacobian dari titik kesetimbangan bebas penyakit

$$J =$$

$$\begin{bmatrix} -\mu - \beta I - \delta & \varepsilon & -\beta S & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & \beta S - \gamma - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(\gamma + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Karena model *SVIQR* terdapat dua titik kesetimbangan, sehingga akan dilakukan analisis titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik .

- Analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Setelah diperoleh matriks Jacobian, dengan melinearisasi sistem, di sekitar titik kesetimbangan bebas penyakit $E^0 = (S^0, V^0, I^0, Q^0, R^0)$ diperoleh:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I - \delta & \varepsilon & -\beta S & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & \beta S - y - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I - \delta & \varepsilon & -\beta S & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & 0 & \beta S - y - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Substitusi titik equilibrium bebas penyakit

$$\left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)}, \frac{\alpha\delta}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)}, 0, 0, 0 \right):$$

$$J^0 = \begin{bmatrix} -\mu - \delta & \varepsilon & -\beta \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)} \right) & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (R_0 - 1)(y + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$J^0 = \begin{bmatrix} -\mu - \delta & \varepsilon & -\beta \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)} \right) & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (R_0 - 1)(y + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian J^0 adalah $\det[\lambda I - J^0] = 0$

$$J^0 = \begin{vmatrix} \lambda + \mu + \delta & -\varepsilon & \beta \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)} \right) & 0 & 0 \\ -\delta & \lambda + \mu + \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - (R_0 - 1)(y + \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & (\lambda + y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

Maka diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\gamma - y, \lambda_2 = -\mu - \delta - \varepsilon, \lambda_3 = (R_0 - 1)(y + \theta), \lambda_4 = -\mu, \lambda_5 = -\mu$$

Berdasarkan karakteristik diatas, agar $\lambda_3 = (R_0 - 1)$ bernilai negatif maka $(R_0 - 1) < 0$ dapat diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dapat dikatakan stabil asimtotik lokal apabila $R_0 < 1$.

- Analisis kestabilan titik kesetimbangan endemik

Matriks Jacobian

$$J^* = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I^* - \delta & \varepsilon & -\beta S & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I^* & 0 & \beta S - y - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Dengan dengan melinearisasi sistem, di sekitar titik kesetimbangan Endemik $E^* = (S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*)$ diperoleh:

Substitusi titik equilibrium endemik $E^* = (S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*)$ diperoleh:

$$\left(\frac{y + \theta}{\beta}, \frac{\delta(y + \theta)}{\beta(\varepsilon + \mu)}, \frac{(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma)}{\beta(\varepsilon + \mu)(y + \theta)}, \frac{\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma)}{\beta(\gamma\mu\theta + \gamma\mu\gamma + \gamma\theta\varepsilon + \gamma\gamma\varepsilon + \mu\gamma\theta + \mu\gamma^2 + \theta\gamma\varepsilon + \gamma^2\varepsilon)}, \frac{(\gamma\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - \gamma\mu^2 - \varepsilon\mu\gamma - \delta\mu\theta - \delta\mu\gamma))}{\beta\mu(\gamma\mu\theta + \gamma\mu\gamma + \gamma\theta\varepsilon + \gamma\gamma\varepsilon + \mu\gamma\theta + \varepsilon\gamma^2 + \theta\gamma\varepsilon + \gamma^2\mu)} \right),$$

$$J^* = \begin{bmatrix} -\mu - \beta I^* - \delta & \varepsilon & -\beta S & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \beta I^* & 0 & \beta S - y - \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Setelah substitusi dan dihitung sehingga dapat membentuk R_0 maka kita masukkan ke matriks Jacobian J^0 , sehingga :

$$J^* = \begin{bmatrix} -\mu - \delta - \mu \frac{(\mu + \varepsilon + \delta)(R_0 - 1)}{(\varepsilon + \mu)} & \varepsilon & -(y + \theta) & 0 & 0 \\ \delta & -(\mu + \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ \mu \frac{(\mu + \varepsilon + \delta)(R_0 - 1)}{(\varepsilon + \mu)} & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta & -(y + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks Jacobian J^0 adalah $\det[\lambda I - J^0] = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \mu + \delta + \mu \frac{(\mu + \varepsilon + \delta)(R_0 - 1)}{(\varepsilon + \mu)} & -\varepsilon & (y + \theta) & 0 & 0 \\ -\delta & \lambda - (-\mu - \varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ -\mu \frac{(\mu + \varepsilon + \delta)(R_0 - 1)}{(\varepsilon + \mu)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & \lambda - (-y - \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & \lambda - (-\mu) \end{vmatrix} = 0$$

Untuk mencari determinan dari matriks ordo 5x5. Maka diperoleh:

$$\frac{1}{\mu+\varepsilon}((\lambda+y+\gamma)(\lambda+\mu)((R_0\lambda+(R_0-1)(y+\theta))\mu^3+((R_0-1)\lambda^2+(2R_0-1)\lambda+(R_0-1)(y+\delta+\theta))\mu^3+((R_0-1)\varepsilon^2+((3R_0-1)\lambda+2(y+\frac{\delta}{2}+\theta)(R_0-1))\varepsilon+(R_0+1)\lambda^2+((y+2\delta+\theta)R_0-y-\delta-\theta)\lambda+\delta(R_0-1)(y+\theta))\mu^2+((\lambda R_0=(R_0-1)(y+\theta))\varepsilon^2+((R_0+2)\lambda^2+((y+\delta+\theta)R_0-y-\theta)\lambda+\delta(R_0-1)(y+\theta))\varepsilon-(\lambda^2+\delta\lambda R_0+\delta(R_0-1)(y+\theta))\lambda)\mu+\lambda^2\varepsilon(\delta+\lambda+\varepsilon))$$

Sehingga diperoleh nilai eigen:

$$\lambda_1 = -\mu - y - \gamma$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

Terdapat 2 nilai eigen negatif diatas, sedangkan 3 nilai eigen lainnya sulit ditentukan, sehingga nilai eigen yang lainnya dianalisis dengan menggunakan Kriteria Routh - Hurwitz sebagai berikut:

λ^3	α_0	α_2
λ^2	α_1	α_3
λ^1	$b_1 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3}{\alpha_1}$	$b_2 = \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_0\alpha_5}{\alpha_1}$ $= 0$
λ^0	$C_1 = \frac{b_1\alpha_3 - \alpha_1b_2}{b_1}$ $= \alpha_3$	$C_2 = \frac{b_1\alpha_5 - \alpha_1b_3}{b_1}$ $= 0$

Dimana,

$$\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{(R_0+1)\mu^2+((R_0+2)\varepsilon+R_0\delta)\mu+\varepsilon(\delta+\varepsilon)}{\mu+\varepsilon}$$

$$\alpha_2 = \frac{(\mu+\delta+\varepsilon)((y+\mu)(R_0-1)+(\mu+\varepsilon)R_0)\mu}{\mu+\varepsilon}$$

$$\alpha_3 = (R_0-1)(\mu+\delta+\varepsilon)(y+\theta)\mu$$

Hasil dari perhitungan menggunakan kriteria Routh Hurwitz. Karena semua parameter bernilai positif maka dipenuhi $\alpha_1\alpha_2 > \alpha_0\alpha_3$ yang mengakibatkan $b_1 > 0$, dapat diperoleh bahwa titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik apabila $R_0 > 1$.

SIMULASI NUMERIK

Melakukan interpretasi model ke dalam bentuk simulasi berbantuan software *MATLAB*. Simulasi diawali dengan memberikan nilai awal pada parameter dan mengubah-ubah nilai untuk parameter tertentu pada model matematika.

Melakukan analisa dengan dua kondisi populasi yang berbeda berdasarkan titik kesetimbangan yang ada. Dua kondisi tersebut adalah:

- Simulasi Numerik Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kondisi populasi ketika bebas dari penyakit dinyatakan ketika jumlah individu yang terinfeksi tidak mengalami kenaikan dan mendekati angka nol pada waktu tertentu. Syarat yang harus dipenuhi adalah $R_0 < 1$.

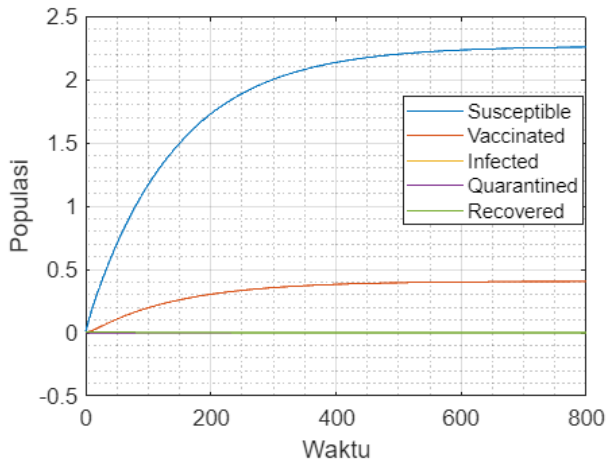
Untuk model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi dimasukkan nilai parameter-parameter sebagai berikut:

Parameter	Nilai	Referensi
μ	0.007115	Ibra Aryani
θ	0.004	Ibra Aryani
ε	0.01	Asumsi
δ	0.8	Asumsi
α	0.019	Ibra Aryani
β	0.57	Puspita,et all
γ	0.5	Ibra Aryani
y	0.08	Ibra Aryani

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel diatas, maka nilai R_0 yang diperoleh adalah:

$$R_0 = 0.3795491181$$

Karena $R_0 < 1$, maka titik keseimbangan bebas penyakit stabil asimtotik. Grafik menunjukkan, simulasi sistem pada waktu $t = 800$ akan menuju nol untuk garis terinfeksi penyakit difteri, garis sembuh pada penyakit difteri dan garis karantina. Seiring berjalannya waktu, grafik menuju titik $E_1(S, V, I, Q, R) = (2.263756355, 0.4066582624, 0, 0, 0)$.



Dari hasil simulasi di atas, dapat dilihat bahwa tidak terjadi penyebaran penyakit difteri.

- Simulasi Numerik Titik Keseimbangan Endemik

Kondisi populasi ketika titik keseimbangan endemik yaitu jumlah individu yang terinfeksi konstan pada waktu tertentu. Syarat yang harus dipenuhi adalah $R_0 > 1$.

Untuk model matematika pada penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh karantina dan vaksinasi dimasukkan nilai parameter-parameter sebagai berikut:

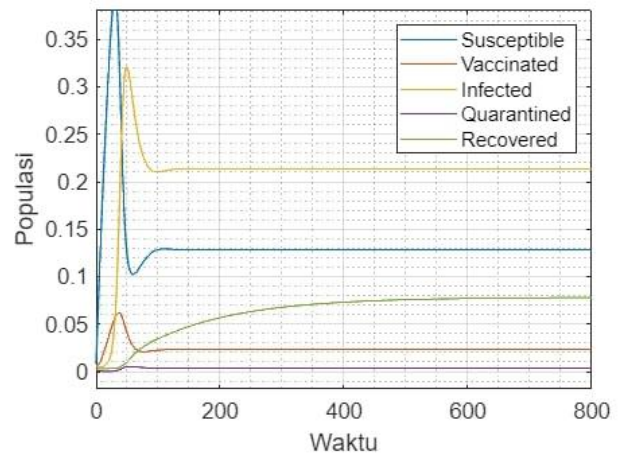
Parameter	Nilai	Referensi
μ	0.007115	Ibra Aryani
θ	0.004	Ibra Aryani
ε	0.05	Asumsi
δ	0.8	Asumsi
α	0.019	Ibra Aryani
β	0.57	Puspita, et all
γ	0.5	Ibra Aryani
y	0.08	Ibra Aryani

Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada tabel diatas, nilai R_0 yang diperoleh adalah:

$$R_0 = 1.207495030$$

Karena $R_0 > 1$, maka sistem titik keseimbangan endemik stabil asimtotik. Grafik menunjukkan, simulasi sistem pada waktu $t = 800$. Seiring berjalannya waktu, grafik menuju titik $E_1(S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*) =$

$$(0.1282442748, 0.02303763559, 0.2133765382, 0.003710896316, 0.07823393499).$$



Hasil dari simulasi grafik diatas, bahwa garis orange yang menunjukkan infeksi penyakit difteri akan tetap konstan dengan jumlah tertentu pada waktu $t = 800$. Yang artinya, terjadinya penyebaran pada penyakit difteri.

SIMPULAN

Model matematika penyebaran penyakit difteri dengan pengaruh vaksinasi dan karantina mempunyai dua titik keseimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit diperoleh dengan hasil

$$E^o(S, V, I, Q, R) = \left(\frac{\alpha(\mu + \varepsilon)}{\mu(\varepsilon + \mu + \delta)}, \frac{\alpha\delta}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)}, 0, 0, 0 \right)$$

dan titik kesetimbangan endemik $E^*(S^*, V^*, I^*, Q^*, R^*)$ dengan $S^* = \frac{y+\theta}{\beta}, V^* =$

$$\frac{\delta(y+\theta)}{\beta(\varepsilon+\mu)}, I^* = \frac{(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - y\mu^2 - \varepsilon\mu y - \delta\mu\theta - \delta\mu y)}{\beta(\varepsilon+\mu)(y+\theta)}$$

$$Q^* = \frac{\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - y\mu^2 - \varepsilon\mu y - \delta\mu\theta - \delta\mu y)}{\beta(\gamma\mu\theta + \gamma\mu y + \gamma\theta\varepsilon + \gamma y\varepsilon + \mu y\theta + \mu y^2 + \theta y\varepsilon + y^2\varepsilon)}$$

$$R^* = \left(\frac{\gamma\theta(\alpha\beta\varepsilon + \alpha\beta\mu - \theta\mu^2 - \varepsilon\mu\theta - y\mu^2 - \varepsilon\mu y - \delta\mu\theta - \delta\mu y)}{\beta\mu(\gamma\mu\theta + \gamma\mu y + \gamma\theta\varepsilon + \gamma y\varepsilon + \mu y\theta + \mu y^2 + \theta y\varepsilon + y^2\varepsilon)} \right)$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh $R_0 = \frac{\alpha\beta(\mu + \varepsilon)}{\mu(\mu + \varepsilon + \delta)(y + \theta)}$. Jika $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik. Jika $R_0 > 1$, maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.

Hasil simulasi numerik dari model matematika penularan penyakit difteri dengan pengaruh vaksinasi dan karantina menunjukkan bahwa dengan pemilihan parameter laju memudarnya vaksinasi $\varepsilon = 0.01$ diperoleh $R_0 = 0.3795491181 < 1$, yang berarti titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik atau tidak penyebaran pada penyakit difteri. Titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik atau terjadi penyebaran dengan pemilihan parameter laju memudarnya vaksinasi $\varepsilon = 0.05$ sehingga diperoleh $R_0 = 1.207495030 > 1$.

Semakin besar nilai parameter laju memudarnya vaksinasi ε maka semakin stabil asimtotik titik bebas penyakit artinya penyebaran penyakit atau endemik dapat dicegah apabila vaksin yang diberikan tidak mudah pudar khasiatnya.

SARAN

1. Pada bab pembahasan, parameter laju memudarnya vaksinasi ε berpengaruh terhadap kestabilan titik endemik maupun titik kesetimbangan bebas penyakit. Oleh karena itu, pemerintah harus memperhatikan vaksin yang berkualitas untuk mencegah terjadinya pemudaran vaksinasi.
2. Pada tugas akhir ini, tidak dilakukan pengelompokan umur dalam penelitian menggunakan model epidemik SVIQR. Oleh karena itu masih terbuka kemungkinan bagi peneliti selanjutnya untuk melanjutkan penelitian ini menggunakan model epidemik SVIQR dengan pengelompokan umur untuk mengetahui pada umur berapa yang lebih rentan terhadap penyakit tersebut sehingga hasil yang diperoleh dalam penelitian menggunakan model epidemik SVIQR ini dapat lebih maksimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Achmad, N., Nuha, A. R., Matematika, P. S., Matematika, J., & Gorontalo, U. N. (2022). *Model Matematika Tipe Seiqr*. 22(1), 14–29.
- Allmandan, E. S., & Rhodes, J. A. (2004). *Mathematical Models in Biology: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Anton, H. 1992. *Aljabar Linier Elementer Edisi ke-5*. Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.
- Aryani, I., & Widyaningsih, P. (2020). Model Susceptible Vaccinated Infected Recovered (SVIR) dan Penerapannya pada Penyakit Difteri di Indonesia. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika*, 3, 156–162.
- Asean Biodiaspora Virtual Center, A. (2022). COVID-19 Situational Report in the Asean Region. *Asean Biodiaspora Virtual Center, ABVC*, 400, 1–10.
- Bimrew Sendekie Belay. (2022). Peran Orang Tua Terhadap Pencegahan Penyebaran Penyakit Difteri Pada Anak, 1(8.5.2017), 2003–2005.
- Bodson, M. (2020). Explaining the Routh-Hurwitz criterion A tutorial presentation. *IEEE Control 11 Systems Magazine*, (1), 45–51. <https://doi.org/10.1109/MCS.2019.2949974>
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Textbook and Student Solutions Manual Set*. 796. http://books.google.com/books?id=q3lmPgAACAAJ&dq=elementary+differential+equations+and+boundary+value+problem&hl=&cd=16&source=gbs_api%5Cnpapers3://publication/uuid/9096B1C5-0F87-4FEA-AA72-C3E07E930C19
- Dauhoo M., Dumas L., Gabriel P., Lafitte P. (2018). An Introduction To The Basic Reproduction Number In Mathematical Epidemiology. *ESAIM: ProcS*, 62 2020;6(4):e21168.
- Diekmann O., Heesterbeek J. A. P., Roberts M. G (2009). The Construction of Next-Generation Matrices for Compartmental Epidemic Models. *J. R. Soc. Interface* (2010) 7, 873–885.
- Finizo dan Ladaz. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Gantmacher, F.R. 1959. *The Theory of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.
- Hull, D Johnston, D.I. (2008). *Dasar-Dasar Pediatri*. Jakarta:EGC
- Irwin, J. O. (1958). *Mathematical Epidemiology*. In *Bmj* (Vol. 1, Issue 5082). <https://doi.org/10.1136/bmj.1.5082.1287-a>
- Kanchanarat, S., Chinviriyasit, S., & Chinviriyasit, W. (2022). Mathematical Assessment of the Impact of the Imperfect Vaccination on Diphtheria Transmission Dynamics. *Symmetry*, 14(10). <https://doi.org/10.3390/sym14102000>
- Kemkes. (2017). *Pedoman Pencegahan dan Pengendalian Difteri*. *Buku Pedoman Pencegahan Dan Pengendalian Difteri*, 1–34. <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id/wp-content/uploads/2018/01/buku-pedoman-pencegahan-dan-penanggulangan-difteri.pdf>
- Merkin, D. R. (1997). *Introduction to the Theory of Stability* (Vol. 63). New York: Springer.
- Ndii, M. Z. P. (2018). *Pemodelan Matematika*. CV Budi Utama, Yogyakarta.

- Ndii, M. Z. P. (2022). *Pemodelan Matematika*. PT. Nasya Expanding Management, Pekalongan.
- Perko, L. (2001). *Equations and Dynamical Systems*.
- Puspita, G., Kharis, M., & Supriyono. (2017). Pemodelan Matematika Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Karantina Dan Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*, 6(1), 25–35.
- Putra, K.P. (2022). Model Matematika Tipe SIQR Pada Penyebaran Penyakit Difteri Dengan Pengaruh Vaksinasi. *Unnes Journal of Mathematics*.
- Saputra, M. A. S. (2018). Difteri Dalam Lingkup Asuhan Keperawatan. *Jurnal Kesehatan*, Januari(2017), 1–17.
<https://doi.org/10.17605/OSF.IO/3A2NV>
- WHO. (2019). Reported Cases of Selected Vaccine Preventable Disease (VPDs).
- Zill and Cullen. (2009). *Differential Equations with Boundary-Value Problems*.