Liet. matem. rink, **46**, *spec. nr.*, 2006, 405–411

MAUT metodo naudojimas esant apibrėžtumo sąlygoms

Rūta SIMANAVIČIENĖ (VGTU)
el. paštas: rutasim@ktl.mii.lt

1. Įvadas

Sprendžiant įvairias daugiatikslias problemas, sprendimus priimantis asmuo, siekia ne vieno, o kelių tikslų. Tai tinka visų pirma strateginėms investicijoms, kuriomis kuriamos arba keičiamos sudėtingos sistemos. Daugiakriterinių metodų pagalba išsprendžiamos problemos, iškylančios dėl sprendimus priimančių asmenų skirtingų prioritetų. Šie metodai leidžia pasirinkti optimalų sprendimą, kai jo kriterijai kartais vienas kitam prieštarauja. Daugiakriterinė analizė atspindi reliatyvią kriterijų svarbą sprendimus priimančiam asmeniui.

Sprendimų priėmimo, turint kelias tikslo funkcijas, kitaip dar vadinamus daugiakriterinius, (*Multiple Criteria Decision Making (MCDM)*), modelius ir metodus galima suskirstyti į dvi grupes:

- Daugiaobjekčius (angl. *Multi(ple) Objective Decision Making*, arba *MODM*), kai nagrinėjamos vektorinio maksimumo problemos;
- Daugiatikslius (angl. *Multi(ple) Attribute Decision Making*, arba *MADM*), kai ieškoma atskirų sprendimų [1].

Daugiakriterinių metodų literatūroje aprašyta gan daug, tačiau ne visi iš jų naudojami Lietuvoje.

Straipsnyje pateikiama vieno iš daugiatikslių sprendimų priėmimo metodų – naudingumo teorija su daugelių požymių (*Multiattribute Utility Theory* arba *(MAUT)*) apžvalga.

2. MAUT metodo aprašymas

MAUT – skirta neapibrėžtų sąlygų situacijoms, bet galima taikyti ir esant apibrėžtumo sąlygoms. Šiam metodui būdinga tai, kad daugiatikslė problema yra išsprendžiama vienetinių naudingumo funkcijų pagalba išreikštų per kokybinius ryšius, pagrindžiamų kriterijų įvertinimo keitimosi normomis.

Taikant MAUT metodą, atskiriems nagrinėjamų alternatyvų A_m, (m – nagrinėjamų alternatyvų skaičius) tikslo kriterijams a_k priskiriamos naudingumo funkcijos n_k, vadovaujantis sprendimus priimančio asmens prioritetais. Bendras alternatyvos A_m, naudingumas N_M nustatomas po to kaip vienetinė naudingumo funkcija n_k, suteikiama visiems tikslo kriterijų a_k pasirodymams ($k = 1, ..., K$ – kriterijų skaičius):

$$N_M(a_1, a_2, ..., a_K) = f(n_1(a_1), n_2(a_2), ..., n_K(a_K))$$

Atskirų kriterijų analizė leidžia daryti išvadas dėl šių kriterijų naudingumo ir įvertinti keitimo santykius tarp jų. Teigiama, kad yra galimybė pakeisti kriterijus, t.y. visi tikslo kriterijaus pakeitimai gali būti kompensuojami tokiais pačiais kito tikslo kriterijaus pakeitimais. Reikia, kad alternatyvos būtų artimos viena kitai, o tai yra sąlyga, kuri gali būti patenkinama tik turint begalinį alternatyvų skaičių.

Bendrojo naudingumo rodiklio formavimas iš atskirų požymių rodiklių, nurodo tai, kad požymiai nepriklauso vienas nuo kito.

Kaip minėta pradžioje Maut – skirta neapibrėžtų sąlygų situacijoms, bet galima taikyti ir esant apibrėžtumo sąlygoms.

Vienetinės naudingumo funkcijos konstravimas priklauso nuo to ar sprendimas priimamas esant apibrėžtumo sąlygoms (rezultatas vienareikšmis) ar neapibrėžtumo sąlygoms (įvairiareikšmiai rezultatai).

Daugiatikslių problemų sprendimui duotame lygyje, esant *apibrėžtumo sąlygoms*, rekomenduojama naudoti sumos naudingumo funkciją, kurios formulė:

$$N_M = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot n_k \cdots \tag{1}$$

kur w_k – tikslo kriterijaus a_k svorio faktorius (reikšmingumo veiksnys, arba svoris), jeigu lygiagrečiai rodiklių pakeitimo galimybei galioja tai:

- alternatyvoms galima suformuoti silpną eiliškumą;
- visi naudojami rodikliai, kaip nepriklausantys vienas nuo kito, prioritetų atžvilgiu, yra nagrinėjami asmens priimančio sprendimus.

Vienetinės naudingumo funkcijos svorio faktoriai w_k skaičiuojami lyginant juos tiesiogiai (organinėje formoje).

Didžiausia naudingumo funkcijos N_M reikšmė parodo kuri alternatyva yra tinkamiausia. Taigi, kiekvienos alternatyvos naudingumo reikšmė gali būti nagrinėjama *aukštesnės* sistemos, kuri nurodyta sprendimų darytojo alternatyvų pirmumuose. Naudingumo reikšmės susietos su alternatyva yra tiesiogiai susietos tikslo pasirinkimo pradžioje, vadovauti sprendimui ir pavaizduoti šių tikslų pasiekimo laipsniui. Remiantis Keeney ir Raiffa (1976), sudėties modelis yra tinkamiausias jeigu sprendimo kūrėjo pirmumai atitinkia sumos nepriklausomumą.

Keletas bandymų turi vadovauti įvertinant šiuos svorius ir apskaičiuojant suderinimą ir sąveiką tarp požymių, daugelio požymių svėrimo metodais [4].

Daugiatikslių problemų sprendimui duotame lygyje, esant ne*apibrėžtumo sąlygoms,* rekomenduojama naudoti sandaugos naudingumo funkciją, kurios formulė:

$$1 + w \cdot n(a) = \prod_{k=1}^{K} [1 + w \cdot w_k \cdot n_k(a_k)] \ldots, \tag{2}$$

kur visų K požymių svorio rodikliai tenkina sąlygas:

$$0 \leqslant w_k \leqslant 1 \quad \text{ir} \quad \sum_{k=1}^{K} w_k \neq 1,$$

bei lygtyje (2), w – reiškia bendrą svorį (skalės konstanta). Pagal Keeney ir Raiffa (1976) w apibrėžiama taip:

$$1 + w = \prod_{k=1}^{K} [1 + w \cdot w_k][5].$$

3. MAUT metodo atlikimo eiga esant apibrėžtumo sąlygoms

Daugiatikslė problema *apibrėžtumo sąlygomis* gali būti sprendžiama MAUT metodu tokia tvarka:

1. kriterijų/požymių parinkimas;
2. kriterijų nepriklausomumo vienas nuo kito tyrimas;
3. vienetinių naudingumo funkcijų nustatymas atskiriems požymiams;
4. kriterijų reikšmingumo (svorių) nustatymas;
5. bendrojo naudingumo alternatyvų nustatymas.

Pirmame etape renkant kriterijus, pagrindinis tikslas dalijamas į potikslius hierarchijos tvarka. Pats žemiausias tikslų lygis turi požymius, kurių pagalba nustatomas tikslo pasiekimo (lygis) laipsnis. Tada kalba gali eiti tiek apie kiekybinius tiek apie kokybinius kriterijus, įvertintus tik iš subjektyvios pusės. Kokybinės charakteristikos kriterijų atveju iškyla išmatavimo problema. Priklausomai nuo požymio rūšies būtina išsirinkti matavimo skalę kiekvienam požymiui individualiai.

Antras etapas skirtas kriterijų nepriklausomumo vienas nuo kito tyrimui. Prieš naudojant suminę naudingumo funkciją, reikalinga ištirti skirtingų požymių naudingumo rodiklių nepriklausomumą, vienas nuo kito. Šį nepriklausomumą būtina pavaizduoti turimai požymių sistemai. Prioritetų nepriklausomumas yra prielaida susijusi su atskirų naudingumo požymių rodiklių (vienetinių naudingumo rodiklių) suvedimu į vieną naudingumo rodiklį.

Trečiame etape apibrėžiama vienetinė naudingumo funkcija n_k atskiriems naudingumo požymiams a_k. Šios funkcijos išsiskiria naudingumo kriterijų dydžio kokybine išraiška. Todėl dėl vienetinės naudingumo funkcijos kokybiško nustatymo būtina nustatyti esamų kriterijų a_k požymių C_i pasirodymus. Norint nustatyti vienetinę naudingumo funkciją yra atliekamas rodiklių n_k *normavimas* (rangavimas) intervale [0, 1], kur pavyzdžiui, pats netinkamiausias pasirodymas a_k^0 vienetinės naudingumo funkcijos pagalba įvertinamas 0 ($n_k(a_k^0) = 0$), o pats tinkamiausias pasirodymas $a_k^1 = 1$ ($n_k(a_k^1) = 1$).

Vienetinės naudingumo funkcijos gali būti pateiktos teisine forma arba kreivine forma. Jų forma gali būti nustatoma apklausos, pagal medianos metodą, pagalba. Pagal šį metodą požymiui C_1 remiantis a_1^0 ir a_1^1 nustatoma „vidurinė reikšmė“ $a_1^{0,5}$. Tuo atveju veikia taisyklė, kad naudingumo augimas nuo a_1^0 iki $a_1^{0,5}$ identiškas naudingumo augimui nuo $a_1^{0,5}$ iki a_1^1. Šiam pasirodymui suteikiamas vienetinis naudingumo įvertinimas 0,5 ($n_1(a_1^{0,5}) = 0,5$). Norit nustatyti $a_1^{0,5}$ pritraukiamas antras rodiklis C_2 (kitų požymių galima ir neimti, kadangi tariama esant tvirtai prioritetų nepriklausomybei). Jo įtraukimą reikia modifikuoti kitų apklausų procesu, išeinant už lygio a_2' tokiu būdu, kai apibrėžiamas pokytis Δa_2, kuris vienodas tiek pereinant nuo a_1^0 iki $a_1^{0,5}$ tiek ir pereinant nuo $a_1^{0,5}$ iki a_1^1.

Tada $a_1^{0,5}$ atveju turi būti tenkinami šie indiferentiškumo vertinimai:

$$(a_1^0, a_2') \sim (a_1^{0,5}, a_2' - \Delta a_2),$$
$$(a_1^{0,5}, a_2') \sim (a_1^1, a_2' - \Delta a_2).$$

Šį procesą galima pavaizduoti grafiškai (1 pav.).

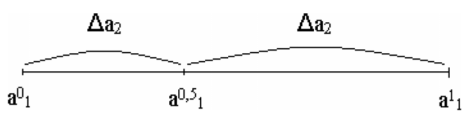
Kituose apklausos etapuose medianos parodymus galima užrašyti intervalais $[a_1^0; a_1^{0,5}]$ ir $[a_1^{0,5}; a_1^1]$. Turimi rodikliai yra pakankami norint apytiksliai nustatyti vienetinę naudingumo funkciją n_k, aišku jeigu funkcijos tipas yra aiškus (pavyzdžiui, tiesinė funkcija). Tačiau panašiai galima nustatyti ir kitas vienetinio naudingumo funkcijas. Vienetinės naudingumo funkcijos nustatymo pavyzdį iliustruoja grafika (2 pav.).

Taip kaip vienetinė naudingumo funkcija n_1 pavaizduota kriterijui a_1, taip pat galima pavaizduoti ir kitas vienetines naudingumo funkcijas $(n_2, ..., n_k)$.

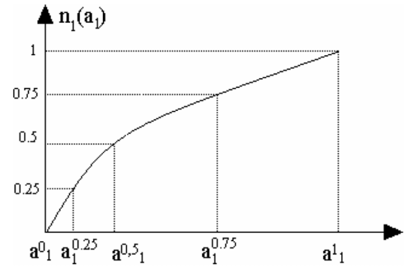
Tada galima patikrinti išvadų organiškumą. Pavyzdžiui, medianos nustatymo keliu galima patikrinti reikšmę $a_1^{0,5}$ intervalui $[a_1^{0,25}, a_1^{0,75}]$ ir galima iš naujo nustatyti vienatinę naudingumo funkciją naudojant kitokius įvairius požymius.

Daugiatikslių problemų sprendimui apskritai nereikalaujami pilni vienetinės naudingumo funkcijos apskaičiavimai. Tai teisinga tuo atveju, jeigu pakanka nustatyti vienetinio naudingumo rodiklius, kad parodyti esmines alternatyvas.

Ketvirtas etapas naudojamas kriterijų svoriams nustatyti. Pradžioje nustatomos sąsajos tarp dviejų rodiklių svorio faktorių. Šiuos ryšius galima interpretuoti, kaip pakeitimo normas. Tai vyksta naudojant indiferentiškumo vertinimus, gautus vienetinės naudingumo funkcijos nustatymo metu.



1 pav. Naudingumo įvertinimas gautas lyginant rodiklius.



2 pav. Vienetinės naudingumo funkcijos nustatymas (horizontalioje ašyje a_1 reikšmės).

Norint suprasti procesą pradžioje nagrinėjamas dviejų tikslo kriterijų naudingumo funkcijų atvejis ($K = 2$). Čia pateikta tiesinė (suminė) bendro naudingumo funkcija atrodo taip:

$$N_M = w_1 * n_1 + w_2 * n_2.$$

Pateiktam naudingumo lygiui $\bar{N}_M$ teisinga lygybė:

$$\bar{N}_M = w_1 * n_1 + w_2 * n_2.$$

Šį santykį galima pavaizduoti grafiškai $\frac{n_1}{n_2}$ – diagrama. Čia grafikas – tiesė, vaizduojanti naudingumų n_1 ir n_2 kombinacijas, kurios artėja prie vienodos bendro naudingumo $\bar{N}_M$ reikšmės. Ši tiesė gali būti interpretuojama kaip indiferentiškumo tiesė. Grafike ši tiesė pavaizduota kartu su kitomis indiferentiškumo tiesėmis, vaizduojančiomis kitus naudingumo lygius (3 pav.).

Tiesių pakėlimo aukštis $\frac{d_{n_2}}{d_{n_1}}$ rodo pasikeitimo normą tarp n_1 ir n_2. Pakeitimo normos dydis rodo kiek vienetų reikia sumažinti n_2 kad pridėjus papildomą vientą prie n_1 gautume vienodo laipsnio naudingumą. Pakėlimo aukštį arba pakeitimo normą galima apskaičiuoti pagal indiferentiškumo tiesės lygtį, kuri atrodo taip:

$$\frac{d_{n_2}}{d_{n_1}} = -\frac{w_1}{w_2}.$$

Rodiklių panašumas tenkina šią taisyklę:

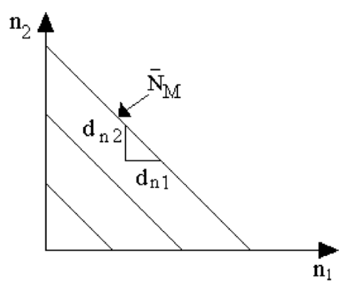
$$|\Delta n_2| \cdot w_2 = |\Delta n_1| \cdot w_1.$$

Reikšmių Δn_1ir Δn_2 pakeitimą galima gauti iš indiferentiškumo įvertinimų, kurie buvo gauti nustatant medianą.

$$(a_1^0, a_2^{'}) \sim (a_1^{0,5}, a_2 - \Delta a_2), \tag{3}$$

$$(a_1^{0,5}, a_2^{'}) \sim (a_1^1, a_2^{'} - \Delta a_2). \tag{4}$$

Saldo Δn_1 tarp $n_1(a_1^0)$ ir $n_1(a_1^{0,5})$ yra lygi 0,5. Vienetinio naudingumo skirtumą Δn_2 tarp $n_2(a_2^{'})$ ir $n_2(a_2^{'} - \Delta a_2)$ galima gauti iš vienetinės naudingumo funkcijos



3 pav. Indiferentiškumo laipsniai.

$n_2(a_2)$. Tada, pagal jau anksčiau pateiktą panašumą, galima įvesti pakeitimus Δn_1 irΔn_2, kas leidžia gauti kokybinį panašumą tarp svorių w_1 ir w_2:

$$w_1 = \frac{|\Delta n_2|}{|\Delta n_1|} \cdot w_2.$$

Čia pateiktas metodas gali būti naudojamas, prioritetų tarpusavio nepriklausomumo pagrindu, kelių tikslo funkcijų atvejui. Panašiai galima nustatyti panašumus tarp w_1 ir kitų svorio faktorių (w_3, ..., w_K). Kadangi teisinga tapatybė:

$$\sum_{k=1}^{K} w_k = 1,$$

taigi remiantis šiomis tapatybėmis galima užrašyti lygtį, kurios sprendiniai būtų svorio faktoriai w_k, tenkinantys skaičiavimus.

Penktame etape vykdomas alternatyvų bendrų naudingumų nustatymas. Šio etapo metu būtina perskaičiuoti alternatyvų (galimybių) pasirodymus, naudojant vienetinę naudingumo funkciją su vienetiniais naudingumo rodikliais, sumuojant juos su jau apskaičiuotais jų svoriais, naudojant suminę naudingumo funkciją. Maksimaliai bendro naudingumo rodiklis gali pasiekti 1. Tokiu atveju galioja šios geriausio varianto taisyklės [3]:

Investicinis objektas visiškai pelningas, jeigu jo bendro naudingumo rodiklis viršija tyrimo pradžioje numatytą kritinę reikšmę.

Santykinai pelningas tas investicinis objektas, kurio bendro naudingumo rodiklis viršija bet kokio kito pateikto ištyrimui objekto panašaus rodiklio reikšmę [3].

4. Išvados

MAUT metodas, tai teoriškai pagrįstas daugiakriterinis metodas, kai veikiant suminei ar daugybos bendrojo naudingumo funkcijoms galioja kintamųjų įvertinimo pakeitimo galimybė, prioritetų nepriklausomybė ir silpnas eiliškumas. Tai gan griežtos sąlygos, vykdomos ne visose sprendimų priėmimo situacijose ir keliančios labai aukštus reikalavimus sprendimus priimančiam asmeniui.

Ateityje planuojama aprašyti šio metodo praktinius panaudojimus.

Literatūra

1. L. Ustinovičius, E.K. Zavadskas, *Statybos investicijų efektyvumo sistemotechninis įvertinimas*, 16–34 (2004).
2. S. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott (Eds.), *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, 265–295 (2005).
3. Ю. Блех, У. Гетце, *Инвестиционные расчеты: Модели и методы оценки инвестиционных проектов*, 160–172 (1997).
4. S.B. Suslick, R. Furtado, Quantifying the value of technological, environmental and financial gain in decision models for offshore oil exploration, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **32** 115–125 (2001).

5. Р.Л. Кини, Х. Райфа, *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*, Москва, Радио и связь (1981).
6. http://www.psych.upenn.edu/~baron/900/danal.htm
7. http://www.thesolutionsite.com/lesson/26112/Unit_1_student_lesson_6.html
8. http://www.cs.uu.nl/docs/vakken/bk/
9. http://www.kbs.uni-hannover.de/~henze/ABIS_Workshop2001/final/Schaefer_final.pdf

SUMMARY

R. Simanavičienė. MAUT method – one in a multiple criteria decision-making methods

Multiple criteria decision-making methods enable to choose the optimal decision, if his criterions is contradictorys. In herein paper is describe MAUT – multiattribute utility theory.This method is reasoned in theory. MAUT up for indeterminations situations, but can to use for determinations situations. In this method multiple criteria problem solvable with the help of unitary utility functions.

Keywords: multiattribute utility theory, additive utility function, multiplicative utility function.