

Circuito equivalente analítico basado en vectores y valores propios para superficies periódicas con ranuras estrechas

Alberto Hernández-Escobar⁽¹⁾⁽²⁾, Francisco Mesa⁽³⁾, Jaime Esteban⁽⁴⁾, Elena Abdo-Sánchez⁽¹⁾,
Teresa M. Martín-Guerrero⁽¹⁾, y Carlos Camacho-Peñalosa⁽¹⁾
ahe@ic.uma.es, mesa@us.es, jesteban@etc.upm.es, {elenaabdo,teresa,ccp}@ic.uma.es

⁽¹⁾Instituto Universitario de Investigación en Telecomunicación, Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación, Andalucía Tech, Universidad de Málaga, 29010 Málaga.

⁽²⁾Department of Electrical and Electronic Engineering, Instituto Tecnológico de Tokio, 152-8552 Tokio, Japón.

⁽³⁾Departamento de Física Aplicada 1, E.T.S. Ing. Informática, Universidad de Sevilla, 41012 Sevilla.

⁽⁴⁾Information Processing and Telecommunications Center, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid, 28040 Madrid.

Resumen—In this work, the values of the parameters of the eigenstate lattice network are obtained by using only analytical means. The procedure is applied to a simple structure, consisting of a bi-periodic surface made of a slotted metallic plane. The slot is very narrow and is slightly rotated. The analytical values are obtained by using a multi-mode expansion approach that only requires information about the normalized field in the slot. The equivalent circuit and the procedure are simple and provide physical insight into the structure. Very good agreement is found for analytical values and simulated ones.

I. INTRODUCCIÓN

El uso y análisis de superficies periódicas, como las superficies selectivas en frecuencia (FSS), los reflectarrays o los *rasorbers*, son estructuras que han ganado popularidad en las últimas décadas y que resultan un problema interesante para la comunidad de antenas. El análisis y síntesis de tales estructuras generalmente se realizan mediante simulación electromagnética de onda completa FEM o FDTD. Sin embargo, el uso de un circuito equivalente tiene ventajas obvias, aunque habitualmente necesita un estudio detallado de la estructura.

Algunos autores de este trabajo propusieron en [1] una topología de circuito equivalente para bipuertos asimétricos que permite la descomposición en excitaciones propias. En [2], este circuito se aplicó a superficies periódicas para obtener circuitos equivalentes relativamente genéricos a partir de una o unas pocas simulaciones electromagnéticas. El circuito así obtenido tiene la peculiaridad de que, a pesar de venir de un proceso puramente matemático (obtención de vectores y valores propios), es capaz de determinar la orientación de algunas estructuras sencillas, ilustrar cómo son las excitaciones propias de dispersores más complejos, y proporcionar valores numéricos para los parámetros de los componentes implicados. Estos valores son físicamente razonables puesto que dan lugar a partes reales de las inmitancias siempre positivas y partes imaginarias cuya variación en frecuencia recuerdan a las de líneas de transmisión. Sin embargo, pese a lo intuitivos que resultan sus resultados desde un punto de vista teórico, la obtención de dicho circuito equivalente siempre requiere realizar al menos una simulación electromagnética,

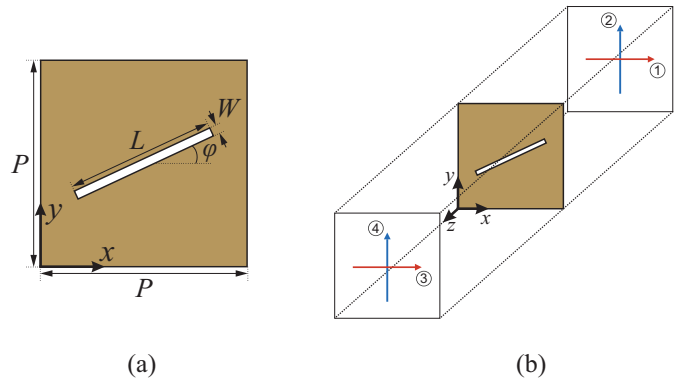


Fig. 1. Geometría de la celda unidad de la estructura periódica propuesta. (a) Dimensiones de la celda unidad: $L = 7$ mm, $W = 0,1$ mm, $P = 10$ mm, $\varphi = 25^\circ$. (b) Polarizaciones empleadas.

Con la intención de superar el requerimiento anterior, en este trabajo se persigue obtener los valores de los parámetros del circuito equivalente propuesto en [1], [2] usando un procedimiento puramente teórico (sin conocimiento previo de su respuesta), al menos para alguna estructura sencilla. Para ello, se ha partido del procedimiento propuesto en [3], [4], que es capaz de proporcionar información sobre el comportamiento de la celda unitaria utilizando únicamente métodos analíticos, evitando simulaciones previas. Además, este procedimiento también es capaz de encontrar un circuito equivalente para las estructuras más simples. Con este objetivo, se va a extraer el circuito equivalente de una celda unitaria compuesta por una única ranura estrecha mediante ambos procedimientos: usando la descomposición en excitaciones propias [1], [2], y usando la descomposición multimodal [3], [4]. De esta forma, al comparar ambos circuitos, es posible obtener valores analíticos para los valores propios de esta estructura en particular.

II. ANÁLISIS DE LA CELDA UNIDAD: RANURA ESTRECHA

Se ha elegido una celda unitaria con una geometría sencilla para obtener los parámetros analíticos del circuito equivalente. Esta celda consiste en una ranura estrecha girada 25° en un

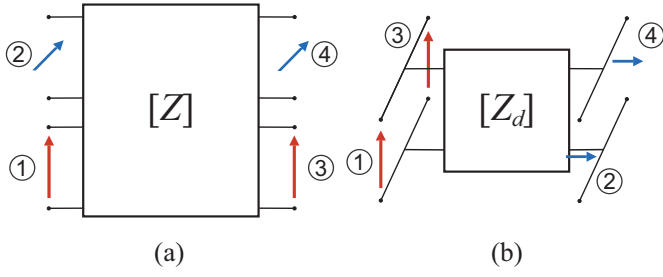


Fig. 2. (a) Representación circuital de una celda de una superficie periódica como tetrapuerto. (b) Circuito equivalente mediante un bipuerto.

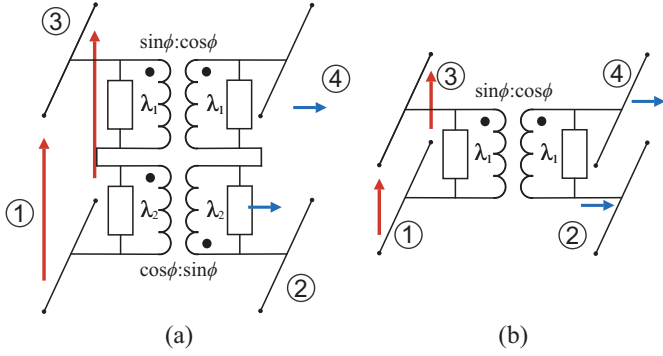


Fig. 3. Circuito equivalente de excitaciones propias. (a) Circuito para una celda unidad arbitraria. (b) Circuito para una ranura estrecha.

plano de conductor eléctrico perfecto rodeado de aire, como se muestra en la Fig. 1(a). Esta celda unitaria se repite en el plano xy para formar la correspondiente superficie periódica. Para simplificar aún más el análisis, se hacen otras suposiciones adicionales, como considerar solo la incidencia normal, el plano metálico como infinitamente delgado y la frecuencia de trabajo como inferior al régimen de difracción. La incidencia normal con polarización arbitraria se puede descomponer en las dos polarizaciones ortogonales incidentes a la superficie (polarizaciones vertical y horizontal) y se va a tratar cada una de estas polarizaciones como puertos diferentes en la estructura, tal y como se muestra en la Fig. 1(b). Todas estas simplificaciones nos permiten reproducir el comportamiento de la celda unitaria utilizando un tetrapuerto como el mostrado en la Fig. 2(a). Además, al tratarse de una estructura sin espesor, la continuidad de los campos implica que la estructura puede modelarse con un único bipuerto [5], como se ilustra en la Fig. 2(b). En consecuencia, los parámetros Z del tetrapuerto cumplirán la siguiente condición:

$$[Z] = \begin{bmatrix} [Z_d] & [Z_d] \\ [Z_d] & [Z_d] \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde

$$[Z_d] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

A. Circuito equivalente: excitaciones propias

El circuito equivalente propuesto en [2] se obtiene a partir de la descomposición en vectores y valores propios del bipuerto (2) de la siguiente forma:

$$[Z_d] = [\lambda_1 \vec{v}_1 \quad \vec{0}][\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]^{-1} + [\vec{0} \quad \lambda_2 \vec{v}_2][\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]^{-1} \quad (3)$$

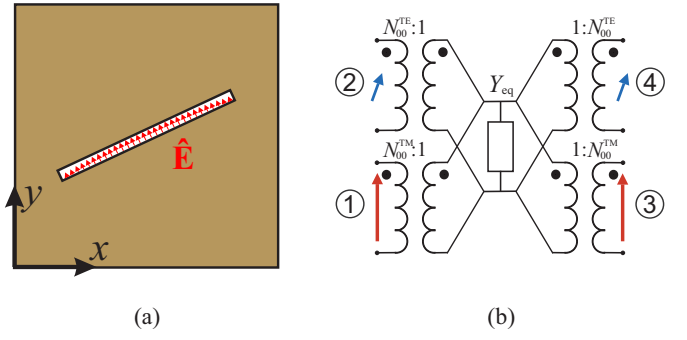


Fig. 4. (a) Perfil de campo arbitrario para la ranura estrecha. (b) Circuito equivalente multimodal.

con λ_1 y λ_2 los autovalores de la matriz, y con los vectores propios, \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , expresados en función del parámetro ϕ

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} ; \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

que se puede calcular a partir de los parámetros del bipuerto (o tetrapuerto) como

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2z_{12}}{z_{22} - z_{11}} \right) \pm k \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

donde k es un entero arbitrario que solo tiene el efecto de intercambiar el orden de los autovalores y autovectores. Además, los autovalores λ_1 y λ_2 también se pueden expresar en función de los parámetros del bipuerto de la siguiente forma:

$$\lambda_1 = \frac{z_{11} + z_{22} + \sqrt{(z_{11} - z_{22})^2 + 4z_{12}^2}}{2} \quad (6)$$

$$\lambda_2 = \frac{z_{11} + z_{22} - \sqrt{(z_{11} - z_{22})^2 + 4z_{12}^2}}{2}. \quad (7)$$

Introduciendo las expresiones de los valores propios en función de ϕ , (4), en (3), se llega a

$$[Z_d] = \lambda_1 \begin{bmatrix} \sin^2 \phi & \frac{\sin 2\phi}{2} \\ \frac{\sin 2\phi}{2} & \cos^2 \phi \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} \cos^2 \phi & -\frac{\sin 2\phi}{2} \\ -\frac{\sin 2\phi}{2} & \sin^2 \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

que, como se explica detalladamente en [1], puede reproducirse con el circuito de la Fig. 3(a). A diferencia de [2], en este caso particular resulta más conveniente usar la forma de impedancia ya que la estructura analizada no tiene matriz de admitancia por tratarse de una apertura en una placa metálica de espesor cero. De hecho, debido a que la ranura considerada es muy estrecha, λ_2 resulta insignificante y su rama puede eliminarse del circuito, quedando el circuito equivalente que se muestra en la Fig. 3(b). Además, como se explica en [2], el parámetro ϕ se corresponderá con el valor de φ , ya que es la dirección de excitación propia de la ranura.

B. Circuito equivalente: expansión multimodal

Partiendo únicamente de un supuesto perfil de campo normalizado en la apertura que forma la ranura estrecha en el plano metálico, \hat{E} , [como muestra la Fig. 4(a)] y que se asume constante con la frecuencia, es posible calcular el circuito equivalente multimodal de la estructura. Para ello, hay que forzar la continuidad de la potencia en la superficie y expresar

los campos eléctrico y magnético en la superficie como desarrollo en serie doble de Fourier (supuesta la superficie periódica e infinita, de periodo P). De esta forma, siguiendo el procedimiento de [4], es posible extraer los parámetros S del tetrapuerto que, al pasarlos a parámetros Z, resultan

$$z_{11} = \frac{N_{00}^{TM^2}}{Y_{eq}} \quad (9)$$

$$z_{21} = \frac{N_{00}^{TM} N_{00}^{TE}}{Y_{eq}} \quad (10)$$

$$z_{22} = \frac{N_{00}^{TE^2}}{Y_{eq}} \quad (11)$$

donde N_{nm}^{TM} y N_{nm}^{TE} son los coeficientes de la serie doble de Fourier extraídos de la siguiente forma:

$$N_{nm}^{TM} = \mathcal{F}\{\hat{\mathbf{E}}\}_{nm} \cdot (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \quad (12)$$

$$N_{nm}^{TE} = \mathcal{F}\{\hat{\mathbf{E}}\}_{nm} \cdot (\mathbf{m}, -\mathbf{n}) = \mathcal{F}\{\hat{\mathbf{E}}\}_{nm} \cdot [(\mathbf{n}, \mathbf{m}) \times \hat{\mathbf{z}}] \quad (13)$$

y la admitancia equivalente, Y_{eq} , definida como

$$Y_{eq} = 2 \sum'_{nm} \left(|N_{nm}^{TM}|^2 Y_{nm}^{TM} + |N_{nm}^{TE}|^2 Y_{nm}^{TE} \right) \quad (14)$$

donde $\mathcal{F}\{\cdot\}_{nm}$ representa los coeficientes de la serie doble de Fourier y (\mathbf{n}, \mathbf{m}) el vector unitario de $n\hat{\mathbf{x}} + m\hat{\mathbf{y}}$. El símbolo prima de la serie indica que se excluye el término $n, m = 0, 0$ y Y_{nm}^{TM} y Y_{nm}^{TE} son las admitancias en espacio libre asociadas a los armónicos de orden n, m para las polarizaciones TM y TE, respectivamente. La topología del circuito equivalente analítico propuesto en [4] se muestra en la Fig.4(b).

C. Comparación de ambos circuitos

Los valores analíticos del circuito de excitaciones propias se pueden extraer a partir de los valores del circuito multimodal. Para ello, solo hace falta extraer los autovalores y autovectores de la matriz de impedancia analítica del circuito obtenido a partir de (9), (10) y (11). El resultado es sorprendentemente sencillo:

$$\sin \phi = N_{00}^{TM} \quad (15)$$

$$\cos \phi = N_{00}^{TE} \quad (16)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{Y_{eq}} \quad (17)$$

$$\lambda_2 = 0. \quad (18)$$

Esto implica que ambos circuitos equivalentes tienen los mismos parámetros, aunque su topología es diferente. De hecho, usando las propiedades de los transformadores ideales, es posible probar estas relaciones usando manipulaciones circuitales. Primero, como se muestra en la Fig. 5(c), el transformador del circuito de excitaciones propias de la Fig. 5(a) se puede dividir en otros dos transformadores en cascada, y las impedancias laterales se pueden colocar entre ambos. Entonces, el paralelo de estas dos impedancias es λ_1 debido a una identidad trigonométrica fundamental, lo que lleva a la Fig. 5(e). Por otro lado, al circuito multimodal de la Fig. 5(b) se le pueden reorganizar sus puertos como en la Fig. 5(d). Posteriormente, al combinar los transformadores idénticos

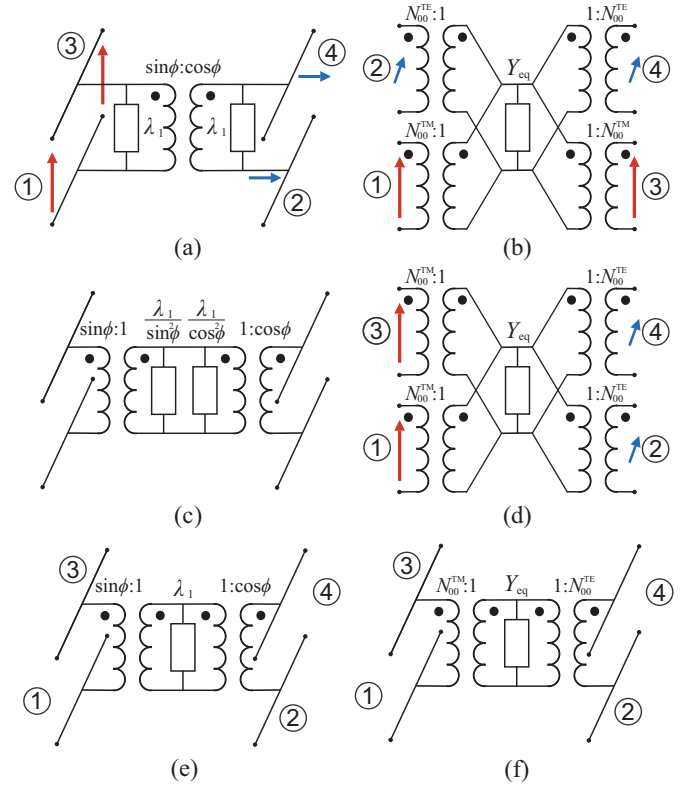


Fig. 5. Manipulación circuital para comparar ambos circuitos equivalentes. (a), (c) y (e). Circuitos equivalentes de excitaciones propias [2]. (b), (d) y (f). Circuitos equivalentes multimodales [4].

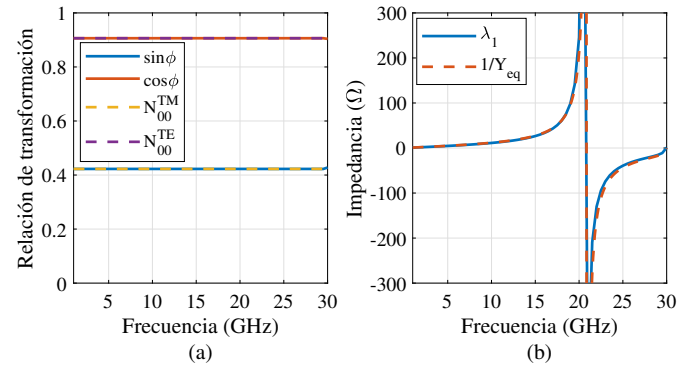


Fig. 6. Parámetros obtenidos con la simulación en HFSS de la celda y obtenidos de forma analítica. (a) Relación de transformación. (b) Impedancia.

como en la Fig. 5(f), resulta el mismo circuito que en la Fig. 5(e) y, por tanto, implicando que las relaciones en (15), (16) y (17) sean así de sencillas.

Los resultados analíticos anteriores se pueden verificar mediante simulación en HFSS. En la Fig. 6 se muestran los parámetros de ambos circuitos equivalentes, donde los valores del circuito de excitaciones propias se han obtenido mediante la simulación en HFSS de la celda unidad mostrada en la Fig. 1(a) rodeada de condiciones de contorno periódicas, mientras que los valores del circuito multimodal se han obtenido a partir del cálculo teórico de (12), (13) y (14) asumiendo un perfil de campo eléctrico en la ranura con forma senoidal. Se puede ver que los parámetros analíticos y simulados son prácticamente idénticos. Del mismo modo, los parámetros S del circuito equivalente analítico están en buena

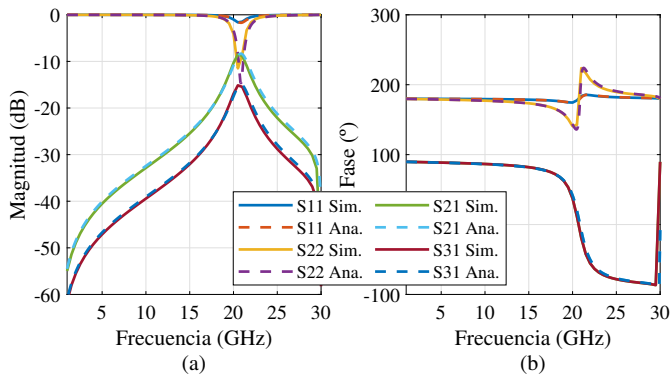


Fig. 7. Parámetros S de la estructura simulada y los obtenidos de forma analítica. (a) Magnitud. (b) Fase.

concordancia con los obtenidos por la simulación, como se muestra en la Fig. 7.

III. CONCLUSIONES

Para un caso sencillo de una celda unitaria que consiste en una única ranura estrecha, se han encontrado, a partir de la extracción del circuito equivalente multimodal, los valores analíticos de los parámetros del circuito equivalente basado en excitaciones propias. En este caso, los circuitos resultan idénticos y la equivalencia entre ambos es inmediata. Esto se debe a que solo existe una excitación propia en la ranura estrecha que se corresponde con la dirección de la ranura. En cualquier caso, esto demuestra que es posible obtener resultados analíticos de las inmitancias del circuito de excitaciones propias utilizando el enfoque de descomposición multimodal. En la presentación de este trabajo se discutirá

la aplicación de este método a otras estructuras simples y a casos donde estén presentes las dos excitaciones propias del circuito.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado en parte por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (MCIU), la Agencia Estatal de Investigación (AEI) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER), Programa Estatal de I+D+i Orientada a los Retos de la Sociedad (RTI2018-097098-J-I00), en otra parte por la Junta de Andalucía PAIDI 2020 (PY2000452), en otra parte por la Universidad de Málaga (UMA20-FEDERJA-001) y en otra parte por la Unión Europea - NextGenerationEU bajo el programa de Ayudas para la recualificación del sistema universitario español (Margarita Salas).

REFERENCIAS

- [1] A. Hernández-Escobar, E. Abdo-Sánchez, P. Mateos-Ruiz, J. Esteban, T. M. Martín-Guerrero, and C. Camacho-Peñalosa, "An equivalent-circuit topology for lossy non-symmetric reciprocal two-ports," *IEEE J. Microw.*, vol. 1, no. 3, pp. 810–820, 2021.
- [2] A. Hernández-Escobar, J. Esteban, E. Abdo-Sánchez, T. M. Martín-Guerrero, and C. Camacho-Peñalosa, "Equivalent-circuit modeling of lossless and lossy bi-periodic scatterers by an eigenstate approach," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 70, no. 12, pp. 11 790–11 800, 2022.
- [3] F. Mesa, R. Rodríguez-Berral, and F. Medina, "Unlocking complexity using the ECA: The equivalent circuit model as an efficient and physically insightful tool for microwave engineering," vol. 19, no. 4, pp. 44–65, Jun. 2018.
- [4] C. Molero, A. Alex-Amor, F. Mesa, A. Palomares-Caballero, and P. Padi-lla, "Cross-polarization control in FSSs by means of an equivalent circuit approach," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 99 513–99 525, 2021.
- [5] G. Pérez-Palomino and J. E. Page, "Bimode Foster's equivalent circuit of arbitrary planar periodic structures and its application to design polarization controller devices," vol. 68, no. 7, pp. 5308–5321, 2020.