IX CONGRESO SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DELAS MATEMÁTICAS "THALES"

Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio: De la abstracción a la realidad

San Fernando 7, 8, 9 y 10 de septiembre de 2000

ACTAS

IX CONGRESO SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS "THALES"

Matemáticos y Matemáticas para el tercer milenio: de la abstracción a la realidad

San Fernando 7, 8, 9 y 10 de Septiembre de 2000.

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ
2000

SOCIEDAD ANDALUZA
DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
THALES

Editores:

Antonio Gámez Mellado
Cristóbal Macías Gil
Carlos O. Suárez Alemán

Edición:

Servicio de Publicaciones de la
Universidad de Cádiz

Portada:

Diseño del cartel del Congreso
Javier González López-Arza

Imprime:

Servicio de Autoedición e Impresión - CITI
Universidad de Cádiz

I.S.B.N.: 84 – 7786 – 675 - 9

Depósito Legal: CA – 713/2000

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" agradece a todas las instituciones públicas y privadas el que hayan hecho posible el desarrollo de este Congreso, así como la edición de estas Actas.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" integra a un grupo de personas dedicadas a la potenciación y mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Comunidad Andaluza.

El Congreso de la Sociedad "Thales" ha ido creciendo en calidad y prestigio desde que se inició el recorrido por las distintas provincias. Por tanto, tras comenzar aquí en Cádiz el ciclo con el primer Congreso de la Sociedad, y haber terminado el itinerario por las ocho provincias andaluzas, retomamos el ciclo con la celebración del noveno Congreso.

Cuando nos planteamos la celebración de este Congreso, teníamos claro que deberíamos incidir fundamentalmente en las nuevas perspectivas que la sociedad plantea en la forma y en los modos de enseñar Matemáticas. Tenemos que ser conscientes de que vamos a iniciar un nuevo milenio, y que la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas han de conjugar perfectamente el lenguaje abstracto de las Matemáticas y las necesidades del individuo en la vida cotidiana.

El cambio de milenio debe suponer una renovación fundamental en la forma y en los modos de la enseñanza de las Matemáticas; la Sociedad demanda de los profesionales dedicados a la enseñanza nuevas estrategias para aprender y enseñar.

Creímos que también deberíamos aprovechar la celebración del año mundial de las matemáticas, AMM 2000, y así hemos pretendido que parte de este Congreso se celebre en la calle, ofertando exposiciones, talleres, etc. a todos los que estén interesados en el mundo de las Matemáticas.

La celebración del Congreso en la Ciudad de San Fernando no es casual, se debe fundamentalmente a la larga tradición de esta ciudad en el mundo de las matemáticas, y además al entusiasmo e interés mostrado por todo el equipo de gobierno de su ayuntamiento.

Junto a los grupos temáticos tradicionales (matemáticas en educación primaria, secundaria, universidad, ...) hemos incorporado otros como educación a distancia, nuevas tecnologías, transversalidad, tratamiento de la diversidad, ... Hemos considerado muy importante la incorporación en el Congreso de talleres en los que se aborden temas tan interesantes como la elaboración de materiales para el aula, evaluación de software educativo, calculadoras, matemática recreativa, etc.

En suma, hemos querido que el Congreso sea una actividad que se integre en la vida diaria de la ciudad, y que los congresistas tengan la oportunidad de conocer el talante y hospitalidad de San Fernando. Además hemos organizado desde el Congreso un calendario de visitas al Real Instituto y Observatorio de la Armada de San Fernando, que es lugar y sede de infinidad de actividades de carácter científico y matemático.

Deseamos acabar esta presentación agradeciendo una vez más a todas las instituciones colaboradoras su participación, y a todos los ponentes su esfuerzo por comunicar al resto de congresistas, y a la sociedad en general sus experiencias innovadoras en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la Matemáticas.

Saludos

El Comité Organizador.

INSTITUCIONES Y ENTIDADES COLABORADORAS

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE SAN FERNANDO

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CIENCIA DE LA JUNTA DE ANDALUCIA

EXCMA. DIPUTACIÓN PROVINCIAL DE CÁDIZ

SERVICIO DE EXTENSIÓN UNIVERSITARIA Y RELACIONES INSTITUCIONALES DE LA UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

UNICAJA

PROYECTO SUR

CENTROS DE PROFESORADO DE CÁDIZ

CASIO

RENFE

TELEFÓNICA

VIAJES RICO S.A.

O. N. O.

IX CONGRESO SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS "THALES"

CONFERENCIAS

VIAJE POR LAS MATEMÁTICAS EN LA ISLA DE LEÓN

F. JAVIER PÉREZ FERNÁNDEZ

En sus orígenes más inmediatos, La Villa de la Real Isla de León, titulada ciudad con el nombre de San Fernando en 1813, está íntimamente vinculada al asentamiento en su suelo del Departamento de Marina en la segunda mitad del siglo XVIII. La Marina Ilustrada será motor de la ciencia en España, particularmente de la astronomía. La Escuela de Guardias Marinas, el Observatorio y la necesidad de formar en el estudio de "ciencias sublimes" a personas especialmente capacitadas, establecen una singularísima relación entre la ciudad y las matemáticas.

Tras muy diversos avatares históricos, la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando custodia en la actualidad alrededor de treinta mil volúmenes, entre los que encontramos los libros más representativos de la historia de las matemáticas hasta el siglo XX y las más importantes revistas científicas que desempeñaron un papel fundamental en el proceso de creación de las matemáticas durante los siglos XVII al XIX. Estas obras nos permiten diseñar múltiples itinerarios y con todos ellos está garantizada la realización de un apasionante viaje por el mundo de las matemáticas. El título de esta charla es una invitación o si se prefiere, en términos del mercado, un reclamo publicitario. "No lo dude, realice cualquiera de nuestras excursiones, saldrá satisfecho".

EL LEGADO MATEMÁTICO DEL SIGLO XX

JUAN LUIS ROMERO ROMERO

El Siglo XX ha aportado a la Historia de las Matemáticas el periodo de mayor desarrollo. Nunca se han producido más y mejores matemáticas que en este siglo. En la conferencia se comentan algunos resultados que, sin lugar a dudas, han sido fundamentales para el desarrollo matemático de este siglo, utilizando un mínimo de nomenclatura técnica.

A comienzos de este siglo los cimientos de la matemática estaban tambaleándose; muchos trabajos sobre el infinito y la fundamentación de las matemáticas de finales del S. XIX estaban puestos en tela de juicio por algunos importantes matemáticos y aparecían diversas paradojas, como la de B. Russell. La axiomática de la teoría de conjuntos que hoy más se utiliza, y que resuelve muchos de los problemas de la fundamentación de las matemáticas, fue desarrollada por Zermelo, Fraenkel y Skolem. Uno de los resultados fundamentales del conocimiento universal se debe a K. Gödel, quién probó la existencia de proposiciones indecidibles en cualquier axiomática que contenga a la aritmética. Se comentan también otros resultados de K. Gödel y P. Cohen sobre el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Asimismo se comenta el papel del grupo N. Bourbaki en la matemática actual.

El concepto de grupo, que llegó a la mayoría de edad con los trabajos de Galois, y otros autores, durante el siglo XIX, tenía pendiente un problema importante: la clasificación de los grupos finitos simples (grupos cuyos únicos subgrupos normales son los triviales). De alguna manera, los grupos simples son las piezas que permiten construir todos los grupos finitos, de forma parecida a la descomposición de un número en factores primos. Dicha clasificación se culminó a principios de los años 80 gracias a una ingente labor de muchos matemáticos, en la última fase coordinados por D. Gorenstein. Los artículos que permiten llevar a cabo esa clasificación tienen una extensión de unas 15.000 páginas.

Después de 350 años de permanecer como problema abierto, el llamado último teorema de Fermat (que afirma que la ecuación $a^n + b^n = c^n$ no tiene soluciones con a,b,c y n enteros, n□□fue probado por el matemático británico Andrew Wiles en la década de los 90. Se pone fin a miles de intentos de demostración, a lo largo de siglos, por parte de numerosos matemáticos y aficionados de todas las categorías. La demostración de Wiles hace uso de técnicas muy diversas que aparentemente nada tienen que ver entre sí: curvas elípticas, funciones modulares, representación de grupos, etc.

La creación de los ordenadores y el importante papel que éstos desempeñan en la vida cotidiana es fruto de la labor de numerosos matemáticos: Alan Turing puso las bases teóricas de los ordenadores en los años 30, J. von Neumann propuso el diseño lógico de los ordenadores actuales, los algoritmos matemáticos que usan los ordenadores han sido mayoritariamente desarrollados por matemáticos, etc. Con ordenadores se ha resuelto el viejo problema de colorear cualquier mapa con sólo cuatro colores. Ante nosotros, queda el reto de utilizar de forma óptima los ordenadores en la educación matemática.

INTERNET: TECNOLOGÍA, INFORMACIÓN Y EDUCACIÓN

JOSÉ F. QUESADA MORENO

RESUMEN:

Tras los tres primeros años de funcionamiento del proyecto Thales Internet (1997 a 2000) este trabajo lleva a cabo una valoración del proyecto, comenzando en primer lugar con un estudio de la funcionalidad de Internet desde el punto de vista de su utilización en el mundo de la educación. Desde este enfoque se diferencia entre infraestructura tecnológica, distribución de documentación o información y desarrollo de actividades de educación a través de Internet.

Centrados ya en el aspecto educativo mismo, se presentan los principales conceptos involucrados tales como la comunicación a través de ordenador, la idea de campus virtual y estudiantes distribuidos, y se analizan las tres generaciones de educación a distancia, prestando un especial interés a la denominada revolución digital de la educación a distancia.

Utilizando este marco como referencia, el tercer gran objetivo es una valoración global del proyecto Thales CICA Internet, especialmente en su tercer año de desarrollo (1999-2000) donde se han convocado 9 cursos de formación del profesorado a distancia, en el que la matrícula inicial involucró a más de 800 profesores de todas las áreas de conocimiento y niveles de la comunidad autónoma andaluza.

1.- INTRODUCCIÓN

Es indudable que Internet se ha convertido en uno de los temas más importantes, o al menos, más discutidos y utilizados en la pedagogía más reciente. Una consulta simple a la base de datos ERIC, cuyo principal área es la Educación, del término "Internet" en el período 1992-1999 ha generado 5.283 registros, es decir, una media de casi 2 publicaciones diarias (artículos, libros, tesis doctorales, etc.) relacionadas con Internet y Educación.

Pero en muchas ocasiones Internet aparece como una entelequia lejana y poco conocida de la que se aprovecha la moda social para justificar un proyecto o una publicación, o en el peor de los casos, para ser utilizada en la demagogia política, donde no suele ser común la necesaria modestia con la que se deben abordar tecnologías emergentes cuyas capacidades pueden ser prometedoras pero no suficientemente analizadas y evaluadas.

Varios autores (Monke 1998, Dreyfus 1998, Talbott 1998, Harris 1998, Haupptman & Hannah 1998, Grineski, 1999, Austin & Brown 1999), en los últimos años, están llamando la atención sobre la necesidad de un estudio serio y crítico de las posibilidades que Internet ofrece como marco, entorno o recurso didáctico, pero conociendo previamente los retos tanto tecnológicos como pedagógicos, así como las limitaciones y los problemas generados por dicho modelo educativo.

Por otro lado, son muchas las ventajas que Internet está incorporando al mundo de la educación, que van desde la que se denomina "Revolución Digital de la Educación a Distancia" (Leonard 1998) hasta la superación de fronteras geográficas e idelógicas de la distribución libre de la mayor biblioteca de la historia de la humanidad, pasando por los objetivos de un gran campus universal (Universal Campus Network) o la educación global (Pinhey 1998), distinta, pero muy cercana a los riesgos de la globalización de la educación.

En este contexto parece adecuado por tanto comenzar con un esfuerzo inicial de análisis de los aspectos involucrados en la utilización de Internet con fines pedagógicos. De esta forma, el primer objetivo de este trabajo es diferenciar tres niveles, funcionalmente superpuestos, para la descripción y uso de Internet en la educación.

2.- TECNOLOGÍA, DOCUMENTACIÓN Y EDUCACIÓN

Siguiendo la diferenciación ya clásica en ciencias de la computación que distingue entre:

- Datos,
- Información, y
- Conocimiento

se pueden establecer tres niveles funcionales básicos para el estudio de Internet en el campo de la educación:

- Infraestructura tecnológica,
- Distribución de documentación,
- Educación.

En cuanto a infraestructura tecnológica, Internet constituyó inicialmente uno de los más loables esfuerzos académicos para lograr una gran red de redes orientada a la comunicación robusta de ordenadores. Aunque con un origen de interés militar (diseño de un sistema distribuido y descentralizado de comunicación robusta), inmediatamente el centro de gravedad de Internet se desplazó al entorno universitario académico, donde se desarrolló durante más de dos décadas hasta la llegada de la comercialización brutal de esta tecnología. Comercialización que está poniendo en peligro los principios básicos de Internet en determinados contextos.
En cualquier caso, el primer nivel de Internet es el relacionado con la disponibilidad de una adecuada infraestructura tecnológica. Cualquier proyecto que se plantee objetivos por encima de este nivel debe tener en cuenta las funcionalidades y limitaciones que la tecnología disponible impone.
De alguna forma se puede considerar que la mayor parte de la historia de Internet está centrada en el diseño de esta infraestructura tecnológica.
Sólo con la aparación de técnicas que facilitaban la instalación de servidores de documentación, lenguajes para la especificación de dicha documentación y protocolos para su distribución a través de la red, Internet dio el salto al segundo nivel funcional descrito.
Aunque esta funcionalidad está latente en los sistemas de correo electrónico o en los servidores FTP, fue realmente la aparición del sistema Gopher, y más en concreto la tecnología WWW (específicamente el lenguaje HTML y el protocolo HTTP, junto con la tecnología cliente-servidor), la que introdujo y consolidó a mediados de la década de los 90 la distribución de documentación como una función básica de Internet.
Esta función constituye actualmente la principal aportación de Internet al mundo de la educación.
Ahora bien, el siguiente reto, basado evidentemente en los dos niveles funcionales anteriores, es la utilización de Internet no sólo como entorno (infraestructura tecnológica) o como recurso didáctico (distribución de información o documentación) sino como sistema educativo: campus virtual, estudiantes distribuidos, educación global, enseñanza a distancia, etc.
Esta funcionalidad está siendo explorada en los últimos años por multitud de proyectos, pero su dependencia con los niveles anteriores y especialmente con la necesidad de desarrollo de tecnología específica, así como el carácter parcial y reciente de estos proyectos dificulta la obtención de conclusiones generales. Así pues, las siguientes secciones pretenden llevar a cabo una exploración a través de los principales conceptos implicados.
La sección 3 de este forma presenta la noción de "Comunicación a través de ordenadores" (*Computer-mediated communication*), en torno al cual surgen conceptos como aprendizaje situado, estrategias cognitivas en un contexto colaborativo, soporte para tutorías basadas en casos, aprendizaje asistido por ordenador (*CAL: Computer Assisted Learning*) e interacciones de los modelos de aprendizaje con la inteligencia artificial, etc.
A continuación, la sección 4 presenta la noción de "Estudiantes Distribuidos" (*Distributed Learners*), en torno a la cual se puede centrar la discusión de conceptos tales como Campus Virtual, utilización de redes de comunicación como modelo de enseñanza, materiales didácticos sobre la Web, etc.
A grandes líneas, podemos considerar que estas dos secciones (3 y 4) se sitúan en el triángulo interdisciplinar definido por la Informática o ciencias de la computación, las áreas concretas que constituyen el cuerpo de conocimiento que se quiere enseñar (matemáticas, física, filosofía, etc.) y la Didáctica (incluyendo los campos específicos de didáctica de cada materia), tal y como se muestra en la Figura 1.

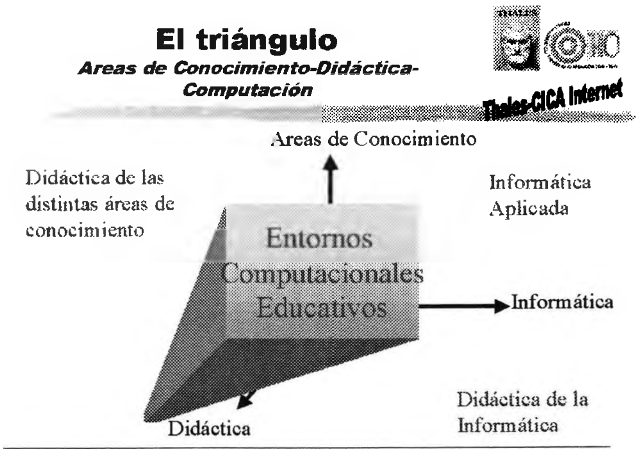


Figura 1: El triángulo Áreas de Conocimiento, Didáctica, Computación

3.- EDUCACIÓN, MATEMÁTICAS, COMUNICACIÓN Y ORDENADORES

El proceso mismo de enseñanza/aprendizaje es un proceso básicamente comunicativo. Los procesos mismos de enseñanza, aprendizaje, evaluación, etc., no pueden comprenderse por completo si no se tiene en cuenta la dimensión lingüística del conocimiento que se transmite así como del proceso didáctico que suponen dichas tareas de enseñanza, evaluación, etc. En el libro publicado a partir de las comunicaciones presentadas en el Grupo de Trabajo sobre "Matemáticas y Lenguajes" (Quesada 1998) del ICME 8, he resumido esta idea en lo que denominé "Tesis de la radicalidad lingüística del proceso didáctico":

> *"Esta dimensión heurística de la matemática cobra mayor importancia cuando nuestro interés se centra en la didáctica de la matemática. Al igual que todo proceso educativo, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una actividad comunicativa.*
>
> *Es decir, utilizando la nomenclatura de Austin y Searle, enseñar es un acto de habla.*
>
> *...*
>
> *El proceso enseñanza-aprendizaje posee una dimensión lingüística primitiva o irreductible.*
>
> *Desde un punto de vista didáctico, los profesores asumen habitualmente que el conocimiento es útil si puede ser expresado en algún lenguaje convencional. Es decir, los profesores asumen que alguien conoce algo si él o ella es capaz de explicar lo que conoce. Asimismo, toda comunicación en el aula se realiza por medio de un lenguaje: los profesores explican ideas, recomiendan estrategias, ...; los estudiantes leen, calculan, escriben, preguntan, ...; los profesores oyen lo que los alumnos dicen, leen lo que escriben, ...*
>
> *En suma, el lenguaje es el soporte que fija los límites de nuestra comunicación y, probablemente, los límites de nuestro conocimiento" (Quesada 1998, p. 7)*

El siguiente problema que hay que enfrentar aparece cuando el proceso, radicalmente lingüístico, de enseñanza/aprendizaje está mediatizado por el uso de ordenadores, en lo que se ha denominado "Comunicación a través de ordenadores" (*CMC: Computer-mediated Communication*) (Tomie & Barbieri 1997). Las consecuencias y características psicológicas de este tipo de procesos han sido estudiados para múltiples contextos educativos: enseñanza superior (McAteer et al 1997), cursos convencionales universitarios (Light et al 1997), escuelas de verano virtuales (Issroff & Eisenstadt 1997), etc.
Una de las aplicaciones más interesantes de este campo aparece con su integración con la telemática (redes de ordenadores). En este caso estaríamos ante entornos de comunicación a través de ordenadores en los que intervienen múltiples componentes del proceso enseñanza-aprendizaje, y la comunicación misma entre todos ellos se soporta mediante el uso de una red telemática. Uno de los proyectos más interesantes llevados a cabo a este nivel es POLARIS (Trentin 1996, 1997).

> *"The main aim of an on-line course is to bridge the geographical and socio-cognitive distance between individual students and all other components that are involved in the educational process -tutors, experts, other students, educational material, ans so forth. The intensive use of computer conferencing in particular and computer mediated communication in general can reduce and in some cases even eliminate this distance and can make the educational process considerably more flexible." [Trentin 1997, p. 269] 1*

Pero quizás una de las conclusiones más importantes que la investigación llevada a cabo en esta línea está obteniendo es la necesidad de situar las tecnologías como una herramienta y no como un fin en sí mismas, y en concreto como una herramienta cuya meta fundamental es ayudar al estudiante a aprender de una forma más eficiente y efectiva. Para Brna & Dicheva (1998) ayudar a otros a aprender tiene que ver con el ofrecimiento de mejores canales de comunicación así como mejores herramientas para la exposición y la exploración del dominio que constituye el material primario para el aprendizaje, lo que sugiere que el aprendizaje tiene más que ver con la comunicación que con el contenido mismo. E indican enfáticamente estos autores en la editorial que da comienzo a un número especial del *Journal of Computer Assisted Learning titulado Meeting the challenge of new technologies* que

---

[1] El principal objetivo de un curso en la red (on-line) es superar la distancia geográfica y socio-cognitiva que existe entre los estudiantes y todos los demás componentes implicados en el proceso educativo: tutores, expertos, otros estudiantes, material educativo, etc. El uso intensivo de conferencias a través de ordenador en particular y de la comunicación a través de ordenador en general puede reducir y en algunas situaciones incluso eliminar esta distancia y puede hacer mucho más flexible el proceso educativo.

"En breve, esperamos que las nuevas tecnologías sean un apoyo para el proceso de aprender a comunicarse tanto como para el aprendizaje de contenidos únicamente".

4.- Educación a Distancia, Campus Virtuales y Estudiantes Distribuidos

La idea de educación a distancia posee más de un siglo de historia, habiéndose distinguido tres generaciones o modelos (Kearsley 1995):

1. La primera generación de educación a distancia comienza a finales del siglo XIX asociada a la aparición de nuevas y más eficientes técnicas de impresión y al desarrollo del ferrocarril, todo lo cual facilitó la producción y distribución de materiales de estudio.
2. La segunda generación, también denominada generación multimedia, comienza en los años 50, y se caracteriza por la incorporación de diferentes medios de producción del material didáctico: material impreso, programas de radio y televisión, cintas de video, y en algunos casos, software específico.

No obstante, las dos generaciones se caracterizan por estrategias de interacción profesor-alumno muy limitadas y por la inexistencia de una interacción alumno-alumno. El principal objetivo que persiguen estos modelos de educación es la superación de la barrera geográfica.

3. Por su parte, la tercera generación de educación a distancia supone un importante cambio metodológico desde un punto de vista didáctico: la fuerza que conduce la tercera generación es la redefinición del aprendizaje como una actividad social, realizada a distancia mediante el uso inevitable de la tecnología. En terminología de educación a distancia, estos sistemas se denominan de educación en línea (on-line), una definición que deja clara la importancia del uso de redes de ordenadores en el proceso de aprendizaje (Trentin 1997).

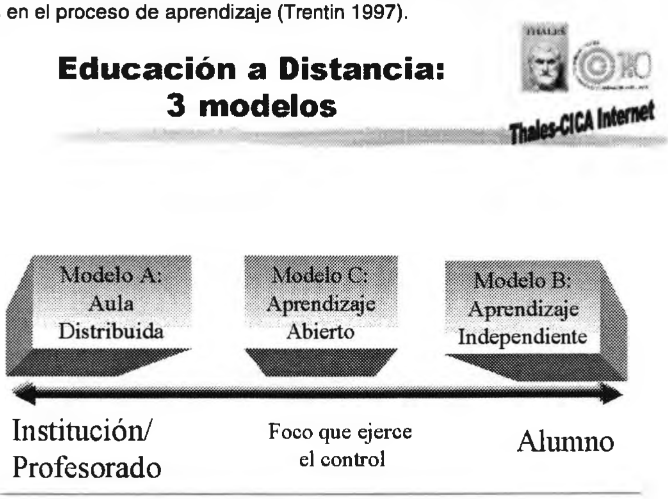


Figura 2: Modelos de Educación a Distancia

Esta nueva concepción de la educación a distancia, dependiente del cambio conceptual operado sobre la noción de aprendizaje, y posibilitada por una considerable infraestructura tecnológica ha permitido la aparición de las nociones de Campus Virtual y Estudiantes Distribuidos.

Los principales temas que la investigación en esta área ha resaltado son:

- El problema de la especificación del diseño pedagógico de material multimedia interactivo y de aplicaciones telemáticas específicas desarrolladas para su uso en la educación (Koper 1998), lo que a su vez enlaza con los problemas relativos al aprendizaje situado (Choi & Hannafin 1995).
- El diseño de intefaces gráficas que aumenten la motivación del alumno (Stoney & Wild 1998).

5.- El proyecto Thales-CICA-Internet (1997-99): Enseñanza a Distancia a través de Internet

Las secciones anteriores han presentado las características principales de lo que podemos denominar entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje a distancia mediante un soporte telemático, y se han destacado los principales puntos de interés de la investigación en este área.

Esta sección presentará sucintamente las principales características del proyecto Thales-CICA-Internet (http://thales.cica.es) para la formación a distancia del profesorado a través de Internet, desarrollado durante los cursos académicos 1997-98, 1998-99 y 1999-2000.

El proyecto se sitúa en la línea de otros trabajos descritos en la literatura:

1. El proyecto JITOL (Just-in-time Open Learning) (Lewis 1995) auspiciado por la Comisión Europea y dirigido al aprendizaje ocupacional.
2. El Open University´s Virtual Summer School (Issroff & Eisenstadt 1997).
3. STILE (Students' and Teachers' Integrated Learning Evironment) (Wilson & Whitelock 1997).
4. El proyecto POLARIS (Trentin 1997) llevado a cabo por el Institute for Educational Technology del Consejo de Investigación de Italia.

Durante los tres cursos académicos de duración del proyecto Thales-CICA-Internet se han realizado 1, 3 y 9 cursos respectivamente. Centrándonos en el último año, los principales números que resumen dicha convocatoria de cursos son:

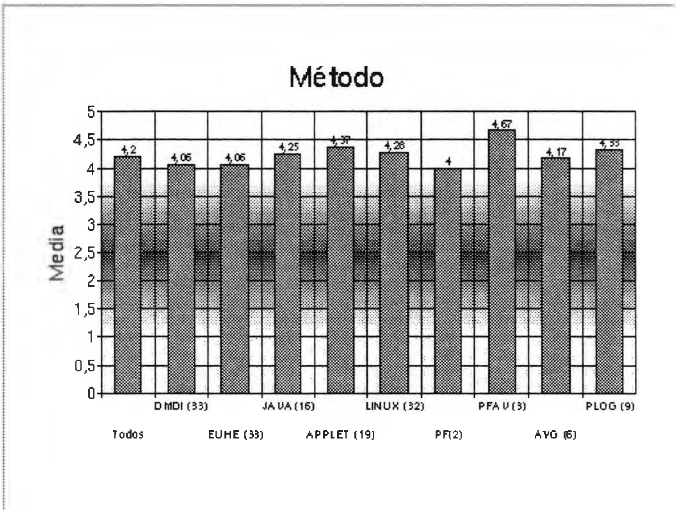
- 9 cursos, 15 profesores
- 947 personas solicitaron 2418 preinscripciones
- 715 personas matriculadas, 911 matrículas
- 199 bajas por no asistencia a la sesión inicial
- 282 altas como libre-leyentes
- 823 personas involucradas inicialmente en los cursos

Los cursos realizados han sido:

1. ED99/01-dmdi: Diseño de Material Didactico para Internet
2. ED99/02-euhe: Extensiones y utilidades de HTML para la enseñanza
3. ED99/03-java: El lenguaje de programación Java: Diseño de Aplicaciones Interactivas para Educación en Internet
4. ED99/04-web: Java, Web y Applets. Programación de Aplicaciones Interactivas Didácticas mediante Applet s de Java para su utilización en la Web
5. ED99/05-linux: Linux como entorno de trabajo en un centro educativo
6. ED99/06-pf: La programación funcional en la formación del profesor de Ciencias Experimentales y Matemáticas
7. ED99/07-pfav: Programación Funcional Avanzada
8. ED99/08-ayg: Una Aproximación al Algebra y la Geometría
9. ED99/09-plog: Aportaciones de la Lógica y la Programación a la Enseñanza

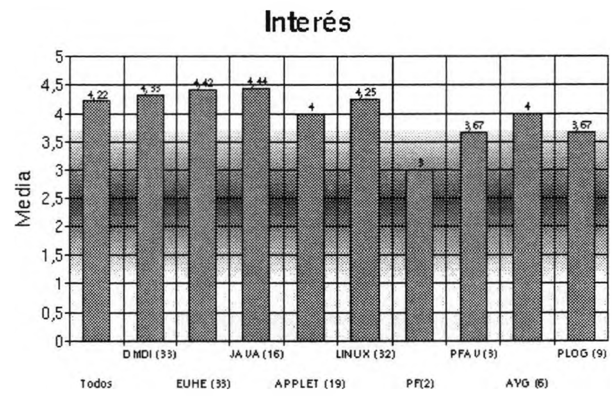
Entre los aspectos más importantes que merecen destacarse se encuentra la valoración obtenida tras la evaluación por parte de los participantes en esta convocatoria. En concreto, mostramos a continuación los resultados de la evaluación para los nueve cursos convocados, para tres de los aspectos más importantes de los cursos:[2]

1. Método informático utilizado para la realización de los cursos: facilidad de conexión, claridad del modo de organización de la información en el servidor, utilidad del sistema de publicación remota, etc.

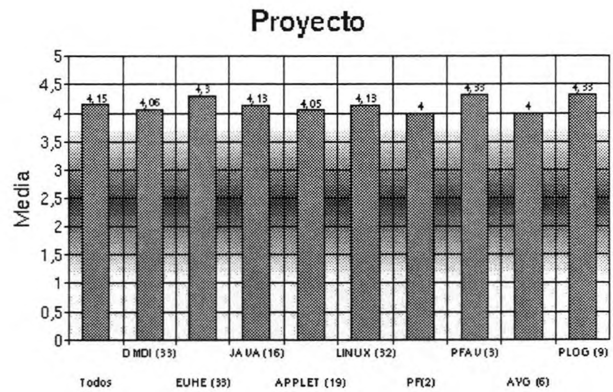


2. Interés del curso: aplicación de los contenidos aprendidos en la labor docente, conveniencia para su formación, etc.

[2] Los gráficos correspondientes a la evaluación han sido generados por Francisco Villegas, profesor del curso ED99-05-LINUX: Linux como entorno de trabajo en un centro educativo.



3. Valoración global de la realización del proyecto: oferta de cursos, sistema de inscripción, criterios de administración.



Otro de los aspectos más destacables de los cursos es la puesta en funcionamiento de un sistema de tablón de anuncios para para la formación de grupos de trabajo dirigidos al desarrollo de prácticas. Se trata de una experiencia dirigida a la interacción directa entre los participantes en los cursos.

Por otro lado, todos los trabajos de prácticas desarrollados por los participantes de algunos de los cursos (en concreto los cursos 1 al 4 del listado anterior), junto con los trabajos obtenidos en las convocatorias anteriores han pasado a formar parte del banco de recursos didácticos del servidor web de Thales:

http://thales.cica.es/rd

Comité de Programa

D. Antonio Aranda Plata
Dª Pilar Azcárate Goded
D. Luis Berenguer Cruz
Dª Encarnación Castro Martínez
D. Antonio Gámez Mellado
D. Salvador Guerrero Hidalgo
D. Cristóbal Macías Gil
D. Pedro J. Martínez Fernández
D. Carlos O. Suárez Alemán

Comité Local de Organización

Dª Lola Ariza Cabrera
D. Antonio Baeza Salas
Dª Francisca Borrego Fuentes
D. Antonio Caravaca Barreno
D. José Mª Chacón Losada
D. Antonio Gámez Mellado
D. Cristóbal Macías Gil
D. Miguel Monteoliva Sánchez
Dª Cinta Nogueiro Ceada
D. Francisco Romero Barea
D. Carlos O. Suárez Alemán
Dª Teresa Valdecantos Dema

CONCLUSIÓN

Este trabajo ha abordado la utilización de la red telemática Internet como recurso didáctico (infraestructura tecnológica) para el desarrollo de actividades de formación a distancia.

En primer lugar se ha llevado a cabo un estudio de las principales líneas de investigación en este campo y se han presentado las nociones de comunicación a través de ordenador, aprendizaje asistido por ordenador, educación a distancia, campus virtuales, entornos interactivos de enseñanza-aprendizaje, etc.

La segunda parte del trabajo ha presentado las características principales de las actividades de formación a distancia a través de Internet para profesores llevada a cabo dentro del proyecto Thales-CICA-Internet.

BIBLIOGRAFÍA

Austin, M. J. & L. D. Brown. 1999. Internet plagiarism: developing strategies to curb student academic dishonesty. *Internet and Higher Education*, **2(1)**, 21-33.

Brna, P. & D. Dicheva. 1998. Guest Editorial: Meeting the challenge of new technologies. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**: 81-82.

Choi, J. & M. Hannafin. 1995. Situated cognition and the culture of learning. *Educational Research,* **18(1):** 32-42.

Dreyfus, H. L. 1998. Education on the Internet: Anonymity vs. Commitment. *Internet and Higher Education*, **1(2),** 113-24.

Grineski, S. 1999. Questioning the role of technology in higher education: why is this road less traveled? *Internet and Higher Education*, **2(1)**, 45-54.

Harris, M. H. 1998. Is the revolution now over, or has it just begun? A year of the Internet in Higher Education. *Internet and Higher Education*, **1(4)**, 243-51.

Hauptman, R. & R. L. Hannah. 1998. Networked pedagogy: some misperceptions. *Internet and Higher Education*, **1(3)**, 231-8.

Issroff, K. & M. Eisenstadt. 1997. Evaluating a virtual summer school. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 245-252.

Kearsley, G. 1995. Three generations of Hypertext: lessons learned from the TIP Project. *Educational Technology Review*, **4**: 33-37. (Consultar http://gwis2.circ.gwu. edu/~Kearsley)

Koper, E. J. R. 1998. A method and tool for the design of educational multimedia material. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**: 19-30.

Leonard, D. C. 1998. The Web, The Millennium, and the Digital Evolution of Distance Education. *Technical Commnication Quarterly*, **8(1)**, 9-20.

McAteer, E. A. Tolmie, C. Duffy & J. Corbett. 1997. Computer-mediated communication as a learning resource. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 219-227.

Lewis, R. 1995. The JITOL concept in the field of professional knowledge exchange. En: P. Held & W. Kugermann: *Telematics for Education and Training.* IOS Press. Pp.270-276.

Light, P., C. Colbourn & V. Light. 1997. Computer mediated tutorial support for conventional university courses. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 228-235.

Monke, L. 1998. Computers in School: Moving Education Out of the Child into the Machine. *Internet and Higher Education*. **1(2)**, 147-55.

Pinhey, L. A. 1998. *Global Education: Internet Resources*. ERIC Digest. EDO-SO-98-3. Office of Educational Research and Improvement ((ED), Washington, DC.

Quesada, J. F. (ed) 1998. *Mathematics and Languages: Logic, Semiotic, Social and Computational Perspectives. Matemáticas y Lenguajes: Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional* (edición bilingüe: castellano-inglés). SAEM Thales: Sevilla.

Quesada, J. F. 1999. El Proyecto Thales-CICA-Internet: Internet como recurso didáctico y como infraestructura para la educación a distancia. Ponencia invitada al IX Congreso JAEM´99 (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas). Lugo, Septiembre de 1999.

Stoney, S. & M. Wild. 1998. Motivation and interface design: maximising learning opportunities. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**: 40-50.

Talbott, S. 1998. Why is the Moon Getting Further Away? Helping the Child Connect to the World. *Internet and Higher Education*, **1(2)**, 136-46.

Tomie, A. & S. Barbieri. 1997. Guest Editorial: Computer-mediated communication in Higher Education. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 207-209.

Trentin, G. 1996. Internet: does it really bring added value to education? *International Journal of Educational Telecommunications*, **2(2/3)**: 97-106.

Trentin, G. 1997. Telematics and on-line teacher training: the POLARIS Project. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 261-270.

Wilson, T. & D. Whitelock. 1997. Monitoring a CMC environment created for distance learning. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**: 253-260.

LA CONSTRUCCIÓN NUMÉRICA: ¿DE LO CONCRETO A LO ABSTRACTO?

(Dos consideraciones psicológicas y una sugerencia pedagógica)

MANUEL ALCALÁ HERNÁNDEZ

Quisiera agradecer a la organización de este IX Congreso la distinción que me hace al invitarme a participar en el mismo. Y aprovechar la ocasión para intentar comunicar ciertas ideas sobre las que vengo trabajando desde hace tiempo. En especial dos consideraciones de carácter psicológico y una propuesta de tipo pedagógico.

La primera de ellas se refiere a la archiconocida sentencia que afirma que las matemáticas se aprenden yendo "de lo concreto a lo abstracto" . La segunda concierne a las consecuencias que tiene para el aprendizaje matemático el aprendizaje de (la construcción y uso de) códigos notacionales. Finalmente, haré unos comentarios de carácter pedagógico acordes con las dos consideraciones anteriores.

Situémonos, por ejemplo, en el primer ciclo de la ESO. Entremos, ficticiamente, en un aula en la que un esforzado profesor está trabajando con sus alumnos el álgebra inicial desde hace una semana. Y allí está María, la alumna imaginaria que vamos a convertir en protagonista . María, para sorpresa de su profesor, no se desenvuelve bien en este nuevo campo.

¿Qué le pasa?, se interroga el profesor, pues él sabe que María resuelve bien expresiones aritméticas como **$4 \cdot 5 + 2 =$ ....** o bien **$25 - m = 19$** (sabe que **m** es una incógnita cuyo valor depende de los otros valores numéricos y de las operaciones a realizar). Sin embargo, no acaba de desenvolverse con expresiones como **$4X + 6 = 22 + 4$** o como **$a (b + c)$**. ¿Cómo es que una alumna media como María, que no suele tener dificultades con expresiones aritméticas, tropieza con las expresiones literales, se cuestiona el profesor?. ¿Por qué María duda en **$a(b + c)$** si no lo hacía en expresiones como **$4 \times (5 + 3)$**? Además, María no logra desenvolverse en la traducción a expresión algebraica de problemas iniciales y que parecen fáciles.

En efecto, María conoce la propiedad distributiva de la suma respecto del producto, aunque no la verbalice con fluidez; como también conoce la potenciación, incluso de enteros. Sin embargo halla serias dificultades para resolver las expresiones algebraicas elementales. ¿En dónde están las dificultades?. El profesor busca, porque la necesita, una explicación, un argumento, para justificar ese fenómeno. Es más, necesita conocer alguna actividad, algún material para que, trabajando adecuadamente, supere esas dificultades, pues María no está sola sino que su caso es uno entre bastantes de la clase.

Efectivamente, los profesores necesitamos en situaciones así, que son diarias, explicaciones de cómo se produce el aprendizaje para actuar de acuerdo con ellas; como también necesitamos conocer actividades de enseñanza para ayudar a cualquier alumno a superar sus dificultades. Y las buscamos. Y, con frecuencia, creemos que las encontramos.

DE LA MENTE DEL MAESTRO

A LA DEL APRENDIZ

La explicación que el profesor comparte se resume en que a María le pasa como a un buen porcentaje de sus compañeros: se encuentra perdida porque esto de descifrar expresiones literales y operar con letras es nuevo para ella, para el grupo. Consecuentemente, decide ir explicándoles despacito, una y otra vez lo que no se entienda y ponerles muchos ejercicios, hasta que vayan interiorizando lo que se debe hacer. Con esa finalidad mantiene la disposición espacial del aula de modo frontal: un actor y una treintena de espectadores-receptores de sus insistentes indicaciones, diría un visitante que no conociera la escuela.

Pues bien, la expresada más arriba es una justificación poco elaborada, de sentido común, y una salida didáctica también de sentido común -"¡con mucho ejercicio ya lo entenderá!"- y que, con bastante probabilidad, fracasará. Pero, en cualquier caso, el profesor mantiene una actitud generosa que le honra como maestro: hace un esfuerzo personal por ayudar a sus alumnos.

Probablemente, el profesor pensará que, al ser conocimientos nuevos, habrá de explicar detenidamente las cosas, y María habrá de practicar mucho, hasta que vaya quedando firmemente asentado en su memoria qué sentido tiene eso de utilizar letras. Y, además, la práctica le valdrá para ir automatizando la resolución de pequeñas expresiones. Eso es así porque el profesor está seguro de que mediante la explicación verbal y la ejercitación individual reiterada María va a aprender lo que debe aprender; es cuestión de tiempo y de insistencia: más explicación y más ejercicios.

Bien, pero nosotros, que no estamos en clase y, por lo tanto, no tenemos la urgencia de tomar decisiones apresuradas, sí podemos interrogarnos tranquilamente sobre el porqué de ese fenómeno: por qué María, y tantos escolares como ella, encuentran serias dificultades cuando entran en el mundo algebraico.(1) (Dificultades que, por otra parte, son similares a las que les surgen en Primaria cuando abordan la operatoria fraccionaria o en el trabajo inicial con números con coma, por ejemplo). En efecto, podemos, con sosiego, meditar si el conocimiento matemático escolar puede ser transmitido, mediante el tandem *explicación verbal-ejercicios*; si, a esa edad, el aprendizaje matemático puede interpretarse como un fenómeno que se produce, simplemente, de fuera adentro; si "lo aprendido" es fiel reflejo de "lo explicado". Para apoyarnos en nuestras reflexiones tenemos las vivencias, y las evidencias de éxitos y fracasos de nuestra propia experiencia docente.

LA CONSTRUCCIÓN MEDIANTE LA ACCIÓN:

DE LO CONCRETO A LO ABSTRACTO

Otros profesores responden a esos mismos interrogantes desde otra perspectiva. Piensan que la explicación verbal y el ejercicio repetido no es la vía idónea para enseñar-aprender ni los primeros rudimentos de álgebra ni, en general, la matemática escolar. Que esa insistencia con el esquema *explicación-ejercicios* más que comprensión conceptual y desarrollo del razonamiento lo que cultiva es el simple adiestramiento, es decir, un aprendizaje superficial, epidérmico. Por el contrario, es la experiencia personal -dicen- en situaciones idóneas la que, mediante un proceso de representación simbólica adecuado, conducirá al uso comprensivo de los códigos y los razonamientos algebraicos. Piensan que hay que cambiar radicalmente el centro de la relación didáctica: si antes el profesor era el protagonista y María la espectadora-receptora del conocimiento, ahora debe ser María la protagonista, pues es ella la que intenta aprender; si antes el conocimiento de María se producía de fuera adentro -como reflejo fiel del contenido en el texto o en la mente de su profesor -, ahora habrá de ser María quien lo vaya construyendo en interacción con materiales y personas; es decir, ahora va de dentro a fuera

Convencidos de sus argumentos, estos profesores convierten en teorema la siguiente conjetura: María, con un material manipulativo idóneo y mediante una secuenciación de actividades adecuada, será capaz por sí misma y progresivamente, de lograr la resolución comprensiva de tales expresiones algebraicas. El profesor ahora se abstendría de anticipar explicaciones y de insistir en el adiestramiento, dejando el protagonismo a quien aprende. Se trata de que María, a través de un proceso de reinvención o construcción personal, guiada por su propia investigación, vaya construyendo su conocimiento matemático. Pero, ¿cómo lo hará?, ¿en qué dirección?. Sin duda será siguiendo esta pauta: de las acciones y la resolución de situaciones a la construcción de la expresión algebraica. O dicho de otro modo: "de lo concreto a lo abstracto".

Dienes,(1970), uno de los mayores defensores de estas posiciones, y adalid de la enseñanza por descubrimiento, nos dice textualmente:

> *"Probablemente será necesario abolir completamente el procedimiento actual de la enseñanza en clase, en el que el profesor pontifica desde un posición central de potencia, y sustituirlo por el aprendizaje individual o en pequeños grupos, a partir de un material concreto y de instrucciones escritas, de tal modo que la actuación del maestro sea la de guía y consejero.[......]*
>
> *Creo que es posible establecer situaciones plenamente creadoras para el aprendizaje de las matemáticas en todas las etapas de su estudio. Cuando un niño ha formado un concepto, a partir de su propia experiencia, ha creado realmente algo que antes no existía, ... "(p.19)*

Y en otra parte nos dice Dienes

> *".., el motor del aprendizaje matemático debería ser la alegría del descubrimiento"(p.11)*

Dienes, como él mismo menciona, (p. 23) tomaba como fuente de su teoría a Bruner, Piaget, F. Bartlett entre otros. Piaget, (1980)figura de máxima influencia en este ámbito, llega a decirnos.

> *"Como es natural, esto no quiere decir que el maestro ya no sea necesario: su papel no debe consistir en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten a investigar, utilizando los dispositivos apropiados. Si el alumno se equivoca en sus tanteos, los métodos "activos" recomendarán no corregirle directamente, sino más bien mostrarle contraejemplos que le lleven a corregir él mismo sus errores" (p. 226)*

Esas convicciones acerca del aprendizaje inducen a organizar la actividad en clase de modo experimentalista. Consecuentemente, estos profesores se servirían en sus clases de materiales manipulativos tales como balanzas de brazos y cubos pequeños o de los números en color de Cuisenaire para resolver problemitas pesando para, a continuación, convenir la escritura en expresión algebraica; bloques multibase, objetos comparables como monedas de diferente valor, fichas bicolores, tableros para colocar los objetos y "materializar" las ecuaciones lineales, etc., etc.

Primero las acciones -se piensa-, es decir, la resolución manipulativa de situaciones. De ahí a la simbolización de lo realizado. Por último, la resolución de expresiones teniendo las acciones iniciales como referente lejano.

Esa es la secuencia conocida como ideal en esta perspectiva. Thomas E. Rowan y Barbara Bourne (1999) sentencian en su reciente *Pensando como matemáticos* lo siguiente:

> *"La teoría del aprendizaje sugiere que el conocimiento matemático de los niños se origina en sus acciones sobre objetos. La comprensión conceptual pasa de lo concreto (trabajo con objetos) a lo semiconcreto (pictórico o representacional) y finalmente a lo abstracto (mental o simbólico). (p. 102)*

¿Cómo es el aula ideal para estos profesores? La clase semeja un "taller", expresión artesanal, laboral muy caracterizadora. O bien un aula-laboratorio (por ejemplo, M. L. Fiol y J. M. Fortuny, 1990). Otros ven la clase como comunidad de aprendizaje, presidida por el trabajo cooperativo. Si hubiera que colocar un rótulo en la puerta de alguna de esas aulas, sería:

APRENDER MATEMÁTICAS MEDIANTE LA INVESTIGACIÓN PERSONAL Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UN AMBIENTE DE TRABAJO COOPERATIVO

Dicho entre paréntesis: seguro que E. Castelnuovo, R. Skemp, Dienes, Freinet, Cuisenaire, Gateño, Piaget, Polya, Puig Adam y un largo etcétera de personas que nos han dejado sus enseñanzas suscribirían con agrado ese lema.

LA FORMACIÓN DE CÓDIGOS SIMBÓLICOS Y OPERACIONALES

Como es natural, existe otra forma de ver las cosas, otras interpretaciones y, en coherencia con ellas, otra manera de organizar la actividad en el aula. Desde esta tercera perspectiva se comparten las posiciones básicas de la anterior: el aprendizaje mediante la experiencia y la investigación personal, el aprendizaje como construcción individual en el seno de un grupo, etc.. Pero se cree que se han centrado excesivamente en la comprensión conceptual y en la actividad física como medio para alcanzarla marginando, con ello, un aspecto esencial de la matemática: su carácter de lenguaje y, por lo tanto, no han dado la importancia que merecen los aspectos semióticos del aprendizaje.

Y es precisamente este hecho el que induce a pensar que el aprendizaje matemático escolar no va de la realidad a la abstracción, de lo concreto a lo abstracto, sino que *describe un itinerario de sucesivos planos en el que, mediatizados por el mismo lenguaje matemático en formación, unos planos se apoyan en otros y no en la realidad o la acción física.*

Sí, parece cierto que inicialmente, el conocimiento matemático se forma a partir de la interiorización de acciones sobre objetos y la consiguiente coordinación de las acciones. Por ello es de vital importancia la indagación personal y la manipulación de materiales. Sin embargo, el hecho de colocar en un segundo plano la importancia del lenguaje les impide a quienes comparten esas tesis conseguir una explicación más ajustada del proceso de construcción del conocimiento.

Por ejemplo, Dienes absolutizaba una tesis:

> "· ...,.. *los niños pequeños en particular (aunque también los mayores incluso las personas adultas), aprenden las matemáticas con mayor facilidad construyendo los conceptos a partir de su propia experiencia real más bien que a partir de manipulaciones simbólicas"(p. VII)*

Si el profesor de María se hallara en esta tercera perspectiva analizaría las dificultades de otro modo y organizaría su intervención en clase desde otros presupuestos. Empezaría por considerar que la matemática escolar, como señala Paul Ernest (2000), puede verse como una disciplina diferente a la matemática formal. Y, a continuación, concluiría que es una combinación de diversos componentes. ¿Cuáles?. Pues los que todos conocemos: comprensión de conceptos específicos, comprensión y uso adecuado de ciertas operaciones con símbolos; es resolución de problemas y razonamiento, es cálculo y técnicas algorítmicas, etc., pero sobre esas facetas conviene destacar una que sirve de argamasa unificadora de todas ellas: sus aspectos semióticos, *la matemática como lenguaje.*

Quienes se ubican en esta posición epistemológica creen que la mayoría de las dificultades que encuentran los alumnos en su aprendizaje matemático escolar se deben a obstáculos en la comprensión y manejo de los símbolos ya aislados, ya formando organizaciones estructuradas, como la expresión notacional de las operaciones aritméticas, por ejemplo. Son de carácter semántico unas veces, otras de tipo sintáctico o bien pragmático.

Pero -y esto es importante- no rebaten las tesis comentadas en el epígrafe anterior. Al contrario, estos profesores las comparten y tienden a organizar su actividad en el aula de acuerdo con ellas (la investigación dirigida o libre, oportunidades al descubrimiento, el trabajo en grupo, la resolución de situaciones, la manipulación de material, etc.,etc.) No obstante, conciben el aprendizaje como una construcción continua de significados (representaciones subjetivas de conceptos, operaciones, razonamientos, etc), que, progresivamente, va convirtiendo el aprendiz en herramientas para el pensamiento y que, por tanto, son la base ineludible para proseguir aprendiendo. Significados que se materializan en signos (símbolos, mediadores simbólicos) y cuya construcción se apoya en significados anteriores. Y de modo recíproco, signos que dan pie a significados que, a su vez, sirven de base para nuevos aprendizajes.

Pues bien, desde este enfoquepodemos considerar que las dificultades que tiene María son, con mucha probabilidad, de orden semiótico. La entrada en la operatoria con expresiones literales la ha colocado ante un universo nuevo de significados. En efecto, las letras no tienen ahora el significado alfabético conocido por ella hasta este momento, sino que vienen a ser signos que remiten a valores numéricos que varían. Y, por si fuera poco, tales letras forman agrupaciones con su escritura y su sintaxis particular. Por ejemplo, la multiplicación algebraica se permite unas licencias que no se las permite la multiplicación aritmética. V. gr.: $\mathbf{3 \cdot (4+5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5}$; sin embargo, $\mathbf{a \cdot (b+c) = ab + ac}$, pero $\mathbf{3 \cdot (4+5) \neq 3\,4 + 3\,5}$

Las letras, explicará aquel profesor a María, representan valores numéricos. Una letra representa al valor numérico que hace cierta la igualdad planteada. Pero, realmente, no es lo mismo manejar signos con significado conocido (los números naturales y los signos operatorios aritméticos) que otros signos de significado aun incierto para quien está acercándose al álgebra, por lo que el discurso verbal del profesor cae en tierra yerma si no procura que sea María misma quien llegue por medio de actividades adecuadas a una conclusión similar.

Supongamos que el profesor de María compartiera este tercer enfoque. Entonces, es muy probable que adoptara una vía metodológica inductiva y comenzara su enseñanza del álgebra con explicaciones y actividades centradas en la codificación y decodificación. Recurriría a lo que María ya conoce, que son las operaciones aritméticas, y propondría, entonces, experiencias tendentes a la reflexión sobre las propiedades de esas operaciones. Por ejemplo, propondría actividades sobre la propiedad conmutativa de suma o de multiplicación, con el fin de que, en poco tiempo, tal propiedad pudiera ser expresada algebraicamente por los propios alumnos. María, y sus compañeros, realizarán numerosas igualdades del tipo:

$$\mathbf{a \quad b = b \quad a}$$

$$\begin{array}{c} 3 + 4 = 4 + 3 \\ 10 + 5 = 5 + 10 \\ 8 + 4 = .. + 8 \\ 20 + 1 = .. + 20 \\ 9 + .. = 3 + .. \\ \_ + 4 = 4 + 8 \end{array}$$

Tras el oportuno debate y las opiniones del profesor, podrán llegar a la conclusión de que si a los números de una columna llamamos **a** y a los otros **b**, se cumple que en cualquier igualdad el número **a** más el **b** siempre nos da el mismo resultado que el número **b** sumado con el **a**. Esto se cumple siempre en la suma y, por tanto, podemos expresarlo de modo más conciso aun:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Evidentemente, expresada de esta forma la conmutatividad vemos que hay una importante distancia en abstracción y generalidad entre las expresiones aritméticas conocidas por María (como 10 + 5 = 5 + 10, por ejemplo) y $\mathbf{a + b = b + c}$

LA JERARQUÍA DE LOS SÍMBOLOS

Pues bien, a estos símbolos literales que nos remiten a números -pues las expresiones algebraicas se apoyan en las expresiones aritméticas- , y que a partir de ahora va a usar María a lo largo de su escolaridad, los vamos a llamar *símbolos de tercer orden.* Son símbolos que implican algo más de abstracción que aquellos a los que se refieren y en los que se apoyan: los números; en nuestros ejemplos: los naturales.

Pero estos símbolos literales no pueden venir *ex novo* para María. Para que representen verdaderos significados, (sean significativos para ella, pueda desenvolverse con ellos de modo comprensivo), han de soportar el significado subjetivo que ella construya mediante su experiencia y en interacción "comunicativa" con su grupo, (el significado que ella vaya formando a partir de sus significados anteriores, a partir de los conocimientos que ya posee). Son, por tanto, los conocimientos que ya posee junto con la elaboración nueva que María hace ahora, gracias a las experiencias e indicaciones que el profesor le ofrece, los dos factores que posibilitan que María pueda utilizar significativamente estos símbolos de *tercer orden*. Bien, pero ¿cuáles son esos símbolos (y significados) que preceden a los nuevos?. Son los que ha venido utilizando a lo largo de Primaria: las notaciones y códigos notacionales representativos de los naturales y las operaciones con ellos, a los que nosotros vamos a denominar *símbolos de segundo orden*: *1, 8, 23, 15+23=38* . Desde luego, podemos afirmar que si María tuviese dificultades en la comprensión numérica, o en las operaciones aritméticas elementales,(segundo orden), difícilmente podría llegar a desenvolverse con los símbolos algebraicos.

Siguiendo nuestro viaje hacia atrás veremos que, igual que en el caso anterior, los símbolos de segundo orden remiten a (se apoyan en, proceden de) los símbolos primeros, con los que construimos las iniciales ideas numéricas. Son los símbolos *de primer orden*: las palabras, los numerales - *uno, ocho, veintitrés-*, pues nos llevan directamente al objeto significado, al referente. Si contemplamos evolutivamente esta deconstrucción semiótica que he intentado expresar vemos que cuando decimos **a + b = b + c**, por ejemplo, la comprensión de **a** y de **b** descansa en aquello a lo que nos remite, se apoya en valores aritméticos, en números naturales. Por lo tanto, son símbolos de símbolos de segundo orden. Y los de segundo orden, si nos retrotraemos a edades tempranas se apoyan en las conceptualizaciones primeras expresadas mediante palabras, los numerales, es decir, en símbolos de *primer orden*. Reconstruyendo el camino podremos ver que **a** y **b** son en realidad simbolizaciones de símbolos de símbolos, proceso de complejidad creciente y cada vez más abstracta. Así que María, como cualquier compañero de su edad, tiene vivida ya toda una historia personal de aprendizaje matemático; biografía que nos advierte de que sus dificultades conviene contemplarlas a la luz de toda una trayectoria de simbolizaciones. Pues no cabe duda de que los aspectos representacionales y comunicativos, es decir, el lenguaje matemático mismo, son constitutivos del conocimiento matemático. Ahora bien, ¿Cuál el camino que sigue María en la construcción de ese lenguaje?, ¿cuándo y cómo se inicia? , ¿qué características tiene?, ¿cómo y en qué progresión se van formando los códigos notacionales?, ¿dominar los códigos es sinónimo de tener un conocimiento comprensivo de lo codificado?, ¿qué influencia tienen en el aprendizaje?. En definitiva, ¿cuál es el curso que sigue la formación de ese complejo universo de signos -y, por lo tanto, de significados- que utilizamos cuando hacemos matemáticas?

RECONSTRUCCIÓN DEL PROCESO:

LOS CUATRO NIVELES

Con intención de dar respuesta a esos interrogantes vamos a recorrer ahora el largo proceso de construcción simbólica que acabo de esbozar desde que comienza hasta el nivel en que se halla María. Lo vamos a hacer brevemente, deteniéndonos sólo en los momentos más importantes. Dividiremos el camino en cuatro fases sucesivas, cuatro niveles de creciente complejidad y abstracción, ciñéndonos al ámbito del número y las operaciones. Son:

1º.- De los símbolos de primer orden a los de segundo orden, o de la palabra al simbolismo notacional
2º.- Las operaciones aditivas y formación básica del número natural
3º.- Las operaciones multiplicativas y nuevos campos numéricos
4º.- Introducción en el simbolismo algebraico (2)

PRIMER NIVEL: DE LOS SÍMBOLOS DE PRIMER ORDEN A LOS DE SEGUNDO

Es un hecho común en la psicología evolutiva caracterizar los primeros 18 - 24 meses de vida del ser humano como período sensoriomotriz, etapa en la que el aprendizaje es de carácter eminentemente físico y directo. Al período sensoriomotriz le sigue otra etapa - de los 2 a los 6 años, aproximadamente- en la que se va conformando el pensamiento representacional. Es en esta etapa cuando tiene lugar el desarrollo de la función simbólica, por lo que es comunmente denominada período simbólico, semiótico o representacional. En estos años se va conformando tanto la noción de número como la de símbolo e, incluso, la de código. Es un período en el que de las primeras conceptualizaciones realizadas y expresadas mediante la palabra y el gesto se llega a su expresión mediante notación: interpretando notaciones numéricas dadas (cifras) o produciéndolas.

Recordemos que denominamos símbolos *de primer orden* a las expresiones verbales que se refieren a cantidades o a relación entre cantidades. Es el caso de las primeros numerales: palabras que refieren a los objetos o grupos de objetos *directamente*. Y que son el soporte expresivo de los significados que van construyendo: el número. Los tanteos de los niños en la captación de la numerosidad y en la asimilación de los aprendizajes parciales que van conformando la idea de número los van haciendo de la mano de la lengua ambiental. La lengua, pues, es el medio que da forma expresiva a las primeras construcciones conceptuales; es el canal principal por el que llegan las indicaciones del adulto; es el instrumento para las transacciones entre los propios niños.

¿Podemos decir, entonces, que el aprendizaje inicial del número es verbal?. No sólo . Es cierto que la manipulación de objetos y colecciones, el tanteo experimental y el juego son claves en la formación por parte de todo individuo de las ideas numéricas iniciales, pero la influencia de la lengua también lo es. La experiencia propia y los intercambios comunicativos a través del lenguaje ambiental van favoreciendo el aprendizaje de la serie de los numerales y las primeras aproximaciones a la cardinalidad. Son aprendizajes ambientales que se producen jugando, en la relación con los demás y en la actividad con material ambiental no estructurado. Pertenecen, por tanto, al ámbito de lo informal.

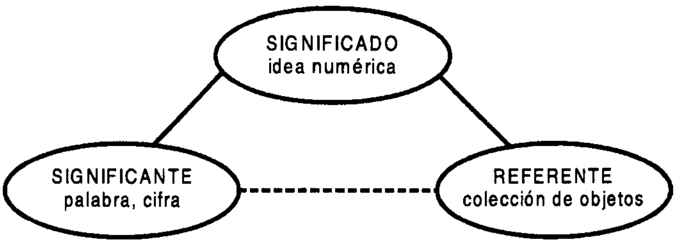
Pero a medida que avanzamos en la edad se deja notar más la influencia cultural: vivimos en un entorno simbólico, por lo que los individuos jóvenes tienden a imitar-reproducir las actividades y escenarios adultos. Me refiero con ello a la tendencia, de naturaleza cultural, a la simbolización notacional. H. Gardner (1993), basándose en un estudio experimental sobre simbolización temprana, comenta cómo a la edad de

> *"cinco, seis o siete años, los niños muestran una atracción hacia la simbolización "notacional" o de "segundo orden" . Y continúa: "Por ejemplo, inventarán un sistema para mantenerse al tanto de sus progresos en el juego o, si se les pide que se vayan de vacaciones imaginarias, dibujarán imágenes para que les recuerden qué objetos llevarse consigo"(p. 86)*

Gardner hizo sus observaciones al margen del medio escolar, por lo que cabe esperar que el uso de sistemas notacionales -uno de ellos es la notación numérica- surgiría "espontáneamente" a lo largo del desarrollo por efecto de la enculturación que vivimos. Sin embargo, la escuela no espera a que tal hecho se vaya produciendo sino que, de modo institucional y planificado, se dedica en la etapa Infantil a enseñar el número y su notación: las cifras.

Surge con ello una pregunta importante: si el aprendizaje de las primeras nociones númericas se produce por medio de la lengua oral, y si con ella tenemos las palabras o símbolos de primer orden, ¿para qué se necesitan las notaciones?; ¿qué aporta al aprendizaje de las notaciones al pensamiento?, ¿en dónde está su diferencia respecto al conocimiento meramente verbal?

Es importante plantearse esas cuestiones porque inicialmente no hay diferencias relevantes. Veámoslo con ejemplos en términos semióticos, teniendo presente la conocida tríada significante-significado-refererente



(3)

Pensemos que estamos con un niño preescolar de unos cuatro años; si preparamos la situación de modo adecuado y le damos la siguiente consigna: "por favor, tráeme "cinco" lápices de los que hay en aquella caja", con toda probabilidad el niño, que ya tiene la noción de cardinal, nos traerá los lápices. El significante (palabra) le remite al significado, lo que hace que pueda ejecutar la acción correctamente. De modo inverso, podemos decir que el signo (palabra "cinco") es expresión directa del referente: una colección de cinco lápices.

Veamos ahora las notaciones. Cuando un niño sabe ya descifrar, por ejemplo, el símbolo "5" (cosa que podemos indagar procurando la situación apropiada -la cifra **5** escrita en un papel- y diciéndole: "pon en esta cesta los caramelos que dice ahí"); o bien sabe expresar con una cifra una cantidad, decimos que ya se está introduciendo en el símbolismo notacional, que ya está andando los primeros peldaños del lenguaje matemático. Vemos que ahora podemos analizar igualmente lo ocurrido mediante la tríada significante-significado-referente y que no hay aparentemente diferencia alguna: la visión de la cifra 5 (significante) le lleva al significado (representación subjetiva del valor numérico denotado) y le permite tomar cinco objetos (referente).

Habida cuenta de ello, un escéptico puede afirmar: "si ya tenemos las palabras-número para qué queremos las cifras que, al fin y al cabo, son otras nuevas simbolizaciónes de lo mismo. Es más, hay personas -argumenta- que no usan la escritura aritmética, mejor dicho, la desconocen prácticamente, y sin embargo calculan mentalmente".

Sí, en efecto, pero su cálculo es muy elemental y, además, no pueden avanzar más ni reflexionar sobre propiedades operacionales. Y es que las notaciones dan mayores posibilidades de acción cuando las utilizamos en la formación de los códigos notacionales. Las cifras son mediadores simbólicos, signos que evocan constructos, representaciones de cantidades reducidas a pequeñas marcas. En lugar de trabajar con objetos actuamos con marcas que nos remiten a ellos, lo que es mucho más ágil y simple. Así, paulatinamente y gracias a la notación numérica, como veremos a continuación, el conocimiento verbal inicial va materializándose en huellas y comienzando a permitir la modulación, la transformación virtual y la comunicación simbólica aritmética.

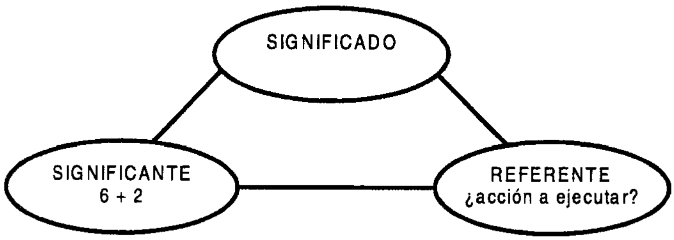
DEL CÁLCULO VERBAL AL CÁLCULO NOTACIONAL

Bien, si nuestro hipotético aprendiz está ya en posesión de las primeras notaciones avancemos un poco más. Pasemos, pues, a las estructuras, a grupos organizados de símbolos: primero verbales y luego notacionales. Tomemos como ejemplo la unión de dos cantidades. Pongámoslo en situación apropiada, por ejemplo, dándole dos recipientes, en uno de las cuales hay seis lápices y en el otro dos. Preguntémosle que cuántos lápices habrá juntando los dos grupos. Probablemente reuna todos los lápices primero y luego cuente: "una, dos, tres, ...". O bien no los reuna, pero sí cuente visualmente. En ambos casos utilizará el conteo como estrategia y los dedos para indicar o tocar los objetos. Bien, con cualquiera de las estrategias opera valiéndose de símbolos de primer orden(palabras), pero no podemos afirmar que su operatoria es ya simbólica por cuanto necesita tocar, puntear o marcar los objetos.

Sin embargo, pasados unos meses se producirá un cambio importante. Veámoslo teniendo el mismo caso: un niño y dos colecciones de seis y dos lápices cada una. Le pedimos que calcule cuántos lápices habrá reuniendo las dos bandejas, pero le preguntamos si nos lo puede decir "sin tocar ni mirar los lápices". Le pedimos que no mire, que nosotros le diremos con palabras los objetos que hay: "en un lado hay seis y en el otro hay dos; si los reuno, ¿cuántos tendré?". Si en lugar de apoyarse en los objetos (mirar, tocar) se apoya en significados (representaciones subjetivas, mentales) y resuelve bien, podemos afirmar que ha dado un salto cualitativo en su forma de operar; pues ahora acude a sus constructos personales, a sus ideas numéricas ayudado de las palabras, y no a la observación o a la acción física.

En la escuela el trabajo sobre cálculo verbal se va haciendo de modo interrelacionado con el cálculo basado en notaciones y, también, con la construcción de los códigos notacionales aditivos a partir de los 5 - 6 años: 4 + 2; 8 - 1; etc. Ahora podemos ver qué puede aportar el estar en posesión del conocimiento de las notaciones numéricas y sus usos. Planteemos a nuestro imaginario aprendiz una situación como la verbal anterior pero ahora expresada en código aditivo: la presentamos bien visible la expresión " **6 + 2** " y le pedimos que la resuelva realmente. El niño, si es que ya interpreta esa escritura, tomará seis lápices y luego tomará dos, los reunirá y contará. O bien irá cogiendo lápices y contando simultáneamente. En ambos casos, la escritura le remite directamente a la acción física o a la interiorización de algún cálculo: para resolver el interrogante se apoya en los objetos. Las cifras, ahora, sólo parecen ser sustitutos de los numerales y el signo, el indicador de la acción física a realizar. Por ahora poca diferencia encontramos entre los símbolos de primer orden (palabras, material estructurado) y los de segundo, las notaciones

Pero avancemos y la encontraremos. Si tras un tiempo le presentamos al aprendiz la misma situación, - cartulina con la expresión "3 + 4"-, y le pedimos que la resuelva, pero sin manipular ni mirar, y resuelve bien, podremos inferir que "3 + 4" tiene como referente lejano, pero ya innecesario, una acción, pues resuelve el problema haciendo uso de sus propios significado mentales. El aprendiz ha ido pasando así de las acciones con objetos y del establecimiento de relaciones entre objetos o grupos concretos a interiorizaciones de las mismas: a las representaciones construidas subjetivamente. Por tanto, de aquí en adelante va a operar con construcciones personales que se apoyan en las notaciones y que tienen como referente lejano la realidad física.



Cuando los escolares van adquiriendo esa capacidad de trabajar (actuar, razonar) con símbolos de segundo orden organizados en expresiones operacionales podemos considerar que están en el umbral del nivel siguiente: el de las operaciones aditivas. En uno o dos años más estará en disposición de resolver situaciones problemáticas similares, pero ya no recurrirá a la manipulación de objetos, ni tampoco a la lengua oral sino que recurrirá a las notaciones y sus propiedades o a los significados personales que haya construido a partir de la operatoria con ellas. Por ejemplo, para resolver cuántas ptas. reunen entre tres amigos si uno tiene 89, otro 50 y otro, 250. Es ahora cuando podemos apreciar la enorme diferencia entre el cálculo verbal y el cálculo basado en notaciones, ¿o podríamos resolver el ejemplo anterior fácilmente mediante la lengua, ya hablada, ya escrita?

SEGUNDO NIVEL: LA ADQUISICIÓN DE LAS OPERACIONES ADITIVAS Y LA FORMACIÓN BÁSICA DEL NÚMERO.

La simbología notacional y su presentación organizada se va convirtiendo ahora en herramienta para el pensamiento, pues nos va a permitir calcular sin recurrir directamente a los objetos. Poco a poco hemos ido pasando del lenguaje oral a unos nuevos significantes -las notaciones- que nos inducen directamente a la operación. Es decir, la notación sintetiza, abrevia, la expresión oral y, a la vez, da potencia al lenguaje al convertir las palabras en marcas, en notaciones manipulables. De ese modo *el simbolismo matemático va constituyéndose en un poderoso apoyo tecnológico para el pensamiento.*

L. Tolschinsky y A. Karmiloff-Smith(1993) comentando la capacidad notacional como privativa del ser humano, defienden la tesis de que

> *"Las diferencias entre las capacidades del* Homo sapiens *y de otras especies más o menos emparentadas no radican en la posibilidad de computar o de usar herramientas para resolver problemas sino en el* registro *intencional del cómputo y en la utilización de herramientas para registrar."*

En mi opinión hay que ir más allá de esa afirmación, pues una vez en posesión de la capacidad de registrar mediante notaciones nuestro pensameinto, son las propias notaciones las que se convierten en un poderoso amplificador de la capacidad operatoria, en nuestro caso, de cálculo aditivo. Existe una distancia enorme entre el cálculo realizado valiéndose de palabras(signos de primer orden) y objetos directos o representaciones de objetos -que es el cálculo inicial no simbólico que realizan los preescolares de 3-5 años o las personas que no se desenvuelven con las notaciones- y el cálculo realizado con notaciones. Son las notaciones, los códigos notacionales y su propia virtualidad lo que nos permite avanzar, desarrollar las capacidades de cálculo, convirtiéndose así en poderosas herramientas intelectuales, en poderosos amplificadores de nuestras limitadas capacidades biológicas.

Las operaciones de suma y resta (en cuyo análisis no vamos a entrar aquí) cristalizan en códigos: organizaciones de notaciones. Esos códigos se construyen en/se aplican a situaciones de unión de cantidades, o de transformación de alguna cantidad dada mediante adición o sustracción de otra; también en situaciones de igualación de cantidades o de diferencia entre cantidades o números. Son cuatro grandes tipos de situaciones (con su gama de problemitas típicos escolares) cuya modelización aritmética tiene una característica común diferenciadora de las operaciones multiplicativas, que veremos a continuación: los números son significantes del mismo nivel, es decir, ambos van referidos a elementos o a grupos de elementos.

Expresiones como las siguientes 8 + 4 =.... ; 8 +..... = 12 ; 15 - .. = 10 pueden ser consideradas textos tripartitos condensados, codificaciones en las que cada signo tiene por separado un significado, pero que, una vez organizados, su semiosis depende de la estructura global: sintaxis.

La apropiación de las operaciones aditivas y, simultáneamente, del conocimiento básico del número natural se suele producir, en la mayoría de los niños, entre los 5 y los 8 años. Larga etapa en la que lo fundamental es, desde la perspectiva que venimos desarrollando, la evolución del código notacional: o lo que es lo mismo, la evolución de la idea de operación numérica y su uso.

Para expresarlo en pocas palabras, esa evolución describe un arco que va desde que se comienza interpretandio el código como expresión de un hecho real o ficticio, hasta que ese código llega a ser usado como herramienta para solucionar un problema. Veámoslo con estas dos versiones de una misma codifición propia de niños de 2º de Primaria, o sea, finalizando este nivel:

A) "María tenía 135 ptas. Si regaló a su primo 40 ptas, ¿cuántas le quedaron?"

Su codifición viene a ser 135 - 40 = ... Y para hallar la solución pedida hará el algoritmo de la resta o bien aplicará alguna estrategia de calculo mental.

B) "María tenía en su hucha 40 ptas. Su abuelo le regaló ayer cierta cantidad para su hucha y ahora ya tiene 135; ¿sabrías calcular cuánto le regaló su abuelo?"

Hay diferentes formas de resolver este problemita, pero la más certera es, sin duda, aplicar la sustracción. Ahora la expresión 135 - 40 no tiene valor descriptivo o narrativo sino meramente utilitario.

La escritura aritmética es la misma en ambos casos, pero ha pasado de ser expresión narrativa a constituirse en herramienta para el pensamiento; ha pasado a ser operación numérica, esto es, un patrón operatorio con números (apoyados en sus notaciones) que nos conduce a la solución buscada.En definitiva, con el tiempo , el relativo dominio del código va convirtiendo la escritura misma en herramienta para resolver problemas.

Bien, desde que nuestro aprendiz inició su personal andadura a sus dos-tres años haciendo esfuerzos por asociar nombres a pequeñas cantidades y memorizar el conteo (cardinación y ordenación) hasta que es capaz, hacia los ocho años, de resolver problemitas como los citados más arriba ha habido un largo, aunque complejísimo, itinerario pleno de aprendizaje. Y ese camino *lo ha podido recorrer valiéndose del lenguaje simbólico* que él mismo ha ido recreando, reinventando, haciendo suyo.

TERCER NIVEL: LAS OPERACIONES MULTIPLICATIVAS

Pues bien, eso que ahora mismo sabe nuestro aprendiz le sitúa en condiciones de proseguir en su línea ascendente hacia la conquista de otras operaciones de mayor nivel de abstracción aun: las multiplicativas. Multiplicación y división integran en sí a las aditivas y tienen, respecto de ellas, la particularidad de que se apoyan en números de distinto nivel y significación, como veremos.

Antes de entrar a hacer algún comentario sobre estas nuevas operaciones hay que señalar que podrían ser innecesarias para el cálculo habitual fuera de la escuela, pues con la suma aritmética (la multiplicación puede aplicarse como una suma reiterada) y con la resta (la división puede interpretarse como una serie de restas sucesivas) es suficiente. Quizá porque las situaciones ambientales y el cálculo intuitivo no generan en ninguna cultura a las operaciones multiplicativas por innecesarias, o quizá porque sólo es posible su construcción en situaciones de instrucción formal, el caso es que , como recoge C. Gómez-Granell(1997):

> *".......el paso a concepciones multiplicativas constituye un verdadero cambio conceptual. Dicho cambio exigiría superar fuertes restricciones internas, que constituyen verdaderos "obstáculos epistemológicos" y que sólo pueden ser vencidos en situaciones o contextos de instrucción formal"(p. 203)*

Pero esos obstáculos de que nos habla Gómez-Granell pueden ser superados si implicamos al alumnado en la construcción del código de las operaciones, pues van a ser las propiedades inherentes al propio código notacional lo que nos va a hacer avanzar. En ese sentido es interesante hacer surgir la multiplicación de situaciones de correspondencia entre grupos y elementos y/o de situaciones de combinación. Son situaciones resolubles de diversas formas, pero que al aritmetizarlas echamos mano de nuestros conocimientos anteriores, que son aditivos.

Por ejemplo, supongamos una situación fácilmente concretizable en la escuela: una bolsa de monedas de peseta, o de caramelos o de ...... y queremos saber cuántas hay en la bolsa. Una forma sencilla de hacerlo será contándolos: uno, dos, tres,..... Pero para evitar distracciones u otros errores, y llevar la cuenta con comodidad será conveniente otra técnica: la de hacer grupos iguales, de diez, por ejemplo. Si al terminar de contar tenemos 4 montones podremos decir que tenemos 10 +10 + 10 + 10 caramelos, o sea, 40. Pero también se podría hacer otra cosa: por cada diez caramelos contados ponemos en una bandeja un objeto, un lápiz, por ejemplo. Así, si al final del conteo queremos saber el total bastará con contar los lápices. Tendremos 10 + 10 + 10 +10, lo que podemos expresarlo también como **4 x 10**, teniendo de ese modo claro que el número 4 se refiere a grupos, conjuntos; el 10, a objetos y el 40 también a objetos (números de distinto nivel, como antes mencioné).

Es la aritmetización de situaciones (traducción a código aritmético y trabajo con él) lo que lleva a la construcción del código multiplicativo. Así, para resolver la situación anterior haremos 10+10+10+10 o bien, "más rápidamente", **4 x 10**. Un cúmulo adecuado de experiencias similares irá conduciendo a los niños a ver la utilidad del código multiplicativo.

De igual forma, la división puede proceder de situaciones de equidistribución o agrupamiento. En principio, ni es inversa de la multiplicación ni tiene mucho que ver con ella. Tomemos un ejemplo. Sea la situación de "distribuir 15 canicas en tres cajas colocando en cada caja igual cantidad, ¿cuántas canicas corresponderán a cada caja?". Inicialmente es imposible que los niños sean capaces de dar con la respuesta adecuada apoyándose exclusivamente en su conocimiento numérico, por lo que tienden a realizar la equidistribución manualmente. Reparten de uno en uno.

Será la ejercitación en situaciones de equidistribución con cantidades pequeñas lo que les llevará a tomar conciencia de lo que hacen e intentar prever el resultado. Es entonces cuando el paso a la notación aritmética cobra sentido, pues comenzarán a apoyarse en ella para anticipar las soluciones. En el ejemplo anterior sería **15 : 3 = 5** . Nótese que también en este código hay números de dos niveles, pues el 3 se refiere a las cajas, es decir, a los conjuntos ya que en cada caja ha de haber un conjunto.

Como hemos visto, multiplicación y división responden a situaciones y problemas muy diferentes y, además, en principio, es decir, en la resolución de situaciones típicas una no es la inversa de la otra por ser situaciones no contrapuestas. Entonces, ¿cómo es que ambas constituyen el nivel de las operaciones multiplicativas?. Pues porque al avanzar en el dominio de cada una llega un momento en el que convergen, cristalizando esa convergencia en una sola estructura, en un solo modelo aritmético. Veámoslo con un ejemplo.

Situémonos en un nivel algo más avanzado: ya los niños dominan la resolución de problemitas del tipo anterior y resuelven con comodidad, a nivel numérico, espresiones como éstas: 15 : 3 =.... ; 50 : 5 =..... ; 100 : 10 =... . ; y, además, van dominando la mecánica calculatoria con la memorización de las tablas. Es decir, ya no estamos en un nivel inicial (que hayan pasado al uso de los algoritmos tradicionales no afecta al aspecto que estamos tratando). Es hora, entonces, de plantear situaciones algo más complejas, inversas de las anteriores. Tomemos la estructura del ejemplo anterior (repartir equitativamente cosas en tres cajas), pero planteémos un caso ahora ya como realizado: "Pedro repartió sus monedas en cuatro cajas; en cada una echó 10 monedas; ¿sabes cuántas monedas tenía antes de repartirlas?, ¿cómo lo sabes?, ¿qué operación haces?". No será difícil a nivel concreto. A nivel notacional su escritura narativa sería **.... : 4 = 10** ; es escritura "de dividir", pero el dato que falta se obtiene multiplicando 4 x 10 (cuatro cajas y en cada caja hay 10 monedas), que es la operación numérica a realizar (aunque habrá algun niño que recurra a alguna estrategia aditiva).

Veamos un problemita típico de multiplicación, pero en el que falta el operador. "Juan ha comprado 6 chicles; por cada uno pagó la misma cantidad. En total pagó 72 pts.¿Sabes cuánto pagó por cada chicle?". En este caso la expresión escrita sería **6 x..... = 72**. Sin embargo, la operación más rápida para hallar el dato pedido sería 72 : 6 , (aunque también caben otras estrategias).

En resumen, con problemas y/o expresiones escritas en las que falta el operador o la cantidad inicial se va caminando hacia la síntetización de los dos mecanismos, inverso el uno del otro, bajo una misma estructura artimética. Pues para resolver expresiones de multiplicación utilizamos, normalmente, la división (por ejemplo, en 15 x .... = 300 haremos 300 :15 ; y para resolver expresiones de división utilizamos la multiplicación (en ..... : 15 = 20 , por ejemplo).

Es, precisamente, la virtualidad del código y el relativo dominio del mismo lo que va haciendo la una inversa de la otra; largo proceso que favorece la confluencia de multiplicación con división en un sistema de gran complejidad.

CUARTO NIVEL: LA ENTRADA EN EL ÁLGEBRA

El curso que, a lo largo de Primaria, sigue el aprendizaje matemático -y, en especial, del simbolismo matemático- viene a ser el descrito a través de los tres niveles precedentes: introducción en el símbolismo, aditivas y multiplicativas . Pero en la ESO, especialmente en el Primer Ciclo, el aprendizaje escolar tiene como nivel superior la entrada en el lenguaje algebraico y, por tanto, en el modo algebraico de resolver problemas, de operar. Se trata con ello de acceder a un nivel de mayor abstracción (distancia de lo real) y complejidad.

La entrada en el lenguaje algebraico se ve acompañada a lo largo de este período por otros dos ámbitos nuevos: los números enteros (simbología y operatoria) y el razonamiento proporcional. He ahí tres ámbitos que, interrelacionados, van configurando un conocimiento matemático diferente y novedoso para el aprendiz, más elevado y abstracto; un conocimiento matemático de diferente matiz y que, desgraciadamente, se constituye en barrera infranqueable para un porcentaje demasiado alto de alumnos. ¿Cuáles son las notas diferenciadoras de este "nivel" respecto de los anteriores?. Dos son, en mi opinión, los rasgos específicos de este nivel:

-Uno, el cambio que con respecto a la idea de número se va produciendo a medida que nos adentramos en la ampliación a los negativos. Del número como expresión de una cantidad al número *como expresión de algo no tangible*, no comprobable empíricamente.

- Otro, la simbología algebraica, literal, que viene como generalización de regularidades y propiedades aritméticas. La simbología nueva conlleva una nueva pragmática, *una forma diferente de actuar, de operar.* Al resolver problemas nos apoyamos ya, no en cantidades empíricamente verificables, sino en signos y en las propiedades semánticas y/o sintácticas de esos signos.

Consecuentemente, nos vemos impelidos hacia el uso de símbolos cada vez más alejados de la realidad física, símbolos cuyo referente lo forman las notaciones mismas y sus propiedades, es decir, los símbolos de segundo orden. Entramos, pues, en el manejo de *símbolos de tercer orden.*

A MODO DE CONCLUSIONES

Bien. Hemos llegado al final del trayecto: volvamos a nuestro profesor y su alumna María. Ahora, después de la descripción hecha es probable que el profesor vea las cosas de otra manera y se interrogue sobre el aprendizaje de María y sobre su enseñanza teniendo en cuenta otras consideraciones. Si eso es así, pensará que el recorrido que ha vivido María desde que comenzó su andadura usando las palabras y los objetos, reuniendo cantidades (recordemos en el nivel primero "¿cuántos lápices habrá juntando los dos montoncitos?") para construir su saber matemático, hasta que llega a expresar una propiedad algebraicamente, como que $\mathbf{a + b = b + a}$, o resuelve problemas con ecuaciones elementales como $\mathbf{5(x + 2) = 25}$, deviene en camino jalonado por sucesivas construcciones simbólicas, por sucesivos códigos notacionales que se superponen unos en otros. Y ahora María está, justamente, en otro de esos niveles de simbolización esforzándose en construirlo, en dominarlo aprovechando ese cúmulo de herramientas que ya posee.

¿Qué elementos forman ese arsenal de útiles disponibles que María ha venido construyendo? O expresado con otras palabras, ¿cuáles son los contenidos simbólicos que se aprenden cuando aprendemos matemáticas? Desde la interpretación de la matemática como lenguaje podemos decir que son de dos tipos:

a) **Simples.** Son construcciones conceptuales, unas más complejas que otras, unas condición previa de otras, que el niño se representa internamente y a las que le remite el significante correspondiente. Los significantes correspondientes son signos aislados: términos verbales y notaciones alfanuméricas (*3, 12, sumar, cero, +, ángulo, decena, 3.5, cociente*, etc)

b) **Compuestos**. Son relaciones entre conceptos (8 > 5, etc) y expresiones operatorias . A su vez , estos "útiles" compuestos podemos clasificarlos en dos grupos:

b.-1) **Ecuacionales** . Igualdades o desigualdades, es decir, escrituras en las que hay relacionantes entre dos partes: $3^3 + 2 = 20 + x$; $4 + 2 = ...$; $20: ....= 4$

b.-2) **No ecuacionales** : 3^2, %, $\sqrt{9}$, 4 x 6, ¾ de 40, etc. Son notaciones compuestas y códigos simples que contienen una operatoria a realizar, implícita o explícita.

¿Es la clasificación anterior contradictoria con otras como la que divide los aprendizajes en conceptuales, procedimentales y actitudinales? O la tradicional que reduce el conocimiento matemático escolar a una red tejida por tres tipos de saberes:

-El primero y más importante: un conjunto de técnicas calculatorias, sobretodo algorítmicas.
-El segundo, datos y conceptos específicos: ángulo, decena, milésima, polígono, etc
-Y el tercero, unos modelos de resolución de problemas peculiares.

No, no es contradictoria con ellas ni lo pretende ser pues, realmente, el aprendizaje escolar de la matemática elemental incluye todos esos contenidos. Lo que sí pretende esta clasificación nuestra es poner el acento en los aspectos simbólicos de la matemática y, al mismo tiempo, describir su desarrollo con la intención de que ello sea de utilidad para el trabajo en el aula.

Bien, es el momento, por tanto, de retomar lo expresado al inicio de la conferencia. Allí expresé mi intención de matizar la archiconocida expresión de que aprendizaje matemático se produce yendo "de lo concreto a lo abstracto". En efecto, hemos visto que tal expresión es válida si es interpretada de modo evolutivo, contemplando la larga trayectoria de simbolizaciones que, en realidad, centran el aprendizaje. Pero no es válida si se la interpreta de modo puntual, esporádico, a propósito de algún aspecto parcial e inmediato.

También expresé al pincipio mi intención de comentar la importancia de los códigos notacionales y hemos visto que el aprendizaje matemático se va produciendo gracias a la apropiación progresiva de símbolos y organizaciones de símbolos (significados y patrones operatorios) de creciente abstracción. El mayor o menor dominio del código a un determinado nivel sirve de acelerador o de freno en en la progresión en el aprendizaje matemático escolar.

Es más, a medida que vamos ascendiendo en ese recorrido de simbolizaciones descrito anteriormete, el razonamiento sustentado por los códigos y las propiedades sintácticas de los mismos es el motor de la producción de conocimiento nuevo, un conocimiento no dependiente ya de la experiencia física, ni de la experiencia social sino del razonamiento apoyado en los códigos notacionales asimilados con anterioridad. Por ejemplo, si partimos de la expresión $a - (m - n)$, ¿cómo podremos llegar a que $a - (m - n) = a - m + n$? , ¿mediante la experiencia física manipulando objetos?. Evidentemente que no, sino que nos apoyamos en las propiedades numéricas conocidas (segundo orden), tanteamos con ellas hasta llegar a una conclusión.

Y UNA PROPUESTA FINAL

Si aquel profesor compartiera con nosotros estas posiciones acerca del aprendizaje abandonaría, seguramente, su esquema básico de intervención *explicación-ejercicios* y la organización frontal del aula a favor de una organización de la vida en el aula que tuviera como condición pedagógica la diversidad existente en ella. Consecuentemente, trataría de organizar su intervención desde principios que respetaran esa diversidad (de estilos de aprendizaje, de niveles, de motivaciones, de dificultades, etc) como son estos dos: hacer que el ambiente en el aula se acercara a la idea de comunidad de aprendizaje, y favorecer el trabajo autónomo frente al aprendizaje dependiente. Es más, posiblemente nuestro protagonista se convenciera de que trabajamos en "una escuela para todos", (pues nuestros alumnos no son libres de ir a la escuela) y que, consecuentemente, hay que, enseñar una "matemática para todos", partiendo del respeto a la diversidad.

¿Cuál es esa matemática para todos?. Sin duda aquella que por encima de niveles y contenidos especiales coloca la interpretación de la misma como lenguaje, pues pone el acento en los aspectos más indispensables y , quizá, más arduos para la mayoría: los procesos de simbolización. Pero trabajar desde estas concepciones exige practicar una enseñanza viva, participativa y permanentemente cambiante, concediendo protagonismo a los alumnos, en la que se compaginen momentos de trabajo colectivo con otros de trabajo individual o de pequeños grupo; se intercale la explicación magistral con el estudio individual, las actividades de investigación y descubrimiento con la necesaria ejercitación, la resolución de problemas con la indispensable memorización de hechos, el juego con el esfuerzo tenaz por hallar solución a una situación, ... Pero siempre priorizando la enseñanza indirecta: aquel estilo docente en el que el maestro va guiando, desbrozando el camino, dando los apoyos necesarios para que el aprendiz conquiste las metas de que se capaz en su construcción del conocimiento matemático.

NOTAS Y REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) Dos referentes interesantes para acercarse al conocimiento de las dificultades en el aprendizaje del álgebra inicial son los siguientes: *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, del grupo Azarquiel, en Síntesis, Madrid, 1991 y el nº 14 titulado "Lenguajes algebraicos", de la revista *Uno*, 1997

(2) La descripción de estos niveles ha sido desarrollada , aunque con otras matizaciones y mayor extensión en dos ocasiones anteriores : . Véanse las actas de las 8as. JAEM, Salamanca,1997 organizadas por la FESPM: *Enseñanza de las Matemáticas y niveles operatorios*. Y las actas de las 8as. Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "THALES": *Lenguaje matemático y aprendizaje escolar*. Jaén, 1998.

(3) La línea de puntos que une significante con referente mantiene las dudas que plantea U. Eco en su *Signo*(1994), Labor, Barcelona, pags. 24-26, de donde se ha tomado este famoso triángulo.

DIENES, Z.P.(1970): *La construcción de las matemáticas*. Vicens-Vives, Barcelona

ERNEST, P.(2000): "Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica", en *Uno*, nº 23, pag. 12

GARDNER, H.(1993): *La mente no escolarizada*. Pidós. Barcelona

GÓMEZ-GRANELL,C: "Hacia una epistemología del conocimiento escolar: el caso de la educación matemática", en RODRIGO, M. J. y ARNAY, J.(1997): *La construcción del conocimiento escolar*. Paidós, Barcelona.

PIAGET, J.(1980): "Observaciones sobre la educación matemática", en *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza - Universidad, Madrid

ROWAN,t. y BOURNE, B.(1999): *Pensando como matemáticos*. Manantial. Buenos Aires

COMUNICACIONES

GRUPO 1
NUEVAS TECNOLOGÍAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ENTORNOS INFORMÁTICOS EN GEOMETRÍA

RICARDO BARROSO CAMPOS · JOSÉ MARÍA GAVILÁN IZQUIERDO

1.- INTRODUCCIÓN.

Presentamos en esta comunicación algunas ideas incluidas en una serie de proyectos de formación de profesores, tanto inicial como permanente, en los que hemos pretendido dar a conocer a los profesores el uso de software en matemáticas. En concreto, vamos a describir la Actividad "Entornos Informáticos en Geometría" desarrollada en el Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira como curso con seguimiento (50 horas) durante el curso 1999/2000 a profesores de Enseñanza Secundaria del área de Matemáticas.

Tenemos que señalar que el software en una situación de clase puede ser empleado de distintas formas, bien puede ser un material a disposición del profesor (sin posible acceso por parte de los estudiantes), lo que sería un uso desde una perspectiva de enseñanza, o bien tener los alumnos acceso a los programas, denominando este caso como perspectiva de aprendizaje. Creemos que el máximo potencial se obtiene cuando se incorpora al aula desde la perspectiva del aprendizaje.

La perspectiva de aprendizaje conlleva algunos cambios con respecto a la "enseñanza tradicional". Esto afecta tanto al contenido, al papel del profesor como al de los alumnos. Para empezar, la elección del software no es neutral, es decir el tipo de programas condiciona el tipo de contenidos a manejar (producto y proceso). En esta perspectiva se da más importancia a los procesos de pensamiento tales como: exploración, conjeturación, refutación, reformulación y explicación (deVilliers, 1.997, p. 23) Además las tareas que se plantean son distintas, por ejemplo, carece de sentido plantear preguntas como ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos? Sin embargo podemos pedir ahora ¿qué tienen en común los coeficientes de dos rectas paralelas?.

En relación al papel del profesor, la gestión del aula es diferente ya que los alumnos suelen trabajar en grupo sobre el ordenador. El profesor orienta y facilita el aprendizaje.

El papel del alumno se ve claramente afectado, las demandas cognitivas son diferentes, gestiona su propio aprendizaje. Se potencia la autoestima matemática y un cambio de creencias acerca de lo que es la matemática.

2.- DESCRIPCIÓN DE LOS TRES PROGRAMAS.

En este apartado vamos a dar una descripción de tres programas que se pueden utilizar en el contenido geométrico, los tres de distinta naturaleza.

El primero de ellos, **Derive** (http://www.derive.com), es un asistente matemático, fundamentalmente es una herramienta de cálculo con posibilidades gráficas. Pertenece a la familia de los Programas de Cálculo Simbólico, como Mathematica o Maple. Permite utilizar de forma paralela el modo algebraico y el modo gráfico (a través de ventanas).

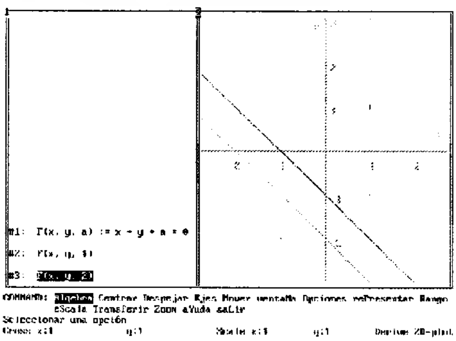
Su uso dentro de la geometría está restringido; esencialmente puede hacerse geometría analítica. Entre las posibilidades está:

- utilizar ecuaciones de rectas, circunferencias, etc.
- uso de coordenadas paramétricas, tanto de rectas como de circunferencias y otras cónicas.

Un ejemplo de su uso en clase puede ser el siguiente, considerar una familia de objetos geométricos (rectas, cónicas) dada por su ecuación con uno o varios parámetros. Así si consideramos la familia .

$$F = \{x + y + a = 0, a \in \Re\}$$

¿Qué característica define a la familia? ¿Podrías hacer alguna generalización? (Figura 1).



El segundo de ellos, **Cabri II** (http://www.cabri.net), pertenece a la familia de los programas de "geometría dinámica[1]" como Geometer´s Sketchpad.

Para Goldenberg y Cuoco (1.998) los programas de geometría dinámica permiten a los usuarios, después de haber hecho una construcción, mover ciertos elementos arrastrándolos libremente y observando cómo otros elementos responden dinámicamente al alterar las condiciones.

Las construcciones que se realizan con Cabri II se denominan"figuras" para distinguirlas de los simples dibujos, una figura es un experimento geométrico (Laborde, 1.993).Una figura realizada con Cabri obliga al usuario a hacer explicitas las condiciones de la misma en lenguaje geométrico. Estas relaciones explícitas van del usuario al ordenador. A través de la geometría dinámica, el programa pone de manifiesto (es decir hace explícitas) otras relaciones presentes en la figura que no son evidentes al usuario. Es decir en este tipo de programas la clave está en la necesidad de hacer construcciones explícitas y obtener los elementos invariantes a dichas construcciones.

Por ejemplo, consideremos un triángulo y sus tres medianas, que trazadas con Cabri, son segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto, éstas son las relaciones explícitas que debe hacer el usuario, en otro caso, los segmentos al desplazar los vértices (puntos básicos de la construcción) dejarán de ser medianas. Estos programas obligan a definir los objetos geométricos para que sean reconocidos por él, por tanto, el punto de corte debe ser construido por la herramienta específica, pues de lo contrario no existe para el programa.

¿Qué obtenemos del programa? Obtenemos la relación siguiente: que independientemente del triángulo, las tres medianas siempre se cortan en un punto. Además podemos indagar las relaciones métricas de distancias que caracterizan al baricentro

Cabri permite realizar mediciones (longitudes, áreas, etc.) y puede calcular coordenadas de puntos y ecuaciones de objetos. Una posibilidad útil es la de poder definir macro-construcciones[2]. Proporciona un entorno ideal para la búsqueda e investigación de conjeturas en el campo geométrico. Se puede plantear el estudio de la geometría desde tres perspectivas distintas: sintética, analítica y de transformaciones.

El último, **Win-Logo** (http://www.logo.com) es un entorno de programación, que según Ruiz y otros (1.993), tiene entre otras las siguientes características:

Intérprete, por traducir al lenguaje máquina las instrucciones que recibe,
interactivo: abierto a la creatividad del usuario,
modular: se pueden establecer procedimientos que se incorporen a otros
recursivo: un procedimiento se puede llamar a sí mismo

Las órdenes básicas se denominan primitivas. Con ellas podemos construir procedimientos. Estos procedimientos admiten la posibilidad de utilizar variables en un sentido funcional.

3.- FORMACIÓN PERMANENTE DE PROFESORES: UNA EXPERIENCIA.

Durante las sesiones no presenciales los profesores en grupo debían preparar un conjunto de tareas basadas en el contenido del curso con el objeto de llevarlas a cabo en sus centros (todos eran Institutos de Enseñanza Secundaria) con sus alumnos.

Algunos grupos plantearon las dificultades que podían presentarse, entre ellas, la gestión de los alumnos en el aula, la falta de tiempo para llevarlas a cabo, o las dificultades para usar el aula de informática. No obstante, como algunos profesores impartían además de Matemáticas la asignatura de Informática pensaban realizar la experiencia en esta segunda asignatura.

Un análisis de los grupos de tareas propuestos por los profesores, nos permiten clasificarlas a grandes rasgos en dos categorías:

- tareas de comprobación, y

- tareas de indagación.

Las tareas de comprobación son aquellas en las que el programa se utiliza con el objetivo de verificar que un resultado obtenido sin el ordenador es cierto. Se utilizan propiedades geométricas previas para llegar a plantear u obtener un resultado.

Por ejemplo en este grupo está la siguiente tarea, planteada por Hernández González A. R. y Terrón Macías D.(2000):

[1]El término "geometría dinámica" fue introducido por Nick Jackiw y Steve Rasmussen (Goldenberg y Cuoco, 1.998)

[2] Una macro-construcción es un procedimiento que permite obtener unos objetos (finales) a partir de otros objetos (iniciales).

Se le pide al alumno que cargue en la pantalla el fichero act11.fig de Cabri, previamente preparado (tal y como aparece en la figura 2).
Hallar los ángulos desconocidos utilizando los datos de cada figura y los teoremas sobre ángulos de lados paralelos y perpendiculares.
Verificar los resultados usando las herramientas proporcionadas por Cabri: mediciones de ángulos.

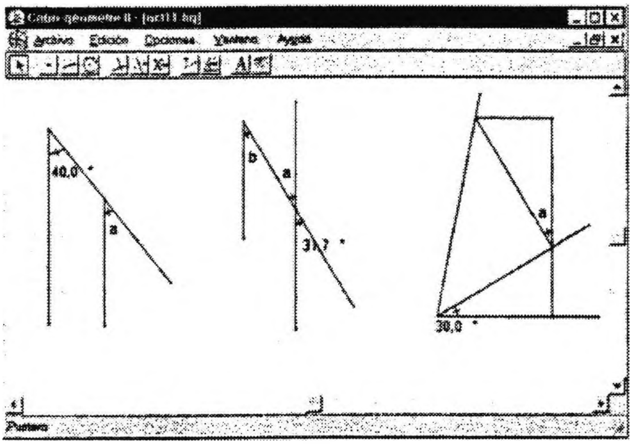


Figura 1

Las tareas de indagación son tareas abiertas donde no se conoce la repuesta pero la herramienta para su obtención es el propio programa. Este tipo de tareas permiten el descubrimiento de resultados y la búsqueda de su justificación.

AGRADECIMIENTOS:

Deseamos expresar nuestro agradecimiento al Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira por su apoyo y especialmente al Coordinador Rafael Rivero su por confianza. Así como a los profesores participantes por su colaboración.

BIBLIOGRAFÍA

Barroso R. y Gavilán J. M. (1.999): *Entornos informáticos en Geometría.* Documento de Trabajo del curso del mismo título impartido en el Centro de Profesorado de Alcalá de Guadaira.

Goldenberg E. P. y Cuoco A. A. (1.998): *What is Dynamic Geometry?* En Lehrer R. y Chazan D. (Edtrs) Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah.

Laborde C. (1.993): *The Computer as Part of the Learning Environment: The Case of Geometry*, en Keitel C. Y Ruthven K. (Edtrs) Learning from computers: Mathematics Education and Tecnology. Springer-Verlag, Berlin.

Ruiz Carrascosa J. y otros (1.993): Logo para Educación Secundaria: Módulos de trabajo para el alumno y orientaciones metodológicas para el profesor. Centro del Profesores, Jaén.

Villiers M. de (1.997): *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections*, en King J. y Schattschneider D. (Edtrs) Geometry Turned On. The Mathematical Association of America, Washington

TENDENCIA ACTUAL DE LA INFORMÁTICA EDUCATIVA. EL ORDENADOR COMO MEDIADOR DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE.

LÁZARO S. DIBUT TOLEDO · JOSÉ JOAQUÍN ARRIETA GALLASTEGUI · HASSAN ARTEAGA RODRÍGUEZ
AURELIO ANTELO COLLADO · ERNESTO R. FUENTES GARÍ · NARCISO R. DE LEÓN RODRÍGUEZ
ANTONIO REY ROQUE · JULIÁN SARRÍA GONZÁLEZ · MIGDALIA TORRES DEL TORO · JORGE LUIS MAZAIRA FERNÁNDEZ
FRANKLIN PÉREZ GONZÁLEZ · EDUARDO R. BRAVO DE LAS CASAS · GIRALDO VALDÉS PARDO · SANDRA AGUDÍN PÉREZ.

EN EL TERCER MILENIO LA TECNOLOGÍA SE ADELANTA A LA SABIDURÍA.

El comienzo del nuevo siglo está caracterizado por una profunda crisis económica, social, política, ideológica, de estructura del propio saber. Una crisis que desde las dos últimas décadas, viene afectando al conjunto de las sociedades actuales. Se trata de una crisis comparable a la que atravesó Occidente en los siglos XIV al XVI, que dió lugar a la era de la Modernidad, entre finales del XVIII y XIX [Sancho, Gil, J.M., 1996]. Se dice que el drama de la modernidad y la postmodernidad es que se ha desarrollado y se sigue desarrollando "luchando con la mitad de ella misma, contra el individuo y su libertad" [Sancho, Gil, J.M., 1996]. ¿Por qué se dice ésto?. Según autores como Tourraine [Tourraine, A., 1993] el proceso de modernización se ha concebido y conceptualizado con un carácter unilateral. Para él, en lo esencial, dicho proceso supone la existencia de una correspondencia cada vez más estrecha entre la **producción, la organización de la sociedad,** y **la vida personal,** regulada por el interés, pero también por la voluntad de liberarse de todas las limitaciones. En este proceso hay dos componentes básicas: **la racionalidad y la subjetividad.** Mientras el *primero* se orienta a organizar la vida social y las actividades productivas a través de la incorporación de la ciencia y la tecnología, el *segundo* supone el desarrollo integral de la personalidad, liberada de las limitaciones impuestas por los condicionamientos sociales y culturales. Es por eso que se dice que la sociedad se desarrolla luchando contra la mitad de ella misma, contra el individuo y su libertad.

Esto es casi incontrolable y más aún con análisis como el que hace Ramonet [Ramonet, I.,1995] haciéndose eco de la desconfianza expresada por las 850 autoridades económicas más importantes del mundo en el Forum Internacional de Davos (Suiza) en enero de 1995, **en otorgar todo el poder al mercado.** Este, que si se viene a ver es como un nuevo territorio del cual depende una parte del mundo, pero que no tiene contrato social, ni sanciones, ni leyes, sólo las que establecen a su libre albedrío los protagonistas para su mejor provecho.

A la perplejidad política, social y económica hay que añadir los efectos producidos por la proliferación de las aplicaciones de la tecnología de la información y la comunicación. Personas hasta ayer consideradas profesionales y culturalmente preparadas, comienzan a sentirse rodeadas por un mundo que no conocen ni entienden, que no pueden calibrar a dónde conduce y dudan poder dominar. La sensación es la de estar desorientados, de que existe algo ajeno a ellos mismos, que crece sin cesar, que ocupa cada vez más espacio en los medios de comunicación, en las estanterías de las tiendas, en las ferias de libros. Algo a lo que cada vez se da más publicidad y que hemos comenzado a nombrar como si se tratase de una nueva socialización. Y que sin duda nos conduce a algún lugar importante, por lo que se nos hace obligado conocerlo. Proliferan términos como 'multimedia', 'hipermedia', 'hipertexto', 'CD-ROM', `interactividad', 'autopista de la información', `Internet'.

Otra característica de la sociedad actual es el aumento exponencial del volumen de información que diariamente se produce y transmite en el mundo. En un solo día, se elabora y distribuye un volumen de datos mayor que el que una persona puede asimilas o dar sentido en toda su vida. El volumen de información se duplica cada 10 años y un 90% de lo que un niño tendría que llegar a dominar a lo largo de toda su vida todavía no se ha producido, mientras la escuela gira en torno a disciplinas establecidas hace un siglo. Por todo esto el hombre se ha visto obligado a sumergirse en sí mismo, buscar y elaborar nuevas teorías que le permitan adaptarse psicológica, social, y profesionalmente a tono con el desarrollo que la tecnología impone. Es así que:□

NOS OBLIGAN A PENSAR EN UNA FORMA DIFERENTE DE ENSEÑAR.

Sin duda alguna y por necesidad, hay que ir concibiendo la escuela, la educación, el aprendizaje de forma diferente. No podemos seguir formando profesionales que siempre fueron "niños obedientes, que esperaban al maestro en el aula, con sus mentes en blanco, dispuestos a recepcionar toda la información que éste fuese capaz de transmitir". Hay que despertar el interés y el deseo del aprendizaje autónomo durante toda la vida, de hacerlo en cada momento y en todos los lugares. Solo así se formarán hombres y mujeres capaces de adaptarse al cambio [Sancho, Gil, J.M., 1996]. Cambio que es producto del acelerado ritmo de innovaciones tecnológicas. Hay quienes dicen que la humanidad ha progresado más en técnica que en sabiduría.

Para especialistas que, liderados por Jaques Delors, elaboraron el último informe de la UNESCO, los cuatro pilares de la educación del tercer milenio son: ***aprender a aprender, aprender a conocer,***

aprender a hacer, y aprender a comprender al otro. Sus propuestas educativas van a contracorriente de la economía de mercado que suele prevalecer en los países agobiados por el problema del paro. Sus orientaciones se enmarcan en un contexto caracterizado por la desilusión, por el progreso económico y científico y un cierto sentimiento de desencanto que predomina en las tres últimas décadas. Para los autores de este informe es preciso superar las tensiones entre lo global y lo local, lo espiritual y lo material, lo universal y lo particular, la tradición y la modernidad, el largo y el corto plazo, el desarrollo de los conocimientos y su capacidad de asimilación, la necesidad de compartir y el principio de igualdad de necesidades, etc. Por algunos autores ha llegado a decirse que la escuela debe desaparecer como forma de la enseñanza. Claro está que no tienen en cuenta los elementos de socialización y control social implicados en la educación, ni las dimensiones políticas de la escuela; pero dicen que el aprendizaje se ha convertido en algo demasiado esencial para la economía moderna para dejarlo en manos de las escuelas. Que la nueva generación de la tecnología ha transformado totalmente el papel social del aprendizaje. Que el aprendizaje que solía ser un claro proceso individual se ha convertido en algo en el que la gente comparte cada vez más poderosas redes y cerebros artificiales. Que el reto de aprender solo puede gestionarse mediante una red mundial que agrupe todo el saber y todas las mentes [Perelman, L.J., 1992]. Con esto surge entonces una nueva forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje, pues es indiscutible que en la existencia de esa red de conocimientos que se pide, está de por medio el ordenador y por ende la introducción de las nuevas teorías sobre la obtención de conocimientos.□

NUEVAS TEORÍAS SOBRE APRENDIZAJE.

El incesante desarrollo de la tecnología, que ha avanzado a pasos agigantados desde la aparición del transistor en 1948 y la electrónica integrada, ha llevado a la humanidad a un estado en el que se le hace muy difícil a cualquier persona tener el conocimiento actualizado en cualquier esfera del saber, pues el volumen de información que se publica es demasiado grande. Pensar entonces en comenzar a informar de avanzados temas a los niños desde edades tempranas no es idea descabellada ni imposible, es necesaria y factible, porque además, ahora hay que transmitirles en el mismo tiempo mucha más información y conocimientos que antes. Por supuesto, con el sistema de enseñanza que se emplea actualmente no se logra, ni con las teorías de aprendizaje que hasta hace un tiempo existían. Ya se han estudiado y elaborado muchas teorías sobre el aprendizaje que por supuesto van orientadas a un aprendizaje apoyado por el ordenador.

Los ordenadores deben estar inmersos en ambientes de aprendizajes poderosos y colaborativos, como herramientas que apoyan el proceso activo de construcción del aprendizaje y de desarrollo de habilidades. ¡No! al aprendizaje como un proceso pasivo de adquisición de la información. Desde la aparición de los ordenadores en los años 80 se trata de incorporarlas a la enseñanza, pero no se obtienen los resultados esperados. Una explicación parcial de esto es que la aplicación de esquemas y prácticas usuales solamente produce en los aprendices una actividad mental de bajo nivel, y no llegan a explotar el potencial específico del ordenador, como por ejemplo, su posibilidad interactiva y su tremenda capacidad para la presentación de datos. Cosa ésta que fue obviada o tal vez no tan estudiada por mucho tiempo. De ella hay que aprovechar su potencial y fortaleza específica para presentar, representar y transformar la información (simulación de fenómenos y procesos), y para inducir formas específicas de interacción y cooperación (a través del intercambio de datos y problemas vía red).

Surgen los llamados Sistemas Tutoriales Inteligentes (STI), que basan sus decisiones instruccionales en un diagnóstico detallado del conocimiento del estudiante, en ocasiones de un conocimiento previo de los aprendices que va a ser determinante en su aprendizaje futuro; cosa ésta en que según estudios realizados [Dochy, F.J.R., 1992] es donde fallan los STI. Estudios más profundos sobre la utilización del ordenador como medio de aprendizaje y las características propias del proceso cognoscitivo del hombre ha llevado a conclusiones importantes sobre la mejor forma de combinarlas. Ha llevado a la idea de que los ambientes de aprendizajes basados en el uso del ordenador no debían involucrar tanto el conocimiento y la inteligencia en la dirección y estructura de los procesos de aprendizaje, sino más bien deberían crear situaciones y ofrecer herramientas para estimular a los aprendices a hacer el máximo uso de su potencial cognitivo [Scardamalia, M., 1989].

Con esto surgen entonces los tutores no inteligentes, idea de De Corte [De Corte, E., 1991]: "Un tutor no debería proveer la inteligencia para lograr el aprendizaje, no debería realizar la planeación y el monitoreo del progreso de los estudiantes, porque éstas son las actividades que los estudiantes deberían ejecutar ellos mismos para aprender. Lo que uno debería hacer es apoyarlos temporalmente para permitir que los aprendices ejecuten a un nivel justo y más allá de su nivel corriente de habilidad".

A conclusiones como ésta, importantes para el uso efectivo e interacción eficiente entre el hombre y el ordenador, se llega por los profundos estudios realizados sobre aspectos como el proceso de aprendizaje productivo. El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento y de significado individualmente diferente, dirigido a metas, autorregulado y colaborativo, [De Corte, E., 1991].

En sintonía con esta concepción de aprendizaje basado en la investigación, ha surgido una nueva generación de ambientes de aprendizaje apoyados por ordenadores que se caracterizan por un giro claro hacia sistemas de soporte, los cuales están menos estructurados y son menos directivos, están

más enfocados hacia el entrenamiento que hacia la tutoría, involucran herramientas controladas por los estudiantes para adquirir el conocimiento y tratan de integrar estrategias y herramientas de entrenamiento, en ambientes de aprendizajes de colaboración e interactivo [Kaput, J., 1992]. Están orientados a ambientes instruccionales que pueden evocar procesos constructivos de aprendizaje en los estudiantes para obtener objetivos educativos deseables que están enfocados hacia el entendimiento, hacia habilidades para la solución de problemas, hacia estrategias meta-cognitivas y hacia la idea de aprender a aprender. Esto se opone a lo que es la adquisición de conocimiento memorístico.
Con las nuevas teorías sobre el aprendizaje [(Collins, Brown y Newman, 1989), (Lave y Wengr (1991)] se concluye, según todos, que el aprendizaje es un proceso de construcción y que la adquisición de conocimientos y de competencias debe estar insertada en un contexto social y funcional de su utilización, [De Corte, E., 1991]. Sin duda las innovaciones en el aprendizaje han dado lugar al surgimiento de nuevas técnicas informáticas que a su vez sustentan y promueven estas renovaciones del aprendizaje, como son las técnicas del hipertexto, multimedia e hipermedia. Al estudiarlas pudiéramos preguntarnos cómo y por qué surgen y por qué considerarlas nuevas técnicas de aprendizaje. Pues si fuéramos a analizar lo que el hombre ha hecho para lograr cada vez más desarrollo, no es más que acercar los artefactos y sus principios de funcionamiento, haciéndolos lo más parecidos posible al hombre mismo. Por eso, si estudiamos el principio de funcionamiento de un ordenador vemos que su principio básico de trabajo y forma de procesar la información se asemeja mucho a cómo el hombre piensa y procesa sus conocimientos.
No es de extrañar entonces, que el hombre busque la mejor forma de adquirir los conocimientos mediante el estudio, o sea, tratando de eliminar la forma de estudio secuencial, como la que se hace al leer las páginas de un libro. Si la realidad es que cuando queremos llegar a aprender algo en específico lo hacemos saltando de un documento a otro, asociando una información con otra según nuestra conveniencia, pero con la limitante de que con libros esto es algo complicado si vamos a manipular varios a un mismo tiempo. Podemos pensar que nos perdemos, que no logramos asociar todo o que tenemos que tomar demasiadas notas para aprender.
Esta complejidad se elimina con solo mirar a una pantalla; que por supuesto, muestre un software educativo apropiado a un tema específico, y que haga uso de los hipermedios, o al menos de un hipertexto. Asociar la lectura de un texto a una imagen o sonido, hace innegablemente mucho más fácil llevarlo a nuestra comprensión que la simple lectura de un libro, donde hay que imaginarlo todo. Explorar las ideas por asociación es uno de los aspectos básicos del pensamiento y de conceptualización del ser humano; este es el principio básico de las técnicas del hipertexto e hipermedia. Sobre la base de lo anteriormente expuesto acerca de las nuevas teorías del aprendizaje, se puede inferir la importancia que reviste el uso del ordenador no sólo como la pantalla y y teclado que tenemos delante, sino insertada en el mundo, como si pudiera brindarnos todo el caudal de conocimientos que éste posee.□

¿QUÉ FUNCIONES HUMANAS PODRÍAN AMPLIARSE GRACIAS A LA MEDIACIÓN DEL ORDENADOR?

En este sentido, el ordenador puede ser visto como un medio que puede ampliar tres procesos fundamentales en el comportamiento del estudiante y de los educadores: el procesamiento de la información, la interacción y la comunicación [Chacón, F.J., 1995], a saber:

El procesamiento de información: que corresponde a las capacidades intelectuales tales como: recordar, ordenar, calcular, establecer relaciones entre las cosas, leer y escribir. El ordenador es una herramienta capaz de ejecutar estas tareas de una manera más eficiente. En el modo de procesamiento de la información, los ordenadores son utilizados como dispositivos que ayudan a trabajar mejor con las palabras, números, imágenes y sonidos, los cuales constituyen en conjunto los elementos esenciales de la información humana. Para esto existen paquetes de programas que incluyen, entre otros, *Los Procesadores Numéricos, Los Procesadores de Textos*, y *Las Ayudas de Diseño.*
La interacción,: que significa la posibilidad de alguien para ejercer la influencia mutua y recíproca con un objeto o persona. Generalmente, la interacción humana supone la comunicación o intercambio de significados mediante mensajes. El modo interactivo se basa en tres nociones fundamentales: diálogo, alterabilidad y riqueza de estímulos; este último asociado al uso del nuevo enfoque multimedia. Al combinar estos elementos se puede decir que la computación interactiva en el área de la educación ocurre cuando se permite al estudiante entablar un diálogo con el ordenador, en el cual puede ejercer un alto grado de control y recibir estímulos en formatos de múltiples medios.
La comunicación: es la otra función humana que puede ampliarse con el uso del ordenador como medio. Es la interacción entre personas en la que los significados sobre el mundo exterior y las personas mismas se comparten a través de mensajes. El modo de comunicación es equivalente al concepto de Educación en Línea como un sistema que se caracteriza por la mediación de las computadoras, las comunicaciones de muchos a muchos con alto grado de interactividad. Ejemplos son las Bases de Datos en Línea, el Correo Electrónico y las Conferencias por ordenador. Sin embargo, su concepto no se limita a esto, también incluye las relaciones sociales especiales creadas entre los usuarios. El antecesor cronológico son las bases de datos compartidas: colección de datos almacenados en una

maxicomputadora para ser manejados por muchos usuarios. Ya en la actualidad están las conferencias de audio y vídeo con múltiples implicaciones para la educación a distancia: El modo de comunicación a distancia no puede verse aislado de los dos anteriormente explicados (el modo de interacción y el de procesamiento de la información), realmente los incluye, pues, cuando las personas se *comunican*, también *procesan información* y ejercen una influencia mutua, es decir, *interactúan*. Por esto pudieran resumirse las funciones pedagógicas como sigue:

De medio escrito: aprendizaje de información verbal, desarrollo de la expresión, desarrollo de habilidades para el análisis.

De la interacción y cooperación de los grupos : apoyo motivacional de los estudiantes a distancia, desarrollo de un juicio crítico, solución participativa de problemas, oportunidades de aprendizaje incidental.

De los medios audiovisuales : valor motivacional añadido, sustitución de la experiencia directa, presentación de conocimientos abstractos mediante imágenes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Corte, E. (1991). "Instructional psychology: An overview. In E. De Corte & F. R. Weiner International encyclopedia of developmental and instructional psychology". Oxford: El Sevier Science.

Dochy, F. J. R. C (1992) "Assessment of prior Knowledge as a determinant for future learning". Utrecht, The Netherlands: Lemma.

Chacón, F.J. (1995). "Medios de computación en educación a distancia". I Encuentro Iberoamericano de Informática Educativa. Arequipa/Perú.

Kaput, J. J (1992)Teaching and Mathematics education. In P. A. Grouws (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. págs (515-556). New York: Macmillan.

Perelman, L.J (1992) "Schoolout. Hyperlearning the New Technology, and the end of education". New York: William.

Ramonet, I. (1995) "El poder de fin de siglo. El viejo Topo", 86, págs(36-40).

Sancho, Gil, J. M.(1996) "La educación en el tercer mileno. Variaciones para na sinfonía sin componer". III Encuentro Iberoameriano de informática educativa. Barranquilla./Colombia. Julio,1996.

Scardamalia, M. (1989). "Computer-supported international learning environments. Journal of educational" Computing Research.

Tourraine, A (1993) "Crítica de la modernidad". Madrid: Temas de hoy. Winnick Cluts, Nancy *"Programming the Windows 95 User Interface"* (Microsoft Developer Network CD. Books and Periodicals

LOS ESPACIOS WEB COMO PARADIGMAS EN LA APLICACIÓN DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN A LA EDUCACIÓN.

LÁZARO S. DIBUT TOLEDO · JOSÉ JOAQUÍN ARRIETA GALLASTEGUI · HASSAN ARTEAGA RODRÍGUEZ
AURELIO ANTELO COLLADO · ERNESTO R. FUENTES GARÍ · NARCISO R. DE LEÓN RODRÍGUEZ · ANTONIO REY ROQUE
JULIÁN SARRÍA GONZÁLEZ · MIGDALIA TORRES DEL TORO · JORGE LUIS MAZAIRA FERNÁNDEZ · FRANKLIN PÉREZ GONZÁLEZ
EDUARDO R. BRAVO DE LAS CASAS · GIRALDO VALDÉS PARDO · SANDRA AGUDÍN PÉREZ

1. INTRODUCCIÓN.

Las tendencias actuales en cuanto a la utilización de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC), en entornos educativos, apuntan a la utilización de las redes locales y las de alcance global como soporte a la docencia en general y a la universitaria en particular [Arteaga, H., 1999], [Dibut, L.S.,1999], [Fuentes, E.R., 2000]. Las redes ofrecen una plataforma interactiva, que permite la elaboración de unidades didácticas a las cuales el alumnado puede acceder en cualquier momento y desde cualquier lugar. Esta tecnología posibilita preparar material complementario a las clases para presentar temas que más tarde se pueden analizar, comentar o trabajar en la propia clase, o que garanticen preparar materiales de refuerzo sobre conocimientos básicos necesarios para poder emprender cualquier tema nuevo. Este recurso permite la creación de espacios web, llamados a ser el paradigma de la aplicación de las NTIC a la Educación.

2. DESARROLLO.

El desarrollo del trabajo está estructurado en los siguientes epígrafes: Los espacios web como modelos de educación en línea, enfoque educacional de los espacios web, facilidades para la interacción y la gestión que ofrecen los espacios Web que los hacen adecuados para desarrollar sistemas de apoyo a la enseñanza *y los* programas para el diseño interactivo de espacios Web.

2.1. Los espacios web como modelos de educación en línea.
Uno de los servicios más conocidos de Internet es el servicio World Wide Web, conocido también como WWW, es un servicio de Internet basado en tecnología de hipertexto, que da la posibilidad de navegar por el mundo de la información. Para hacer uso de Web hay que auxiliarse de un programa cliente, que cumpla funciones de navegador, que sea capaz de leer hipertexto. Navegadores han surgido muchos, desde el www que fue el más sencillo de todos, orientado a texto; Mosaic que es más sofisticado, pues permite no solo texto sino también gráficos, sonido, vídeo, todo vinculado en un mismo documento a examinar; hasta los de más reciente aparición, como Netscape Navigator de la Corp. Netscape, e Internet Explorer de Microsoft. Las páginas o espacios Web, como suele llamárseles a esos documentos, llegaron para quedarse. De los servicios de Internet WWW es el más completo y el de mayores posibilidades educativas, desde él se puede hacer de todo. Con páginas o espacios Web se atraviesa el mundo pasando de un documento a otro a través de vínculos o enlaces; pero, ¿qué son los espacios web?

2.2. ENFOQUE EDUCACIONAL DE LOS ESPACIOS WEB. ¿QUÉ SON?

En epígrafes anteriores se abordaron las ideas acerca de como llegó el ordenador a tomar un papel fundamental en la enseñanza y el aprendizaje en los diferentes niveles educacionales, siendo ya imposible prescindir de ella a determinados niveles. El ordenador surge producto del desarrollo y a la vez constituye un motor que impulsa el desarrollo. Su eficiente explotación en la educación es y será material de estudio e investigación para informáticos y pedagogos. En las teorías para el aprendizaje a través del ordenador tiene mucha importancia y peso el desarrollo de sistemas interactivos entre el estudiante y la máquina. Se sabe lo atractivo y fácil que resulta interactuar con sistemas que incluyan sonidos, imágenes, videos, que permitan la navegación a través de sus documentos, no obligando a la lectura lineal, además, que tengan posibilidades para el análisis y elaboración de respuestas de exámenes comprobatorios. Estas y algunas cosas más son fundamentales en la elaboración de buenos sistemas para la enseñanza. Existen muchos softwares que se utilizan para la elaboración de materiales de este tipo, como el ToolBook, pero la posibilidad de utilizarlos en red es limitada y es importante que podamos decir que "nuestro ordenador es la red", el software más utilizado en la actualidad para este tipo de aplicación es el FrontPage sobre el que comentaremos más adelante. Estas facilidades las ofrece el servicio al que hacemos referencia, y no el servicio como tal, que no es más que el medio a través del cual se pueden utilizar los espacios Web, sino los espacios en sí que son el medio para hacer todo a lo que nos hemos referido. Una espacio web no es más que un documento que permite la navegación a través de él y desde el cual se puede hacer uso de multimedios, los espacios web pueden estar conformados por una o varias páginas conectadas entre si. A continuación se describen algunas características que pueden ser explotadas en el tratamiento de los documentos dando posibilidad a una mejor lectura e interacción con ellos.

2.3. FACILIDADES PARA LA INTERACCIÓN Y LA GESTIÓN QUE OFRECEN LOS ESPACIOS WEB QUE LOS HACEN ADECUADOS PARA DESARROLLAR SISTEMAS DE APOYO A LA ENSEÑANZA.

Durante la elaboración y diseño de los espacios web se pueden utilizar ciertas facilidades ofrecidas por el lenguaje HTML (HyperText Markup Language) que proporcionan beneficios desde el punto de vista de la interacción y facilidad para la lectura de sus contenidos, que las hacen muy atractivas y sencillas en su manejo. A continuación se hace referencia a estas características del lenguaje:

Bookmark.
Link.
Frame.
Forms.
CGI. ISAPI. Herramientas y tecnologías surgidas para correr procedimientos desde un espacio web.

Un **bookmark** (marcador) es una cadena determinada de caracteres en una página, que se marca para que sea el destino de un enlace; dicho enlace puede venir de la misma página o de otra página como destino de un **link.** Es lo que se utiliza para moverse dentro de una misma página en enlaces de un extremo a otro o a lugares determinados para facilitar la lectura y el movimiento dentro de la misma.

Un **link** (enlace) es un salto desde una espacio web a otro o a un bookmark, en la página actual o en otra localizada en cualquier parte, que pueden estar en el mismo espacio web o en cualquier ordenador del mundo. También pueden ser enlaces a otros servicios como el FTP (File Transfer Protocol) protocolo para la transferencia de ficheros, WAIS (Wide Area Information Service) servicio de información de amplia cobertura, el correo electrónico, etc.

Los **frame** (marcos) son formas de dividir las páginas en dos o más partes que pueden interactuar unas con otras, o ser independientes en la misma pantalla. En una ventana puede estar sucediendo una cosa y en la otra, otra diferente y no afectarse mutuamente en su ejecución, o activar un enlace en una de ellas y el resultado obtenerlo en la otra parte. Es muy benéfico para hacer lecturas amenas y para lograr una mayor concentración de los contenidos, dando una mejor idea de la generalidad que se trata.

Las **forms** (formas) son colecciones de campos de **formas** que se agrupan en una página para recoger datos del usuario. Estas pueden incluir:

Check Box: permite al usuario elegir haciendo clic en una caja.
Radio Button: permite al usuario elegir haciendo clic en un botón.
Drop Down Menu: permite al usuario elegir desde un menú desplegable.
One-Line Text Box: permite al usuario entrar texto en un campo de una sola línea.
Scrolling Text Box: permite al usuario entrar texto en un campo de varias líneas.
Push Button: permite al usuario someter la forma a procesamiento o limpiarla, retornándola a su estado inicial.
Image: permite al usuario hacer clic en una imagen para someter la forma a procesamiento.

Todas estas son posibilidades que se ofrecen para establecer interacciones entre usuarios y páginas en el intercambio de información, cosa que puede ser muy útil para la elaboración de pruebas, autoexámenes, interacción con bases de datos, ejecución de procedimientos remotos, etc.

CGI (Common Gateway Interface). Es una interfaz que surge para extender la funcionalidad de los servidores. De forma general, ofrecen la posibilidad de interactuar con el usuario de manera tal que recoja datos suministrados por éste, los procese y le envíe un resultado basado en esas entradas. En un nivel práctico, la CGI es una interfaz que da la posibilidad a los programadores de escribir programas que puedan fácilmente comunicarse con el servidor. Tiene la ventaja de que pueden ser programados en cualquier lenguaje de programación. Desde un botón en una forma puede enviarse a correr la CGI que estará localizada en el servidor; dicha forma estará localizada en una espacio web que el usuario podrá estar viendo desde cualquier lugar.

ISAPI (Microsoft Internet Server Application Programming Interface). Es otra de las herramientas que pueden utilizarse para correr programas desde un espacio Web. Desde formas HTML o dando clic en enlaces de las páginas pueden activarse estas aplicaciones, igual que con las CGI, tomando información suministrada por el usuario pueden hacer casi cualquier cosa que pueda ser programada y retornar el resultado en una página HTML o poniendo la información en una base de datos.Esta tiene una ventaja sobre la CGI y es que al ejecutarse, la aplicación es cargada en la memoria del servidor a tiempo de ejecución, lo cual produce menos sobrecarga y un mayor aprovechamiento de la memoria, pues cada petición no comienza un proceso separado, como sucede con la CGI.

La conexión con bases de datos es otra ventaja para la ampliación de la funcionalidad de los espacios web. La posibilidad de comunicarse con bases de datos desde un espacio web aporta incontables ventajas, independientemente del objetivo para el que haya sido creado el mismo; es decir, no sólo en redes de empresas o corporativas pueden tener uso las bases de datos, sino también en centros educacionales con redes locales o conectadas a Internet. Un espacio web, diseñado para la educación, con conexión a bases de datos permite ampliar el horizonte informativo de sus usuarios ya que estas pueden contener cualquier tipo de información. Otro aspecto importante es que a partir del propio espacio web se generen bases de datos; esto por ejemplo sería útil para determinado espacios web educativos en que interese almacenar toda la información de los usuarios del mismo , como pueden ser: cantidad de visitas, tiempo de conexión, páginas visitas, tiempo promedio en cada página, resultados de las evaluaciones realizadas, etc. Esta información puede ser utilizada posteriormente para hacer determinados estudios investigativos.

2.4. Programas para el diseño interactivo de espacios Web.

Los espacios Web comenzaron a diseñarse escribiendo todo el código HTML a mano. Hoy en día no es necesaria tal situación, existen muchos software que hacen posible este trabajo con bastante facilidad. Entre ellos están:

HTMLEasy.
FrontPage en sus versiones para Windows `95 y `97, y para Windows NT.
Office `97 y `2000
HoTMetaL Pro.
Page Mill.
Hotdog Web Editor.
Microsoft HTML Help Workshop.

Que entre muchos otros han sido creados con este objetivo. Decir cual es mejor no es fácil por varias razones, una de ellas es que habría que utilizarlos a todos para emitir un criterio personal, otro es que dependen mucho del sistema operativo y por tanto hay que utilizar el que corresponda al que se posee, aunque otro ofrezca mejores posibilidades. Esto ocurre por ejemplo con el FrontPage en sus versiones para Windows '95 y Windows NT, donde este último está mejor pero sólo puede instalarse sobre Windows NT Server. Existe el Word de Office '97 y `2000 con las posibilidades de editar páginas y con el explorador de Internet incorporado, lo cual es muy conveniente, pero hay que disponer de algún servidor WWW como software aparte, para poder correr programas ejecutables desde una página. Por el contrario, el FrontPage tiene un servidor incorporado como servidor personal. Para poder explotar el espacio web hay que utilizar un servidor que sea residente. No obstante, sus posibilidades son numerosas, pues tiene además, un explorador que ofrece varias posibilidades que aportan comodidades para el diseño y creación de un espacio web.

Conclusiones.

A partir de la revisión bibliográfica realizada sobre temas relacionados a las NTIC, se ha podido constatar la gran importancia que tiene el uso de los ordenadores como medio de enseñanza y la impostergable necesidad de crear sistemas que permitan su incorporación como recurso didáctico en diferentes disciplinas. En este sentido, profundizamos en los espacios web, sobre los cuales podemos resumir que :
Resulta eficiente y rápida la elaboración de sistemas para la enseñanza en formato HTML, que hagan uso del servicio WWW.
Los sistemas de esta forma elaborados pueden cumplir con todos los requisitos que demanda un sistema para la enseñanza.
Los sistemas desarrollados con la tecnología wb proveen una adecuada interactividad hombre-ordenador.
El empleo de sistemas de enseñanza basados en web estimula el trabajo en grupo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Arteaga, H. (1999). MathDev : *Sitio web interactivo como herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite y continuidad de una función.* Tesis en opción al título de Máster en Matemática Aplicada. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", Cuba.

Dibut, L.S. (1999). El hipertexto como recurso cognitivo en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite y continuidad de una función. Trabajo de Investigación. Universidad de Oviedo, España.

Fuentes, E.R. (2000). Subsistema didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en las carreras de Ciencias Técnicas basado en las Nuevas Tecnologías de la Información. Tesis presentada en opción del Grado Científico de doctor en Ciencias Pedagógicas. Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", Cuba.

DERIVE 5. NUEVA VERSIÓN DEL PROGRAMA DE CÁLCULO SIMBÓLICO

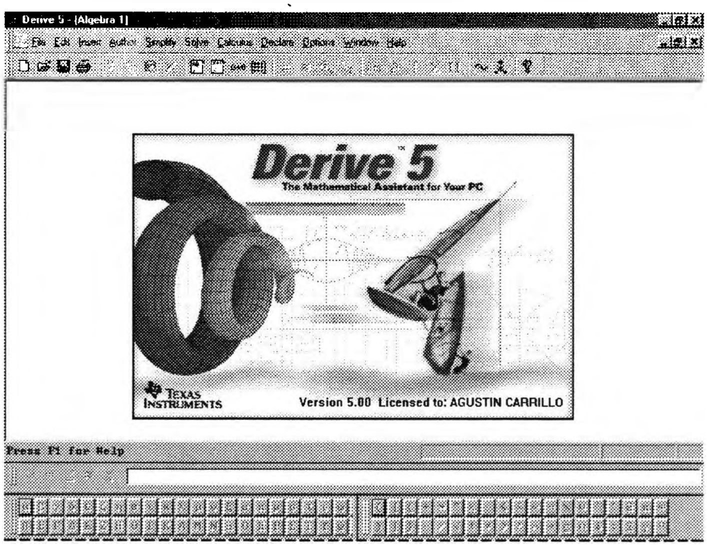
Agustín Carrillo de Albornoz Torres · Inmaculada Llamas Centeno

Entre los distintos programas de cálculo simbólico existentes en el mercado consideramos que Derive es el que mejor se adapta para trabajar en Secundaria y en Bachillerato.

Aún a pesar de perder algunas capacidades gráficas y en la versiones anteriores, con menor calidad, las necesidades de equipos, tan escasos en los centros y la sencillez para conocer su manejo y funcionamiento, nos hacen decantarnos por él para incorporarlo al aula de matemáticas y de otras áreas en este nivel educativo.

Además, aunque la nueva versión recientemente aparecida no está traducida al castellano, es de esperar como ha ocurrido con las versiones anteriores, que en breve esté disponible en español, lo que supone una ventaja más a la hora de utilizarla.

La sesión que hemos planteado en este Congreso consistirá en la exposición de las características nuevas que ofrece la versión 5 que completaremos con la resolución con esta herramienta de distintas actividades habituales en los currículos de ESO y Bachillerato.



EL ORDENADOR. UNA HERRAMIENTA ÚTIL EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

YOLANDA PADILLA DOMÍNGUEZ · JOSÉ FCO. MORONES BURGOS
PEDRO RODRÍGUEZ CIELOS · SIXTO SÁNCHEZ MERINO

1. RESUMEN

Es un hecho que el mundo evoluciona constantemente y estos cambios, como nuevas costumbres, nuevos aparatos tecnológicos, nuevos valores..., influyen en nuestra vida y tienen un claro reflejo en la enseñanza.

Adelantos tales como la calculadora, el proyector de diapositivas, el retroproyector, la televisión, el vídeo, el cañón de retroproyección y como no, el ordenador, han influido y facilitado la labor de enseñanza-aprendizaje en todas las materias. Quizás en la enseñanza de las Matemáticas es donde menos se habían apreciado estos adelantos, hasta la aparición de la calculadora y, principalmente, del ordenador.

La introducción del ordenador en el aula nos ha permitido enseñar las Matemáticas de una forma más interactiva y personalizada, además de llegar más fácilmente al alumno. De esta manera se consigue que los alumnos puedan experimentar y tratar de descubrir los conceptos por sí solos.

El propósito de esta comunicación es plantear una de las múltiples aplicaciones de este adelanto a la enseñanza de las Matemáticas, así como compartir los resultados obtenidos de nuestra experiencia con los alumnos de Secundaria.

2. VENTAJAS E INCONVENIENTES DEL USO DEL ORDENADOR

El ordenador es una herramienta muy potente cuyo uso tiene, por un lado, una serie de ventajas que hacen aconsejable su utilización en el aula pero, a su vez, una serie de inconvenientes.

Las ventajas que podemos destacar son las siguientes:

- Se le ofrece al alumno una visión distinta de las Matemáticas, lo que significa que se despierta en él una mezcla de interés-curiosidad por la asignatura.
- El alumno se siente más motivado hacia la clase de Matemáticas, aunque en principio sólo sea por encontrarse con una herramienta nueva y atractiva. Valga como ejemplo las posibilidades gráficas de los programas informáticos de Matemáticas.
- El alumno descubre por sí sólo, ya que se produce un trabajo más autónomo, lo que permite que el ritmo de aprendizaje se adapte a cada alumno.
- Se puede hacer mayor hincapié en los conceptos matemáticos, ya que el uso de este tipo de programas elimina los errores de cálculo.
- Este método favorece claramente el trabajo en grupo.
- No se debe olvidar la utilidad del ordenador en la futura actividad laboral de los alumnos.

Los inconvenientes provienen principalmente del abuso de estos métodos y son los siguientes:

- Esa mayor motivación del alumno, a la que antes hacíamos referencia, tiene su origen en el programa informático y, por lo tanto, puede llegar a ser pasajera.
- La eliminación de desarrollos de cálculo matemático puede producir una pérdida de destrezas por parte del alumno.

No debemos olvidar que el uso del ordenador debe ser un complemento y en ningún caso un sustituto de la tradicional clase de Matemáticas. Esto mismo se puede aplicar para que no se produzca una mecanización total de las tareas y, por lo tanto, una pérdida del sentido crítico. Con todo lo dicho hay que tratar de encontrar el equilibrio. No se puede descartar su uso porque tenga una serie de inconvenientes, ni tampoco utilizarlo sin ser capaz de detectarlos.

3. ¿QUÉ PROGRAMA ES MÁS CONVENIENTE?

Ante todo, nos tiene que quedar claro, que las dificultades con las que se encuentre el alumno no deben provenir del programa informático, sino del propio problema planteado. Esta es la razón por la cual nosotros creemos que DERIVE es el programa más adecuado para ser utilizado en Enseñanza Secundaria. Su sistema de menús hace que cualquier persona, con unas mínimas nociones previas, sea capaz de manejarlo con destreza.

También, si utilizamos la versión para MS-DOS encontraremos que, a diferencia de los programas de Windows, no necesita instalación, ocupa muy poco espacio y se puede ejecutar desde el disquete. Además, no podemos olvidar el mal estado en el que se encuentran los ordenadores de algunas aulas de informática en los institutos y con este programa no necesitamos ni el ratón, que es lo primero que desaparece o se rompe en estas aulas.

4. OBJETIVOS

Los objetivos que nos hemos propuesto con nuestra experiencia tratan de aprovechar todas las ventajas que antes comentábamos. Se pueden resumir en los siguientes:
Que el alumno, por sí sólo, vaya descubriendo algunos de los conceptos matemáticos que se le quieren presentar. El alumno debe ser, en la medida de lo posible, el protagonista de su aprendizaje.
Eliminar los cálculos mecánicos laboriosos, que muchas veces hacen que se pierda la visión global del concepto debido a los frecuentes errores de cálculo.
La posibilidad de experimentar con el problema planteado. Se trata de poder modificar los datos iniciales y, sin la necesidad de repetir de nuevo todo el proceso, obtener la nueva solución.
Aumentar la motivación de los alumnos hacia la clase de Matemáticas, además de conseguir adecuar el ritmo de aprendizaje al de cada alumno en particular.
Fomentar el trabajo en grupo, de forma que cada uno aporte algunas ideas para posteriormente discutirlas y llegar a una conclusión común.
Utilizar las posibilidades de cálculo de un programa informático, de manera que el alumno pueda usarlo para comprobar los resultados de sus ejercicios. Esto le permite descubrir los temas en los que tiene mayores deficiencias.

5. EXPERIENCIAS REALIZADAS

El trabajo ha sido realizado con alumnos de Enseñanza Secundaria. Dichas experiencias se pueden dividir en tres bloques:

Representación gráfica

Esta actividad se realizó con alumnos de 4º de ESO. El tema tratado fue la representación gráfica de funciones afines y cuadráticas. Básicamente, consistió en sustituir las clases iniciales en pizarra de este tema por un trabajo en el aula de informática. El objetivo principal era que los alumnos sacaran conclusiones a partir de las gráficas de una serie de funciones. Se empezó representando un modelo y los alumnos describieron las siguientes características: tipo de representación gráfica, continuidad, crecimiento, extremos, asíntotas, tendencias, etc. A partir de ahí se iba variando el modelo y se veía como afectaban estos cambios en las características antes descritas. De esta manera se consiguió, en sólo un par de horas, lo mismo que en las tradicionales "clases de pizarra" se tarda dos o tres semanas.

Estudio geométrico de las cónicas

Aunque parecida a la anterior y realizada en el mismo nivel, el enfoque de esta práctica es totalmente distinto, en el sentido de que el estudio va más encaminado a las propiedades geométricas de las cónicas (parábola, elipse, hipérbola y circunferencia), la relación entre las mismas y la influencia de los distintos parámetros en la gráfica.

Estadística

En esta experiencia se utiliza el ordenador como una potente calculadora para realizar los cálculos necesarios, así como para cambiar los datos del modelo y poder ahondar en el estudio de las propiedades de los parámetros estadísticos.

6. RESULTADOS

Tras el trabajo realizado con los alumnos en el aula de informática, hemos detectado que esta forma de enseñanza no es la solución a todos los problemas. Esta afirmación se basa en que dependiendo del tipo de alumnado y su interés por los estudios, se pueden encontrar dos tipos de resultados:
Una experiencia positiva donde el alumno completa su aprendizaje de la clase teórica, capta los conceptos con más rapidez e incluso, alumnos que no entendían nada en clases teóricas, consiguen comprenderlo delante de un ordenador.
Y por otra parte una experiencia menos positiva, en la que no se aprecia ningún tipo de mejoría en el aprendizaje de las Matemáticas, aunque incluyamos nuevas tecnologías.

7. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS

Para la realización de las experiencias anteriormente comentadas y otras futuras, es necesario la elaboración, por parte del profesor, de una serie de materiales para que los alumnos trabajen con ellos. Deben realizarse a modo de prácticas o fichas.

Sin lugar a dudas es la parte más delicada de todas, ya que deben ser unos materiales apropiados para que se alcancen los objetivos propuestos. A la vista de nuestra experiencia, es importante que dichos materiales estén en continua y constante renovación.

La estructura que proponemos en cada una de estas prácticas es la siguiente:

- Breve resumen inicial de los comandos de DERIVE que se van a utilizar en el desarrollo de la práctica.
- Una serie de ejemplos sencillos que permitan a los alumnos experimentar y sacar las primeras conclusiones.
- Unos breves resúmenes teóricos, que den formalismo a las ideas intuitivas adquiridas a partir de las cuestiones planteadas en los ejemplos.
- Unos ejercicios finales a modo de repaso, que agrupen todos los conceptos presentados a lo largo de la experiencia.

8. EXPECTATIVAS DE FUTURO

Actualmente tenemos desarrolladas las siguientes prácticas: Función afín, la recta. Función cuadrática, la parábola. Estudio geométrico de las cónicas. El concepto de derivada, aplicaciones. El concepto de integral definida, aplicaciones y cálculo de primitivas. Pero nuestra idea es intentar trabajar gran parte del temario de Matemáticas en Secundaria con el ordenador y el soporte informático, lo que conlleva la elaboración de más prácticas destinadas a tal fin y que recojan la mayoría de dicho temario. Como complemento a estas prácticas, también hemos elaborado algunos ficheros, tanto de demostración como de definiciones, que nos ayuden a trabajar con la parte del curriculum menos propicia a ser tratada con el ordenador.

9. CONCLUSIONES FINALES

La idea principal que se nos debe quedar es la necesidad de la incorporación gradual de las nuevas tecnologías a la clase de Matemáticas. Para ello debemos aprovechar cualquier experiencia previa que ya se haya realizado, para tratar de adaptarla al contexto de nuestros alumnos y de nuestro centro. Debemos tener también un continuo intercambio de ideas con el resto del profesorado que esté trabajando en la misma línea. Unos buenos puntos de encuentro pueden ser a través de los Centros del Profesorado, Congresos como éste o, incluso, a través de la red de Internet (listas de distribución, correo electrónico, páginas Web, etc.).

Nuestra intención final es animar a todos los profesores a que utilicen, en la medida de lo posible, ésta u otras nuevas técnicas docentes. No deben ser excusas la falta de equipos informáticos, el elevado número de alumnos, el trabajo excesivo para el profesor o el miedo a no saber cómo va a salir. La motivación de los alumnos, los resultados que se pueden llegar a obtener y la propia inquietud docente, deben ser bastante para que iniciemos, por muy simple que sea, una experiencia de este tipo.

TRATAMIENTO METODOLÓGICO DEL LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN UTILIZANDO EL ESPACIO WEB MATHDEV

LÁZARO S. DIBUT TOLEDO · JOSÉ JOAQUÍN ARRIETA GALLASTEGUI · HASSAN ARTEAGA RODRÍGUEZ
NARCISO R. DE LEÓN RODRÍGUEZ · MIGDALIA TORRES DEL TORO · ANTONIO REY ROQUE
EDUARDO R. BRAVO DE LAS CASAS · JORGE LUIS MAZAIRA FERNÁNDEZ · AURELIO ANTELO COLLADO
JULIÁN SARRÍA GONZÁLEZ · ERNESTO R. FUENTES GARÍ.

1. INTRODUCCIÓN.

Una de las características comunes en los planes y programas de estudio de Matemática en los Centros de Educación Superior (CES) cubanos, es el hecho que se incluye la enseñanza del Cálculo dentro del ciclo básico; sin embargo, es bien conocido que los estudiantes confrontan grandes dificultades en la comprensión, asimilación, interpretación y aplicación del mismo, lo que se refleja en las evaluaciones y en el empleo del aparato conceptual en otras disciplinas. Estudios como los de D.Tall (1986,1994), M.Artigue (1992,1996,1998), B.Cornu (1983), A.Sierpinska (1985), S.Vinner (1989), G.Brousseau (1983), J.Torres (1995) y L.Dibut (1996), etc., muestran de manera clara que son muchos los obstáculos que se presentan para una comprensión clara del aparato conceptual del Cálculo, muy particularmente del concepto de límite de una función.

El objetivo de la presente comunicación es presentar un nuevo enfoque para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite y continuidad de una función, utilizando el espacio web MathDev como herramienta en este proceso.

2. DESARROLLO.

2.1. ¿ Por qué introducir el espacio web MathDev en esta problemática ?

En los últimos 15 años se han realizado grandes esfuerzos por superar las dificultades u obstáculos que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite y continuidad de una función, a partir de la introducción de las nuevas tecnologías informáticas en este proceso. Entre las experiencias internacionales más significativas se encuentran los trabajos de : E. Dubinsky (1989,1990a,1990b) y D.Tall (1986a ,1986b,1990,1994) que utilizan el programa Graphipc Calculus (GC), J. Torres (1995) sugiere utilizar el DERIVE o el MATHEMATICA; F. Hitt (1990,1992), E. Galindo (1992); P. Balderas (1992) y R. Hardings (1995. En nuestro país se destaca el trabajo de Z. Valdivia (1994) la cual utilizó un tutorial inteligente para abordar esta problemática; también L. Dibut (1996) realizó trabajos relacionados con los hipertextos y su influencia en la formalización de los conceptos de límite y continuidad.

Por otra parte, se ha observado en un período menor de dos años una marcada tendencia de vincular las intranets privadas de importantes compañías a reconocidas universidades por medio de la implementación de espacios web relacionados con la enseñanza. La utilización de espacios web dinámicos para la educación presenta, entre otras, las siguientes ventajas:

Muestran información de todo tipo en una perfecta armonía e integración, desde texto, vídeo, gráficos, animación y bases de datos.

Son realmente eficaces para el acceso a una información desde un local remoto o lejano, así como para la colección, clasificación y gestión para usuarios de todo tipo, ya sean habituales y potenciales, K. Miller, K. Spencer, E. Vincent, N. D. Evans (1998).

HTML y los diferentes lenguajes para la programación en Internet o Intranets (JAVA, JavaScript, VBScript, Active Server Pages, PERL, etc.), son y serán la base para el desarrollo de aplicaciones y sistemas para la captación, transporte y distribución de la información en las redes, J.F. Macary, C. Nicolas (1997).

2.2. CARACTERIZACIÓN GENERAL DEL ESPACIO WEB MATHDEV.

El espacio web ***MathDev*** consta de los siguientes módulos o partes funcionales:

Módulo de Autentificación de usuarios: Este es el primer lugar a visitar para comenzar a trabajar en el espacio web, en él los usuarios se identifican con un nombre de usuario, contraseña y tipo de usuario (alumno o profesor); este último dato determina, independientemente de los anteriores, determinadas funciones del visitante al espacio.

Módulo de Búsqueda: Independientemente del buen diseño de la interfaz y de la red de nodos e hipervínculos que posee el espacio, no está exento de la "desorientación", por tanto los usuarios tienen a su disposición una herramienta de búsqueda del texto estático.

Módulo de Contenidos: En este módulo se inserta el contenido del tema o materia que interesa para el profesor o profesores de una materia en particular. El trabajo metodológico y la creatividad son elementos esenciales que deben desarrollar los profesores en el momento de diseñar la forma en que se

presentarán estos contenidos; es decir, cómo presentar los textos, gráficas, animaciones, vídeos, etc., de la forma más didáctica posible.
Módulo Evaluativo: En dependencia si el usuario es del tipo "alumno" o "profesor"
tendrá acceso a los siguientes submódulos: SubMódulo de Diseño y Edición de Exámenes, SubMódulo de Aplicación de Examen, SubMódulo de Calificación, y el SubMódulo " Buzón de Calificaciones ".
Módulo de Administración: En este módulo el administrador de la red o el Web Master tendrá la posibilidad de editar, eliminar o adicionar usuarios al espacio web.
Módulo de Gestión: Es el lugar donde el profesor podrá seleccionar y clasificar la información de los usuarios que se han conectado al espacio, en base a diferentes criterios.

Tratamiento metodológico de los contenidos de Límite y Continuidad en el espacio web MathDev.

En el módulo de contenido se encuentran las principales definiciones, teoremas, ejemplos resueltos, orientaciones metodológicas, gráficas de funciones, algunas de ellas con animación, que permiten estudiar el comportamiento de una función alrededor de un punto o en el infinito y llegar a conclusiones sobre la existencia o no del límite; o decidir si la misma es continua o no, etc. El mismo dispone de un hipervínculo al Espacio FTP (File Transfer Protocol), permitiendo el acceso a un vídeo demostrativo sobre la "Interpretación Geométrica del Concepto de Límite de una Función en un Punto".
En la pantalla principal de este módulo están incluidos todos los enlaces generales vinculados con el contenido, los cuales son:
Temas: Relación de los temas que abarcan todo el contenido.
Capítulos: Relación de los capítulos donde están incluidos los temas.
Lecciones: Relación de las lecciones que tiene cada capítulo.
Índice Temático de Contenidos*:* Relación de los índices temáticos por contenidos.
Índice Temático de Figuras: Relación de todas las figuras incluidas en el espacio web, que incluye gráficas de funciones estáticas o animadas.
Vídeo: Vídeo sobre la "Interpretación Geométrica del Concepto de Límite de una Función en un Punto".
Bibliografía: Relación bibliográfica de alguno de los libros más importantes de Matemática donde están incluidos estos contenidos.

En el nodo **Temas** se encuentra la relación de las temáticas más generales vinculadas al contenido en cuestión, en este caso :
1. Introducción.
2. Límite de una Función.
3. Continuidad de una Función.

A su vez estas temáticas generales están enlazadas a capítulos, y estos a su vez a lecciones ; por ejemplo dentro de la temática Introducción se encuentra sólo el **CAPÍTULO 1 : Introducción** , y las lecciones vinculadas a este capítulo son :

CAPÍTULO 1 : Introducción.

Lección 1/1 : Intervalos y Vecindades.
Lección 1/2 : Funciones.
Lección 1/3 : Grafo y Gráfica de una Función.
Lección 1/4 : Operaciones con Funciones.
Lección 1/5 : Función Compuesta.
Lección 1/6 : Funciones Inyectivas y Funciones Inversas.
Lección 1/7 : Funciones Monótonas y Funciones Acotadas.
Lección 1/8 : Funciones Potenciales.
Lección 1/9 : Funciones Algebraicas.
Lección 1/10 : Funciones Trascendentes.

La temática de **Límite de una Función** contiene los siguientes capítulos :

CAPITULO 2 : Límite de una Función en un Punto.
CAPITULO 3 : Límites en el Infinito.
CAPITULO 4 : Límites Infinitos.
CAPITULO 5 : Formas Indeterminadas.
CAPITULO 6 : Límites Notables.
CAPITULO 7 : Infinitésimos e Infinitos.

En el **CAPÍTULO 2** están incluidas las siguientes lecciones :

Lección 2/1 : Definición de Límite de una Función en un Punto.

Lección 2/2 : Teoremas Fundamentales sobre Límites.
Lección 2/3 : Límite de Algunas Funciones.
Lección 2/4 : Límites Laterales.

La estructura de cada lección es la siguiente :
Título de la lección.
Sumario.
Desarrollo de los puntos del sumario con enlaces a otros nodos
Enlaces a otros nodos.

Por ejemplo la **Lección 2/1** tiene la siguiente estructura :

Lección 2/1 : Definición de Límite de una Función en un Punto
Sumario:
1. Definición de Límite de una Función en un Punto.
2. Interpretación Geométrica del Concepto de Límite de una Función en un Punto.
3. Análisis Geométrico del Límite de una Función en un Punto.

Un estudiante que se haya enlazado al **Módulo de Contenidos** pudo haber llegado hasta el vídeo sobre la **Interpretación Geométrica del Concepto de Límite de una Función en un Punto**, siguiendo la siguiente secuencia de enlaces :
Temas → Capítulos → Lecciones → Lección 2/1 → Interpretación Geométrica del Concepto de Límite de una Función en un Punto → Vídeo.

3. CONCLUSIONES.

La etapa actual de desarrollo no puede ignorar el impacto de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación en los diversos campos de la vida social. La escuela en general y la Universidad en particular, están en la obligación de desarrollar el proceso docente educativo introduciendo racionalmente estas tecnologías. En este trabajo, hemos querido llevar a la práctica las reflexiones hechas con anterioridad, para lo cual se desarrolló e implementó un espacio web denominado MathDev, como herramienta de apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de Límite y Continuidad de una Función. Cada colectivo de profesores de Matemática, que utilicen el espacio Web MathDev en sus clases, debe elaborar una estrategia didáctica que contribuya a una mejor asimilación y comprensión de estos conceptos, así como la integración del espacio en el complejo sistema de relaciones : profesor-alumno, alumno-alumno y de sujeto a objeto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Artigue, M., & Eivynck, G. (Eds.).(1992). ***Procceedings of Working Group 3 on students difficulties in calculus.*** ICME-7. Université de Sherbrooke. Canadá.

Artigue, M. (1996). *Teaching and Learning Elementary Analysis.* Actas ICME-8. Sevilla. España.

Artigue, M. (1998). *L´ Évolution des Problematiques en Didactique de L´ Analyse.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.18 (2). pp.231-262.

Balderas, P. (1992). ***Aprendizaje de conceptos de cálculos mediante graficación en microcomputadoras.*** En Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Brousseau, G. (1983). ***Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques.*** Recherches en Didactique des Mathématiques, 2 (3), pp.303-346.

Cornu, B.(1983) *Apprentissage de la notion de limits: conceptions et obstacles* .(thése de doctorat). Université de Grenoble I.

Dibut, L. (1996). El Hipertexto como recurso cognitivo en el proceso de formación de los conceptos de límite y continuidad. Tesis en opción al Título de Máster en Educación. Universidad de Cienfuegos. Cuba.

Dubinsky, E., & Nichols, D. (1989). Development of the Process Conceptions of Function in Pre-Service Teachers in a Discrete Mathematics Course. Proccedings of the PME 13, París.

Dubinsky, E., & Schwingendorf, A. (1990a). ***Calculus, Concepts and Computers-innovations in learning Calculus***". CRAFTY (Ed. Tucker T.), Math. Assoc. Amer.

Dubinsky, E., & Schwingendorf, A. (1990b). ***Constructing Calculus Concepts : Cooperation in a computer laborator***". MAA Notes Series, (Ed. Leinbach C.). Math. Assoc. Amer.

Galindo, E. (1992). ***El concepto de límite en un ambiente computacional.*** En Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Hardings, R., & others. (1995). Multimedia Interactive Mathematics Courseware : The Mathematics Experience within the Renaissance Project. Computers & Education, 24(1), pp.1-23.

Hits, F., y otros. (1992). ***Visualización relacionada a Conceptos de Cálculo con microcomputadora***. En Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Hitt, F., y otros. (1990). ***Las microcomputadoras en la educación matemática***. En Memorias de la IV Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.

Lienhardt, G., & others. (1990). ***Functions, grafhs and graphing : Tasks, learning and teaching***. Review of Educational Research, Spring, 60(1), pp.1-64.

Macary, J. F., Nicolas, C. (1998). ***Programación JAVA***. Ediciones 2000. España

Miller, K., Spencer, K., Vincent, E., D. Evans, N. (1997). ***Inside Microsoft Visual InterDev***. Microsoft Press. Mc. Graw Hill.

Sierpinska, A. (1985). ***Obstacles épistémologiques relatifs a la nation de limits***. Recherches en didactique des mathématiques, 6 (1), pp.5-6.

Tall, D. (1986a). ***Building and Testing a Cognotive Approach to the Calculus using Computers Graphics.*** Ph. D thesis. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick.

Tall, D. (1986b). ***Using the Computer to represent Calculus Concept***. Actes de la 4iéme École d' Été de Didactique des Mathématiques et de l' informatique, Orleáns, Rapport de recherche, IMAG Grenoble, pp.238-264.

Tall, D. (1990). ***Advanced Mathematical Thinking.*** Dordrecht, Kluwer Academic Press.

Tall, D. (1994). ***Computer environments for the learning of mathematics***. In Biehler Rolf, et.al, ed. Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Kluver Academic Publishers. Dordrecht/ Boston / London.

Torres, J., y Castro, G. (1995). ***Obstáculos presentes en los estudiantes para la adquisición de los conceptos de límite y continuidad.*** Memorias del II Taller Científico Metodológico de Matemática y Computación. COMAT'95. Universidad de Matanzas. Cuba. Nov (6-9).

Valdivia, Z. (1994). ***Investigación y elaboración de sistemas de enseñanza inteligentes.***Tesis Doctoral. Universidad Central de las Villas. Cuba.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). ***Images and definitions for the concept of function***. Journal for Research in Mathematics Education, 20 (4), pp.356-366.

GRUPO 2
MATEMÁTICAS EN INFANTIL Y PRIMARIA

"DEL SABER CIENTÍFICO AL SABER ESCOLAR EN LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN. ANÁLISIS COMPARADO DE DOS MANUALES."

MANUEL GARCÍA ARMENTEROS · ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE

RESUMEN:

En el proceso de transposición didáctica (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) intervienen diferentes elementos relacionados con las Matemáticas. Desde el saber científico teóricamente contenido en el "Libro del Saber" hasta el saber escolar fruto de la transposición que realizan los manuales, se manifiestan complejos fenómenos didácticos cuya modelización y comprensión son básicas para una enseñanza eficaz. En esta Comunicación, basados en nuestra experiencia como profesores de estudiantes de 1º de Educación Primaria de la Universidad de Jaén y en las aportaciones de Contreras y García (2000), se efectúa un análisis comparado de dos manuales que se consideran pertinentes para la enseñanza de los sistemas de numeración en el nivel citado.

INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas de numeración es uno de los bloques temáticos de mayor interés en el currículo de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica de la titulación de Maestro en Educación Primaria. Consideramos que la mayoría de los errores cometidos por los alumnos, en cuanto a las cuatro operaciones básicas realizadas con números naturales y decimales, tienen su origen en un aprendizaje deficiente del concepto de sistema de numeración.
Cuando, por ejemplo, un alumno da el siguiente resultado: 3,67 + 2,75 = 5,142, se sabe que bajo esta contestación subyace una concepción errónea, que conlleva un obstáculo didáctico (Henry, 1991), cual es el considerar al número decimal como dos números naturales separados por una coma. Posteriormente, al pedir a nuestros alumnos que expresen el tipo de actividades que habría que realizar en clase de primaria para tratar de superar ese obstáculo, nos encontramos con respuestas del tipo: "le haría repetir el cálculo varias veces indicándole muy bien su error", "le diría que *se lleva una* después del último decimal", "debe efectuar el cálculo como si no hubiera coma y después se coloca ésta", ... Es decir, los remedios didácticos que se proponen suelen estar desligados del verdadero problema que planea en la respuesta: un desconocimiento de la naturaleza del número decimal como expresión polinómica, vinculado, obviamente, a la noción de sistema de numeración.
Por tanto, una adecuada instrucción de la aritmética básica en Educación Primaria pasa por un buen desarrollo de situaciones de enseñanza de los sistemas de numeración, con especial incidencia en el sistema de numeración decimal. Pero esa instrucción está íntimamente ligada a los procesos de transposición didáctica (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) que ordenan el estudio didáctico de los conceptos matemáticos. Dentro de esos procesos, aparece un momento que se denomina "saber enseñado" –reflejado explícitamente en los manuales al uso- en el que estamos interesados específicamente en este trabajo en cuanto a los sistemas de numeración. Consideramos que los textos reflejan lo que El Bouazzoui (1988) denomina "concepciones colectivas" de una determinada época y cultura, por lo que el análisis de esos manuales ha de aportar información relevante sobre la enseñanza de un concepto que facilita la explicación de determinados fenómenos didácticos (como por ejemplo es el referido anteriormente) ligados a la transposición didáctica.

EL SABER ENSEÑADO EN LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

En Contreras y García (2000) se consideraron varios tipos de conocimiento que, en nuestra opinión, deben figurar en los manuales dirigidos a la formación de profesores de Educación Primaria:

C_1, referido al contenido matemático que nuestros estudiantes han de conocer para poder enseñar posteriormente a sus propios alumnos y que aparece claramente explícito en los programas: "Fundamentos y principios de los sistemas de numeración de posición. La estructura decimal: aprendizaje y enseñanza. Los materiales estructurados en el aprendizaje del número y la numeración."

No estamos interesados en este tipo de conocimiento, puesto que no se trata de un conocimiento didáctico-matemático, sino exclusivamente matemático. Consideramos que los estudiantes universitarios deben tener una preparación adecuada después de abordar los contenidos de determinados textos que se les recomiendan. En todo caso, no creemos que nuestra labor como profesores de estos futuros maestros deba centrarse en este tipo de saber, se estima que es una condición necesaria implícita en los propios alumnos.

C_2, referido al estudio de los sistemas de numeración que realizamos en nuestra clase de Didáctica de las Matemáticas.

Como, posteriormente, se analizarán dos manuales sobre sistemas de numeración, hemos de establecer los objetivos generales que buscamos conseguir en nuestros alumnos:

- Poner de manifiesto las reglas de funcionamiento de nuestro sistema de numeración escrito y hablado.

- Extraer los diferentes aspectos relativos a la numeración a tener en cuenta cuando se construyen actividades a fin de facilitar a los niños la comprensión de la designación de los números.

Los objetivos específicos que se extraen de los anteriores son:

(i) - dar sentido a la expresión "sistema de numeración" (utilización ordenada de los signos); (ii) - conducirlos, por comparación, a extraer explícitamente los diferentes aspectos de nuestra manera de designar los números (los atributos de comparación constituyen los caracteres); (iii) - tomar conciencia de que el cálculo está fundado sobre la comprensión del sistema de numeración; (iv) - comenzar a formular los objetivos relativos al aprendizaje de la numeración en la escuela elemental; (v) - La necesidad de considerar un aprendizaje específico de la numeración oral no tomando únicamente en cuenta las traducciones escritas (paso de la escritura cifrada a la escritura en letras); (vi) - La traducción de las relaciones que existen entre las palabras para decir los números por escrituras algebraicas: 17 se puede traducir por 10+7; 80 por 4x20 y 2374 por 2x1000 + 3x100 + 7x10 + 4... Apareciendo así nuevas relaciones entre los números; (vii) - El papel que puede jugar la numeración oral en el aprendizaje de la numeración escrita cifrada.

C_3, referido a la práctica profesional del futuro profesor y, por tanto, relacionado con el conocimiento del análisis de situaciones de enseñanza sobre los sistemas de numeración en los niveles de la escuela elemental.

Los objetivos en este caso son:

(a) - Saber situar cualquier situación de enseñanza en su nivel de conocimiento apropiado de la Educación Primaria; (b) - Saber detectar e interpretar errores en los resultados de los problemas resueltos por los alumnos; © - Conocer la matemática subyacente en las situaciones de enseñanza propuestas a los alumnos; (d) - Proponer alternativas de enseñanza pertinentes ante los errores de los alumnos a fin de que puedan superar los errores detectados; (e) - Hacer aparecer los diferentes aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje de la numeración: el aspecto de útil (la numeración permite resolver determinados problemas en la escuela elemental) y el aspecto de objeto de conocimiento (la numeración considerada como un objeto matemático) que tiene en cuenta el estudio de su funcionamiento; (f) - Tomar conciencia que estos aspectos no deben ser tratados de manera paralela sino en estrecha colaboración. Es el por qué la numeración sirve como útil lo que va a hacer aparecer la numeración como objeto de conocimiento; (g) - Poner en evidencia las dificultades encontradas por los alumnos en el aprendizaje.

ANÁLISIS DE DOS MANUALES

Para el análisis de los manuales, se consideran dos variables (aunque por razones de espacio, sólo se trata la primera): *el contenido* –en cuanto al grado de adaptación a los objetivos anteriores- y el tipo de *situaciones de enseñanza* que se proponen en el texto –en lo que se refiere al grado de constructividad del conocimiento que conllevan dichas situaciones de enseñanza-

Para la primera variable, en la consecución de los objetivos anteriores consideramos que en los manuales han de abordarse, al menos, los elementos conceptuales siguientes:

- Estudio comparado de sistemas de numeración de diferentes características.
- Estudio de nuestro sistema de numeración escrito.
- Estudio de nuestro sistema de numeración oral.
- Estudio de diferentes materiales.
- Análisis de ciertos textos didácticos o actividades escolares.

En la segunda variable, tendremos en cuenta cómo se plantean las situaciones a los lectores en cada uno de los elementos conceptuales expresados anteriormente: si simplemente se proponen (casos como: "resolver", "calcular", ...), o bien se busca implicar al lector en caminos inductivos de construcción del conocimiento (casos como: "se reflexionará, por grupos, sobre las cuestiones que aparecen a continuación y se hará una puesta en común")

Adaptación de los contenidos a los objetivos propuestos

GRADO DE ADAPTACIÓN A LOS OBJETIVOS ELEMENTOS CONCEPTUALES	BIEN ADAPTADO	POCO ADAPTADO	NO ADAPTADO
Estudio comparado de sistemas de numeración de diferentes características		Descripción de distintos (7) sistemas de numeración C_2: i, ii y iii	C_2: iv, v, vi y vii C_3: a, b, c, d , e, f y g
Estudio de nuestro sistema de numeración escrita	C_2: i y iii	C_2: ii, iv y vi C_3: a	C_2: v y vii C_3: b, c, d, e, f y g
Estudio de nuestro sistema de numeración oral		C_2: i y vii	C_2: ii, iii, iv, v y vi C_3: a, b, c, d, e, f y g
Estudio de diferentes materiales		C_2: i, iii, iv, v y vi C_3: c (sólo ábacos, regletas y bloques)	C_2: ii, y vii C_3: a, b, d, e, f y g
Análisis de ciertos textos didácticos o actividades escolares		C_2: i, iii y vi	C_2: ii, iv, v y vii C_3: a, b, c, d, e, f y g

Tabla 1(manual 1)

GRADO DE ADAPTACIÓN A LOS OBJETIVOS ELEMENTOS CONCEPTUALES	BIEN ADAPTADO	POCO ADAPTADO	NO ADAPTADO
Estudio comparado de sistemas de numeración de diferentes características	Comparación de los sistemas egipcio y babilónico C_2: i y ii C_3: a, b, c, y g	C_2: iii y iv C_3: e y f	C_2: v, vi y vii C_3: d
Estudio de nuestro sistema de numeración escrita	C_2: i, ii, iii y iv C_3: a, b, c, d, e y f	C_2: v, vi y vii C_3: g	
Estudio de nuestro sistema de numeración oral	C_2: i, ii, iv, v y vii C_3: a, c, e y f	C_2: vi	C_2: iii C_3: b y d
Estudio de diferentes materiales	C_2: i, iv y vi C_3: a y c	C_2: ii y iii C_3: e, f y g	C_2: v y vii C_3: b y d
Análisis de ciertos textos didácticos o actividades escolares	C_2: i, ii, iii, iv, v, vi y vii C_3: a, b, c, e, f y g	C_3: d	

Tabla 2 (manual 2)

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Si consideramos los objetivos propuestos para la enseñanza de los sistemas de numeración a estudiantes de educación primaria como pertinentes, se observa en las tablas 1 y 2 una gran diferencia en cuanto al grado de adaptación de los contenidos a los objetivos, en los dos manuales. Mientras que en el primero hay un bajo nivel de adaptación o ninguno apara la mayoría de los objetivos – únicamente los C_2 i y iii se consideran bien adaptados- en el segundo manual sí se consigue una buena adaptación, en más de un 97% en alguno de los elementos conceptuales como en el estudio comparado de sistemas de numeración de diferentes características.

Por tanto, en el proceso de transposición didáctica en lo que se refiere al saber escolar, mientras el primer manual cumple más bien con la idea de un saber expositivo, el segundo manual cumple con unos requisitos de adaptación de los contenidos a los objetivos en el sentido de que hace funcionar a los elementos conceptuales como verdaderos movilizadores del saber, es decir, como útiles de la construcción del conocimiento. Como Robert (1988) señala, uno de los ejes en los que hay que analizar un texto es en el cuadro en el que se hace evolucionar los conceptos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J.: 1997, *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, Hersori Editorial, Barcelona.

CONTRERAS, A. y GARCÍA, M.: 2000. "Los sistemas de numeración en la formación de profesores", IV Simposio sobre propuestas metodológicas de evaluación en la formación de profesores de Didáctica de las Matemáticas, Oviedo.

DUBOIS, C. y cols.: 1993, Se former pour enseigner les Mathématiques. 3. Numération, décimaux, Ed: Armand Colin.

EL BOUAZZOUI, H.: 1988, Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction, PHD, Université de Bordeaux I.

GÓMEZ, B.: 1988, *Numeración y cálculo*, Editorial Síntesis.

HENRY, M.: 1991, Une présentation de la didactique en vue de la formation des enseignements. IREM, Besançon. Cedex.

ROBERT, A.: 1988, "Reflexions sur l'analyse des textes d'exercices des manuels", *Cahier de Didactique des Mathématiques*, IREM, Université-Paris VII

NUMERACIÓN, SUMA, RESTA Y PROBLEMAS EN EL PRIMER CICLO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

TOMÁS MESAS GARCÍA

La comunicación que presento en el IX congreso sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en San Fernando (Cádiz), titulada "numeración, suma, resta y problemas" en el primer ciclo de "Educación Primaria", está basada en un modelo industrial, con libro de instrucciones, y dos obras inscritas en el registro de la propiedad intelectual. Son por tanto nuevas aportaciones que ofrezco a esta materia y a este ciclo educativo.

Todas las novedades están elaboradas artesanalmente, en espera de que una empresa lo vea viable para su comercialización. Mientras sucede, si es que llega, deseo darlo a conocer a maestros maestras por si lo consideran tan útil y práctico como a mi me resulta en mi trabajo.

El modelo industrial para numeración, suma y resta está caracterizado por un expositor, una serie de fichas que simbolizan a la unidad, decena y centena, conservando su equivalencia, cajetines contenedores de diez o cien piezas de unidad o diez fichas de decena y cifras del cero al nueve inclusives. El expositor está acondicionado para colocar en él las fichas de que se compone cada número y las cifras de todos los números entre cero y novecientos noventa y nueve. La forma de usarlo y su utilidad se presenta en el libro "Pensar, Poner y Resolver", destacando como puntos más relevantes la formación del número, donde se manipula, y añadiendo una ficha de unidad se va obteniendo el siguiente de un número, comprendiendo el paso de una decena o centena a otra.

Igualmente el cambio descendente de decena o centena obteniéndose quitando una ficha de unidad.

Estudiados los números, se realizan sumas colocando las fichas de cada sumando, empezando a contar por las unidades, que en el caso de que sea superior a nueve, debe cambiarse por una ficha de decena y colocar en el lugar reservado para ello. Igual con la suma de decenas.Después de realizar varias cuentas con este material es cuando se coloca el, 1, encima de las cifras de decena o centena, como resultado de obtener un número entre diez y diecinueve pero ya comprende de dónde viene.

Para restar se colocan las fichas del minuendo y las cifras del sustraendo y se quitan fichas como indican las cifras respectivas del sustraendo. Si el número de fichas de unidad o decena del minuendo es menor que la cifra correspondiente del sustraendo pueden elegirse dos métodos:

a) La ficha de decena o centena se cambia por diez fichas de unidad o por diez fichas de decena y se traslada al apartado de unidades o decenas y ya se resuelve. Posteriormente, después de realizar varias cuentas con el material se pasa al mecanismo.

b) Se coloca una pieza de decena o centena formada por diez unidades o diez decenas y en la cifra siguiente del sustraendo + 1. Después de realizar varias cuentas manipulando el material se pasa al mecanismo, pero ya ha manipulado y visto concretamente el porqué se llega al automatismo.

Para ayudar a copiar y realizar las cuentas e ideado los cuadernos "Ponme Cuentas", en ellos se señala el lugar para colocar los números y se da la separación entre una y otra operación, además está el signo más o el signo menos impreso, la línea horizontal y el signo igual. En algunos casos sólo se presenta el signo menos porque basta con trazar un guión vertical para transformarlo en más.

Los problemas creados para este ciclo los presento en la obra "¿De más o de menos?", siendo coautor con Anastasia Martínez Marcos.

La obra, ¿De más o de menos?, es un libro de problemas matemáticos de sumar y/ o restar. El resultado de las sumas o el minuendo, son números naturales inferiores a mil. Si los sumados son iguales, se transforma en multiplicar, con multiplicador un dígito entre 2 y 5 inclusive.

Si es un tema antiguo tratado en los libros, ¿Entonces qué originalidad presenta esta obra?.

Veamos, resulta que ambos tipos de problemas de sumar o restar no responden a un único motivo.

Los problemas llamados de sumar pueden referirse a dos situaciones:

- Una dinámica, por la cual a partir de una acción aumenta el cardinal inicial.

Otra estática, como consecuencia de averiguar cuánto tiene o hay en dos o más lugares.

Los problemas de restar abarcan tres situaciones distintas:

I. Disminución, como consecuencia de una acción disminuye el cardinal inicial.

II. Complementación, se trata de averiguar lo que falta para tener lo necesario o para terminar la acción empezada pero no concluida.

III. Diferencia, es el caso en el cual hay que averiguar cuánto hay o tiene más o menos en un lugar que en otro.

Estas cinco situaciones de sumar y restar originan preguntas parecidas a éstas:

¿Cuántas tiene ahora?

¿Cuántas tienen entre las dos?

¿Cuántos le quedan?

¿Cuántos le faltan?

¿Cuántos tiene Luis más que Alberto?.

Los cinco conceptos hay que hacerlos comprensibles a un niño-niña de siete años, resultando de gran dificultad, a excepción de los niños-niñas destacados.

Por esto a través de nuestro trabajo e investigación diario llegamos a descubrir que el concepto de problemas de sumar y problemas de restar no es el más adecuado a esta edad y si llamarlos problemas de más y problemas de menos.

Por qué llamarlos así?.

Bien, un niño-niña que se plantea resolver un problema de estos tipos escribe los números de la cuenta, pero duda, duda, y duda en el momento de poner el signo + o -.

Para solucionar esta duda hacemos converger los cinco tipos, como consecuencia de la respuesta a una pregunta, al concepto intuitivo-concreto más o menos, frente a la abstracción de suma o resta. Acercandonos al pensamiento lógico-concreto que caracteriza esta etapa de la psicología evolutiva.

La respuesta más le lleva a trazar el signo más +.

La respuesta menos, a colocar el signo menos -.

Una vez averiguado el signo de la cuenta, la realiza y resuelve el problema, comprendiendo que hace.

Esta comprensión le da seguridad en su quehacer repercutiendo en su educación, motivación y esfuerzo.

Progresivamente se va supliendo la pregunta escrita por un anagrama, recordando debe pensar si el problema es más o de menos.

Además el libro aporta otra novedad. Los niños-niñas dramatizan algunos de los problemas convirtiéndose en actores o actrices de la situación a resolver y para simbolizar gráficamente esa realidad acompañada de manipulación, interiorización, comprensión, motivación, colocan sus fotos o hacen su dibujo en el lugar reservado para ello.

Estos factores del aprendizaje se ven favorecidos enormemente porque los cinco tipos se inician y estudian con objetos separados. Después se aplican a magnitudes.

Esto unido a una redacción en la que en varias páginas un niño niña presenta su propio problema y otros de su entorno, hacen un libro original y por tanto distinto y único.

GRUPO 3
MATEMÁTICAS EN
SECUNDARIA Y BACHILLERATO

DIFERENTES RAZONAMIENTOS DE ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA FRENTE A UNA TAREA DE INECUACIONES LINEALES EN DOS VARIABLES

STELLA NORA GATICA

I. INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo de la República Argentina, particularmente en el noveno año de la EGB después de la reforma, tercer año del nivel secundario (sistema antiguo), se encuentra dentro del currículo de los contenidos a enseñar, el tema: inecuaciones lineales en dos variables.
Los alumnos logran aprender a resolver inecuaciones, a través de procedimientos y de reglas previamente establecidas, pero no enlazan aspectos conceptuales.
Su enseñanza se reduce a establecer nociones acerca de este concepto y a su representación gráfica, pero en muchas ocasiones, debido a la extensión de los planes de estudio, al momento de reducir algunos temas, los profesores eligen comprimirlo. La situación es más crítica aún, en los casos en que prácticamente no se enseña, a pesar de ser éste un concepto importante.
Notamos así, la ausencia de comprensión de este conocimiento; si bien esta tarea no es nada fácil ya que se existen grandes dificultades en los alumnos para alcanzar una comprensión satisfactoria en dicho campo. Esto da lugar a que los estudiantes tengan una idea muy limitada sobre el tema, lo cual repercute en materias posteriores (en la mayoría de los casos universitarias), pues en estas, las inecuaciones que se utilizan requieren conversiones geométricas, algebraicas y de lenguaje natural, y de articular las diferentes representaciones en estos tres registros.
El propósito del presente trabajo, surge como una respuesta a la problemática señalada anteriormente, considerando que la Didáctica de la Matemática juega un papel primordial en estas circunstancias. Desde este enfoque, nos interesa determinar cómo los estudiantes realizan la construcción de este concepto y qué relaciones establecen con conocimientos anteriores.
"La gran mayoría de los alumnos, no reconocen al mismo objeto a través de las representaciones que se dan de él: la escritura algebraica de una relación y su representación gráfica, la escritura numérica de una razón y su representación geométrica sobre una recta, el enunciado de una fórmula en español y su escritura en forma literal, la descripción de una situación y su planteamiento en una ecuación...Esto subsiste aún después de una enseñanza sobre los conocimientos matemáticos que ha utilizado frecuentemente esos diferentes registros." (Duval, 1998).
Si bien el tema se encuentra ubicado dentro del Álgebra escolar, en donde se han realizado un gran número de investigaciones en este campo, en nuestro tema específico, los estudios realizados son escasos y se ocupan de aspectos parciales sobre este concepto.
En efecto, Duval (1998), Acuña (1998), establecen que existen dificultades para resolver tareas de encontrar representaciones geométricas de las soluciones de una inecuación. Acuña comprueba que si bien los alumnos conocían el significado algebraico de la desigualdad, estos conocimientos fueron insuficientes para hacer una articulación adecuada con el registro gráfico.
Estas investigaciones muestran que existen dificultades para resolver tareas de encontrar representaciones geométricas de las soluciones de una inecuación. Sin embargo, no revelan con claridad razonamientos de los estudiantes en los que se pueda observar con más detalle qué los lleva a una solución correcta o incorrecta.
Nuestro trabajo, muestra los razonamientos realizados por alumnos de alto rendimiento, que revelan en su esfuerzo por resolver tareas, formas de razonamiento que se aproximan a las que realiza un matemático, aunque no pueden acabadamente llegar a la solución.

II. MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Nuestra exploración considera como referencia el enfoque cognitivo, desarrollado por Raymond Duval (1993) basado en los registros de representación semiótica. En particular la conversión entre el registro algebraico y el gráfico y su importancia en el aprendizaje de nociones matemáticas.
Duval, enfatiza la incidencia de "representación" en matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación.
Pluvinage (1998), con relación a la obra de Duval, afirma que en el caso de la representación de objetos, se introducen dos niveles que obligan a distinguir dos conceptos: los sistemas semióticos y los registros.
Un sistema semiótico es un conjunto de signos y reglas con el fin de representar objetos, los signos son las unidades elementales del sistema, las reglas rigen las asociaciones de signos.
Para hablar de registros se necesitan varios sistemas semióticos orientados hacia la representación de un conjunto dado de objetos. Un registro es un sistema semiótico que permite dos posibilidades de transformación de una representación en otra:

Transformaciones internas a un registro que llamaremos tratamientos.

Transformaciones que van de un registro a otro y que llamamos conversiones.

En otros términos:

Si un objeto tiene dos representaciones diferentes en el mismo registro, el paso de una a otra será un tratamiento.

Si un objeto tiene una representación en un registro y una representación en un segundo registro, el paso de una a otra será una conversión.

Un conocimiento conceptual está íntegramente comprendido cuando es posible la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

En nuestro caso específico, la Teoría de Situaciones, Brousseau G. (1986) y la metodología de la Ingeniería didáctica, Artigue (1995), nos ayudó a realizar una experiencia en el salón de clases, así como analizar el comportamiento de los alumnos.

III. Estudios Previos

Inicialmente, interesados en conocer las propuestas de enseñanza existentes, realizamos observaciones en clases introductorias al tema que nos ocupa. Asimismo, analizamos tres de los libros de texto de mayor circulación en nuestro país, ya que estos representan referencias importantes para los profesores.

De las observaciones realizadas en clase, propuesta de enseñanza usual, concluimos que los profesores al momento de introducir el tema, permanecen en la siguiente ruta lineal:

Registro algebraico: El profesor propone: Vamos a encontrar el conjunto solución de la inecuación: $y < 2x + 1$.

Registro numérico: El profesor reemplaza algunos puntos del plano en la inecuación propuesta, estableciendo con Verdadero o Falso, si cumple o no, con el signo de la desigualdad.

Registro gráfico: El profesor sombrea la zona del plano donde están ubicados los puntos con resultado Verdadero, estableciendo que esa región es el conjunto solución buscado.

Nos preguntamos:

¿Cómo se alcanza este conocimiento?

¿Es posible que los alumnos estableciendo algunos puntos o un número finito de puntos los cuales cumple la desigualdad, puedan extender el conjunto solución de una inecuación a todo un semiplano?

¿Qué representación cognitiva realizan para comprender la extensión de este concepto?

Del análisis de los libros de texto, concluimos que la introducción del tema, se realiza de la misma manera que los profesores en el salón de clases.

Duval (1998) señala que el "instrumento" que posee el estudiante para enfrentar este tipo de problemas se reduce a una regla de codificación: "a un punto del plano le corresponde un par ordenado (una pareja de números)", que no es suficiente para resolver la tarea. O sea, que actúa como "verificador" de los puntos que cumplen la desigualdad. En efecto, por más puntos que se localicen en una tarea de "sombreado" nunca se podrá llegar a sombrear la zona completa sin una interpolación y aceptar la pertinencia de la ley gestaltista de contigüidad.

En esta etapa, investigamos, además los distintos registros de representación semiótica en el tema que nos ocupa.

IV. Objetivo Específico

Nuestro objetivo: Identificar las estrategias y dificultades de los alumnos en la iniciación del estudio de las inecuaciones lineales en dos variables mediante una experiencia diseñada bajo un enfoque constructivista.

Las siguientes preguntas orientaron nuestro trabajo:

¿Serían capaces los alumnos de obtener gráficamente el conjunto solución de una inecuación lineal en dos variables? De ser así ¿Cómo pueden hacerlo? ¿Qué razonamientos ponen en juego?.

¿Cómo realizarían los alumnos la conversión del registro algebraico al gráfico?.

¿La inecuación lineal en dos variables, como objeto matemático, aparecería para los alumnos como un conocimiento totalmente nuevo, desvinculado con sus conocimientos anteriores?

Para pretender responder algunas de las preguntas, elaboramos una situación que fue puesta en escena con alumnos de 3er. Año (14 – 15 años) quienes desconocen totalmente el concepto. Ellos ya han estudiado los temas: inecuaciones lineales en una variable, ecuaciones lineales en dos variables y sistemas de ecuaciones lineales.

El análisis que realizamos en nuestra investigación es el referido a las estrategias efectuadas por el alumno, sin influencias externas y que lo lleva, frente a un ejercicio asumido como problema para solucionarlo, a encontrar una solución la cual puede ser o no la verdadera. Era nuestro objetivo provocar un cierto desequilibrio, al hacer aparecer resolviendo la inecuación, el conjunto solución.

V. Descripción De La Experiencia

Se eligió un curso, en general de "buenos alumnos", mixto, de 25 alumnos. Se realizaron entrevistas con el profesor, familiarizándolo con la dinámica de la clase. Todas las clases de Matemáticas, se habían

llevado a cabo de la misma manera: el profesor explica un tema, luego los alumnos realizan actividades relacionadas con ese tema. Era la primera vez, que se encontraban con una situación a-didáctica.
El profesor comenzó la clase recordándoles el tema anterior: ecuaciones lineales en dos variables, mediante un ejemplo y encontrando el conjunto solución.
Para la siguiente actividad, les propuso separarse en grupos de tres o cuatro integrantes. Luego les entregó una hoja a cada grupo, en donde se encontraban dibujadas un sistema de ejes cartesianos, la recta de ecuación y = -1/2x + 3 y en la parte inferior la inecuación y<-1/2x + 3. El profesor les estableció la siguiente consigna: *En la hoja tienen dibujada una recta de ecuación y = -1/2x + 3. El trabajo que les propongo consistirá en encontrar gráficamente los puntos que satisfacen la relación siguiente: y<-1/2x + 3.*
En cada grupo se encontraba un profesor encargado de grabar las conversaciones de los estudiantes así como llevar un registro del avance de la tarea. Los alumnos trabajaron y luego se realizó una puesta en común.
En la puesta en común, los estudiantes, separados en grupos, expusieron sus resultados. En un grupo, solo encontraron un número finito de puntos: los ubicados sobre los ejes cartesianos, con valores enteros, situados por debajo de la recta. Otro grupo, había encontrado el conjunto solución pero relacionándolo con un concepto aprendido anteriormente por ellos: inecuaciones lineales en una variable. Dos grupos, encontraron un punto que cumplía la inecuación y a partir de él, obtuvieron la recta paralela a la dada, que pasaba por ese punto. Otro de los grupos, también habían encontrado una recta, por debajo de la dada pero la obtuvieron de la siguiente manera: en la ecuación, dando valores a la variable x, resolviendo las operaciones y a ese resultado, multiplicarlo por -1. A el valor así encontrado, le asignaban el valor de y. De esta manera dibujaron la recta. Hubo un último grupo que prácticamente no obtuvo resultados, ya que, a pesar de los esfuerzos realizados, no se hicieron cargo del problema.

VI. Comentarios Finales

En general, los estudiantes no construyen acabadamente el conjunto solución. Esto se debe a que en este concepto, se halla implícito una serie de convenciones establecidas por el hombre, las cuales no pueden ser descubiertas sin una adecuada institucionalización. Sin embargo, los estudiantes, en su afán de resolver el problema, encuentran recursos para lograr establecer que la solución está formada por un número infinito de puntos. Han trabajado como lo haría un matemático: al encontrar la ecuación de una recta, cuyos puntos cumplen con la desigualdad estipulada, descubren una forma de generar infinitos puntos que son parte del conjunto solución.
El hecho de haber estudiado anteriormente ecuaciones, donde el conjunto solución es una recta, parece que afecta a que ellos intenten encontrar otra recta como solución de una inecuación. Es decir, se apoyan en conceptos aprendidos, como son ecuaciones y en uno de los grupos, inecuaciones en una variable.
Al parecer, un buen desempeño, depende de una buena elección de problemas, de lograr que el estudiante se haga cargo de ellos, del trabajo en equipo y de una intervención apropiada del profesor lo que logra una mejor articulación de la inecuación y las zonas correspondientes y por tanto mejore la comprensión del estudiante sobre este tópico.

Referencias

ACUÑA SOTO, Claudia (1998): La ubicación espacial de conjuntos de puntos en el plano – Investigaciones en Matemática Educativa II – Dep. de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN – Ed. Hitt, F. – pg. 203-223.

ARTIGUE M., DOUADY R., MORENO L., GOMEZ P. (Ed.), (1995): Ingeniería Didáctica – Ingeniería Didáctica en Educación Matemática – pg. 33 – 59. Grupo Editorial Iberoamérica.

DUVAL, R. (1993) . Registres de reprësentation sémiotique et foncttionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Science Cognitives 5 (1993) 37-65. Traducción DME – Cinvestav 1997. Mexico.

DUVAL, Raymund (1998): Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento – Investigaciones en Matemática Educativa II – Ed. Hitt F, - pg. 173 –201.

BROUSSEAU, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. Recherches en didactique des Mathématiques, Vol. 7, n. 2, pp 33-115. (Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática - Traducción de Dilma Fregona y Facundo Ortega).

PLUVINAGE, Francois (1998): Los objetos matemáticos en la adquisición de razonamiento – Investigaciones en Matemática Educativa II – Ed. Hitt F, . pg 1 - 15

MATEMÁTICAS DE LAS CIENCIAS SOCIALES Y HUMANAS EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

BALTASAR SÁNCHEZ MARÍN · FRANCISCO JIMÉNEZ GÓMEZ · JORGE OLLERO HINOJOSA

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza la parte matemática del currículum de los alumnos de enseñanza secundaria en las opciones o modalidades de Ciencias Sociales y Humanidades, entendiendo por currículum *"el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente"* (L.O.G.S.E., Art.4). Con este fin, se ha efectuado la revisión de cuestionarios oficiales, libros de texto y programaciones de matemáticas de los departamentos didácticos de distintos centros de enseñanza secundaria, realizando así un estudio, según la terminología de Erickson (cit. Ruiz Higueras1998, p.92), de naturaleza cualitativa e interpretativa. Por otro lado, se ha realizado un análisis cuantitativo de las respuestas a un cuestionario de contenidos básicos contestado por una muestra de alumnos del último curso de enseñanza no universitaria. Dicho análisis se hace no sólo en términos absolutos sino también relativos, comparando la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los dos sistemas educativos BUP-COU, en fase de desaparición, y LOGSE en casi plena implantación.

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

Al principio del curso 1999/2000 se pasó un cuestionario a un total de 374 alumnos de los que aproximadamente la tercera parte eran estudiantes de COU, 119 alumnos, y el resto eran estudiantes de segundo curso de Bachillerato-LOGSE, 255 alumnos, matriculados respectivamente de Matemáticas II y de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en diversos I.E.S. de las provincias de Granada y de Jaén.

El cuestionario se elaboró con el propósito de servir de prueba inicial para medir el nivel de conocimientos previos de los alumnos que habían de recibir enseñanza de las asignaturas mencionadas y que sirviera de base para la comparación de los resultados de ambos colectivos.

Establecido el propósito del cuestionario, para proceder a su elaboración, se revisaron los programas de Matemáticas en los cursos previos, se consultaron los libros de texto más utilizados y las programaciones de los departamentos didácticos de Matemáticas de algunos centros. De esta manera se concretó el cuestionario en aquellos contenidos conceptuales y procedimentales básicos que forman parte de los objetivos mínimos en cursos anteriores y tienen aplicación en distintos bloques temáticos de las asignaturas de Matemáticas de enseñanza secundaria.

Cuestionario

Atendiendo a la delimitación del contenido, se redactó en un lenguaje usual en matemáticas el conjunto de 14 cuestiones que totalizan 30 items elementales.

El cuestionario recoge preguntas de tres bloque temáticos ([1])

1. Expresiones algebraicas: items 2,3,4,5,6, 12a,12b,12c,12e.
2. Funciones e intervalos: items 1, 7, 9, 10a, 10b, 10c, 10d, 10e, 11, 14.
3. Trigonometría y logaritmos: items 8a, 8b, 8c, 8d, 8e, 12d, 13a,13b,13c,13d,13e.

Se organizaron las preguntas y sus posibles respuestas de manera que el cuestionario fuera sencillo de cumplimentar por los alumnos y que requiriera como mucho una sesión de clase.

Se redactó una prueba piloto que fue sometida a la consideración de los profesores de enseñanza secundaria que colaboraron en este trabajo, lo que permitió corregir las deficiencias detectadas.

El contenido del cuestionario se muestra en la tabla 1.

[1] Este estudio es parte de otro trabajo más amplio que incluye también el análisis de los bloques temáticos de estadística y de probabilidades.

Tabla 1: Cuestionario

1º.- La recta que pasa por los puntos (2,1) y (1,2) tiene por ecuación:❑a) 2x+y = 0; ❑b) x^2+y-5 = 0 ; ❑c) x+2y = 0; ❑d) x+y-3=0; ❑e) y= x+1	
2º.- El 30% de la cantidad x es: ❑a) $\frac{100x}{30}$; ❑b) $\frac{30x}{100}$; ❑c) (30x)100; ❑d) 30(100x); ❑e) $\frac{30(100x)}{100}$	
3º.- El resultado de sumar $\frac{x}{3}$ más $\frac{x}{7}$ es: ❑a) $\frac{10x}{21}$; ❑b) $\frac{2x}{21}$; ❑c) $\frac{10x}{10}$; ❑d) $\frac{2x}{10}$; ❑e) $\frac{21x}{10}$	
4º.- $(3x+4)^2$ = : ❑a) $9x^2$+16; ❑b) $3x^2$+16; ❑c) $3x^2$+12x+16; ❑d) $9x^2$+24x+16; ❑e) $3x^2$+24x+16	
5º.- (x+7) (x-7) = : a) 2x-49; ❑b) x^2-7; ❑c) x^2-49; ❑d) 2x-14; ❑e) 2x	
6º.- $(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)=$: ❑a) $2\sqrt{x}-25$; ❑b) $2\sqrt{x}$; ❑c) x-25; ❑d) 2x-25; ❑e) x-5	
7º.- El dominio de definición de la función f(x)= $\frac{1}{x-2}$ es:	❑a) El conjunto de los números mayores de 2 ❑b) El conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$) ❑c) El conjunto $\mathbb{R}$ ❑d) El conjunto de los números reales menos el 2 ($\mathbb{R}$ -{2}) ❑e) El conjunto de los números reales menos el 0 ($\mathbb{R}$ -{0})
8º.- Señala cuáles de las igualdades siguientes son verdaderas para cualquier valor de α: ❑a) $sen^2\alpha + cos^2\alpha=1$; ❑b) $tag\alpha= cos\alpha/sen\alpha$; ❑c) $cos\alpha=1/sen\alpha$; ❑d) $sen\alpha\in[-1,1]$; ❑e) $tag\alpha\in(-\infty,+\infty)$	
9º.- Señala qué función o funciones determinan que a cada nº real x le corresponda su inverso: ❑a) f(x) = -x; ❑b) f(x) = 1/f(x); ❑c) f(x) = -f(x); ❑d) f(x) = 1/x; ❑e) f(x)= 1-x.	
10º.- De las relaciones siguientes, señala las que son verdaderas: ❑a) $3/4\in[3,4]$; ❑b) $3/4\in(-\infty,1]$; ❑c) $-5/2\in[-20,-3]$; ❑d) -20>-3; ❑e) $4\in(4,+\infty)$	
11º.- El dominio de definición de la función f(x) = $\sqrt{1-x^2}$ es:	❑a) El conjunto de los números reales positivos ($\mathbb{R}^+$) ❑b) El conjunto de los números reales menos el nº 1 ($\mathbb{R}$ - {1}) ❑c) El intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ❑d) El intervalo [-1,1] ❑e) El conjuto $\mathbb{R}$ de todos los números reales
12º.- Señala cuáles de las igualdades siguientes son verdaderas: a) $\sqrt{x^2+y^2}=x+y$; b) $\sqrt{x^2y^2}=xy$; c) $x^2+x^3=x^5$; d) $L_n(xy)=L_n x + L_n y$; e) $x^3x^3=x^9$ (Nota: L_n x indica logaritmo neperiano de x).	
13º.- Señala cuáles de las igualdades siguientes son verdaderas: a) $\log_a(a^2b^2)=6$; b) $\log_a(7^a)=7$; c) $\log_a(a^2a^3)=5$; d) cos (α) = cos (-α); e) sen (α)=sen (-α) (Nota: $\log_a$ indica logaritmo en base a).	
14º.- Los ingresos y los costes, en millones de ptas, de una empresa vienen dados, respectivamente, por las funciones $I(x)=58x-4x^2$ y $C(x)=100+6x$, donde x son miles de Kilos de producto fabricado y vendido. Hallar: a) La función que da el beneficio. ¿Qué clase de función es? b) Los puntos de equilibrio (en donde la empresa ni gana ni pierde).	

Resumen de los resultados por bloques

Expresiones algebraicas

En la tabla 2 se presenta un resumen de resultados por ítem, con el porcentaje de respuestas correctas de ambos grupos, así como los resultados del contraste de Mann-Whitney aplicado para comparar las respuestas de los alumnos de COU (C) y los alumnos de LOGSE (L), cuantificando con 1 la respuesta correcta y con 0 la respuesta incorrecta o ausencia de respuesta.

Tabla 2: Porcentaje de respuestas correctas y resultados del contraste de Mann-Whitney de los items de expresiones algebraicas

	Ítem 2	Ítem 3	Ítem 4	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 12a	Ítem 12b	Item 12c	Item 12e	% medio
COU	73.11	97.48	91.60	96.63	76.47	57.14	56.30	62.18	65.54	75.16
LOGSE	88.24	89.02	73.33	89.41	54.12	38.82	63.13	56.86	62.74	68.41
Test de M-W	L>C	L<C	L<C	L<C	L<C	L<C	L=C	L=C	L=C	

A primera vista, los alumnos de COU obtienen un porcentaje de aciertos superior a los de LOGSE en 7 de las 9 cuestiones y, en las otras dos, dicho porcentaje es mayor en LOGSE. Estadísticamente, tras aplicar el contraste de Mann-Whitney de igualdad de medianas, se ha confirmado en 5 preguntas que los resultados de COU son mejores, con un nivel de significación del 1%. Los alumnos de LOGSE sólo responden significativamente mejor al ítem 2 en el que se propone transcribir un problema expresado en lenguaje usual al lenguaje algebraico. En los 3 items restantes no se han obtenido diferencias estadísticamente significativas.

Funciones e intervalos

En la tabla 3 se recogen los resultados de los items propuestos sobre funciones e intervalos, con el porcentaje de respuestas correctas y los resultados del contraste de Mann-Whitney aplicado para comparar las respuestas de alumnos de COU y alumnos de LOGSE.

Tabla 3: Porcentaje de respuestas correctas y resultados del contraste de Mann-Whitney de los items de expresiones algebraicas

	Ítem 1	Ítem 7	Ítem 9	Item 10a	Item 10b	Item 10c	Ítem 10d	Item 10e	Item 11	% medio
COU	72.26	77.31	21	73.95	62.18	76.47	76.47	35.29	15.97	56.77
LOGSE	59.21	74.50	16.47	61.56	49.41	59.61	68.23	46.67	21.18	50.77
Test de M-W	L<C *	L=V	L=V	L<C *	L<C	L<C *	L=C	L=C	L=C	

Nuevamente responden mejor los alumnos de COU, aunque para todos ha disminuido considerablemente el porcentaje medio de aprobados en este bloque de cuestiones, con respecto al de expresiones algebraicas (no hemos tenido en cuenta en esta valoración los resultados del ítem 14). El porcentaje de respuestas correctas es superior en los alumnos de COU en 7 de las 9 cuestiones de verdadero/falso sobre funciones e intervalos. Estadísticamente, tras aplicar el contraste de Mann-Whitney se ha confirmado en 4 cuestiones, con un nivel de significación del 5%, que los resultados de COU son mejores, en 3 de las cuales, señaladas con *, el nivel de significación ha sido del 1%. Los alumnos de LOGSE no responden significativamente mejor en ninguna de las preguntas.

El ítem 14 se ha valorado sobre 10 puntos, obteniéndose unas calificaciones muy bajas en los dos colectivos de alumnos, pero considerablemente peores en COU, pudiendo justificarse este hecho en base al escaso hábito de estos alumnos de traducción del lenguaje usual al lenguaje de las matemáticas.

Trigonometría y logaritmos

Los resultados de las cuestiones de este bloque, con el porcentaje de respuestas correctas de ambos colectivos, y con los resultados del contraste de Mann-Whitney se recogen en la tabla 4.

Tabla 4: Porcentaje de respuestas correctas y resultados del contraste de Mann-Whitney de los items de trigonometría y logaritmos

	Ítem 8a	Ítem 8b	Item 8c	Item 8d	Item 8e	Item 12d	Item 13a	Ítem 13b	Item 13c	Item 13d	Item 13e	%medio
COU	96.63	88.23	57.14	35.29	21.84	63.86	61.34	43.69	39.49	30.25	59.6	54.30
LOGSE	44.70	34.51	48.23	9.1	9.1	41.56	52.16	34.12	25.1	17.65	50.98	33.38
Test de M-W	L<C	L<C	L=C	L<C	L<C	L<C	L=C	L=C	L<C	L<C	L=C	

En la última columna se ve que el porcentaje medio de respuestas correctas ha sido superior en COU. El contraste de Mann-Whitney confirma que, en 7 de las 11 preguntas, son mejores los resultados en COU, con un nivel de significación del 1%, y no se han obtenido diferencias significativas en las otras 4 preguntas.

Interrelación entre preguntas del cuestionario.

Mediante el cruce de las respuestas y con ayuda del contraste chi cuadrado para independencia se pueden establecer asociaciones entre las preguntas. Las tablas 5 y 6 presentan, respectivamente para LOGSE y para COU, únicamente aquellas situaciones en las que es manifiesta una asociación entre los items del bloque de expresiones algebraicas. Análogamente se ha hecho con los otros ítems.

Tabla 5: Resultados del contraste chi cuadrado en LOGSE

	Ítem 5	Ítem 6	Ítem 2b	Ítem 12c	Item 12e
Ítem 2	-	-	P=0.0095	-	-
Ítem 3	P=0.0214	-	-	-	-
Ítem 4	P=0.037	P=0.0183	-	-	-
Ítem 5		P=0.009	-	-	-
Ítem 6	P=0.009		P=0.014	-	-
Ítem 12b	-	P=0.014		P=0.000	-

Tabla 6: Resultados del contraste chi cuadrado en COU

	Ítem 6	Ítem 12c
Ítem 4	P=0.0142	-
Ítem 12b	-	P=0.009

RESUMEN

Del resultado del cuestionario sobre conocimientos básicos en Álgebra y en Análisis, contestado por 119 alumnos de COU y 255 alumnos de SegundoCurso de Bachillerato-LOGSE, se puede concluir lo siguiente:

El porcentaje de respuestas incorrectas o preguntas no contestadas es muy alto, sobre todo en los bloques de funciones e intervalos y en trigonometría y logaritmos, con un tanto por ciento medio de respuestas incorrectas, a las 29 cuestiones de verdadero/ falso planteadas, que ha sido de 37.92 en COU y de 49.15 en LOGSE.

Destaca la gran ausencia de respuestas a la hora de interpretar una situación concreta presentada mediante funciones lineales y cuadráticas, ítem 14, pues sólo responden el 26.05% de alumnos de COU, que lo hacen muy mal, y el 51.37% de los de LOGSE, de los que sólo el 36.64% consigue puntuación mayor o igual a 5.

El porcentaje medio de respuestas correctas ha sido siempre superior en COU, en cada una de las clases de cuestiones planteadas. Los resultados del contraste estadístico de Mann-Whitney han confirmado que los alumnos de COU han obtenido mejores resultados, con un nivel de significación del 5%, en 16 de las 29 preguntas de verdadero/falso que en total se han formulado, en 15 de las cuales el nivel de significación ha sido del 1%. Esto pone de manifiesto que los alumnos de COU tienen más afianzadas las técnicas de cálculo algebraico y que conocen mejor que los de LOGSE conceptos básicos de teoría de funciones y de trigonometría y logaritmos.

Los alumnos de LOGSE sólo han respondido mejor al ítem 2 y al ítem 14(al nivel de significación del 1%). En el primer caso la cuestión pide transcribir un problema expresado en lenguaje usual al lenguaje algebraico; el segundo es un problema de funciones que plantea una situación concreta de costos y beneficios.

Los resultados del contraste chi cuadrado encuentran asociación estadísticamente significativa entre las respuestas de pocas preguntas. El análisis de sus causas será objeto de un análisis posterior.

REFERENCIAS

LEY ORGÁNICA 1/1990, de 3 de Octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, B.O.E. de 4/10/1990.

RUIZ HIGUERAS, L.: La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones, 1998.

LAS PROBABILIDADES EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

BALTASAR SÁNCHEZ MARÍN · JORGE OLLERO HINOJOSA · FRANCISCO JIMÉNEZ GÓMEZ

INTRODUCCIÓN

En esta comunicación se analizan los ejercicios de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía, tanto en el aspecto cualitativo, relacionado con el tipo de cuestiones propuestas, como en el cuantitativo, ligado a las calificaciones obtenidas por los estudiantes que participaron en las citadas pruebas. El objetivo del presente trabajo es realizar un estudio comparativo sobre los niveles de conocimientos alcanzados en probabilidad, tanto en Matemáticas II de COU como en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Bachillerato-LOGSE, a través de las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, desde prácticamente la implantación del distrito único andaluz, analizando datos de las convocatorias correspondientes a los cursos 96/97, 97/98 y 98/99. Este trabajo, continuación de otros realizados por los autores (Sánchez, Ollero y Jiménez,1999a; 1999b), entra en conexión con la línea de recientes investigaciones sobre el análisis de los resultados de las pruebas que conforman la selectividad (merecen citarse, Muñoz-Repiso y Murillo 1997; Murillo,1997, entre otras). El trabajo se ha organizado de la manera siguiente: En primer lugar se hace una breve exposición de la estructura de cada prueba, se describe la población y el periodo y la muestra utilizada en el estudio y se efectúa una clasificación de los ejercicios de probabilidad propuestos. Seguidamente se realizan diferentes análisis cuantitativos de las calificaciones obtenidas en dichos ejercicios. Finalmente se enumeran las principales conclusiones.

ESTRUCTURA DE LA PRUEBA

La estructura de la prueba es la misma en ambas asignaturas, con dos opciones excluyentes que plantean ejercicios de cada uno de los tres bloque diferenciados del programa: Álgebra, Análisis y Estadística, calificados sobre 3 puntos, 3 puntos y 4 puntos respectivamente. El ejercicio de estadística se subdivide en dos partes, cada una con una puntuación máxima de 2 puntos. En LOGSE (L), la primera parte versa sobre probabilidad y la segunda sobre inferencia y muestreo. En COU (C), casi siempre se plantean cuestiones de estadística descriptiva en una parte y de cálculo de probabilidades o de distribuciones de probabilidad en la otra.

POBLACIÓN, PERIODO, MUESTRA Y EJERCICIOS

La población objeto de estudio está constituida por los estudiantes que se examinaron de Matemáticas II de COU o de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II de Bachillerato-LOGSE en las Pruebas de Acceso a la Universidad en las distintas Universidades de Andalucía, en las dos convocatorias de los años1997, 1998 y 1999 (J97, S97, J98, S98, J99 y S99). La muestra consta de un total de1577 alumnos de Bachillerato-LOGSE y de 3651 alumnos de COU, que se examinaron en distintas universidades andaluzas.

Los ejercicios de probabilidad propuestos en este periodo se han clasificado, como presenta la tabla siguiente, en dos clases principales, cada una subdividida en varias subclases o tipos de ejercicios.

Los enunciados están publicados por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía en las referencias que se citan a continuación. Pruebas de Acceso a la Universidad, 96/97, p.p. 193, 196-197,448-449 y 440-441; Pruebas de Acceso a la Universidad, 97/98, p.p. 226-227, 219-220, 520-521 y 528- 529; Pruebas de Acceso a la Universidad, 97/98, p.p. 307-308, 310-311, 677-678 y 673-674.

Tabla 1: Tipos de ejercicios de probabilidad

EJERCICIOS DE PROBABILIDAD	TIPOS	CARACTERÍSTICAS
CLASE I Sucesos aleatorios y cálculo de probabilidades	P1	Determinación elemental de probabilidades mediante cálculo inmediato.
	P2	Determinación de probabilidades que requieren el uso de una estrategia de resolución no inmediata.
	P3	Determinación de probabilidades que requieren el uso de combinatoria y/o álgebra de sucesos.
	PTB	Aplicación de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes.
CLASE II Distribuciones de probabilidad	B1	Uso directo del modelo binomial.
	B2	Aproximación al modelo binomial.
	N1	Distribución normal con parámetros conocidos.
	N2	Distribución normal con parámetros desconocidos.

La tabla 2 muestra el número de ejercicios de probabilidad, de los distintos tipos, propuestos en convocatorias de junio y en convocatorias de septiembre.

Tabla 2: Distribución de los ejercicios de probabilidad propuestos

		P1	P2	P3	PTB	B1	B2	N1	N2
LOGSE	Junio	1	2	2	1	-	-	-	-
	Septiembre	1	3	1	1	-	-	-	-
COU	Junio	3	-	-	-	-	1	2	1
	Septiembre	1	1	-	-	3	-	2	-

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS POR CONVOCATORIAS Y SISTEMAS DE ENSEÑANZA

En primer lugar, se resumen de forma descriptiva los resultados en base a los principales parámetros estadísticos. Para cada ejercicio, en la tabla 3, se muestra el nº y porcentaje de alumnos, media, desviación típica (S), porcentaje de aprobados ($x \geq 1$) , y coeficientes de asimetría (Cas) y de curtosis (Ccs) estandarizados, de las calificaciones Obsérvese la fuerte asimetría y curtosis que invalida la hipótesis de normalidad de las poblaciones e impide la aplicación de las técnicas estadísticas paramétricas usuales.

Tabla 3: Parámetros estadísticos de las calificaciones de los ejercicios de probabilidad por convocatoria, opción y tipo de ejercicio

	L.O.G.S.E.							C.O.U.							
Convo-catoria	ParteI	nº (%) de alumnos	Media	S	$x \geq 1$	Cas	Ccs	ParteI	ParteII	nº (%) de alumnos	medias	S	$x \geq 1$	Cas	Ccs
J97A	P2	62 (49.6)	0.73	0.79	48.4	1.8	-1.9	P1	N1	92 (59.35)	0.97-0.89	0.58-0.84	78.2-50	0.21-0.63	-0.1 -(- 3.1)
J97B	P3	63 (50.4)	0.11	0.41	6.35	12.8	25.5			63 (40.65)					
S97A	P2	49 (62.03)	0.22	0.35	2.04	8.6	19.9		N1	119 (75.8)	0.33	0.62	19	8.06	4.48
S97B	P3	30 (37.97)	0.075	0.25	3.33	8.7	18.2	B1	B1	38 (24.2)	0.24-0.13	0.51- 0.39	15.9-10.1	5.73-7.87	5.84 -11.9
J98A	P2	65 (25.89)	0.49	0.58	16.9	3.6	0.74	P1		668 (71.8)	0.85	0.88	42	3.91	-8.74
J98B	P3	186 (74.1)	0.20	0.39	5.38	11.5	11.2	P1	N2	262 (28.2)	0.62-0.20	0.77-0.45	34.4-12	5.80-15.6	-2.76 - 16.0
S98A	P1	36 (30.51)	0.97	0.93	47.2	0.3	-2.3	P1		65 (22.81)	0.51	0.64	29	3.61	0.125
S98B	PTB	82 (69.49)	0.44	0.7	26.8	4.9	0.56		N1	220 (77.19)	0.51	0.75	31.3	6.17	-1.96
J99A	P1	210 (31.8)	0.93	0.82	56.2	-0.1	-4.8		N1	150 (10.6)	0.24	0.46	17.1	9.83	8.41
J99B	PTB	450 (68.2)	1.17	0.79	70.7	-3	-6.1		B2	1265(89.4)	0.26	0.57	13	31.8	24.27
S99A	P2	117 (34)	0.33	0.54	25.6	6.4	2.78		P2	324 (45.7)	0.19	0.48	11.9	18.8	20.93
S99B	P2	227 (66)	0.27	0.49	17.6	11.8	9.5		B1	385 (54.3)	0.13	0.35	7.2	24.2	36.56

La comparación de los resultados de los ejercicios se realiza mediante el contraste de Kruskal-Wallis. Los ejercicios se han identificado con las siglas de la convocatoria y de la opción y en COU se añade I o II (parte I o parte II) en los casos necesarios. Los valores del estadístico experimental y del P-valor, que muestran las tablas 4 y 6, indican que en ambos sistemas de enseñanza existen diferencias estadísticamente significativas entre las calificaciones de los distintos ejercicios.

Tabla 4: Contraste de Kruskal-Wallis aplicado a los ejercicios de LOGSE

Todos los ejercicios	J97A	J97B	S97A	S97B	J98A	J98B	S98A	S98B	J99A	J99B	S99A	S99B	Texp.=423 P=0.0
Rango medio	841.7	464.1	616.1	452.5	734	543.2	951.8	670.1	934.6	1064	617.1	589.5	

Con el propósito de encontrar explicaciones a la significación, se han comparado por parejas los resultados de todos los ejercicios con ayuda del contraste de Mann-Whitney. Algunos de los resultados obtenidos se recogen en la tabla siguiente.

Tabla 5: Resultados del contraste de Mann-Whitney para parejas de ejercicios de LOGSE

Test de Mann-Whitney	J97B=S97B P=0.98	J97A=J98A P=0.11	J98A=S98B P=0.22	S98A=J99A P=0.45	J98B=S99B P=0.15
	S98A=J99B P=0.29	J97A=J99A P=0.1004	J97A<J99B P=0.000063	J98A<J99A P=0.00009	J99A<J99B P=0.000085

Se observa, por ejemplo, que no existen diferencias estadísticamente significativas entre las calificaciones de J97A y J98A y que las mejores calificaciones se han obtenido en el ejercicio J99B.

Procediendo del mismo modo, en la tabla 6 se recogen los resultados correspondientes a COU.

Tabla 6: Contraste de Kruskal-Wallis aplicado a los ejercicios de COU

Todos los ejercicios	J97A-I	J97A-II	S97A	S97B-I	S97B-II	J98A	J98B-I	J98B-II	S98A	S98B	J99A	J99B	S99A	S99B	Texp=643
Rango medio	2974.2	2613.8	1875.9	1757.1	1521.2	2588.0	2361.9	1701	2305	2065	1789	1776	1645	1594	P=0.0

Las causas de significación se encuentran realizando nuevos contrastes de Mann-Whitney, algunos de cuyos resultados se muestran en la tabla 7.

Tabla 7: Contrastes no paramétricos de Mann-Whitney por pares de ejercicios en COU

Test de Mann-Whitney	J97A-I=J97A-II P=0.55	S97A=S97B-I P=0.49	S97A=S97B-II P=0.15	S98A=J99A P=0.45	S98A=J98B P=0.19
	J99A=J99B P=0.75	S99A=S99B P=0.46	J97A-I >J98A P=0.0115	J97A-I >J99A P=0.00	J98A >J99A P=0.00

Se observa que existen diferencias estadísticamente significativas entre las calificaciones de los ejercicios de junio de 1999 respecto de los ejercicios de los dos años anteriores y que, generalmente, las calificaciones de los distintos ejercicios de una misma convocatoria no han resultado significativamente diferentes.

Este trabajo se completa con diversos análisis (no recogidos aquí por razones de espacio) para cada sistema de enseñanza en los que se comparan resultados de distintas maneras: a) por tipos de ejercicios; b) por opciones y/o tipos de ejercicios en una misma convocatoria; c) por convocatorias con el mismo tipo de ejercicios. Se termina el trabajo con la comparación de resultados entre sistemas de enseñanza.

CONCLUSIONES

Matemáticas Aplicadas a las C.C. Sociales II	Matemáticas II de COU
Se han propuesto un total de doce ejercicios que se han clasificado en cuatro tipos. Los dos del tipo P1, han obtenido el 54.88% de aprobados. Los cinco, del tipo P2 han obteniendo calificaciones muy bajas, con el 21.52% de aprobados. Los tres ejercicios del tipo P3, son los que han obtenido peores calificaciones, con el 5.37% de aprobados. Los otros dos ejercicios, aplicación de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes, son los mejor calificados, obteniendo el 63.93% de aprobados. El análisis de resultados por convocatorias pone de manifiesto que las calificaciones de los ejercicios de probabilidad han mejorado considerablemente en junio de 1999, obteniéndose en esta convocatoria una calificación media de 1,09 puntos y el 66.08% de aprobados.	Se han propuesto catorce ejercicios de los que cinco son de cálculo de probabilidades y nueve de distribuciones de probabilidad . Los cuatro ejercicios del tipo P1, han obtenido el 42.45% de aprobados. El ejercicio del tipo P2 ha obtenido el 11.9% de aprobados. Los cuatro ejercicios del tipo N1, han obtenido el 28.1% aprobados. El ejercicios del tipo N2 ha obtenido, el 20% de aprobados. Los cuatro ejercicios restantes, tres del tipo B1, y uno del tipo B2, han obtenido calificaciones muy bajas, con el 8.15% y el 13% de aprobados, respectivamente. Del análisis por convocatorias resulta que las calificaciones de los ejercicios de probabilidad han empeorado en el último años , obteniendose en junio de 1999 calificaciones muy bajas, con 0,26 puntos de media y el 13.43% de aprobados.
De las distintas comparaciones por convocatorias entre los dos sistemas de enseñanza, COU obtiene los mejores resultados en junio de 1997 y en junio de 1998, y LOGSE en junio de 1999.	

BIBLIOGRAFÍA

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD 96/97, 97/98, 98/99 Consejería de Educación y Ciencia, Junta de Andalucía, 1998, 1999 y 1999, respectivamente.

MUÑOZ- REPISO y M., MURILLO , F.J.: Los resultados en la selectividad actual: algunas cuestiones a debate, Revista de Educación, núm. 314 (1997).

MURILLO , F.J.: Análisis de las pruebas que conforman la selectividad, Revista de Educación, núm. 314 (1997), pp. 49-62.

SÁNCHEZ, B.; JIMÉNEZ, F. y OLLERO, J.:Programación Lineal en las Matemáticas de las ciencias sociales y humanas y las pruebas de acceso a la Universidad. IX JAEM, Lugo, 1999a.

SÁNCHEZ, B.; OLLERO, J. y JIMÉNEZ, F. : Análisis del proceso de corrección de las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía: Resultados en Matemáticas II de COU. IX JAEM, Lugo, 1999b.

ESTRUCTURA Y ORGANIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES QUE INCLUYEN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA

ANA SERRADÓ BAYÉS · PILAR AZCÁRATE GODED

Las últimas reformas educativas conceden una mayor importancia a la comunidad educativa haciéndoles poseedores de las decisiones básicas del funcionamiento de los centros educativos. Una de las decisiones que realiza cada comunidad educativa, que quizá afecta más a la sociedad, en general, está relacionado con los libros de texto. Al inicio de los últimos cursos, ha surgido la demanda social del uso que hacen nuestros alumnos del libro de texto. Este tipo de demanda no ha pasado desapercibida por los investigadores en educación, que han emprendido un gran número de estudios sobre los materiales escolares (Apple, 1989; Gimeno, 1995; Torres, 1991). En esta comunicación presentamos los resultados referentes al análisis de la estructura y organización de las actividades a realizar que se encuentran en los libros de texto, y que forma parte de la investigación titulada *"Diseño de las unidades dedicadas al 'Tratamiento del Azar' en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria"*. (Serradó, 2000).

Los libros de texto organizan las actividades según el lugar que ocupen en la unidad. Así pues, podemos encontrar actividades de presentación o motivación, de evaluación de los conocimientos iniciales de los alumnos, de desarrollo o proceso en las que se pretende que el conjunto de todos los alumnos alcancen los objetivos de cada sección del la unidad, de refuerzo, ampliación o profundización con el objetivo de atender a la diversidad existente en las aulas de Secundaria, de síntesis o transferencia de los contenidos aprendidos a otras situaciones, y de evaluación (Serradó y Azcárate, 1999).

Los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria inician las unidades con un conjunto de actividades que tienen la finalidad de **motivar y presentar** la unidad. Si sirven para presentar la unidad, las actividades acostumbran a ir precedidas de un texto introductorio que se refiere a la aplicación de los contenidos matemáticos a la vida cotidiana. En el caso del "Tratamiento del Azar", estos textos hacen referencia a la noción de azar e incertidumbre o a los juegos de azar. Estos textos se complementan con un conjunto de ejercicios relacionados con los datos que aporta el texto. Para el profesor estas actividades sirven para explorar las ideas de los alumnos, principalmente las relacionadas con el significado cotidiano de los contenidos desarrollados en el texto. Por el contrario, si las actividades son de motivación, se pretende que los alumnos exploren a partir de materiales manipulativos o a partir de recopilar datos del entorno, a cerca de los contenidos a desarrollar en la unidad. De forma que a partir de la realización de las actividades de experimentación el profesor pueda detectar las concepciones de los alumnos sobre los contenidos a desarrollar.

En ciertos libros de texto, en que la evaluación adquiere gran significatividad, se empieza la unidad con un **PRE-TEST**, que contiene una colección de ejercicios que permiten evaluar la adquisión de los contenidos conceptuales y procedimentales desarrollados con anterioridad y que los alumnos tendrán que aplicar en esta unidad.

A lo largo de la unidad y en cada una de las secciones en las que se fragmenta ésta, encontramos un conjunto de actividades denominadas de **desarrollo o de proceso.** Estas actividades son comunes a todo el alumnado, y tienen como finalidad que éste alcance los objetivos relacionados con cada contenido conceptual.

La estructura que adquieren estas actividades está condicionada por la forma de introducir las nociones teóricas, y al protagonismo que adquiera el alumno en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por una parte, los libros de texto en que las nociones teóricas se estructuran y organizan siguiendo un modelo deductivo, caracterizado por seguir la estructura disciplinar de presentación del conocimiento, fragmentado en secciones que desarrollan un único contenido conceptual. Esta estructura se compone por un conjunto de explicaciones teóricas, que se complementa con un conjunto de ejemplos de las aplicaciones teóricas, previos a la presentación de las <u>actividades de aplicación</u> del contenido desarrollado en la sección de la unidad. La cantidad de actividades está condicionada por la maquetación del libro de texto, y puede oscilar entre una o cuatro, no en función de la dificultad del contenido, sino del espacio libre tras la explicación teórica. Este tipo de actividades no necesita del uso de ningún tipo de material o recurso complementario para realizarse, simplemente lápiz y papel, que el alumno ha de realizar individualmente sin interaccionar con sus compañeros.

Además de las actividades de aplicación, esta forma de introducir las nociones teóricas puede incluir actividades de <u>validación del conocimiento.</u> Significa que el libro de texto introduce las nociones teóricas a partir de explicaciones, y queda para el alumnado validar las propiedades fundamentales que cumple el contenido conceptual a aprender. Este tipo de validaciones no consiste en la demostración formal de las propiedades, sino en la búsqueda de contraejemplos o argumentaciones que validen las propiedades.

Por el contrario, si las nociones teóricas se estructuran y organizan de forma inductiva, las actividades adquieren un papel muy significativo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, pasando a ser el alumno el protagonista del proceso. Las actividades se caracterizan por se una secuencia cerrada y escalonada de ejercicios que invitan a la exploración, reflexión, validación y aplicación de los contenidos de la unidad. Estas actividades se confunden con las explicaciones, de forma que la numeración es continua a lo largo de la unidad. Algunas de estas actividades se han de realizar a partir del uso de recursos y datos recogidos del entorno, enfatizando la finalidad exploratoria del proceso, e incluso las mismas actividades indican que se han de realizar en parejas o en grupo. En el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria priman las actividades de exploración de los contenidos conceptuales, mientras que para el segundo ciclo priman las actividades de validación y aplicación del conocimiento.

Al finalizar la unidad, podemos encontrar varios grupos de actividades que según la finalidad que adquieren en el proceso de enseñanza y aprendizaje, las clasificamos en actividades de consolidación, actividades de síntesis o transferencia y actividades de evaluación. Algunas editoriales presentan exclusivamente actividades de consolidación de los contenidos aprendidos durante la unidad, estas editoriales dan más importancia a la presentación de nociones teóricas que a la incorporación de actividades que puedan realizar los alumnos. Otras editoriales incluyen, además, actividades de evaluación. La incorporación de actividades de evaluación es una característica de los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. Ciertas editoriales presentan un conjunto de actividades de transferencia de los contenidos aprendidos a otros contextos.

Las actividades de **consolidación** tienen como finalidad consolidar y reforzar el conocimiento aprendido. Las actividades de consolidación deberían adquirir la finalidad de crear una estructura conceptual en el alumno, que le permitiese relacionar los contenidos conceptuales y procedimentales desarrollados. En este sentido, estas actividades deberían tener una complejidad mayor que las actividades de proceso, y los diferentes enunciados o ejercicios deberían relacionar diferentes contenidos conceptuales. Por el contrario, al analizar las actividades de consolidación vemos que son un conjunto de ejercicios de aplicación directa de los contenidos conceptuales y procedimentales desarrollados en la unidad. En la mayoría de ejercicios que se han de aplicar varios contenidos conceptuales, estos se organizan por apartados, secuenciando al máximo el ejercicio. Las diferentes editoriales organizan los ejercicios que configuran las actividades de consolidación de forma diferente.

Podemos encontrar editoriales que no establecen ningún tipo de clasificación en las actividades, con la finalidad de que el profesor las organice según las necesidades del grupo-clase que esté impartiendo.

Ciertas editoriales organizan las actividades de consolidación de sus libros de texto, clasificados a partir de los contenidos conceptuales desarrollados en la unidad. En este caso, la complejidad de las actividades de consolidación decrece ya que los alumnos ni tan sólo han de identificar el contenido conceptual al que se refiere el ejercicio.

La mayoría de las editoriales clasifican las actividades de consolidación en actividades de refuerzo y ampliación o profundización con el objetivo de atender a la diversidad en el aula. Las actividades de refuerzo tienen como finalidad reforzar el aprendizaje de los conocimientos desarrollados con anterioridad. Estas actividades acostumbran a ser, como en los dos casos anteriores, aplicación directa de un concepto o procedimiento, con las mismas características que las actividades de proceso. Por el contrario, las actividades de ampliación y profundización no son aplicación directa de un contenido, sino que necesitan de la relación de contenidos y la elaboración de estrategias de resolución para poder resolver el ejercicio.

Aunque tenemos diferentes formas de presentar las actividades de consolidación, todas tienen la finalidad de atender a la diversidad existente en el aula. Mientras que las actividades de proceso eran comunes para todos los alumnos, éstas permiten agrupaciones según las necesidades del grupo-clase. Al analizar en conjunto las actividades de proceso y consolidación, observamos que hay editoriales en las que las actividades de proceso adquieren más importancia que las de consolidación, y viceversa. Estas dos formas de primar la organización de las actividades de los libros de texto tienen su explicación en las dos grandes reformas del currículum. La reforma de los currículos de principios de los años 60 abogaba por reducir al mínimo los ejercicios, incluyéndolos en el currículum de forma espiral. Cuando se enseñara un nuevo procedimiento o habilidad, la enseñanza iría seguida de una cantidad limitada de ejercicios en dicha habilidad por sí sola. Luego se ofrecería una práctica adicional de esa habilidad, que aparecería en varios puntos del currículo, en el contexto de problemas de otro tipo, de complejidad creciente (Resnick y Ford, 1990). Por el contrario, las últimas reformas del currículum abogan por la construcción del conocimiento matemático por parte del alumno, enfatizando en las actividades de proceso que son las que han de permitir un aprendizaje significativo. (Serradó y Azcárate, 1999).

Al final de la unidad encontramos un conjunto de ejercicios con el título actividades de **autoevaluación**, que sugieren que el alumno ha de evaluar los conocimientos adquiridos. Este tipo de evaluación realizada al final del proceso de enseñanza-aprendizaje, se trata de una evaluación sumativa del producto del proceso de enseñanza. Clasificarlas de autoevaluación tiene como significado darle más protagonismo al alumno en el proceso. Podemos encontrar dos formas diferentes de organizar las actividades de autoevaluación. La mayoría son un conjunto de ejercicios con tres o cuatro respuestas, en las que el alumno ha de seleccionar cuál es la respuesta correcta. Estas actividades hacen referencia exclusivamente a contenidos conceptuales, en las que se evalúa la adquisición de capacidades como aplicar, calcular, identificar, distinguir. Por el contrario, hay editoriales que presentan un conjunto de ejercicios abiertos a realizar por el alumno, parecidos a las actividades de consolidación presentadas con anterioridad, y que hacen referencia a los contenidos conceptuales que adquieren más importancia en la unidad.

Ciertas editoriales, además, incorporan un conjunto de actividades de **síntesis** o **transferencia** de los contenidos desarrollados a lo largo de la unidad. Hay dos formas básicas de presentar estas actividades. Los libros de texto, que incorporan actividades de síntesis, las presentan al finalizar un bloque de contenidos. Éstas están organizadas y estructuradas como un conjunto de actividades que hacen referencia a todos los contenidos del bloque. La finalidad de éstas actividades es relacionar los contenidos desarrollados en las diferentes unidades del bloque, de forma que se presenta algún ejercicio en los que se han de relacionar los contenidos de diferentes unidades. Aunque la dificultad de la mayoría de los ejercicios es identificar cuál es el contenido conceptual a aplicar. Por el contrario, hay libros de texto que incorporan actividades de transferencia de los contenidos desarrollados en la unidad. Consideramos actividades de transferencia las que el alumno ha de aplicar los contenidos aprendido a otros contextos relacionados, a menudo, con situaciones de la vida cotidiana, favoreciendo el aprendizaje significativo y relevante de los contenidos matemáticos.

Al analizar la estructura de las actividades, observamos que hay dos formas básicas de presentarlas en relación con la estructura general del libro de texto. Por una parte, las actividades forman parte de un **modelo tradicional** de intervención educativa, que se caracteriza por ser un conjunto de actividades de aplicación de las nociones teóricas desarrolladas, presentadas de forma fragmentada y que no posibilitan al alumno la creación de una estructura conceptual. Las actividades no invitan al alumno al uso de recursos, sino que son actividades que se ha de realizar de forma individual y con lápiz y papel. Por otra, las actividades se organizan para configurar un **modelo tecnológico** de intervención educativa, en las que se favorece el descubrimiento guiado de los contenidos conceptuales. De forma que el alumno es el protagonista del proceso de enseñanza y aprendizaje, mientras que el papel del profesor es de mediador en el proceso. Para la realización de este tipo de actividades es necesario el uso de todo tipo de recursos, para que a partir de la manipulación se puedan construir las nociones teóricas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APPLE, M. W. (1989): *Maestros y textos*. Colección Temas de Educación. Barcelona: Paidos/MEC.

GIMENO, J. (1995): "Materiales y textos: contradicciones de la democracia cultural". En Minguez, J.G. y Beas, M. (Col.): *Libro de Texto y Construcción de Materiales curriculares*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

RESNICK, L.B. y FORD, W.W. (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Colección Temas de Educación. Barcelona: Paidos/MEC.

SERRADÓ, A. y AZCÁRATE, A. (1999): "Didáctica de las Matemáticas". En Azcárate, Ibarra y Navarrete (Eds.): *Materiales curriculares para la formación inicial del profesorado de Educación Secundaria*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Cádiz.

SERRADÓ, A (2000): *Diseño de las unidades dedicadas al "Tratamiento del Azar" en los libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria*. Trabajo de investigación inédito. Universidad de Cádiz.

TORRES, J. (1991): *El curriculum oculto*. Madrid: Editorial Morata.

ANÁLISIS DE PROCEDIMIENTOS ESTRATÉGICOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

MANUEL AGUILAR VILLAGRÁN · JAIME MARTÍNEZ MONTERO · CONCEPCIÓN ARANDA QUINTANA

INTRODUCCIÓN

Los resultados de la primera radiografía de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) publicados en 1998 por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) reflejaron las dificultades que tienen los chicos y chicas de 16 años con los contenidos matemáticos: tres de cada cuatro alumnos no son capaces de resolver problemas prácticos que exijan el uso del lenguaje algebraico, el manejo de sistemas de medida, etc.

Una forma de adquirir conocimientos matemáticos está estrechamente vinculada a la resolución de problemas. Enseñar a resolver problemas matemáticos no es una tarea fácil y además de ser un proceso complejo en el que entran en juego múltiples componentes requiere un entrenamiento a largo plazo que empezaría con los inicios de la escolaridad obligatoria. Pero el término "resolución de problemas" tiene varios significados: desde la aplicación de las matemáticas a actividades prácticas y ligadas a aprendizajes extraescolares a la utilización de una batería de problemas para que el alumno aprenda una serie de contenidos o conceptos del currículum, pasando por su utilización para implementar procedimientos estratégicos que sirvan para variadas situaciones problemáticas.

Cuando se analiza la enseñanza de los problemas en las clases de matemáticas se encuentran unas pautas que, con ligeras variaciones, siguen este esquema: exposición de contenidos→ ejemplos→ ejercicios sencillos →ejercicios más complicados→ problema como aplicación de los contenidos explicados. Es decir, los problemas se suelen plantear como la aplicación de conceptos aprendidos en una lección, como un procedimiento rutinario y algoritmico para encontrar la solución a la pregunta planteada y afianzar el contenido que en esa lección se esté trabajando. En esta situación los problemas son una serie de ejercicios destinados a garantizar la adquisición de rutinas de cálculo. De esta forma, los chicos y chicas van construyendo unas ideas sobre la resolución de problemas matemáticos que producen unos efectos que básicamente son dos: uno en el comienzo del proceso de resolución al considerar un problema como una aplicación de lo explicado y por tanto si no se sabe como abordarlo sería un problema irresoluble y segundo, en el final del proceso de resolución al considerar que el problema termina cuando se ha encontrado la solución (Puig, 1992).

Por otra parte, es muy útil analizar los errores cometidos por los chicos y chicas al resolver los problemas. Los errores son una fuente importante de conocimiento sobre las dificultades que los alumnos presentan al resolver los problemas. Por ello los errores no tienen que ser tratados como fracasos de los alumnos sino como una información más de la que disponemos y como una paso en la propia autoevaluación del alumno.

En este estudio nos planteamos conocer algunos de los procedimientos estratégicos que usan los alumnos de Cuarto de Educación Secundaria en la resolución de problemas matemáticos. Asimismo, el análisis de los errores cometidos en el proceso de resolución permitirá explorar y conocer algunos de los obstáculos que presentan los estudiantes al resolver problemas.

MÉTODO

Participantes

Un total de 85 alumnos de Cuarto de Educación Secundaria de las provincias de Cádiz y Málaga han participado en este estudio. Media de edad 15 años, 7 meses.

MATERIAL Y PROCEDIMIENTO

En el desarrollo de una clase de Matemáticas se le presentaba a los alumnos dos hojas con los tres problemas siguientes (ver el cuadro 1) . La principal característica de los problemas propuestos es que pueden ser resueltos de varias formas, esto permite analizar cuál es la estrategia mayoritaria entre los alumnos y alumnas que encuentran la solución (Ver el cuadro 2.)

Cuadro 1.

1. Ana y Juan fueron de visita a un granja en la que había gallinas y conejos. Juan observó que había en total 19 cabezas, mientras que Ana dijo que en total había 60 patas.)Cuántas gallinas y cuántos conejos había en la granja que visitaron?.
2. ¿Puedes encontrar **dos números** enteros positivos **a** y **b** que al multiplicarlos de un millón y ninguno de los dos números tenga un cero? ¿Es este par de números único o hay otros pares diferentes de números?.
3. Un libro se abre al azar por cualquier sitio. El producto (la multiplicación) de los números de las páginas observadas es 3192. ¿En qué número de páginas se abrió el libro?.

Cuando se le proporcionaba las hojas con los problemas se les indicaba que su tarea consistía en resolver esos tres problemas de la mejor manera que supieran y que podían utilizar el procedimiento que les resultara más fácil para encontrar la solución (realizar un dibujo, una ecuación, descomponer en factores, probar con números, conjeturar, combinando operaciones aritméticas, etc.). Todos los alumnos dispusieron de tiempo suficiente para realizar la tarea. En ningún caso se les ayudó dando alguna pista sobre los procedimientos de solución a utilizar en cada uno de los tres problemas. Los estudiantes que disponían de calculadora podían usarla para realizar operaciones que ayudasen a resolver los problemas.
Un análisis previo de los problemas ayuda a comprobar cuáles son las estrategias que pueden usarse para resolver cada uno de ellos.

Cuadro 2

PROBLEMA	ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN	CONTENIDO
EL PROBLEMA DE LA GRANJA	Dibujos Ensayo y error Algebraica (ecuaciones) Tabla	-Operaciones fundamentales con enteros, ecuaciones de primer grado con una o dos incognitas.
EL PROBLEMA DEL MILLÓN	Pensar en un problema más simple Factores primos.	Multiplicación y división de enteros, factorización, exponentes y números primos.
EL PROBLEMA DE LAS PÁGINAS	Ensayo y error Factorización Raíz cuadrada Ecuación	Números consecutivos, multiplicación de enteros, factorización, significado de la raíz cuadrada, ecuación cuadrática.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La Tabla I recoge los resultados encontrados. Se expresan en porcentajes el número de alumnos que resuelven bien cada uno de los problemas, los que no lo resuelven y los que ni siquiera lo intentan.Como se muestra en la Tabla I el problema menos rutinario, el más abierto es el de peor resultado, solo 7 alumnos lo han realizado bien y una mayoría (78 alumnos) o lo han hecho mal o ni siquiera lo han intentado. Este hecho plantea algunas reflexiones.

Tabla I

PROBLEMA	Bien	Mal	Sin intento
EL PROBLEMA DE LA GRANJA	54%	45%	1%
EL PROBLEMA DEL MILLÓN	8%	46%	46%
EL PROBLEMA DE LAS PÁGINAS	67%	12%	21%

En la Tabla II se presentan las estrategias usadas por los que han resuelto bien el problema.

Tabla II

PROBLEMA	SUJETOS QUE LO HACEN BIEN	ESTRATEGIAS DE SOLUCIÓN Y NÚMERO DE SUJETOS QUE LA UTILIZAN
EL PROBLEMA DE LA GRANJA	46	Dibujos (2) Ensayo y error (39) Algebraica (ecuaciones) (3) Tabla (2) Otras
EL PROBLEMA DEL MILLÓN	7	Pensar en un problema más simple Factores primos. (7)
EL PROBLEMA DE LAS PÁGINAS	57	Ensayo y error (43) Factorización Raíz cuadrada (11) Ecuación (3)

La estrategia mayoritaria tanto en el "problema de la granja" como en el "problema del millón" ha sido la de ensayo y error. Un ejemplo típico para el problema de las páginas del libro es el alumno que multiplica 43 X 44 = 1892, luego hace 61 X 62 = 3782 y por aproximaciones va realizando multiplicaciones hasta encontrar la solución (56 X 57). En el caso de la granja, el prototipo de ensayo y error sigue estos pasos: elige dos números que sumen 19, por ejemplo, 12 y 7, multiplican 12 por 4 (patas de conejo) y 7 por 2

(patas de gallina), como hacen un total de 62 patas (48 más 14) y se pasa del número total de patas que es 60 va disminuyendo uno de los números y aumentando el otro hasta encontrar la solución.
La estrategia de tipo algebraico ha sido muy poco usada, solo tres alumnos en cada uno de los problemas. Señalemos que los tres alumnos que resuelven bien el problema de "las páginas del libro" de forma algebraica lo hacen equivocando el algoritmo pero encontrando la solución. El planteamiento que hacen es: X A X+1 = 3192 ; X^2 + 1= 3192; X^2 = 3192-1; por tanto X= 56,4. La solución es 56 X57 = 3192. Esto nos plantea la contraposición entre enseñanza algoritmica versus enseñanza heurística tantas veces apuntada. De los tres estudiantes que resuelven por ecuaciones el problema de la granja, dos de ellos plantean la solución como un sistema de ecuaciones con dos incógnitas (x= los conejos, y= las gallina) y solo uno plantea el problema como una ecuación sencilla: si x es el número de conejos, el número de gallinas será 19-x.

Los siete alumnos que han resuelto el problema del millón lo hacen con la misma estrategia. Descomponer el millón en factores primos y presentar la siguiente solución: $(2 \times 5)^6$, pero ninguno de ellos ha encontrado otra solución ni ha trabajado otra estrategia (pensar en un caso más sencillo). Alguno de estos alumnos, curiosamente, plantean la descomposición en factores primos para encontrar la solución al problema de las páginas del libro y, claro está, no la encuentran.)Se estaba trabajando en ese momento la factorización en clase de matemáticas?.
Las limitaciones de espacio nos impiden extendernos sobre el análisis de errores, pero hay algunas evidencias que deseamos destacar: lo que resulta más claro es lo poco que se paran en la fase que Polya (1965) denominaba de revisión de la solución obtenida. Sirvan estos casos como ejemplos de lo que decimos: encontrar como solución en el problema de la granja 5 conejos y 20 gallinas (hacen un total de 60 patas) pero no se dan cuenta de que la suma de 5 y 20 hacen más de las 19 cabezas que se presentan en el enunciado del problema; presentar soluciones con números decimales en el problema de las páginas del libro, o decir que este problema tiene muchas soluciones, según por las páginas que se abran (2 y 1596; 6 y 532,...) olvidando por completo que las páginas han de ser consecutivas. En el problema del millón ya destacamos el alto porcentaje de los que ni siquiera lo intentan y muchos de los que lo intentan terminan diciendo que "este problema no tiene solución"
Hemos encontrado, pues, que las estrategias que usa esta muestra de alumnos de 41 de Educación Secundaria son muy elementales, teniendo presente que el desarrollo cognitivo propio de esta edad señala la etapa de las Operaciones Formales era de esperar una utilización de estrategias que podíamos denominar como "más abstractas" y más eficaces cognitivamente (por ejemplo las soluciones algebraicas para los problemas de la granja y del millón) y no los "largos caminos" que recorren a través del "ensayo y error" que son propios de etapas del desarrollo cognitivo anteriores.
Pensamos que la utilización de problemas en la enseñanza de las matemáticas, aún con problemas de los denominados "rutinarios", ganaría en eficacia y profundidad. Pero estos problemas deben tener unas características determinadas: plantear situaciones significativas, que requieran la elaboración y utilización de conocimiento matemático, situaciones de incertidumbre, encontrar varias formas o caminos de solucionar el problema planteado, etc. De esta forma, los alumnos abandonarían algunas de las ideas que sostienen sobre el conocimiento matemático (Baroody, 1988, Schoenfeld, 1992) como lo ya comentado de que hacer matemática es aplicar la misma regla de forma repetida, o la idea de que la solución a un problema siempre es única. Terminamos con las sugerencias que el profesor Miguel de Guzmán (2000) señala para la presentación de un tema matemático que se base en el espíritu de la resolución de problemas: 1. Propuesta de la situación- problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...). 2. Manipulación autónoma por los estudiantes. 3. Familiarización con la situación y sus dificultades. 4. Elaboración de estrategias posibles. 5. Ensayos diversos por los estudiantes. 6. Herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados). 7. Elección de estrategias. 8. Ataque y resolución de los problemas. 9. Recorrido crítico (reflexión sobre el proceso). 10. Afianzamiento formalizado (si conviene). 11. Generalización. 12. Nuevos problemas. 13. Posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas,...

REFERENCIAS

Baroody, A. J. (1988). El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial. Madrid: Aprendizaje Visor.

De Guzmán, M. (2000). Enseñanza de la Matemática. En D. Gil Pérez, D. y M. De Guzmán. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e innovaciones. PDF. Organización de Estados Iberoamericanos.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Puig, L. (1992). Aprender a resolver problemas, aprender resolviendo problemas. Aula de innovación educativa, 6, 10-12.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense in mathematics. En D. A. Grows (Ed) Handbook of research on mathematic teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics (334-370). Nueva York: Mc Millan.

EL EURO Y EL CURRICULUM DE MATEMÁTICAS

ANTONIO FERNÁNDE-ALISEDA REDONDO

INTRODUCCIÓN

Pocos acontecimientos afectan a toda una población como el cambio de moneda que se producirá a partir del 1 de enero de 2002. En este caso, la aparición del euro repercutirá en once de los quince países que constituyen la Unión Europea y en cerca de 290 millones de personas.
La adaptación a la nueva moneda no va a estar exenta de dificultades, pues además del cambio mental sobre el valor de las cosas habrá que manejar unidades fraccionarias desconocidas para algunas generaciones de españoles.
Se trata de un acontecimiento social y económico que implica la utilización directa de conceptos y procedimientos matemáticos y que va a suministrar contextos de aprendizaje relacionados con las Matemáticas.
Por todo ello es conveniente ir preparando, desde los centros educativos, la transformación al nuevo sistema monetario.

CUESTIONARIO SOBRE EL EURO

Aunque parece que la información sobre el euro es pequeña esto no es así como se puede comprobar con el siguiente cuestionario que sirve para detectar los conocimientos previos.

1.- ¿Cuántos países participan en el euro...
☐ 11 ☐ 14 ☐ 15 ?
2.- ¿En qué fecha tendremos monedas y billetes euro...
☐ 1/1/2001 ☐ 1/1/2002 ☐ 1/1/2003 ?
3.- ¿A cuántas pesetas equivale un euro...
☐ 165'386 ☐ 166'386 ☐ 166 ?
4.- ¿Cuál es el símbolo gráfico adoptado para el euro...
☐ é ☐ € ☐ $?
5.- ¿Cuántas monedas de euro habrá...
☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ?
6.- ¿Cuál será el importe más bajo de las monedas en euros...
☐ 0'1 euro ☐ 0'01 euro ☐ 0'001 euro ?
7.- ¿Y el más alto...
☐ 1 euro ☐ 2 euros ☐ 5 euros ?
8.- ¿Cuántos billetes de euro habrá...
☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ?
9.- ¿Cuál será el importe más elevado de los billetes en euros...
☐ 200 euros ☐ 500 euros ☐ 1000 euros ?
10.- ¿En qué se diferencian los billetes euro de dos países cualesquiera...
☐ En el anverso ☐ En el reverso ☐ En nada ?

Las respuestas correctas son: 1(11); 2(1/1/2002); 3(166'386); 4(€); 5(8); 6(0'01); 7(2); 8(7); 9(500); 10(En nada).

FASES DE LA UNIÓN MONETARIA

La incorporación al euro supone la participación en un gran proyecto económico y político que ha necesitado de varias etapas, las últimas de las cuales son:

FASE 1 (desde 1/1/1998 hasta 31/12/1998)
Decisión de los estados miembros participantes en el área euro. El Consejo Europeo de Bruselas (mayo de 1998) fijó los Estados participantes en la Unión Económica y Monetaria: Alemania, Austria, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Países Bajos y Portugal. Están ausentes, por el momento, Dinamarca, Grecia, Reino Unido y Suecia.
31/12/1998. Se fija la equivalencia entre cada moneda participante y el euro. En concreto 1 € = 166'386 ptas. Esta conversión es irrevocable y definitiva.

FASE 2 (desde 1/1/1999 hasta 31/12/2001)
Nace contablemente el euro (aunque no existen físicamente ni monedas ni billetes). Las monedas tradicionales continúan como monedas de curso legal.

FASE 3 (desde 1/1/2002)
1/1/2002. Se ponen en circulación las monedas y billetes en euros. Hasta el 28/2/2002 la peseta y el euro pueden utilizarse indistintamente.
1/3/2002. Desaparece la peseta como medio de pago y el euro se convierte en la única moneda de curso legal. Las pesetas se pueden seguir cambiando por euros en el Banco de España.

El Euro Dentro Y Fuera Del Aula

La aparición y uso del euro suponen un acontecimiento social y económico que implica la utilización directa de conceptos y procedimientos matemáticos y que, por tanto, no debe desaprovecharse en la clase de Matemáticas `porque:
Van a suministrar contextos de aprendizaje relacionados con los números decimales:
- Su conocimiento y uso fuera del aula. - Lectura y escritura.
- Operaciones. - Comparación y ordenación.

Permitirán el desarrollo y uso de procedimientos como:
- Uso de tablas y calculadoras. - Cálculo mental.

Facilitarán el trabajo interdisciplinar y en materia de educación para el consumo.
DIFICULTADES:
Se presenta una situación didáctica problemática: Habrá que armonizar, en edades tempranas, el conocimiento del sistema monetario con el uso de números decimales.
Se tendrá que aprender a pensar en euros, lo que supone un cambio de mentalidad (con dificultades para las personas mayores y los más pequeños).
Habrá que poner al día textos y materiales para adaptarlos a la nueva moneda.

Sistema Monetario Y Curriculum De Matemáticas

El sistema monetario se imparte en el área de Matemáticas del segundo ciclo de Primaria. Al respecto la Colección de Materiales Curriculares de la Consejería de Educación y Ciencia (Junta de Andalucía) presenta como objetivos:

"En este ciclo se aproximarán los alumnos y las alumnas a la comprensión de la noción de magnitud, reconociendo e identificando a título intuitivo y experimental los atributos propios de algunas magnitudes: longitud, capacidad, superficie, peso, tiempo y cantidades monetarias.
...Se trabajará así mismo sobre la estructura del sistema monetario con la pretensión de que sepan cómo utilizar el dinero en situaciones cotidianas, qué monedas ofrecer y qué cambio esperar.
...Es importante que los alumnos de este ciclo descubran la existencia y uso pertinente de diversas formas de cálculo: estimaciones, utilización de materiales físicos, representaciones gráficas, cálculo mental, algoritmos, máquinas de calcular, etc."

Estas pretensiones corresponden al curriculum estático, es decir, aquel que está señalado en la normativa. Sin embargo la aparición del euro va a obligar, al menos en sus primeros momentos, al desarrollo o aplicación de conocimientos y procedimientos matemáticos en niveles distintos al habitual; podríamos decir que aparece un curriculum dinámico.
Entre las necesidades que surgirán y a las que se puede dar respuesta desde el aula de Matemáticas están: Conocimiento de las monedas y billetes euro y sus características; Uso de la expresión decimal del dinero en euros; Manejo de calculadoras; Conocimiento y uso de las reglas de conversión y redondeo entre el euro y la peseta y Adaptación a los nuevos valores numéricos de precios.

Monedas Euro. Características Y Diseño

El símbolo gráfico del euro es €.
Los valores de las monedas son: 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos, 1 y 2 euros.
Tendrán una parte (reverso) con motivos europeos, los mismos para todos los países: el mapa de Europa (en los valores 0'10, 0'20, 0'50, 1 y 2 €) o un pequeño globo terráqueo (en las monedas 0'01, 0'02 y 0'05 €) atravesados por líneas que unen las doce estrellas de la bandera europea.

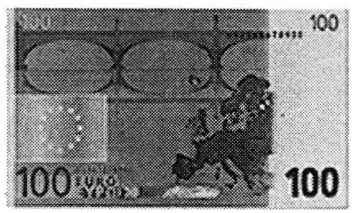
El anverso será elegido por cada país. Hay países donde será el mismo para todas las monedas (ej. Irlanda) y otros con diseños distintos para cada una (ej. Italia).

Las monedas españolas tendrán tres motivos: la efigie del rey (1€ y 2€), la de Cervantes (10, 20 y 50 céntimos) y la Catedral de Santiago (1, 2 y 5 céntimos).

El 16 de junio de 1997, en la cumbre de Amsterdam, el Consejo Europeo eligió como ganador para la "cara europea" de las monedas el diseño del belga Luc Luycx.

BILLETES EURO. CARACTERÍSTICAS Y DISEÑO

Los billetes son los mismos para todos los países.
Sus valores son: 5, 10, 20, 50, 100, 200 y 500 euros.
Su diseño corresponde a épocas y estilos en Europa. En el anverso de los billetes figuran ventanas y pórticos de la época correspondiente simbolizando el espíritu de apertura y cooperación de la Unión Europea. En el reverso aparecen puentes de la misma época representando la unión entre los pueblos de Europa y entre Europa y el mundo. Se ha prestado especial cuidado para que los diseños no recuerden a ningún monumento ni país concreto.



EXPRESIÓN DEL DINERO EN EUROS. NÚMEROS DECIMALES

Dado que la peseta no tiene monedas de menor valor, no es necesario el uso de números decimales para expresar el precio de un objeto. Todas las monedas y billetes existentes en la actualidad (1, 5, 10, 25, 50, 100, 200, 500, 1000, 2000, 5000 y 10000 ptas) son múltiplos de ella.

Sin embargo, el euro sí tiene monedas menores (1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos de euro) que necesitan de los números decimales para su expresión en euros.

Ejemplos:	50 céntimos de euro	=	50/100 euros	=	0'50 euros
	1 céntimo de euro	=	1/100 euros	=	0'01 euros

EL EURO Y... LAS CALCULADORAS NO CIENTÍFICAS

Durante los primeros meses de existencia del euro será muy frecuente el uso de calculadoras para realizar conversiones entre las dos monedas. Cualquier calculadora es útil, aunque están apareciendo eurocalculadoras que sólo aportan algo de rapidez. Es interesante conocer y aprovechar las cualidades de cada una de ellas. Vamos a comentar las más usuales.

Cuando una misma operación y factor se han de repetir varias veces se usa el factor constante. Para ello basta con pulsar el número y la operación; de esta forma se fija el primer término introducido en el caso del producto y el segundo para la suma, resta o división.

Ejemplos:

6 $\boxed{x}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{18}$ Fija el factor 6 para la multiplicación

6 $\boxed{:}$ 3 $\boxed{=}$ $\boxed{2}$ Fija el factor 3 para la división

Una vez fijado el factor constante se van introduciendo los números que van a operarse con él y el signo =, realizándose la operación y presentando el resultado en pantalla.

Ejemplos:

1.- Calcular 7 x 10; 7 x 22; 7 x 4.

7 x 10 = 70. A partir de ahora el 7 es constante para la multiplicación.
Luego al teclear 22 = nos da 154; y al hacer 4 = se obtiene 28.

2.- Calcular 8 3; 6 3; 0'3 3.
   8 3 = 2'6666666. A partir de ahora el 3 es constante para la división.
   Tecleando 6 = aparece en pantalla 2; y al hacerlo con 0'3 = dará 0'1.

EL EURO Y... LAS CALCULADORAS CIENTÍFICAS

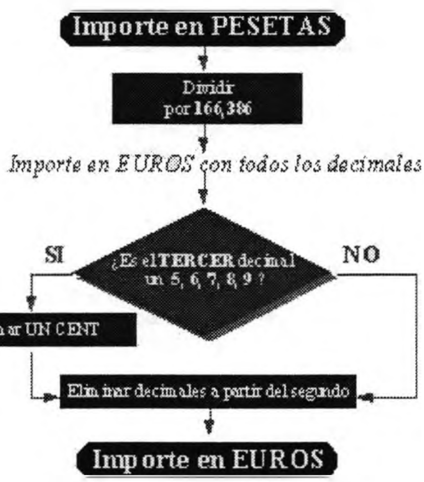
En estas calculadoras la secuencia k xx indica que queremos multiplicar por k los términos que introduciremos después. Al teclear posteriormente = se produce el cálculo. k :: fija el factor k como divisor. Análogamente al introducir los dividendos que deseemos y teclear = se realiza la división.
Para redondear tienen la función FIX n que redondea a n cifras decimales. Se activa presionando MODE 7 y, a continuación, el número de cifras decimales deseado.
El redondeo continuará realizándose hasta que se vuelva al MODO NORM, lo que se consigue tecleando MODE 9.
Ejemplos:
1.- Calcular, redondeando sin cifras decimales, 2'3 x 3'17, 2'3 x 5.
   MODE 7 0, fija el redondeo sin cifras decimales.
   2'3 xx 3'17 = 7 y fija el factor constante 2'3 para el producto; Por tanto al teclear 5 = se obtiene 12.
2.- Calcular, con dos cifras decimales, 44 : 3'6, 6'28 : 3'6 .
   MODE 7 2, fija el redondeo con dos cifras decimales.
   3'6 :: 44 = 12'22 y fija el divisor 3'6; Por tanto al teclear 6'28 = se obtiene 1'74.

EL EURO Y... LAS EUROCALCULADORAS

Las eurocalculadoras son calculadoras donde los cálculos se pueden hacer directamente. Para ello incorporan teclas nuevas. Su funcionamiento pasa por fijar el tipo de cambio con el que se quiere trabajar y a partir de entonces introducir las cantidades que se quieren convertir. Basta con presionar la tecla de la moneda final para efectuar el cálculo.
Suelen efectuar el redondeo a céntimos de euro, pero no siempre el redondeo a peseta, que habrá que hacer mentalmente.

CONVERSIÓN DE PESETAS A EUROS

Las normas de conversión aparecen en la Ley sobre Introducción del euro, aprobada por el Congreso de los diputados en 1998. Es interesante que los alumnos lean las normas del texto y redacten por sí mismos la secuencia de pasos a realizar.
Para conocer cuánto vale, en euros, un producto o servicio, hay que dividir su precio en pesetas por la equivalencia oficial   1€ = 166'386 pesetas.
El redondeo se hace a la centésima (segundo decimal), teniendo en cuenta el valor del tercero (milésima).
Por ejemplo, para saber cuántos euros son 1000 pesetas habrá que dividir
1000 / 166'386 = 6'010121043838...
Como la tercera cifra decimal es un 0, la anterior no varía y se eliminan los decimales a partir de ella
1000 ptas = 6'01 €.

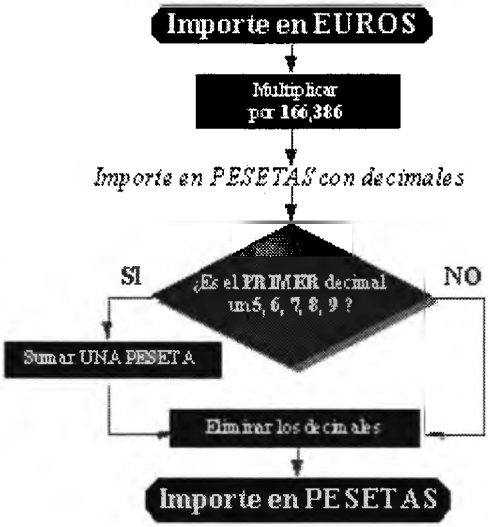


Conversión De Euros A Pesetas

Si se desea conocer el precio en pesetas de un producto o servicio, hay que multiplicar su coste en euros por la equivalencia oficial 1€ = 166'386 pesetas.
Al no existir cantidad decimal de pesetas el redondeo se hace a la unidad de peseta más próxima.
Por ejemplo, para saber cuántas pesetas son 11'25 euros habrá de multiplicarse

11'25 x 166'386 = 1871' 8425

que redondeando a la peseta más próxima da 11'25 € = 1872 ptas.



Los ejercicios de conversión para los alumnos conviene realizarlos sobre objetos de consumo propios de su edad (precios del bar del instituto, cine, música...) y sobre las monedas y billetes actuales. También se puede comprobar la corrección de los precios que aparece en la propaganda de los hipermercados.

No Reversibilidad Del Cambio

Una situación curiosa que se plantea al efectuar conversiones es la no reversibilidad del cambio. Es decir, que si se cambia de pesetas a euros y de nuevo a pesetas no siempre se obtiene la cantidad inicial. Se puede comprobar con 1 peseta. Es interesante hacer notar esta situación y reflexionar sobre sus causas.

Ptas	€	Ptas	Ptas	€	Ptas	Ptas	€	Ptas	Ptas	€	Ptas	Ptas	€	Ptas
1			2			3			4			5		
6			7			8			9			10		

El Euro Y ... El Cálculo Mental

La relación 166'386 ptas = 1 € no parece, en un principio, muy propicia al cálculo mental. Con ella: 1000 ptas = 6'01 €. Luego se puede tomar: 1000 ptas ≅ 6 € y1 € ≅ 1000/6 ptas.
Conversión de euros a pesetas.
Para calcular mentalmente el valor en pesetas de una cantidad expresada en euros bastará dividirla entre seis y multiplicarla por 1000.
Ejemplos: 18 € ≅ (18/6) x 1000 = 3000 ptas
2'40 € ≅ (2'40/6) x 1000 = 400 ptas
2 € ≅ 2/6 x 1000 ≅ 0'333 x 1000 = 330 ptas (dividiendo hasta las milésimas)
Conversión de pesetas a euros.
Utilizando la misma relación 1000 ptas ≅ 6 €, se tiene: 1 pta ≅ 6/1000 €
Para calcular mentalmente el valor en euros de una cantidad expresada en pesetas bastará multiplicarla por seis y dividirla por 1000 (trasladando la coma tres lugares hacia la izquierda). Recordemos que los euros se expresan como máximo en céntimos por lo que si aparecen más cifras decimales hay que redondear.

Ejemplos: 125 ptas ≅ 125 x 6/1000 = 750/1000 = 0'75 €
1024 ptas ≅1024 x 6/1000 = 6144/1000 = 6'144 = 6'14 €

NAVEGANDO CON EL EURO

Consejería de Economía y Hacienda (Junta de Andalucía): http://www.ceh.junta-andalucia.es/
Ministerio de Economía y Hacienda: http://www.meh.es/euro
Parlamento Europeo. Oficina en España: http://www.europarl.es/euro/
Red Telemática Educativa de Cataluña (Departamento de Enseñanza. Generalitat de Catalunya): http://pie.xtec.es/euro/index.htm

BIBLIOGRAFÍA

ABRAIRA, C. y FRADE, R. (1999): *Euro y comprensión de decimales*, Actas de las IXª JAEM, Lugo, pp 348-351.

GONZÁLEZ, F. Y CORIAT, M. (1998): *Matemáticas y consumo: el encuentro con el euro*, Revista SUMA, nº 28, pp 91-96.

MARTÍN ÁLVAREZ, Abel José (1999): *El factor constante, una función de las calculadoras con multitud de aplicaciones didácticas y de la vida cotidiana desconocidas*, Actas de las IXª JAEM, Lugo, pp 339-342.

¡CÓMO HACERSE MILLONARIO CON EL EURO!
FUNCIÓN BENEFICIO-PÉRDIDA AL CAMBIAR DE PESETAS A EUROS.

RICARDO CONTRERAS CALVACHE

INTRODUCCIÓN.

Cuando surgió el euro, y más concretamente el cambio fijo e inamovible, el 1 de enero de 1999, quería diseñar y realizar algunas actividades que fuesen más allá de las transformaciones de pesetas a euros y al revés, de las equivalencias entre billetes y monedas de euros, de la descripción de éstas, de la legislación sobre esta moneda....

En un primer intento surge el siguiente problema estratégico, que forma parte de la Prueba Individual de la Fase Regional de la XV Olimpiada Matemática THALES para alumnos de 2º de E.S.O.:

¡UN EURO!

El cambio oficial e inamovible, mientras dure el periodo de transición de pesetas a euros, quedó fijado desde el uno de enero de 1999 de la siguiente manera: un euro equivale a 166,386 pesetas. A cualquier persona que llegue a un banco a cambiar 100 pesetas le entregarán 60 céntimos de euro, pero a mí, que soy aficionado a las matemáticas, me entregarán exactamente 1 euro a cambio de las cien pesetas. ¿Cómo lo conseguiré?
Pista: los redondeos por exceso pueden dar mucho de sí.

Se advierte que este problema tiene solución legal.

En un segundo intento, tras unas declaraciones del Ministro de Economía, en las que afirmaba que en los cambios de moneda no iban a salir perjudicados ni los clientes ni los bancos y que estos cambios iban a ser gratuitos, me propuse comprobar si realmente ocurriría así, para ello diseñé el trabajo que viene a continuación.

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

- Objetivos.

- Comprobar si en los posibles cambios de pesetas a euros se beneficia el cliente, el banco (y de qué forma) o ninguno de los dos.
- Averiguar la función que rige el beneficio o pérdida en los cambios de pesetas a euros y estudiarla.

- Material.

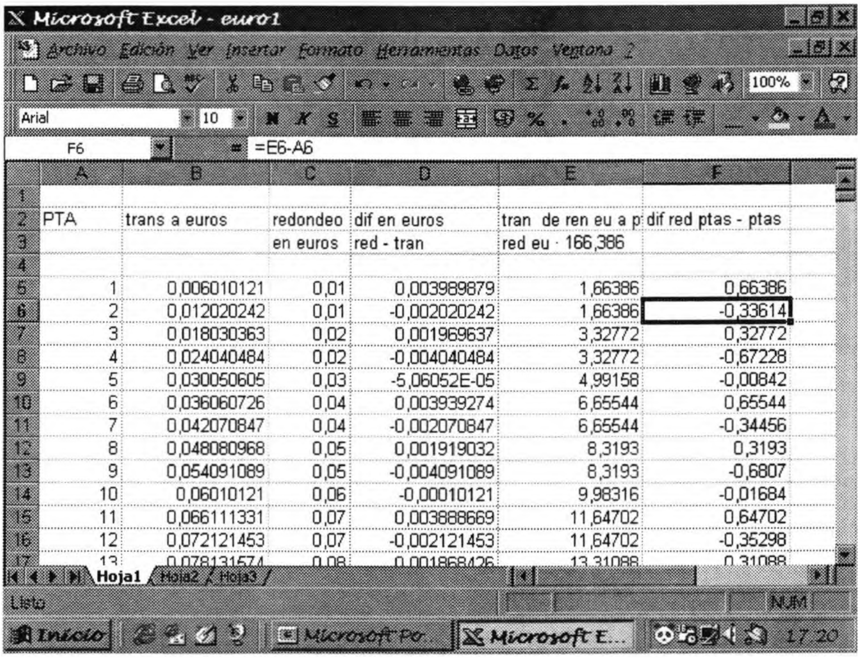
- Hoja de cálculo.

- Descripción del trabajo.

El trabajo se realiza fundamentalmente haciendo uso de las columnas, introduciendo en cada una la fórmula correspondiente y llenando hacia abajo como se puede observar en la imagen 1, de esta forma se van haciendo las operaciones por columnas y por filas.

Aquí me encontré la primera dificultad, la hoja de cálculo Excel 97 tiene un total de 65536 líneas, 2^{16}, yo necesitaba 2^{18}, para poder tener todos los cambios posibles dentro del "primer periodo" (166386), posteriormente se comprueba que el periodo es más reducido. La solución al problema fue hacer cuatro particiones en el trabajo.

La segunda dificultad fue el tamaño de la hoja, más de 4000 folios, 46 megas, aproximadamente un millón y medio de celdas y todas conteniendo fórmulas, además de las representaciones gráficas, el almacenamiento externo había que hacerlo en un disco compacto.



	A	B	C	D	E	F
1						
2	PTA	trans a euros	redondeo	dif en euros	tran de ren eu a p	dif red ptas - ptas
3			en euros	red - tran	red eu · 166,386	
4						
5	1	0,006010121	0,01	0,003989879	1,66386	0,66386
6	2	0,012020242	0,01	-0,002020242	1,66386	-0,33614
7	3	0,018030363	0,02	0,001969637	3,32772	0,32772
8	4	0,024040484	0,02	-0,004040484	3,32772	-0,67228
9	5	0,030050605	0,03	-5,06052E-05	4,99158	-0,00842
10	6	0,036060726	0,04	0,003939274	6,65544	0,65544
11	7	0,042070847	0,04	-0,002070847	6,65544	-0,34456
12	8	0,048080968	0,05	0,001919032	8,3193	0,3193
13	9	0,054091089	0,05	-0,004091089	8,3193	-0,6807
14	10	0,06010121	0,06	-0,00010121	9,98316	-0,01684
15	11	0,066111331	0,07	0,003888669	11,64702	0,64702
16	12	0,072121453	0,07	-0,002121453	11,64702	-0,35298
17	13	0,078131574	0,08	0,001868426	13,31088	0,31088

Imagen 1

En la columna A se introduce el valor de la cantidad en pesetas que queremos transformar a euros (hay que introducir todas las cantidades posibles).

En la columna B se transforma la cantidad de la A a euros, dividiéndola por 166,386.

En la columna C se redondea el valor de la cantidad de la B con dos decimales (céntimos de euro).

En la columna D se resta a la cantidad de C la cantidad de B, obteniéndose así el beneficio o pérdida en euros.

En la columna E transformamos la cantidad del redondeo en euros de la C a pesetas, multiplicándola por 166,386.

En la columna F se resta a la cantidad de E la cantidad de A, obteniéndose así el beneficio absoluto o pérdida absoluta en pesetas.

En la columna G se redondea la cantidad de la E con cero decimales, ésta servirá para averiguar después el beneficio o pérdida al cambiar de pesetas a euros.

En la columna H hay un condicionante que asigna un valor cuando hay beneficio y otro valor cuando hay pérdida, servirá para el estudio posterior de la función.

Las columnas que interesaban, para continuar, eran la D y la F, las representaciones gráficas están realizadas sobre la F (en pesetas), imagen 2 e imagen 3.

La imagen 2 representa una parte de la gráfica de la columna beneficio-pérdida, al ampliarla se apreciaba bastante mejor su comportamiento, incluso facilitó la descomposición de la función inicial en cinco funciones por separado.

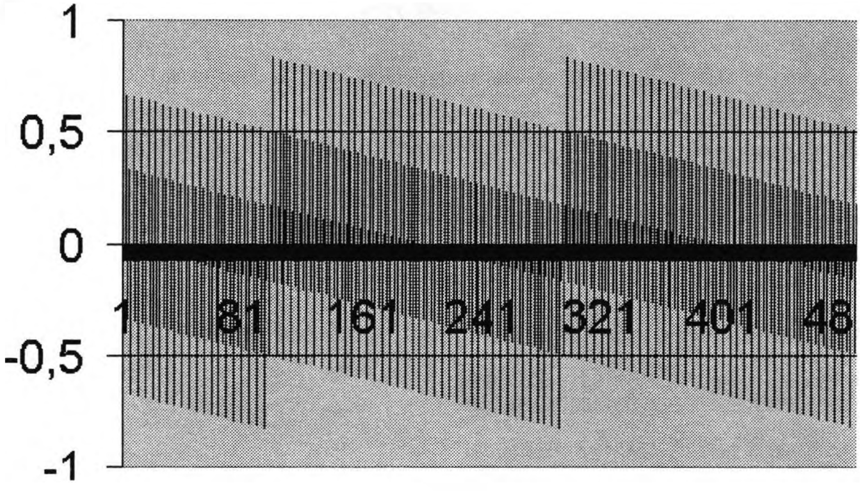


Imagen 2

La función beneficio-pérdida que surge (en pesetas) al principio, sucesión para ser más exactos, considerando las columnas A y E es:

f(x) = {[redondear(x/166,386;2)]· 166,386}-x $\forall x \in N$

El Tipo de sintaxis utilizado corresponde a la de la hoja de cálculo.
Posteriormente se comprueba que el periodo es 83193 en lugar de 166386 como pensaba al principio.

Tras observar que, en principio, cada cinco valores había una repetición del proceso beneficio-pérdida (tres beneficiaban al banco y dos al cliente, después se irán alternando), decido segmentar la función inicial en otras cinco haciendo uso de cantidades múltiplas de 5 más 0,1,2,3 y 4 unidades respectivamente y representándolas gráficamente, imagen 3, las funciones resultantes fueron:

g(x) = {[redondear(5x /166,386;2)]· 166,386}- 5x $\forall x \in N$
h(x) = {[redondear((5x+1)/166,386;2)]· 166,386}-(5x+1) $\forall x \in N$
i(x) = {[redondear((5x+2)/166,386;2)]· 166,386}-(5x+2) $\forall x \in N$
j(x) = {[redondear((5x+3)/166,386;2)]· 166,386}-(5x+3) $\forall x \in N$
k(x) = {[redondear((5x+4)/166,386;2)]· 166,386}-(5x+4) $\forall x \in N$

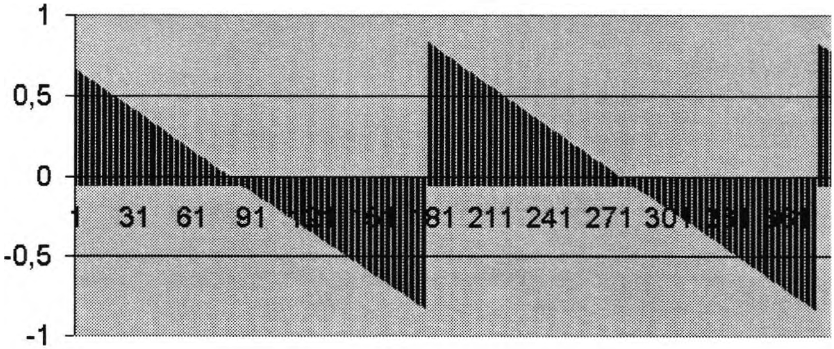


Imagen 3, representación de h(x).

- Estudio previo de la función usando la hoja de cálculo y las gráficas.

-Cualitativamente.

El proceso fenomenológico de repetición en la función, f(x), aparece cada 990 pesetas en principio y de vez en cuando cada 985.

Estudiando por separado las funciones múltiplas de 5 más...., el proceso tiene lugar cada 198 pesetas y de vez en cuando cada 193.

La descomposición factorial de 166386 es 2x3x11x2521.

En principio no he podido encontrar ninguna relación numérica entre estos valores , el comportamiento de la función y el periodo.

- Búsqueda de valores máximos y mínimos en la columna F beneficio o pérdida:

Máximos:

78154 Pta a Eur ---> 0,83192 Pta beneficio
161347 Pta a Eur ---> 0,83192 Pta beneficio

Mínimos:

5039 Pta a Eur ---> -0,83192 Pta pérdida
88232 Pta a Eur ---> -0,83192 Pta pérdida

El observar estos valores me hace pensar que la función puede tener un periodo que sea la mitad de 166386, posteriormente compruebo que sí es cierto.

- Dominio: N al no ser un dominio real varios de los conceptos estudiados y el vocabulario utilizado no se pueden usar científicamente pero sí para que se entienda.
- Recorrido: [-0,83192 , 0,83192]
- Periodo: T = 83193
- Puntos de corte con el eje X: $X_0 = 0 + 83193k \quad \forall k \in N$
- Asíntotas: No tiene.
- Crecimiento: Observando las gráficas se aprecia que "decrece" en esos "intervalos fenomenológicos" con saltos desde un "mínimo relativo" hasta un "máximo relativo".

- Otros datos.
- Cambios favorables al cliente: 83192
- Cambios favorables al banco: 83192
- Cambios con resultado cero: 2
- Resultado de la sumatoria de la columna beneficio-pérdida: -0,000000359 pta

CONCLUSIONES

Queda comprobado que no se beneficia ni perjudica nadie, según la probabilidad.

Hay varias formas legales (en teoría, que se pueda llevar a la práctica es otra cuestión) de aprovechar el cliente los cambios frente al banco:

Cambio de pesetas a euros:
- Usando transferencias de una en una peseta:

1peseta ----> 1 céntimo de euro
(solución al problema de la XV Olimpiada Matemática THALES)

Cambio de euros a pesetas:
- Usando transferencias de céntimo en céntimo:

1 céntimo de euro ----> 2 pesetas

Al efectuar el primer tipo de transferencia (o en metálico) obtenemos un 66,386% de beneficio y al efectuar el segundo tipo de transferencia, el beneficio acumulado es el 100%, la cuestión es averiguar si se puede reiterar el proceso de alguna forma.

Transferencias a través de internet:
- Buscando el "máximo relativo" que aparece después de la cantidad mínima para este tipo de transferencias, realizando un bucle para que se realicen de forma indefinida desde la cuenta en pesetas a la cuenta en euros.
- De forma análoga en la cuenta en euros debe de transferirse a la cuenta en pesetas.

Quizás, al realizar estos tipos de transferencias a través de internet, no se den cuenta los bancos, o para cuando se den cuenta, podríamos tener una buena suma en ambas cuentas.

BIBLIOGRAFÍA

La bibliografía existente sobre el euro no me ha servido para realizar el trabajo, ya que no he encontrado información que me sirviese para éste, sí para otras cosas, por este motivo no cito ninguna; a lo sumo, el único dato que he utilizado es el famoso 166,386.

DIFICULTADES EN LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS DE INFERENCIA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

ANTONIO J. MORENO VERDEJO · ANGUSTIAS VALLECILLOS JIMÉNEZ

INTRODUCCIÓN

Cuando alumnos se inician en el desarrollo del pensamiento probabilístico e inferencial muchos de ellos, y no necesariamente los peores, presentan errores de concepción y de interpretación, sesgos y tendencias emocionales. Las causas de estas disfunciones las encontramos en las dificultades lingüísticas, la falta de herramientas lógicas, las dificultades para extraer la estructura matemática de las experiencias y la dificultad para comprender el concepto de azar.

Algunas de las dificultades están relacionadas con conceptos o procedimientos básicos para el pensamiento probabilístico como el número racional y el razonamiento proporcional. Otras con la enseñanza de la materia como el énfasis de los currículos en los aspectos deterministas y la formalización excesiva.

El interés en detectar los errores y dificultades y en conocer los obstáculos de aprendizaje de cada uno de los conceptos e inferencia estadística se centra en su potencial como organizador del tema o unidad didáctica (Rico, 1997).

DIFICULTADES, OBSTÁCULOS Y ERRORES

Para estructurar el análisis de las dificultades en el aprendizaje de la inferencia estadística seguiremos la propuesta de Socas(1997): dificultades asociadas a la complejidad de los conceptos, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento inferencial, dificultades asociadas a los procesos de enseñanza, dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia la estadística y dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los conceptos

Cuando los estudiantes se inician en el aprendizaje de la inferencia estadística en secundaria se encuentran con dificultades asociadas a conceptos más generales como el de probabilidad y el de suceso compuesto y simple.

La utilización del lenguaje habitual para comunicar los objetos matemáticos obstaculiza su aprendizaje. Unas veces distintas personas atribuyen grados diferentes de probabilidad a expresiones de incertidumbre. Es el caso de los términos "cierto", "posible" e "imposible".

En otras ocasiones el sentido cotidiano del término es más limitado que el matemático. Por ejemplo, el término *población*. Lavoie y Caille (1986) distinguen entre el concepto de población en sentido usual, es decir, conjunto de individuos o de objetos sobre el que realizamos el estudio y el concepto de población en el sentido que se utiliza en Probabilidad y Estadística. Este último lo han estructurado en distintos subniveles determinados por los procedimientos de construcción del concepto.

La comprensión de la naturaleza de las afirmaciones estadísticas supone alcanzar un equilibrio entre dos ideas, la representatividad de la muestra y la variabilidad de ésta. La representatividad de la muestra es la idea de que una muestra tomada de una población tendrá a menudo características similares a la población de origen. La variabilidad de la muestra es la idea de que las muestras de una población simple no son todas la misma así que no igualan a la población (Rubin et al.,1990).

Rubin, Bruce y Tenney (1990) encontraron que los estudiantes investigados, al construir una distribución muestral, estaban influenciados por la idea de la representatividad de la muestra. Subestimaron la frecuencia de las muestras cerca de la cola de la distribución y sobrestimaron la frecuencia de la muestra modal, incluso cuando fueron conscientes del número de categorías entre las que tenían que distribuir las muestras. En unas situaciones las respuestas están guiadas por la representatividad mientras que en otras el concepto de variabilidad muestral es más fuerte. El tamaño de la muestra no parece operar apropiadamente para separar las dos ideas. En definitiva, los estudiantes tenían modelos inconsistentes de la relación entre muestras y población incluso en problemas donde los modelos matemáticos que subyacen son distribuciones binomiales. Una parte de estos resultados se ven refrendados en el trabajo de Moreno y Vallecillos (1998).

Schuyten (1991) ha señalado como un problema relacionado con el muestreo, los diferentes niveles de concreción de un mismo concepto en Estadística descriptiva e Inferencia. Por ejemplo, es esencial distinguir entre la media teórica en la población (que es una constante desconocida), la media particular obtenida en nuestra muestra, los posibles valores de las diferentes medias que se obtendrían en las diferentes muestras aleatorias de tamaño n (que es una variable aleatoria) y la media teórica de esta variable aleatoria, que coincide con la media de la población en el muestreo aleatorio.

2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento inferencial

En los procesos de pensamiento inferencial básico es esencial identificar la estructura matemática subyacente en un experimento. Pues bien, los sujetos encuentran dificultades al abstraer estructuras matemáticas idénticas de diferentes experimentos. Por ejemplo, la probabilidad de obtener (5, 5, 5) lanzando un dado tres veces o arrojando simultáneamente tres dados (Fischbein et al., 1991).

Los estudiantes no siempre son capaces de sintetizar lo necesario de lo aleatorio en el concepto de probabilidad. La idea de que un resultado estocástico depende sólo del azar, con independencia de cuales sean las condiciones dadas, hace luego cualquier predicción infundada.

Distintos trabajos han puesto de manifiesto que el tamaño de la muestra no se tiene en cuenta para realizar inferencias. Incluso cuando el tamaño de la muestra es más pequeño, la heurística de la representatividad aparece con más fuerza como factor determinante de la inferencia (Rubin, 1990; Pollatsek et al., 1984). De este modo, se estima la probabilidad de obtención de una muestra por el parecido de ésta con la población de la que proviene o se considera que la población sobre la que se infiere tendrá las mismas características que la muestra obtenida.

En determinadas situaciones, sin embargo, la información aportada por el tamaño de la muestra se utiliza apropiadamente. Well et al. (1990) señalan que responden especialmente bien aquellas cuestiones en las que se les pregunta por cual de dos muestras estima de manera más precisa alguna característica de la población.

La identificación correcta del espacio muestral se presenta como un factor importante en la evaluación probabilística de los sucesos. Fischbein et al (1991) constató la dificultad que para estudiantes entre 9 y 14 años suponía responder correctamente a la pregunta siguiente:

> *Lucas y Pablo juegan con un par de dados. Si la suma de los puntos es 3, Lucas es el ganador. Si la suma de los puntos es 11, Pablo es el ganador. ¿Cuál de las siguientes respuestas parece ser la correcta? ¿Por qué?*
>
> *Lucas es el favorito.*
>
> *Pablo es el favorito.*
>
> *Lucas y Pablo tienen la misma oportunidad.*

El estudio desarrollado por Pollatsek y cols. (1984) evidencia que los estadísticos expertos emplean como modelo del proceso de muestreo aleatorio la extracción de bolas de una urna. En este modelo, el muestreo aleatorio se considera isomorfo al proceso de extracción con reemplazamiento de bolas de una urna, lo que implica la comprensión de la idea de independencia de ensayos repetidos. El empleo de la heurística de la representatividad incluso en muestras pequeñas se justificaría entonces por el empleo de modelos inadecuados para el proceso de muestreo o incluso la ausencia de un modelo.

c) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

La Estadística se ha ido desarrollando como respuesta a problemas de distintas disciplinas. Los conceptos sin embargo, se presentan aislados de las aplicaciones originales. Pero cada una de estas aplicaciones aporta una parte del significado global de los mismos (Steimbring, 1990. Citado en Batanero et al. (1994)).

Rubin et al. (1990) afirma que cuando en clase de matemáticas se pone el énfasis en la respuesta correcta y se subraya que las matemáticas suponen precisión y falta de error se converge con la tendencia de los estudiantes a creer en la representatividad muestral. De este modo, se produce en los estudiantes una concepción en la cual la muestra representativa es la única que se obtiene si se muestrea correctamente.

Por otro lado, tradicionalmente los currículos han enfatizado los aspectos deterministas de la ciencia. Por ejemplo, el estudio deductivo de la Geometría a partir de los axiomas (Shaughnessy, 1981). Esto forma en el alumno un sistema de creencias que dificulta la reflexión sobre cuestiones en las que interviene el azar y la incertidumbre.

d) Dificultades asociadas a las creencias y actitudes

Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, bloquean a los alumnos repercutiendo en su aprendizaje.

La educación estadística envuelve creencias referentes a las matemáticas, creencias sobre lo que debería ser una clase de estadística, creencias sobre las capacidades propias como alumno de matemáticas o estadística y creencias sobre la utilidad de la estadística.

En ocasiones, los alumnos han desarrollado un rechazo hacia la probabilidad y la estadística porque han comenzado su enseñanza de manera abstracta y formal (Batanero et al, 1994).

e) Dificultades asociadas a los procesos de aprendizaje de los alumnos

El diseño de unidades didácticas por parte del profesorado se vería facilitado con información sobre los estadios generales del desarrollo intelectual del alumno. La existencia de numerosas teorías al respecto nos lleva a no indicar aquí ninguna de ellas y remitir al lector a Díaz et al. (1989) donde se discuten los enfoques de Fischbein y Piaget relativos a la enseñanza de la probabilidad y la estadística.

Junto al estudio del desarrollo cognitivo del alumno, el diseño del material de enseñanza de la inferencia estadística debe tener en cuenta los aspectos que tratamos a continuación.

Investigaciones recogidas por Garfield y Ahlgren (1988) sugieren que un factor relacionado con juicios probabilísticos erróneos es la percepción equivocada de la cuestión que se pregunta. Si se pregunta cuál es la probabilidad de que una mujer particularmente atractiva y elegante sea modelo, la respuesta típica[1] de los alumnos es de 70%. Asignaban la misma probabilidad a que fuese actriz o distribuidora de cosméticos. No tienen en cuenta que la suma de probabilidades debe ser 1. Lo que los estudiantes están aparentemente estimando es la probabilidad de que una modelo (o una actriz o una distribuidora de cosméticos) sea atractiva y elegante. La consecuencia para la educación es la necesidad de prestar mucha atención a la forma en que se presentan las cuestiones.

Los ideas de los estudiantes acerca de Probabilidad y de Estadística son, en ocasiones, contrarias a la teoría aceptada. "La existencia de estas ideas fuertemente arraigadas pueden explicar en parte por qué el aprendizaje de la probabilidad y la estadística es especialmente problemático" (Konold, 1995). Este autor resume tres conclusiones que tienen implicaciones importantes para la evaluación de las comprensiones intuitivas de los estudiantes: a) los alumnos llevan a clase intuiciones básicamente incorrectas que se encuentran muy arraigadas; b) estas intuiciones son difíciles de cambiar; y c) alterarlas es complicado por el hecho de que un estudiante lleva arraigadas múltiples y a menudo contradictorias creencias sobre una situación particular.

Agradecimientos: Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación PB97-0827 de la Dirección General de Enseñanza Superior, MEC, Madrid.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C.; Godino, J.D.; Vallecillos, A.; Green, D.R.; Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, v. 25*, n. 4. Pág. 527-547.

Díaz, J., Batanero, C., Cañizares, M.J. (1987). *Azar y probabilidad.* Síntesis. Madrid.

Fischbein, E.; Sainati, M.; Sciolis, M. (1991). Factors affecting Probabilistics Judgements in Children and Adolescents. *Educational Studies in Mathematics* 22: 523-549.

Garfield, J.; Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for research in mathematics Education, v. 19, n.1*, pág. 44-63.

Lavoie, R.; Caillé, A. (1986). La compréhension du concept de population: une étude exploratoire. *Ann. Sc. Math. Québec, v.10* n.1, pág. 27-49.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (1998). El muestreo en la enseñanza secundaria. En F. Muñoz, Cárdenas, D y López, A. (Eds.): *Actas de las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales"*, (pp. 249-254). Jaén: S.A.E.M. "Thales.

Pollatsek, A., Konold, C., Well, A. Lima, S. (1984). Beliefs underlying random sampling. *Memory and Cognition, 12*, pp 295-401.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo. En: L. Rico (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Horsori. Barcelona.

Rubin, A.; Bruce, B.; Tenney, Y. (1990). Learning about Sampling: Trouble at the Core of Statistics. *Proceedings of the Third International Conference on Teaching of Statistics.* Pág. 314-319.

Schuyten, G. (1991). Statistical Thinking In Psychology and Education. *Actas de la ICOTS III.* University of otago, Dunedin (Australia). 486-490.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en secundaria. En: L. Rico (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Horsori. Barcelona.

Steinbring, H. (1990). The nature of stochastical knowledge and the traditional mathematics curriculum-some experience with in-servicetraining and developing material. In: A. Hawkins (ed.): *Training teachers to teach statistics.* 2-19.

Well, A.; Pollatsek, A.; Boyce, S. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational behavior and human decision processes, 47*, pág. 289-312.

[1] Beyth-Marom, R. y Dekel, S. (1983). A curriculum to improve thinking under uncertainty. *Instructional Science*, 12, 67-82. Citado en Garfield y Ahlgren (1988).

CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS EN LA NOCIÓN DE DERIVADA. ANÁLISIS DE UN MANUAL DE 2º DE BACHILLERATO-LOGSE

ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE · LORENZO LUQUE CAÑADA · LOURDES ORDÓÑEZ CAÑADA
MANUELA ORTEGA CARPIO · CARMEN SÁNCHEZ GÓMEZ

RESUMEN

La noción de derivada es uno de los conceptos, junto a los de límite, continuidad e integral, más importantes del Cálculo Infinitesimal. Desde su creación, asociada a Fermat, Newton y Leibniz, han sido numerosas las vías de desarrollo del Análisis Matemático que esta noción ha hecho posible. Sin embargo, la experiencia nos dice que su enseñanza, tanto en la Educación Secundaria como en la Universidad, es un camino plagado de dificultades cuyo resultado se plasma en el fuerte fracaso escolar que observamos en su evaluación. En este trabajo, basado en dos Proyectos de Investigación, para acercarnos a lo que Chevallard denomina "saber escolar", se analiza el concepto de derivada en un manual de 2º del Bachillerato-Logse desde la perspectiva de las concepciones y obstáculos presentes en el mismo, siguiendo fundamentalmente un marco teórico inspirado básicamente en las ideas de Sierpinska (1997).

INTRODUCCIÓN

El Análisis Matemático ha tenido un tratamiento tradicional asociado al estudio de la derivación e integración como procesos inversos desde el punto de vista simbólico. De esta forma consideramos que quedan camuflados los significados propios del Cálculo, es decir los métodos y concepciones ligadas al razonamiento de procesos infinitos.

La época griega marcó un hito en la historia de la humanidad -cuya culminación puede observarse en los Elementos de Euclides, en las obras de Apolonio y, sobre todo, en la de Arquímides- en cuanto al desarrollo de la Matemática como ciencia. Sin embargo, la idea de infinito actual, cuyo desarrollo les hubiera conducido a los métodos de razonamiento ligados a la idea de límite, nunca llegaron a abordarla, utilizando métodos de reducción al absurdo como "sustitutivos" de ese tipo de razonamiento. Hubo que esperar a Fermat, Newton y Leibniz para que la idea de variación tomara un estatuto de objeto de conocimiento, comenzándose con los rudimentos del Cálculo Infinitesimal.

Son las ideas relacionadas con las razones de cambio instantáneo las que conducen a los métodos propios del Análisis Matemático, aunque por desgracia, en la enseñanza elemental del Cálculo se da un fenómeno de deslizamiento didáctico por el que al estudiante se le desvía hacia la algebrización del cálculo diferencial escolar (ver Gascón, 1998), olvidándose que se trata de una matemática del cambio y no de una ampliación de métodos algebraicos.

En este trabajo, extraído de uno más amplio correspondiente a un Proyecto de Investigación (Contreras, Luque, Ordóñez, Ortega y Sánchez, 1998) se analizan las posibles razones del por qué de ese deslizamiento. Para ello se utiliza la teoría de los obstáculos epistemológicos de Sierpinska (1997), mediante la que se analizan los obstáculos, inherentes a la noción de derivada, inducidos por los manuales escolares.

CONCEPCIONES Y OBSTÁCULOS DE LA NOCIÓN DE DERIVADA

Siguiendo las ideas de Grabinet (1983), se pueden distinguir varias etapas en el desarrollo histórico de la derivada que se pueden identificar con sendas concepciones sobre el concepto.

Se diferencian cinco etapas en el desarrollo del concepto de derivada:

a) Problemas que conducen a la derivada.
b) La derivada como útil.
c) La derivada como objeto de conocimiento.
d) Exploración y desarrollo.
e) Definición de la derivada.

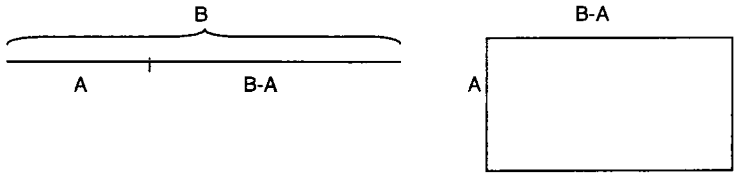
a) Antes de 1600, los matemáticos se dedican casi enteramente al dominio geométrico, siguiendo la tradición de Euclides reforzada por Apolonio y Arquímedes. La noción de tangente ligada a la herencia griega es, salvo rarísima excepción, de naturaleza estática. La tangente toca a la curva sin atravesarla y se supone que lo más frecuente es que corte a la curva en un solo punto

En 1591, Vieta realiza pasos decisivos en la dirección de un Álgebra simbólica (o cálculo literal) que va a conducir esta disciplina hacia su independencia con la Geometría.

b) La independencia del Álgebra se hace más general (se admite, por ejemplo, x^4) y sobre todo más eficaz. Hacia 1635, Fermat y Descartes inventan independientemente la Geometría Analítica.

La derivada se utiliza de manera implícita. No tiene relación con la noción de límite. Fermat descubre un método para determinar máximos y mínimos. Ilustra esto por medio de un problema cuya solución era conocida lo que permite "probar" que el método es bueno. Este importante paso es accesible a nuestros alumnos.

El segmento de longitud B se divide en dos segmentos. Esto permite construir un rectángulo cuya área se desea maximizar A (B - A) = AB - A^2.



Fermat había leído en Pappus de Alejandría que un problema que tiene en general dos soluciones (nosotros diremos cuadrático) tendrá una única solución en el caso de un máximo. Se sirve de este principio como sigue. Supongamos que el problema tuviera una segunda solución. Se podría designar una parte de B por A+E (cuidado, he aquí un "crecimiento") y la segunda por

$$B - (A + E) = B - A - E$$

El producto de la dos partes es

$$AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$$

Aplicando el principio de Pappus, Fermat deduce lo que llama una pseudo-igualdad:

$$AB - A^2 = AB - A^2 - 2AE + BE - E^2$$

por tanto,

$$2AE + E^2 = BE$$

Y simplificando E se obtiene

$$2A + E = B$$

Sin preámbulo, ni justificación, decide entonces suprimir E. Se obtiene A = B/2, lo que es una "buena respuesta".

Fermat no habla de infinitamente pequeños o del paso al límite. No explica cómo se puede primeramente manipular E como si $E \neq 0$ y todo sigue después como si E = 0. Su método: suma de E, cálculo algebraico, supresión de E, le permite encontrar tangentes y las aplica con éxito en óptica.

Basado en la vía abierta, Hudde obtiene en 1659 una ley general ligadas a los extremos de una función polinómica a la anulación de lo que se denominará polinomio derivado.

Descartes no le gustó nunca el método de Fermat. Él elaboró una investigación sobre las tangentes sobre base logarítmica (raíces confundidas o dobles).

Esto no impidió que Fermat, Wallis, Sluse, Hudde, Huygens y Barrow (entre otros) encontraran tangentes a la curva de ecuación y = f(x) manipulando para que la pendiente de una secante fuera

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Ilustremos el método para $y = ax^2+bx+c$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2axh + ah^2 + bh}{h} = 2ax + ah + b$$

Para h=0, se obtiene que la pendiente de la tangente en el punto (x, f(x)) es 2ax+b.

Hacia 1660, estas manipulaciones y relaciones entre extremos y tangentes no estaban definidas de manera satisfactoria y el enlace con las cuestiones de áreas no se comprendía. Las relaciones con la mecánica no se habían impuesto aún. La concepción que se deriva es la CDG, geométrica.

Asociado a esta concepción aparece el denominado O_t obstáculo tangencial.

c) Newton y Leibniz sintetizan los métodos comunes para encontrar las tangentes, extremos y áreas, con la ayuda de dos conceptos generales llamados actualmente *derivada e integral.* Elaboraron una notación que permitía el uso caso automático de estos conceptos.

La concepción que se extrae es la CDRC, de razón de cambio.

Asociado a esta concepción aparece el denominado O_p obstáculo de la pendiente fija (epistemológico (ver D'Alembert, 1759, divulgado en Gaud, 1998), dar la pendiente y la tangente, el alumno no verá el cambio continuo de la pendiente)

d) Lagrange crea el concepto de función derivada, con el término "derivada". Se preocupa por el estatus lógico de la derivada (hacia 1770). En 1797, estima que el hecho de que el concepto de límite de Newton no esté suficientemente claro puede ser el fundamento de una rama de las Matemáticas. Prepara la concepción numerica de Cauchy.

e) Cauchy define la derivada por

$$\lim_{h \to o} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esta propiedad había aparecido ya con Lagrange. Cauchy domina, por fin, la noción de límite, apareciendo la CDN, concepción numérica.

Asociado a esta concepción tenemos el O_f obstáculo funcional, cuyo carácter puede observarse por medio del ejemplo siguiente:

Considerar que la función es derivable si la función derivada es continua.

f (x)= x^2 si x<1

2x si x≥1

Es discontinua en x=1.

F'(x) = 2x, si x<1

2 si x>1 f'(1)=2.

Los últimos "detalles" analíticos los pone a punto Weierstrass. Se trata de la concepción métrico analítica CDMA.

Análisis De Un Manual

En este trabajo se ha analizado un manual de 2º de Bachillerato, que es el más utilizado en los Centros Públicos de Jaén. Su uso representa el 31%, aproximadamente, respecto al total de libros empleados. En la tabla adjunta aparecen las concepciones sobre la derivada, así como los obstáculos epistemológicos y didácticos asociados al concepto.

CONCEPCIONES		OBSTÁCULOS	
CDRC	Concepción de razón de cambio instantáneo, asociada históricamente a la idea de fluxión de Newton	O_p	Obstáculo de la pendiente que es epistemológico, al considerar diversas secantes que tienden hacia la tangente, no se hace explícito el cambio continuo de la pendiente
CDG	Concepción geométrica, asociada históricamente a la idea de pendiente de la tangente por Fermat	O_t	Obstáculo tangencial que es epistemológico, asociado históricamente a la idea de tangente a las cónicas (Apolonio)
CDN	Concepción numérica, asociada históricamente a la idea de límite de Cauchy	O_x	Los propios del límite
CDAL	Concepción algebraica, asociada a uso de los métodos algebraicos en el concepto de derivada	O_{al}	Obstáculo didáctico, asociado la uso abusivo de los métodos algebraicos que enmascaran los procesos de razonamiento infinito

Discusión De Los Resultados

Como puede observarse en la tabla, son numerosos los obstáculos a los que se enfrenta el lector al estudiar el manual. Debe resaltarse la circunstancia de que uno de los obstáculos epistemológicos más importantes desde el punto de vista didáctico, por su facilidad de conducir al error al estudiante, el denominado O_f , obstáculo funcional, que consiste en considerar derivable una función que no es continua por el hecho de que la función derivada sea continua, no es tratado en el manual, únicamente aparecen ejercicios al final del capítulo sin resolver.

Quedaría por hacer el estudio más fino de los actos de comprensión a los que induce el manual, pero en principio no se han encontrado.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

CONTRERAS, A., LUQUE, L., ORDÓÑEZ, L., ORTEGA, M. y SÁNCHEZ, C.: 1998, Proyecto de Investigación: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-logse y de primer curso universitario", Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE) del M.E.C.

GASCÓN, J.: 1998, 'Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica', Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 18, nº 1, pp. 7-34.

GAUD, D. y cols.: 1998, "Des tangentes aux infiniment petits. Reflexions & travaux pour la classe", IREM Poitiers.

GRABINET, J.: 1983, The changing concept of change: the derivation from Fermat to Weierstrass,

SIERPINSKA, A.: 1997, La compréhension en mathématiques, in Boeck & Larcier, s.a. (ed.), París, Bruxelles.

NOTA:

Este trabajo se ha realizado dentro del marco de los Proyectos:

- Proyecto: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del Análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes de Bachillerato-LOGSE y de primer curso univesitario.", concedido al autor por el Centro de Investigaciones y Documentación Educativa (C.I.D.E.), según concurso nacional (Orden de 23 de septiembre de 1997 (BOE de 10 de octubre de 1997) y Orden de 7 de julio de 1998 (BOE de 16 de septiembre de 1998)).

- Proyecto PB97-0851: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentales en Educación Secundaria y Universidad.", concedido al autor por la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo (S.E.U.I.D.) (I+D), según concurso nacional (Resolución de 5 de noviembre de 1997 (BOE de 15 de noviembre de 1997)).

GRUPO 4
MATEMÁTICAS EN UNIVERSIDAD

UN ALGORITMO EN MATEMÁTICA PARA LA REGRESIÓN LINEAL SIMPLE UNIFORME

J. JÓDAR · A. J. LÓPEZ · J. MARTÍNEZ · J. NAVAS · J. Mª. QUESADA

En este trabajo ofrecemos un algoritmo programado con el software Mathematica, basado en el teorema de la alternancia del signo, de Tchebycheff, para encontrar la recta de regresión lineal simple, cuando los errores se distribuyen según una distribución uniforme.

1.- INTRODUCCIÓN.

Un problema muy frecuente en las Ciencias Sociales y Experimentales es encontrar una función $y = \varphi(x)$ que aproxime a un conjunto de datos

$$\Omega = \{(x_1, y_i) / i = 1,2,\ldots,n\}$$

Usualmente, la función φ es de la forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi_j$$

donde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{r}$, son funciones linealmente independientes en $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. La técnica utilizada generalmente es la de mínimos cuadrados. El teorema de Gauss-Markov establece que si los residuos

$$u_i = y_i - \varphi(x_i), i = 1,2,\ldots,n$$

están distribuidos según una ley normal, la solución obtenida por este método es el **mejor estimador lineal insesgado**. Sin embargo, en el caso de pérdida de normalidad de los residuos esta solución no es la más apropiada. En [2] se prueba que si los residuos $\{u_i\}_{i=1}^{n}$, siguen una distribución exponencial de orden p

$$\rho(z) = \frac{1}{\sigma\Gamma(1+\frac{1}{p})2^{1+\frac{1}{p}}}.\exp(-\frac{1}{2}|\frac{z-\mu}{\sigma}|^p);$$

con $1 \le p < \infty$, entonces el estimador de máxima verosimilitud para Ω se obtiene minimizando

$$\Psi_p(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi_j(x_i) \right|^p \qquad (1)$$

Asimismo, si los residuos siguen una distribución uniforme, el mejor estimador minimiza

$$\Psi_0(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = \max_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \varphi_j(x_i) \right| \qquad (2)$$

La resolución del problema de optimización (2) es en general complicado ya que la norma uniforme no es diferenciable. En [4] se ofrece un método basado en el Algoritmo de Pólya que da solución parcial a la situación planteada. En nuestro trabajo, presentamos una estrategia diferente para encontrar la solución óptima de (2).

2 CONSTRUCCIÓN DEL ALGORITMO.

El algoritmo que proponemos, es un método reiterativo del tipo ascendente, [2], y está basado en el teorema de alternación del signo de Chebycheff.

Teorema 1 Un polinomio $p_n(x)$ de grado a lo sumo n es un mejor aproximante de grado a lo sumo n de f(x) en [a , b] si y solo si $f(x)-p_n(x)$ toma los valores $\| f(x)-p_n(x) \|$ con cambios alternados de signos al menos (n+2) veces en [a , b].

Se inicia con la introducción de los datos

```
Clear[i,j,k,X,Y,recta,Datos,Puntos,t]
        Puntos=Sort[Table[{x[i],y[i]},{i,1,100}];
        X[k_]:=Puntos[[k,1]];Y[k_]:=Puntos[[k,2]]
```

u_1=-0.256448	u_2=-0.478398	u_3=-0.539923	u_4=-0.660038	u_5=0.813901
-0.155381	-0.39864	-0.0642952	0.302764	0.00618191
0.310188	0.0510902	-0.251514	0.1484	-0.372454
0.0173023	0.610889	-0.381841	0.631266	0.0555077
-0.0117716	0.45829	-0.949634	0.29694	-0.890416
-0.541321	0.505383	0.33495	-0.0500984	-0.900061
-0.178774	0.505959	0.643362	0.448547	0.781966
-0.670681	-0.904773	0.267713	0.633127	0.853187
0.946354	0.752741	-0.420763	0.0640748	-0.326337
-0.961879	0.270462	-0.384678	0.73074	-0.568501
0.271919	0.602076	-0.505238	0.624151	-0.98272
-0.514325	0.339575	-0.470142	0.795477	-0.995795
-0.582433	-0.448869	-0.0989962	-0.984717	0.916415
0.838659	0.82668	0.996714	-0.318476	-0.769063
0.412722	-0.687361	0.190016	0.954873	0.410942
0.398117	0.509522	0.133067	0.627455	0.775128
-0.988201	0.519774	0.0427841	0.516105	-0.548174
-0.123693	0.65633	0.778538	-0.862575	-0.664277
-0.610531	0.404501	0.157398	0.759129	0.0896296
u_{97}=-0.912869	u_{96}=-0.252296	u_{98}=-0.747946	u_{99}=0.759158	u_{100}=0.111774

Tabla I

Los X_i se ordenan de tal manera que si i > j entonces $X_i \geq X_j$. Dados los puntos,

$$P_i = (X_i, Y_i), P_j = (X_j, Y_j), P_k = (X_k, Y_k), \qquad i < j < k$$

construimos el polinomio de grado 1 cuyo error en estos puntos cambia 3 veces de forma alternativa de signo. Este polinomio coincide con la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos P_iP_j y P_jP_k.

```
Recta[i_,j_,k_,t_]=1/2*(Y[i]+Y[j]+
        (Y[k]-Y[i])/(X[k]-X[i])*(2t-X[i]-X[j]));
```

si el error anterior es mayor a los obtenidos en el resto de los puntos, entonces esta recta es la solución buscada. En caso contrario se repite el proceso, sustituyendo el punto $P_q = (X_q, Y_q)$ donde se alcanza el máximo error, por uno de los tres anteriores, de tal forma que se siga manteniendo la alternancia de los signos.

x_1=42.4477	x_2=47.696	x_3=40.1221	x_4=420622	x_5=42.5416
43.5245	41.8794	41.913	44.9404	45.6102
47.3088	47.5751	42.14	42.9644	40.7042
44.1701	47.0814	43.706	42.3804	44.4092
43.9347	43,3893	40.524	46.8421	49.9811
49.6613	44.734	42.3687	44.6483	41.5173
43.6996	44.3316	49.7867	46.0147	43.2096
44.6335	41.4633	41.0581	40.4572	40.8676
46.675	44.5051	40.8321	40.4999	48.936
46.8419	47.9598	47.8674	45.0725	45.0901
41.2099	47.4275	48.2092	44.2266	43.783
42.045	42.9956	45.4491	44.6109	47.4278
40.0074	47.6398	47.2546	43.3057	48.4767
40.4214	45.3605	42.1198	45.0158	49.4917
45.7935	41.4165	41.8617	43.952	44.1498
42.7819	40.673	44.406	49.5769	43.843
48.294	46.8065	47.211	42.0237	43.4941
46.5968	40.1966	42.671	49.4858	44.0489
46.8194	44.4598	41.5661	46.5159	43.3634
49.9646	40.0688	45.9699	49.4448	44.2317

Tabla II

```
 Terna={1,3,5};
While[True,
Label[Otro];
          i=Terna[[1]];j=Terna[[2]];k=Terna[[3]];
Errores=Table[Abs[Recta[i,j,k,X[m]][m]],
{m,1,100}];
E1=Recta[i,j,k,X[i]]-Y[i];
ErrorMaximo=Max[Errores];
Print[Terna," Distancia= ",N[Abs[E1]], " Error= ",
N[ErrorMaximo]];
If[Abs[ErrorMaximo-Abs[E1]]<=10^(-10),
Print[N[Expand[Recta[i,j,k,t]]]];Goto[Fin]];
q=First[Position[Errores,ErrorMaximo]][[1]];
E4=Recta[i,j,k,X[q]]-Y[q];
If[Sign[E4]==Sign[E1] & & q>j, Terna={i,j,q};
Goto[Otro]];
If[Sign[E4]==Sign[E1] & & q<j, Terna={q,j,k};
Goto[Otro]];
If[Sign[E4]!=Sign[E1] & & q<i, Terna={q,i,j};
Goto[Otro]];
If[Sign[E4]!=Sign[E1] & & i<q<k, Terna={i,q,k};
Goto[Otro]];
          If[Sign[E4]!=Sign[E1] & & q>k, Terna={j,k,q};
Goto[Otro]];
];Label[Fin]
```

3 SIMULACIÓN NUMÉRICA.

Si $(x_j(i), y(i))$ con $1 \leq j \leq r$ son n observaciones, siendo y la variable dependiente y las x_j las variables dependientes; sabemos que un modelo de regresión lineal simple viene dado por

$$y(i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1(i) + u(i), 1 \leq i \leq n$$

Empezamos generando 100 números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo [-1,1], que serán los valores de los residuos u(i) que aparecen en la tabla I.

A continuación construimos la variable dependiente x(i), generando aleatoriamente 100 números según una distribución uniforme en [40, 50], cuyo resultado se muestra en la tabla II. Por último, elaboramos el modelo de regresión lineal simple

$$y(i) = 8 + 3x(i) + u(i), \quad 1 \le i \le 100$$

Si ajustamos los datos utilizando el programa STATGRAPHICS Plus versión 3.1. de Statistical Graphics Corporation se obtiene el modelo lineal :

$$y(i) = 8.88943 + 2.98062x(i)$$

Puede comprobarse que el ajuste que se ha realizado ha sido utilizando el método de los mínimos cuadrados.
Si ahora procedemos a ejecutar el algoritmo que hemos propuesto obtenemos como resultado:

$$y(i) = 8.77569 + 2.99731x(i)$$

4 Bibliografía.

Agró, G. (1992), Maximum likelihood and l_p norm estimadors. Statistica Applicata. **4**. N 2, 171-182.

Alvarez de Mercado, Mª. A.; Barreras, D.; y otros. (1998), Matemáticas para Económicas y Empresariales con Mathematica., ed: Proyecto Sur.

Egger, A. (1990), Maximum likelihood and best approximations. Rocky Mountain J. of Mathem. **20**. N 1, 117-122.

Marano, M.; Navas, J. (1995), The linear discrete Pólya algorithm. Appl. Math. Letter. **8**. N 6, 25-28.

Navas, J.; Quesada, J. M. (1999), Estimadores de máxima verosimilitud y mejores aproximantes, Actas de las VI Jornadas de Matemática Aplicada y Estadística, Zaragoza-Pau. Jaca, septiembre, 1999 (por aparecer).

UN MÉTODO ALTERNATIVO PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL SPLINE CÚBICO

JOAQUÍN JÓDAR REYES · ANTONIO JESÚS LÓPEZ MORENO · JUAN NAVAS UREÑA
JUAN MARTÍNEZ MORENO · JOSÉ MARÍA QUESADA TERUEL

RESUMEN:

El método de construcción de splines cúbicos, que usualmente aparece en los textos de Cálculo Numérico, conlleva la resolución previa de un sistema tridiagonal de ecuaciones. Nosotros presentamos un método alternativo para dicha construcción, que simplifica los cálculos.

1. INTRODUCCIÓN.

Por lo general, la interpolación polinomial no es la más adecuada cuando el número de datos de interpolación de que disponemos es excesivamente grande. Esto es debido al hecho de que debemos de considerar polinomios de grado también muy grande. Este inconveniente se subsana si utilizamos, como método alternativo, funciones splines, como funciones interpolantes.

Un spline es una función polinómica a trozos. Un spline se dice de grado *m* si cada uno de los polinomios tienen grado menor o igual que *m*. Más concretamente diremos que una función *s* es un spline (cúbico) en el intervalo [*a*,*b*], si existe una partición del intervalo
$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$

de tal forma que *s* es un polinomio (cúbico) en $[x_i, x_{i+1}]$, i=0,...,*n*-1. Notaremos por $S_m^k(\Delta)$ al conjunto de funciones splines de grado *m* y clase *k*, es decir,

$S_m^k(\Delta) = \{s \in C^k[a,b] : s/[x_i, x_{i+1}] \in \Pi_m\}$,
donde Π_m denota los polinomios de grado m.
Este conjunto es, en realidad, un espacio vectorial con dimensión *n*(*m*+1)-(*n*-1)(*k*+1). Nuestro objetivo será encontrar un spline $s \in S_3^2(\Delta)$ tal que

$s(x_i) = f(x_i)$, i=0,...,*n*.

Para construir dicho spline necesitamos calcular 4*n* coeficientes. Desde la definición de spline y las condiciones buscadas obtenemos 4*n*-2 ecuaciones. Como el número de ecuaciones debe coincidir con el número de incógnitas, necesitamos imponer dos condiciones adicionales. La forma más habitual de imponerlas es la siguiente:

- Spline cúbico sujeto: *s'(a)=f'(a), s'(b)=f'(b).*

- Spline cúbico natural: *s'(a)= s'(b)=0.*

2. CONSTRUCCIÓN DE SPLINES CÚBICOS.

Aquí presentamos un nuevo método de construcción de splines cúbicos. Notaremos por $s_i(x)$ a la restricción del spline *s* al intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ y escribimos

$$s_i(x) = f(x_i) + a_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i)^3$$

Si resolvemos el sistema

$$\begin{cases} s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}) \\ s'_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1}) \end{cases}$$

llegamos a la siguiente relación de recurrencia entre los coeficientes:

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{+1i} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & h_i \\ \frac{3}{h_i} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} + 3\frac{\Delta f_i}{h_i^2}\begin{pmatrix} h_i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

donde

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad i = 0,\dots,n-1.$$

Además se obtiene la expresión

$$c_i = \frac{f(x_{i+1}) - s_{i-1}(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)^3} \quad , \ i=1,2,\dots n-1$$

o bien

$$c_i = -\frac{a_i}{h_i^2} - \frac{b_i}{h_i} + \frac{\Delta f_i}{h_i^3}$$

Como ya dijimos en la introducción necesitamos unas condiciones adicionales para determinar el spline. Estas condiciones adicionales se traducen en las siguientes, dependiendo de los casos anteriormente mencionados.

- Spline cúbico sujeto: $a_0 = f'(a)$ y $a_{n+1} = f'(b)$.
- Spline cúbico natural: $a_0 = 0$ y $b_{n+1} = 0$.

Estas condiciones, junto con (1), nos permitirán construir el spline cúbico deseado, en cada caso. Pasaremos ahora utilizar dicho método en el cálculo de un ejemplo concreto de spline cúbico natural.

3. EJEMPLO.

Calculemos el spline cúbico natural en el intervalo [0,15] para los datos de interpolación siguientes:

x_i	$f(x_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	0	11	2.0
3	1.2	12	1.8
5	1.7	13	1.2
7	2.0	14	1.0
9	2.1	15	1.6

Aplicando (1) junto con $b_0 = 0$, obtenemos

$$b_9 = 33989.2 - 77113a_0$$

Al imponer la condición $b_9 = 0$ queda $a_0 = 0.440771$. Por tanto, el polinomio de arranque será:

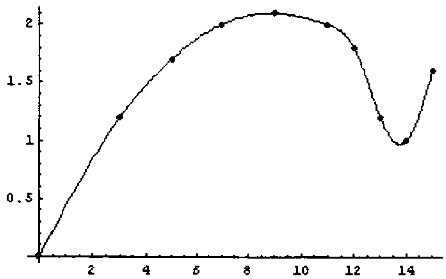
$s_0(x) = 0 + 0.44701x + c_0 x^3$

El coeficiente c_0 se calcula imponiendo que $s_0(3) = 1.2$.

La siguiente tabla nos muestra todos los valores de todos los coeficientes:

i	a_i	b_i	c_i
0	0.440771	0	-0.00453015
1	0.318457	-0.0407713	0.00327134
2	0.194628	-0.0211433	-0.000585342
3	0.103031	-0.0246554	-0.000929966
4	-0.00675048	-0.0302352	0.00430521
5	-0.0760287	-0.00440393	-0.119567
6	-0.443539	-0.363106	0.206645
7	-0.549817	0.256828	0.0929882
8	0.242805	0.535793	-0.178598
9	0.778598	0	

El spline obtenido se visualiza gráficamente como sigue:



4. Bibliografía.

[1] E. Tyrtyshnikov. A brief introduction to Numerical Analysis. Ed. Birkhäuser.

[2] J.M. Quesada Teruel, F. Molina Alba y F.T Sánchez Cóbo. Matemáticas II para Ingeniería Técnica Industrial. Editado por los autores.

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS: EL MODELO PRESA / DEPREDADOR

J. JÓDAR · A. J. LÓPEZ · J. MARTÍNEZ · J. NAVAS · J. Mª. QUESADA

En este trabajo analizamos un determinado modelo ecológico, el conocido con el nombre presa - depredador, ideado por el profesor Vito Volterra. El análisis lo realizamos desde dos puntos de vista diferentes. En primer lugar, utilizamos un algoritmo numérico programado con Mathematica de Wolfram research Inc. En segundo lugar, abordamos el modelo usando como metodología, los Sistemas Dinámicos. Ejecutamos diferentes simulaciones por ordenador utilizando para ello como programa informático, The Ventana Similation Environment (Vensim. PLE), de ventana Systems Inc.

1.- INTRODUCCIÓN.

Sabemos que existe una competición constante por la supervivencia entre las diferentes especies animales que habitan un mismo entorno, un tipo de animales (depredadores) sobreviven alimentándose de otros (presas). El modelo con ecuación diferencial más simple, que representa esta situación, recibe el nombre de sus creadores: Lotka - Volterra (1926). Es muy elemental, pero puede ser muy útil como punto de partida para abordar modelos más complicados, como son los de Nicholson y Bailey (1935), basados en ecuaciones en diferencias, los modelos gráficos de Rosenzweíg y Mackrthur (1963) o los propuestos por J. Aracil y M. Toro (1993), modificando el modelo de Henize (1971).

Representemos por *p(t)* al número de presas en el tiempo *t* y *q(t)* al número de depredadores. El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$p'(t) = \frac{dp(t)}{dt} = ap(t) - bp(t)q(t) \quad ; \quad q'(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -cq(t) + ep(t)q(t)$$

describe la interacción entre presas – depredadores, y es bastante exacto cuando las especies viven en ecosistemas aislados.

2.- UN MODELO DE INTERACCIÓN PRESA-DEPREDADOR.

A continuación nos centraremos en el siguiente modelo:

$$p'(t) = p(t)(1-0.005q(t)) \quad ; \quad q'(t) = q(t)(0.005p(t)-1) \qquad (1)$$

Desgraciadamente la resolución explícita de (1) no puede hacerse, pero en muchas ocasiones solo interesa saber su comportamiento a largo plazo, y esto puede deducirse de su análisis cualititativo.

2.1.- MÉTODO DE RUNGE – KUTTA DE CUARTO ORDEN.

La resolución numérica del sistema (1) lo haremos programando el método de Runge - Kutta con el software Mathematica de Wolfram Research Inc.

```
Clear["Global`*"]
f[n ,p ,q ]:= p - 0.005p*q
g[n, p, q]:= - q + 0.005p*q
   duracion=40;
   presa={220};
   depredador={250};
   n=200;
   h=duracion/n;
      punto=Table[i h,{i,0,n}];
      For[i=2,i<=n+1,i++,
         k1=f[punto[[i-1]],presa[[i-1]],depredador[[i-1]]];
         L1=g[punto[[i-1]],presa[[i-1]],depredador[[i-1]]];
```

```
          k2=f[punto[[i-1]]+h/2,presa[[i-1]]+(h/2)k1,
   depredador[[i-1]]+(h/2)L1];
          L2=g[punto[[i-1]]+h/2,presa[[i-1]]+(h/2)k1,
   depredador[[i-1]]+(h/2)L1];
          k3=f[punto[[i-1]]+h/2,presa[[i-1]]+(h/2)k2,
  depredador[[i-1]]+(h/2)L2];
          L3=g[punto[[i-1]]+h/2,presa[[i-1]]+(h/2)k2,
  depredador[[i-1]]+(h/2)L2];
          k4=f[punto[[i-1]]+h,presa[[i-1]]+h k3,
  depredador[[i-1]]+h L3];
          L4=g[punto[[i-1]]+h,presa[[i-1]]+h k3,
 depredador[[i-1]]+h L3];
AppendTo[presa,presa[[i-1]]+(h/6)(k1+2 k2+2 k3+k4)];
AppendTo[depredador, depredador[[i-1]]+(h/6)(L1+2 L2+2 L3+L4)]; ];

ListPlot[Table[{punto[[i]],presa[[i]]},{i,n+1}],
    PlotStyle->RGBColor[1,0,0]];
```

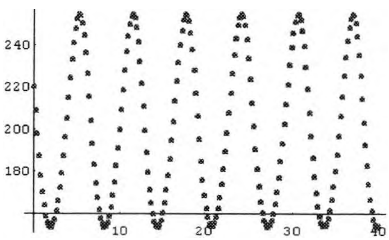


Figura 1.- Evolución de las presas.

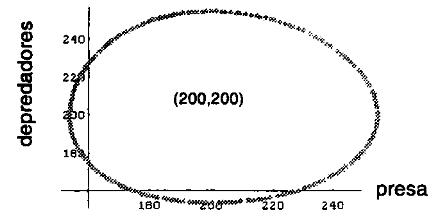


Figura 2.- Plano

Podemos apreciar que con un valor inicial de *220*, el número de presas a lo largo del tiempo se comporta de forma cíclica. De la misma manera puede verse un resultado similar para los depredadores. En la figura 2 hemos representado conjuntamente las poblaciones de presas y depredadores (Plano Fase).

```
ListPlot[Table[{presa[[i]],depredador[[i]]},
             {i,n+1}],PlotStyle->RGBColor[0,1,0]
```

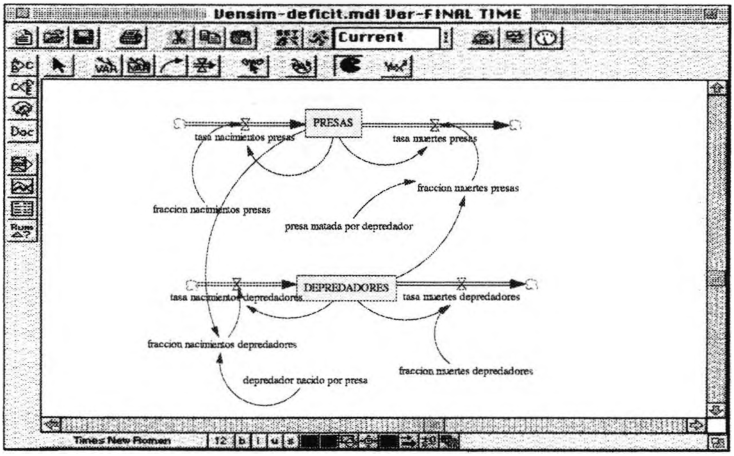
Observamos que las órbitas son curvas cerradas, en cuyo centro se encuentra el punto que corresponde a la solución de equilibrio (200,200), donde las poblaciones pueden mantenerse indefinidamente en esos valores.

2.1.- SISTEMAS DINÁMICOS.

Un sistema dinámico es, según una definición poco rigurosa, aquel sistema en el que su estado cambia con el tiempo. Un sistema ecológico es dinámico, mientras que el decimal no lo es. La Dinámica de Sistemas es una metodología para ayudar al proceso de modelado, elaborada en 1969 por el profesor J.W. Forrester en su libro *"Los límites del crecimiento"*.

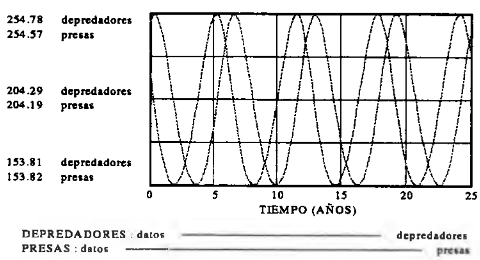
Las etapas para la construcción de esta clase de modelos son las siguientes:

- *Construcción del Diagrama Causal.* En una primera fase debemos detectar cuales son los elementos esenciales de la situación que queremos modelar y ver de qué manera están relacionados.
- *Construcción del Diagrama de Forrester.* En este diagrama se muestra los elementos del Diagrama Causal, pero clasificados en niveles, flujos y variables.
- *Simulación por ordenador.* Tomando como punto de partida el Diagrama de Forrester, se escriben las ecuaciones, se programan con un solftware de simulación (en nuestro caso Vemsim PLE), y se procesan en el ordenador para observar el comportamiento del sistema. Repetimos diferentes simulaciones con distintos valores iniciales.



ECUACIONES DEL MODELO:

DEPREDADORES (t) = DEPREDADORES (t-dt) + (tasa nacimientos depredadores – tasa muertes depredadores).
Valor inicial = 250.
Unidades: depredadores.
INFLOWS:
tasa nacimientos depredadores = DEPREDADORES * fraccion nacimientos depredadores.
Unidades: depredadores/año.
OUTFLOWS:
tasa muertes depredadores = DEPREDADORES * fraccion muertes depredadores
Unidades: depredadores/año.
PRESAS (t) = PRESAS (t-dt) + (tasa nacimientos presas – tasa muertes presas).
Valor inicial = 220.
Unidades: presas.
INFLOWS:
tasa nacimientos presas = PRESAS * fraccion nacimientos presas
Unidades: presas /año.
OUTFLOWS:
tasa muertes presas = fraccion muertes presas*PRESAS
Unidades: presas/año.
fraccion nacimientos presas = 1
Unidades = 1/año
fraccion muertes presas = DEPREDADORES * presa matada por depredador
Unidades =1/año
presa capturada por depredador = 0.005
Unidades = 1/(año*depredadores)
fraccion muertes depredadores = 1
Unidades = 1/año
fraccion nacimientos depredadores = depredador nacido por presa*PRESAS
Unidades = 1/año
depredador nacido por presa =0.005
Unidades = 1/(año*presas)



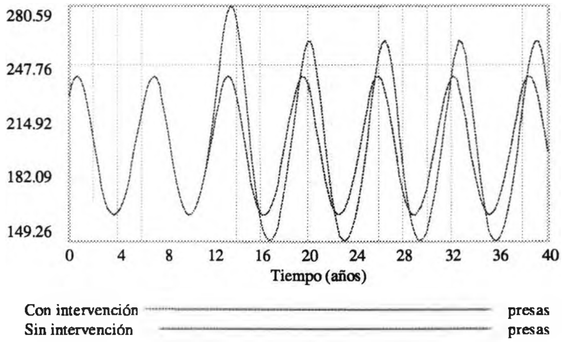
Ambas poblaciones en nuestro modelo oscilan con un periodo aproximado de 6 años. El periodo en ambas debe ser el mismo, ya que el comportamiento de las presas depende directamente del de los depredadores y viceversa.

La simulación por ordenador permite visualizar distintos comportamientos y propiedades del modelo. Por ejemplo, podemos poner de manifiesto el *principio de Volterra,* esto es, que el uso de insecticidas en realidad incrementa la población de aquellos insectos que son mantenidos bajo control, por otros insectos depredadores. Usamos la siguiente instrucción para eliminar un porcentaje de depredadores durante un periodo de tiempo:

OUTFLOWS:
tasa muertes depredadores = IF THEN ELSE(Time<15:AND:Time>11 ,DEPREDADORES * fraccion muertes depredadores +DEPREDADORES*0.1, DEPREDADORES * fraccion muertes depredadores)
Unidades: depredadores/año.

El resultado es que en un momento decrece la población de depredadores seguido de un incremento de la población de presas.

La figura siguiente muestra que rociar los cultivos con insecticidas puede tener consecuencias indeseables. En un primer momento, fumigar tiene el efecto de disminuir la población de insectos y aumentar el rendimiento del campo. Un poco tiempo después, la población de insectos será mayor que nunca.



3.- BIBLIOGRAFÍA

ARACIL, J. " Introducción a la dinámica de sistemas". Alianza Universidad. (1992).
ARACIL, J.; TORO, M. "Métodos cualitativos en dinámica de sistemas". Universidad de Sevilla. (1993).
BRAUN, M. " *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones* ". Grupo Editorial Iberoamérica . México. 1990.
FORRESTER, J. W. "Urban Dynamics". Waltham, MA, Pegasus Communications. (1969).
WHELAN, J. G.. Modeling Exercises. MIT System Dynamics Education Project. Massachusetts Institute of Tecnology. (1994).

CONCEPCIONES SOBRE LA TANGENTE EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

ÁNGEL CONTRERAS DE LA FUENTE · LORENZO LUQUE CAÑADA · LOURDES ORDÓÑEZ CAÑADA
MANUELA ORTEGA CARPIO · CARMEN SÁNCHEZ GÓMEZ

RESUMEN

Cuando se aborda la enseñanza de la interpretación gráfica de la derivada en un punto, es frecuente tomar una postura transparente (ingenua) en cuanto al concepto de tangente de la función en el punto considerado, al dar por sabida la noción en los estudiantes. Sin embargo, la influencia de las concepciones previas de los alumnos, asociadas a la tangente a un círculo en un punto, pueden crear numerosas interferencias conceptuales. En este trabajo, basado en dos Proyectos de Investigación (Contreras y cols., 1998), siguiendo las ideas de Castela (1995) se ha elaborado un cuestionario sobre la tangente y se ha aplicado a un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de C. Empresariales de la Universidad de Jaén. Los resultados del estudio es el objeto de esta Ponencia.

INTRODUCCIÓN

Es frecuente observar en los manuales cómo la noción de derivada en un punto tiene, cuyo apoyo gráfico es la pendiente de la tangente en dicho punto, se considera la idea de tangente carente de todo conflicto didáctico, dándose por obvio que el lector interpreta fácilmente que la tangente es el "límite" de las secantes en el punto. Sin embargo, la noción de tangente es problemática en sí misma, observándose en el aula de Bachillerato y en el primer curso de estudios universitarios unas concepciones erróneas ligadas a las propias ideas previas que los alumnos traen de educación primaria acerca de la tangente al círculo en un punto.

Así, la noción de la tangente, desde el punto de vista gráfico, evoluciona en los alumnos según distintas concepciones. En los cursos de primaria, la tangente aparece ligada al círculo, según tres definiciones que marcan las ideas previas de los alumnos:

1) Una recta es tangente al círculo si es perpendicular en un punto A del círculo de radio OA, siendo O el centro.

2) Una recta es tangente al círculo si tiene con él un solo punto común.

3) La tangente en A es la única recta que pasando por A no atraviesa al círculo.

Al resaltar el hecho de la existencia de un único punto de intersección se induce una concepción global y no local. Es decir, contrariamente a las apariencias del dibujo, recta y curva no se confunden del todo.

Para curvas cualesquiera, la tangente aparece en los libros bajo una interpretación geométrica y puede recibir tres definiciones diferentes:

- Límite de secantes.
- Recta que pasa por A, de coeficiente director la derivada en el punto.
- La representación gráfica de la función afín tangente en A.

En los manuales aparecen las dos primeras, nunca la tercera, cuando es la más propicia a una traducción en términos de imágenes mentales. Mientras que de la primera, ya Sierpinska (1985) vio las dificultades para los alumnos a la hora de dar sentido a la noción de límite de secantes. En cuanto a la segunda, no permite una caracterización interna en el marco gráfico.

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LA TANGENTE

En el trabajo citado, Castela (1995), se definen varios perfiles en cuanto a las concepciones de los alumnos respecto al concepto de tangente.

- Concepción "Intersección Global".

Esta concepción nace directamente por generalización del punto de vista de la "intersección" de la tangente en el círculo. El criterio que rige la tangente es global, ignorando toda condición relevante desde el punto de vista del Análisis. Únicamente interviene la posición relativa de la curva y la recta

- Concepción "Intersección Local".

Se trata de una adaptación de la concepción precedente ya que es el criterio de tangencia que evoluciona por localización; está aún influenciado por el punto de vista de la intersección, pero considerado sobre un entorno del punto.

- Concepción "Intersección global y Análisis".

Esta concepción asocia una condición local del punto de vista del Análisis a una condición global relacionada con la posición relativa de la curva y la recta.

- Concepción "Intersección local y Análisis".

Está muy próxima a la que llamaremos la concepción del Análisis. Es una concepción que adopta un carácter completamente local, que tiene en cuenta la lógica de la aproximación local de una curva por otra.

- Concepción "Análisis" que corresponde a la contestación correcta.

MUESTRA Y CUESTIONARIO

A fin de tener datos sobre la no transparencia del concepto de tangente en un punto en estudiantes universitarios, en el curso 1999-2000 se aplicó a 26 alumnos de primer curso de la Diplomatura de Empresariales de la Universidad de Jaén una prueba sobre la noción citada.

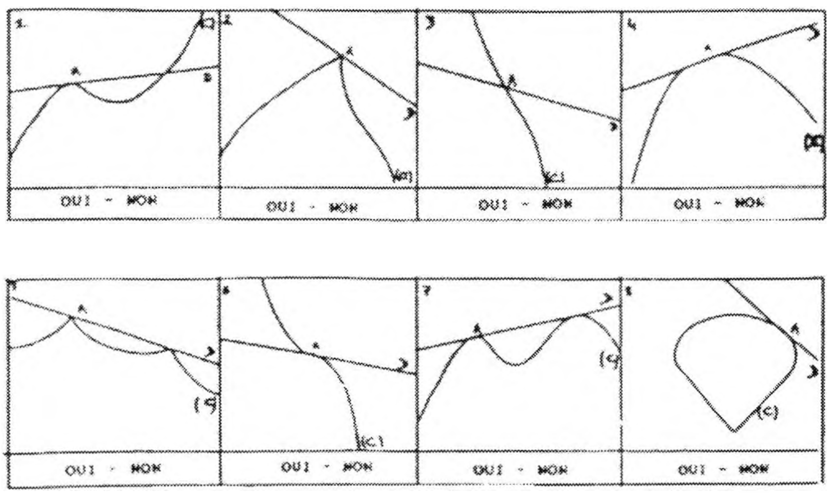
Para la formulación del cuestionario, se tendrán en cuenta tres puntos de vista sobre la tangente en el círculo:

- El punto de vista del Análisis que reagrupa las tres definiciones equivalentes introducidas por el cálculo diferencial; la tangente está caracterizada como la recta que mejor aproxima la curva localmente; contrariamente a las otras dos, no se aborda explícitamente en el colegio.
- El punto de vista de la intersección reúne las características ligadas a número de puntos de intersección y a la posición relativa; es global, ignora toda idea de aproximación de una curva por otra.
- El punto de vista de la perpendicular al radio, que hace intervenir las nociones de perpendicularidad, centro y radio, que no son extensibles a otras curvas.

El cuestionario consta de los 8 ejercicios que aparecen en la figura adjunta. En cada uno de ellos se pide al estudiante que conteste si o no al hecho de la tangencia de la recta D a la curva C en el punto A. Además, en todos los casos se solicita que expresen las razones por las que se da una determinada respuesta, buscando obtener información adicional que permita corroborar el perfil de la contestación.

PARA CADA UNA DE LAS 8 GRÁFICAS SIGUIENTES:

1. Decir si la recta D es tangente a la curva C en A.
2. Justificar la respuesta.



RESULTADOS

Primeramente efectuaremos la codificación de las respuestas de los estudiantes. La codificación se ha realizado siguiendo las pautas siguientes:

Se considera la concepción "intersección global", para las respuestas que toman una de las cuatro formas siguientes:

C y D son tangentes en A si pasan por A y si:

1. C no atraviesa D. (NSNSSNSS)
2. C no se confunde con D. (NSNNSNSS)
3. C no atraviesa D y A es su único punto común. (NSNNNNNS)
4. C y D tienen un único punto común. (NSSNNSNS)

Para la concepción "intersección local", se tendría, por ejemplo, que C y D son tangentes en A si, sobre un cierto entorno de A, C no atraviesa D y A es su único punto común. (SSNNSNSS)

En el tercer caso de "intersección global y Análisis", los ejemplos más frecuentes son: C y D son tangentes en A si tienen la misma dirección y si C no atraviesa D, ni en A, ni en otros puntos (NNNSNNSS). Incluso C puede atravesar D. (NNNSNSSS)

En el último caso, de "Análisis", algunos de los ejemplos son: (SNNSNNSS; SNNNNNSS; SNNNNSSS)

Los resultados de las respuestas de los alumnos aparecen en la tabla siguiente:

CONCEPCIONES	NÚMERO DE RESPUESTAS
Análisis	1 (3,8%)
Intersección local y Análisis	0
Intersección global y Análisis	0
Intersección local	12 (46,15%)
Intersección global	3 (11,53%)
Atípicas	6 (23,08%)
Blanco	4 (15,38%)
TOTAL	26

DISCUSIÓN Y CONSECUENCIAS

Se observa que un alto porcentaje de estudiantes, el 46,15%, tienen una concepción sobre la tangente de una recta a una curva que es de carácter "local", que está influenciada por la idea previa de los alumnos -en cuanto a la tangente de una recta al círculo- pero de modo local, de aquí las respuestas del tipo SSNSSNSS que responden a la idea siguiente: "C y D son tangentes en A si pasan por A y si existe un entorno de A sobre el que C no atraviesa a D" (de los 12 casos, a esta idea le corresponden 6). Hay otros variantes similares como son: "C y D son tangentes en A si pasan por A y si existe un entorno de A sobre el que C no atraviesa a D y además no tiene un punto común con D", que es el caso SSNNSNSS y se han visto dos casos; o bien: "C y D son tangentes en A si pasan por A y existe un entorno de A sobre el que A es el único punto común", otros dos casos.

Un pequeño porcentaje, del 11,53%, manifiesta una concepción "global" de la tangente, la cual corresponde a aquellos estudiantes que tienen una idea muy arraigada, es decir un obstáculo asociado a la tangente de una recta al círculo. En los tres casos, la idea de estos alumnos es muy clara: "C y D son tangentes en A si pasan por A que es su único punto común", que va asociada a las respuestas del tipo: NSNNSSSS, NSNNNSNS, o, por último, NNSSNSNS.

Hay un único caso de concepción correcta, del "Análisis", que representa sólo el 3,8%.

Se han observado también seis casos atípicos, un 23%, que no responden a ningún tipo de perfil. Es decir, no es posible incluir sus respuestas en ninguno de los modelos teóricos utilizados. Son las respuestas como la SSSSNNNN, que sólo se explica como contestación realizada sin criterio alguno. De todas formas, dado el estimable porcentaje de respuestas de este tipo sería conveniente realizar entrevistas con los estudiantes buscando encontrar posibles explicaciones.

Como podemos ver, únicamente hay un caso donde el alumno responde a un perfil acorde con los métodos propios del Cálculo Infinitesimal y como estos estudiantes están en primer curso universitario, la consecuencia inmediata que se extrae es que es muy posible que estén abocados a un fracaso escolar en la asignatura de Análisis Matemático.

Estos resultados vienen a confirmar el fenómeno didáctico ya señalado de la algebrización del Cálculo (Gascón, 1998). Es decir, en general, un estimable porcentaje de los estudiantes que ingresan en la Universidad tienen una preparación, respecto a los conceptos del Cálculo, asociados a métodos algebraicos y algorítmicos, pero alejados de los procesos de razonamiento de carácter infinito propios del Análisis Matemático.

BIBLIOGRAFÍA

CASTELA, C.: 1995, 'Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 15, nº 1, pp. 7-47.

CONTRERAS, A., LUQUE, L., ORDÓÑEZ, L., ORTEGA, M. y SÁNCHEZ, C.: 1998, Proyecto de Investigación: "*Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes del bachillerato-logse y de primer curso universitario*", Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE) del M.E.C.

GASCÓN, J.: 1998, 'Evolución de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18, nº 1, pp. 7-34.

SIERPINSKA, A.: 1985, 'Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 6, nº 1, pp. 5-67.

NOTA:

Este trabajo se ha realizado dentro del marco de los Proyectos:

- Proyecto: "Estudio sobre la enseñanza-aprendizaje de conceptos fundamentales del Análisis matemático (límite, continuidad, derivada e integral) en manuales y en estudiantes de Bachillerato-LOGSE y de primer curso univesitario.", concedido al autor por el Centro de Investigaciones y Documentación Educativa (C.I.D.E.), según concurso nacional (Orden de 23 de septiembre de 1997 (BOE de 10 de octubre de 1997) y Orden de 7 de julio de 1998 (BOE de 16 de septiembre de 1998)).

- Proyecto PB97-0851: "Fenómenos didácticos ligados a la adquisición de conceptos matemáticos fundamentales en Educación Secundaria y Universidad.", concedido al autor por la Secretaría de Estado de Universidades, Investigación y Desarrollo (S.E.U.I.D.) (I+D), según concurso nacional (Resolución de 5 de noviembre de 1997 (BOE de 15 de noviembre de 1997)).

ENTORNO INTERACTIVO DE PRÁCTICAS PARA DOCENCIA UNIVERSITARIA

JOAQUÍN JÓDAR REYES · ANTONIO JESÚS LÓPEZ MORENO · JUAN NAVAS UREÑA
JUAN MARTÍNEZ MORENO · JOSÉ MARÍA QUESADA TERUEL

RESUMEN

En este trabajo presentamos un aplicación desarrollada con el entorno de programación matemática: Matemática 4 de Wolfram Research. Dicha aplicación está orientada a la docencia en titulaciones universitarias de ciencias experimentales.

1. INTRODUCCIÓN. CONSIDERACIONES PRELIMINARES Y DESCRIPCIÓN INICIAL DE LA APLICACIÓN.

A lo largo de los últimos años se ha introducido en la docencia universitaria el uso de sistemas informáticos. Fundamentalmente su aplicación se ha centrado en la parte práctica de las distintas asignaturas. Los nuevos planes de estudio que se han implantado ya en la mayoría de las universidades españolas determinan para gran parte de las asignaturas una importante carga de créditos de prácticas. Si a ello unimos que los créditos de las materias de matemáticas se han reducido considerablemente nos encontramos con que las horas dedicadas al desarrollo de la teoría son preocupantemente escasas. Ante esta situación es necesario plantear nuevas estrategias que permitan desarrollar los temarios en su totalidad conservando una adecuada calidad de la enseñanza. Para lograr tal objetivo se hace necesaria una exhaustiva planificación de las prácticas y la utilización de materiales didácticos que apoyen tal propósito. A través de la experiencia acumulada a lo largo de varios años en la Universidad de Jaén, hemos podido desarrollar diversas aplicaciones orientadas a solventar problemas de tipo puntual que atañen a una parte concreta del temario o a una determinada técnica para resolución de algún tipo de ejercicios. En este trabajo nos hemos propuesto recopilar todos los materiales elaborados para estos casos concretos con objeto de integrarlos en una herramienta en la que se incorporen soluciones a distintos tipos de problemas y que de este modo alcance a una parte amplia del temario.

El ámbito para el que se desarrolla la aplicación es el de una asignaturas de fundamentos matemáticos de primer ciclo de ciencias experimentales. Son numerosas las titulaciones en las que aparecen asignaturas de fundamentos con los descriptores:
Álgebra
Cálculo
Ecuaciones diferenciales
Métodos Numéricos
Modelos Matemáticos Aplicados.
Así por ejemplo, ya sean agrupadas de forma anual o divididas en dos cuatrimestres, encontramos asignaturas con estas características, generalmente troncales o en cualquier caso obligatorias, en titulaciones como: Lic. en Biología, Lic. en Química, Lic. en Ciencias Ambientales, etc.

A la hora de decidir qué problemas son los más indicados para ser tutorizados mediante el ordenador nos hemos atenido a los siguientes criterios:

- Puesto que hemos de implementar la resolución del problema mediante un lenguaje informático (en este caso el de Matemática 4) hemos de centrarnos en aquellos en los que es posible trazar un esquema mecánico para su tratamiento. Los problemas en los que intervienen razonamientos no sistemáticos o de carácter intuitivo no son adecuados para su programación. Así mismo la resolución repetitiva de varios ejercicios que se ajustan a un mismo modelo de ejecución es indudablemente monótona y no aporta conceptos nuevos. Se trata en definitiva de eliminar de la exposición teórica estas repeticiones trasladándolas al aula de prácticas, frente al ordenador.
- El problema debe involucrar una cantidad suficientemente grande de pasos. Es decir, nos interesan que represente un nivel elevado de complejidad de modo que su resolución no sea trivial ni inmediata.
- Elegiremos problemas que no pueden ser resueltos fácilmente por el software que vamos a utilizar. En general se trata de situaciones en las que representan mayor interés los pasos intermedios que el resultado final y por tanto el hecho de que Mathemática nos proporcione una instrucción que obtenga directamente la solución no nos es de utilidad ya que esto no supone una aproximación en profundidad al ejercicio.

A la vista de los criterios señalados y del ambiente en el que pretendemos trabajar, hemos elegidos los siguientes problemas para ser implementados de forma integrada:

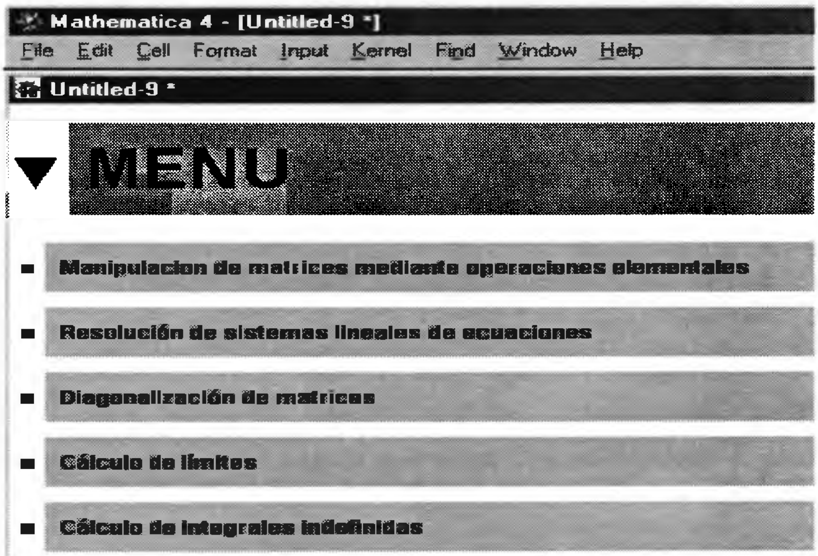
1. Manipulación de matrices empleando operaciones elementales en filas y columnas.
2. Resolución de sistemas empleando el método de Gauss.
3. Diagonalización de matrices.
4. Cálculo de límites.
5. Cálculo de integrales indefinidas.
6. Interpretación geométrica de ecuaciones diferenciales de primer orden. Método de las isoclinas.
7. Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden.
8. Integración de ecuaciones diferenciales de orden superior.
9. Integración de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.
10. Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Evidentemente la lista anterior es susceptible de ser completada pero hemos optado por esta configuración que, pensamos, es suficientemente amplia.

2. DESCRIPCIÓN DE LA APLICACIÓN Y SUS COMPONENTES.

La aplicación la hemos construido en base a una colección Notebooks de Matemática 4 relacionados entre sí para formar una unidad. Desde un menú inicial podemos acceder a los distintos apartados en cada uno de los cuales podremos estudiar un tipo concreto de ejercicios. Dicho menú estará formado por los 9 tipos de problemas que acabamos de detallar en la sección anterior.

Veamos ahora cuales son las funcionalidades que hemos incorporado en cada



uno de estos puntos:

1. Manipulación de matrices empleando operaciones elementales en filas y columnas.

Incluimos aquí una serie de instrucciones que permiten aplicar a una matriz numérica o con parámetros transformaciones elementales de manipulación de filas y columnas. El propósito es proporcionar una herramienta para ejercitarse en las estrategias de manejo de tales operaciones elementales con el objeto del cálculo de rangos de matrices o de matrices inversas. En la práctica este tipo de ejercicios solo se puede abordar para matrices de reducidas dimensiones lo cual dificulta la comprensión de las distintas técnicas en el caso más general. Mediante una paleta de instrucciones se pueden efectuar de manera sencilla operaciones tales como las siguientes:

Paleta de Instrucciones

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3=C_3+C_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & -1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_1=F_1+2F_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3=F_3-3F_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3=_3-2C_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -5\end{pmatrix}$$

2. Resolución de sistemas empleando el método de Gauss.

Incorporamos en esta sección instrucciones que permiten obtener la matriz de un sistema a partir de su expresión algebraica y viceversa. Entonces se podrán emplear las instrucciones del apartado anterior para aplicar el método de Gauss de resolución de sistemas lineales de ecuaciones.

3. *Diagonalización de matrices.*

En esta sección proporcionamos dos herramientas. En primer lugar hemos programado un algoritmo que desarrolla el método de diagonalización de matrices mostrando los pasos intermedios. En segundo lugar un sistema de planteamiento de ejercicios que genera aleatoriamente matrices para las cuales el proceso de diagonalización puede desarrollarse si acudir a cálculos complejos (por ejemplo con valores propios fácilmente calculables a partir de la ecuación característica). Se pretende aquí que el alumno pueda practicar el procedimiento de diagonalización comprobando sus propios resultados con los esquemas de ejecución que ofrece el programa. Al mismo tiempo se le proporciona una fuente inagotable de ejercicios mediante el sistema aleatorio de generación de matrices.

Como ejemplo, si introducimos la matriz:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

el programa trazador de soluciones mostrará la respuesta:

La matriz tiene:

- Ecuación característica: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$.
- Valores propios: $\lambda=0$ (multiplicidad 1).
  $\lambda=1$ (multiplicidad 1).
  $\lambda=2$ (multiplicidad 2).
- Subespacio propio para $\lambda=0$: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

  Vectores propios: {(0,-1,1)}
  Dimensión algebraica $\lambda=0$: 1
  Dimensión geométrica $\lambda=0$: 1

⋮ (para abreviar eliminamos cálculos con $\lambda=1,2$)

- La matriz es diagonalizable con

  Diagonalización$=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y Matriz de paso$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4. *Cálculo de límites.*

Siguiendo el mismo esquema que en el apartado dedicado a diagonalización de matrices, mediante menús o paletas se introducen algoritmos capaces de resolver, paso a paso, los tipos habituales de límites que se estudian en las asignaturas de las que nos ocupamos, y así mismo se añaden también sistemas de generación de ejercicios o bien de forma aleatoria o bien de un tipo concreto.

5. *Cálculo de integrales indefinidas.*

Se sigue aquí un planteamiento análogo al que hacemos para el estudio de diagonalización de matrices y límites: Por un lado un modulo de detección de tipos de integrales y de resolución de ejercicios y por otro un generador aleatorio de problemas. Si, por ejemplo, empleamos el programa para resolver la integral

$$\int x\mathrm{Log}[x]Ÿx$$

el resultado será:

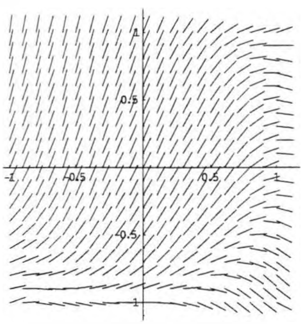
```
Integral a resolver: ∫xLog[x]Ÿx

Método de resolución: Integración por partes.
Tomaremos:  u = Log[x]    u = 1/x
            v = x         v = x²/2 x
Resolución: ∫xLog[x]Ÿx = uv - ∫vŸu =
```

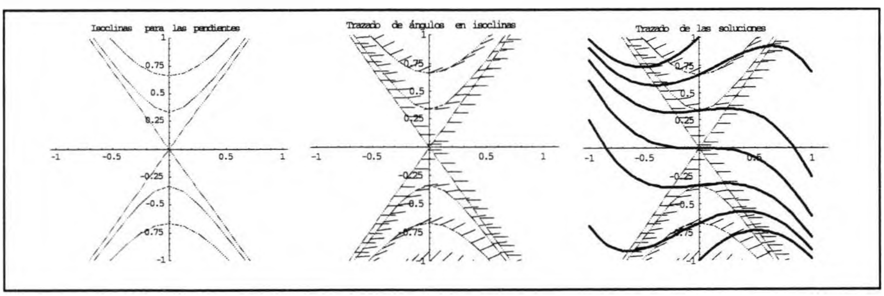
$$= \frac{x^2}{2}\mathrm{Log}[x] - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}Ÿx = \frac{x^2}{2}\mathrm{Log}[x] + \frac{x^2}{4} + C$$

6. *Interpretación geométrica de ecuaciones diferenciales de primer orden. Método de las isoclinas.*

Insertamos en esta sección diversas herramientas que ayudan al alumno a comprender el significado geométrico y físico de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Se refrescan conceptos como pendiente y ángulo de crecimiento de una función en un punto con objeto de desembocar en el tratamiento de la ecuación diferencial como un campo de direcciones. Se suministran también instrucciones para dibujar el campo de direcciones correspondiente a una ecuación diferencial. Finalmente el alumno podrá practicar el método de las isoclinas para el trazado aproximado de las soluciones de la ecuación mediante un programa que en el caso de ecuaciones diferenciales sencillas es capaz de reproducir dicho método por pasos.
Así por ejemplo podremos trazar el campo de direcciones en cierta región de la ecuación diferencial $x' = \cos(2(x^2 + t^2)) + e^{x-t}$ obteniendo:

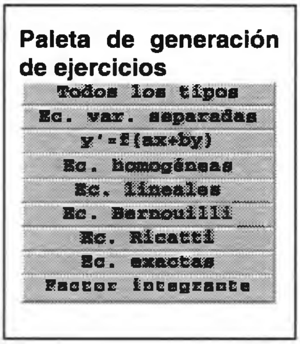


o pedir al programa que desarrolle el método de las isoclinas para la ecuación diferencial $x' = x^2 - 2t^2$, lo cual nos proporcionará la secuencia:



7. *Integración de ecuaciones diferenciales de primer orden.*

En este caso el sistema de resolución de ecuaciones que incluimos es capaz de distinguir y resolver la mayor parte de las ecuaciones diferenciales ordinarias en forma normal que aparecen en un curso de las características que nos conciernen. Entre estos tipo se encuentran: ecuaciones en variables separadas, ecuaciones reducibles a variables separadas, ecuaciones lineales, ecuaciones reducibles a lineales, ecuaciones exactas y ecuaciones resolubles mediante ciertos tipos de factor integrante. Como en los demás apartados el resultado que se proporciona no es la solución final si no el conjunto de pasos necesarios para alcanzar tal solución. El programa de generación de ejercicios que incluimos en esta sección se puede manejar mediante una paleta como la que aquí aparece.



8. *Integración de ecuaciones diferenciales de orden superior.*

En este apartado reproducimos el mismo diagrama que en los anteriores ocupándonos ahora de ecuaciones lineales de orden superior en coeficientes constantes, de Lagrange y de los tipos más habituales de ecuaciones de segundo orden. El sistema de resolución de ejercicios y creación aleatoria de cuestiones se articulan mediante menús y paletas como en los otros puntos.

9. *Integración de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales.*

Aquí empleamos la técnica de reducción a un sistema de orden superior siguiendo la misma fórmula de los apartados anteriores.

10. *Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales.*

En este caso es interesante la obtención de las fórmulas numéricas para ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas. Empleamos los métodos de Euler, Euler mejorado, Taylor y Runge-Kutta. Interesa más la obtención del algoritmo teórico de cada método que el efectivo cálculo numérico para un ejemplo concreto. Por ello, en esta sección, nuestra aplicación incluye un programa capaz de generar los algoritmos de cada método para una ecuación o sistema arbitrarios además de efectuar los cálculos numéricos para cada ejemplo concreto. Ofrecemos también opciones para representar la solución numérica y compararla con la exacta cuando sea posible su cálculo.

3. NOTAS SOBRE LA IMPLEMENTACIÓN.

La elaboración de una aplicación como la que describimos en este trabajo no sería posible si no se contara con un entorno de programación matemática de altas prestaciones. Matemática 4 posee sin duda las características que hacen posible implementaciones de este tipo.

En primer lugar posee un potente lenguaje de programación con herramientas específicas para el tratamiento de expresiones simbólicas. A la hora de reconocer los distintos tipos de ecuaciones diferenciales, integrales, límites, etc., es intensiva la utilización de patrones y reglas de sustitución. En Matemática 4 un patrón es una expresión de tipo genérico a la que pueden ajustarse (o no) expresiones concretas y una regla de sustitución permite alterar segmentos de una formula.

En segundo lugar, Matemática 4 permite crear menús, enlaces entre notebooks y paletas de botones lo cual ha posibilitado que nuestra aplicación tenga carácter interactivo. En lo que se refiere a este punto es necesario señalar que la programación de los elementos mencionados es más complicada de lo que sería deseable cuando se pretende conseguir entornos interactivos de calidad que faciliten el manejo por parte del usuario.

BIBLIOGRAFÍA.

[1] Blachman, Nancy, *"Mathematica: un enfoque práctico".* 1ª ed., Barcelona: Ariel, 1993. ISBN 84-344-0478-8.
[2] Wolfram, Stephen, "Them Matemática Book". Documentación del software Mathematica 4.

UTILIZACIÓN DE LA EVALUACIÓN EN LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD. UNA EXPERIENCIA PRÁCTICA

PEDRO RODRÍGUEZ CIELOS · SIXTO SÁNCHEZ MERINO
YOLANDA PADILLA DOMÍNGUEZ · JOSÉ FCO. MORONES BURGOS

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta comunicación es compartir la experiencia que venimos desarrollando, desde hace siete años, en las asignaturas de Matemáticas de algunas titulaciones de Ingeniería de la Universidad de Málaga. Dicha experiencia está centrada en el tema de la evaluación y supone, básicamente, la introducción de un proceso evaluador que se realiza de forma continua.

La evaluación constituye el elemento más delicado dentro del proceso educativo pues, a través de ella, el educador debe comprobar el grado de aproximación de los alumnos a los objetivos previstos y decidir si se han alcanzado los mismos. Ahora bien, la función de la evaluación no es meramente clasificatoria, sino que ha de servir para extraer información sobre la situación real de los alumnos y los problemas que presentan las técnicas didácticas utilizadas, dando lugar, si es preciso, a una revisión de las mismas e incluso de los propios objetivos. Además, sería aconsejable que esta revisión, en el caso en que fuera necesaria, se pudiese realizar en el transcurso del desarrollo de la asignatura.

Sin embargo, el método más utilizado en las carreras técnicas de las distintas Universidades en España es aquel que se basa únicamente en una prueba escrita final. Esto tiene el gran inconveniente de que aumenta el factor suerte en el resultado y que además no se consigue que la evaluación sea formativa. Normalmente el profesorado justifica este método por el alto número de alumnos existente en el aula. Está claro que esto es un inconveniente real pero no insuperable, como demostraremos más adelante con nuestra experiencia.

2. CONSIDERACIONES PREVIAS

Como se ha comentado anteriormente, dentro del proceso de evaluación y en lo referente a la valoración de la labor del alumno, el ideal viene marcado por la obtención, a lo largo del período docente correspondiente, del mayor número posible de elementos de juicio sobre la asimilación del aprendizaje.

Además de una falta evidente de elementos de juicio para valorar el trabajo realizado por el alumno, este método de evaluación va acompañado de otra serie de deficiencias.

La primera es la escasa asistencia y participación activa del alumnado en clase. Viene provocada porque el alumno sabe que "pase lo que pase en clase", su calificación vendrá marcada únicamente por lo que realice en el examen final. Esto provoca que muchas veces el alumno limite su actuación únicamente a copiar lo que allí se está diciendo.

Otra carencia destacable es la deficiente preparación y visión global de la asignatura por parte del alumno. Habitualmente, el alumno empieza a estudiar cuando quedan pocas semanas para el examen. Esto conlleva que no sea capaz de asimilar los conceptos que se le han presentado a lo largo del desarrollo de la asignatura y que, en consecuencia, no pueda aplicarlos posteriormente cuando le sean necesarios. Este hecho se ve agravado en las asignaturas de Matemáticas. A diferencia de lo que ocurre en otras disciplinas, el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas presenta unas peculiaridades propias de su carácter fundamentador y científico que será necesario considerar. La abstracción de sus conceptos, la precisión en sus definiciones y la rigurosidad en sus razonamientos son tan importantes en la formación del alumno como los propios contenidos de las distintas asignaturas de Matemáticas. Los distintos temas se encadenan para que la materia se desarrolle de manera constructiva y los conceptos se vayan derivando unos de otros. Por todo ello es importante que el alumno sea capaz de asimilar los contenidos de las asignaturas gradualmente, con el fin de alcanzar un grado aceptable de conocimiento y entendimiento.

Por último habría que destacar la escasa asistencia y aprovechamiento de las horas de tutoría individualizada. El alumno suele concentrar las visitas al despacho del profesor en la última semana antes del examen final. Esto da lugar a que no le sirvan de casi nada, ya que en este momento no pueden utilizarse para solventar sus deficiencias.

Los objetivos de nuestra experiencia vinieron marcados por estos hechos que acabamos de comentar.

3. METODOLOGÍA

La primera consideración que se debería hacer sobre la metodología que hemos empleado hace referencia a que es totalmente dinámica, estando en continua revisión y por lo tanto sujeta a modificaciones anuales. Esto se debe a la diferente procedencia de nuestros alumnos, a la distinta realidad de las asignaturas e incluso de las titulaciones en las que se desarrolla y también a la propia necesidad de pequeños ajustes que vinieron marcados, lógicamente, por la experiencia adquirida en los años en los que se ha desarrollado.

Las modificaciones que hemos tenido que realizar a lo largo de estos años vienen señaladas, principalmente, por la opinión de los alumnos. Queda claro que esta opinión es una de las más importantes a tener en cuenta ya que al fin y al cabo se trata de buscar una mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje en beneficio del alumno.

Nuestra técnica se basa en lo que nosotros denominamos *relaciones de ejercicios de clase*. El alumno está "avisado" desde el primer día de clase que estas relaciones se realizarán en cualquier momento, sin previo aviso (incluso en mitad del desarrollo de una clase). La realización de estas relaciones es de carácter optativo y nunca se valora de forma negativa. En ellas se evalúa al alumno sobre los conceptos más importantes desarrollados en clase. El número de relaciones a realizar es también desconocido para los alumnos.

Conviene reparar en la importancia del *carácter sorpresa* de estas relaciones ya que es fundamental para alcanzar los objetivos propuestos. De esta forma se incentiva y se motiva al alumno a llevar al día la asignatura. Si se avisara de su realización, el alumno se limitaría a estudiar unos días antes de cada una de ellas, trasladando todos los problemas y defectos que anteriormente comentábamos sobre el examen final a cada una en particular.

Además, incluso en el caso de no superar la asignatura por esta actividad, se consiguen alumnos motivados, mejor preparados y con una mejor visión de la asignatura ante el examen final. Con ello se alcanza el objetivo de que vayan comprendiendo y asimilando los conceptos de una forma gradual. Asimismo, hemos detectado una presencia mucho mayor y constante en horas de tutoría. Esta asistencia se realiza a lo largo de todo el período docente de la asignatura.

4. SEGUIMIENTO Y EVALUACIÓN

Cuando se plantean unos objetivos y se decide seguir una metodología, se hace necesario efectuar un seguimiento para poder medir el grado de cumplimiento de los mismos. Además, debe servir también para detectar posibles errores e incluso replantearse los objetivos previamente programados.

Ya dijimos anteriormente que el grado de satisfacción del alumnado es muy importante. Ellos son los que tienen que aceptar o rechazar esta técnica de evaluación continua. Para conocer su opinión, cuando está próximo a terminar el período lectivo de cada una de las asignaturas, se les pasa un completo cuestionario de evaluación que consta de unas treinta preguntas agrupadas en varios bloques. Únicamente destacar que los alumnos consideran, en una inmensa mayoría, que esta técnica de evaluación consigue que se asimilen mejor los contenidos de la asignatura.

Pero cualquier mecanismo de seguimiento que se utilice en la Universidad tiene que tener un mínimo control docente. Es decir, sería un error dejar toda la evaluación del método a criterio de los alumnos. Debe ser también evaluado por los propios docentes del departamento e, incluso, recabar la opinión de compañeros de otros departamentos. Esto lo hemos venido realizando a lo largo de todos los cursos académicos en los que hemos desarrollado esta experiencia evaluadora. Pero, además nosotros también hemos aprovechado la participación de los profesores de Enseñanza Secundaria. Ellos pueden evaluar el método desde una perspectiva distinta, sin caer en los defectos habituales de alguien que está totalmente implicado en él.

5. CONCLUSIONES FINALES

Como ya destacamos anteriormente, los objetivos que nos habíamos planteado se han cumplido sobradamente. Se ha conseguido una mayor asistencia y participación activa del alumnado en clase, es decir, alumnos motivados por el desarrollo de la asignatura. Para constatar este hecho, nos basta con ver el cambio sustancial que se ha producido en las intervenciones del alumno en clase. Antes se limitaban a preguntar por un paso concreto de un ejercicio, un proceso mecánico o simplemente por una sintaxis incorrecta en la pizarra. Ahora hacen preguntas mucho más profundas sobre conceptos o relaciones entre ellos. Todo esto ha producido además un incremento sustancial en la asistencia y aprovechamiento de las horas de tutoría. También se ha logrado que el alumno tenga una mejor preparación y visión global de la asignatura.

Nos gustaría destacar que estas experiencias no sólo tienen importancia por la valoración de los alumnos, sino por la repercusión que tienen en la propia tarea docente. Es gratificante ver esta gran motivación por parte del alumnado, que redunda positivamente en la labor docente.

A la vista de estos resultados y constatando que estos problemas son comunes en todas las universidades, consideramos muy importante el hecho de compartir experiencias con el resto de los compañeros docentes.

Por último, conviene destacar la participación de profesores de Enseñanza Secundaria. Dicha importancia viene marcada por su amplia experiencia en el tema de evaluación continua, práctica habitual en los institutos. Además, la mayoría de las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas se sitúan en el primer curso. Esto da lugar a que los contenidos desarrollados en dichas asignaturas tengan mucho en común con los de los programas de los últimos cursos de Enseñanzas Medias. Por lo tanto son de gran ayuda por ser los mejores conocedores del estado real de los alumnos cuando van a iniciar sus estudios universitarios. Esta colaboración facilita el continuo intercambio de ideas y el tan necesario contacto entre los docentes de ambos niveles educativos. Con ello se ayuda a paliar este gran defecto histórico de la enseñanza en España.

UN ANÁLISIS COMBINATORIO DEL PROBLEMA DE LOS MÚSICOS

BLAS C. RUIZ JIMÉNEZ

INTRODUCCIÓN

La *XXXIII Olimpiada Matemática Española* propuso el siguiente problema:

> *Seis músicos participan en un festival de música. En cada concierto, algunos de esos músicos tocan y los demás escuchan. ¿Cual es el mínimo número de conciertos necesario para que cada músico escuche a todos los demás?*

Este problema, de origen canadiense, fue propuesto en el *International Mathematics Tournament of the Towns* de otoño de 1984 [1]. En este trabajo estudiaremos la generalización del problema para n músicos, propuesto en el *IV Concurso de Problemas de Ingenio* organizado en Diciembre de 1997 por el departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga.
Representemos los músicos con los números naturales $1; 2; 3, \ldots$, y con $O(n)$ el número de conciertos de una solución optima para n músicos. Para valores pequeños de n, a través de razonamientos mas o menos ingeniosos, podemos encontrar el valor de $O(n)$. Así tenemos la siguiente prueba de $O(n) > 3$ para $n > 3$:

> Si existieran tres conciertos C_1, C_2 y C_3, ya que cada músico debe tocar al menos una vez, un concierto debe tener dos o mas músicos. Luego podemos suponer que 1 y 2 tocan en C_1. Ya que 1 y 2 deben escucharse mutuamente podemos suponer que 2 escucha a 1 en C_2 y 1 escucha a 2 en C_3. En ese caso, el músico 1 aparece como oyente únicamente en C_3, de donde el resto de músicos $R=\{3, 4, 5, \ldots\}$ deben aparecer en C_3, y razonando en forma similar para el músico 2, también $R \subseteq C_2$. En ese caso los músicos de R no se oyen entre si.

El razonamiento anterior permite deducir $O(4) = 4$ (ya que obviamente los cuatro conciertos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ y $\{4\}$ son una solución). En este trabajo prescindiremos de estos razonamientos ya que nos interesa encontrar las propiedades fundamentales de la función O que permitan su cálculo directo.

Utilizando técnicas de cubrimiento [2] o técnicas de partición [3] podemos encontrar cotas de $O(n)$ en función de $\log_2 n$, pero no conocemos estudios que proporcionen cotas suficientemente ajustadas de las cuales se derive directamente $O(n)$ para valores pequeños (p.e., $n \leq 100$). Sorprendente, sencillos razonamientos combinatorios conducen a la acotación $2 + \lfloor \log_2 n \rfloor \leq O(n) \leq \ell c\, n$, donde $\ell c\, n$ denota el *logaritmo combinatorio* de n: el menor entero p que verifica $n \leq \binom{p}{\lfloor p/2 \rfloor}$. Tal acotación es extraordinariamente buena. Esto puede verse utilizando la fórmula de Stirling, de la cual encontramos $\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, y en forma similar para los impares; aunque la exponencial 2^k crece mas rápidamente que $\binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$, la diferencia es pequeña y desde un punto de vista práctico el problema está resuelto; por ejemplo:

$$197 \leq O(90548514656103281165404177077484163874504589675413336841320) \leq 200$$

por lo que conocemos *casi* (con un error menor que 3) el número de conciertos de una solución optima para tal número de músicos $n = \binom{200}{100}$ tan grande.

1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN *O*

Lema 1.1 *La función O verifica las propiedades:*

(1) $O(n) \leq n$
(2) $O(n) \leq O(n+1)$
(3) $O(n+1) \leq 1 + O(n)$

Demostración.– (1) sigue de la propiedad: los conciertos {{1}, {2},..., {n}} forman una solución. (2) sigue de la propiedad: al eliminar un determinado músico de todos los conciertos de una solución para n+1 músicos se obtiene otra solución para n músicos. A partir de una solución para el problema con n músicos, podemos obtener una solución para n +1 músicos añadiendo el concierto $\{n+1\}$, de donde (3).#

Llamaremos solución *optima* a cualquier solución con $O(n)$ conciertos, y llamaremos *concierto optimo* a aquel que aparece en alguna solución optima.

Lema 1.2 (Simetría del problema) *Si $C_1, C_2, \ldots, C_p$ es una colección de conciertos solución, entonces la colección de conciertos complementarios $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$ es otra solución, donde $C' \equiv \{1,\ldots, n\}$-$C$ denota el concierto complementario (el concierto formado por los músicos que no tocan).*

Demostración.– Del enunciado del problema se desprende que la colección de conciertos $A_1,\ldots, A_p$ es una solución del problema si y solo si verifica la siguiente condición: *para cualquier par de músicos distintos (i, j), existe un índice u tal que $(i, j) \in A_u \times A'_u$*. El lema sigue directamente de esta propiedad. #

Lema 1.3 *Para $n > 1$, $1 + O\lceil n/2\rceil \le O(n)$.*

Demostración.– Sea $C_1,\ldots,C_{O(n)}$ una solución optima n. Por el Lema 1.2, podemos suponer que el cardinal del primer concierto C_1 es menor o igual que $\lfloor n/2\rfloor$. Por tanto, si eliminamos todos los músicos de tal concierto se obtiene una solución para $n - \lfloor n/2\rfloor = \lceil n/2\rceil$ músicos, y con un concierto menos (en el peor de los casos). Por tanto $O\lceil n/2\rceil \le O(n) - 1$. #

Es obvio que $O(1) = 1$ y $O(2) = 2$. Entonces, aplicando el lema anterior junto a Lema 1.1(3) encontramos $1 + O(2) \le O(3) \le 1 + O(2)$, de donde $O(3) = 3$. Si intentamos el mismo razonamiento con $O(4)$ encontramos solamente $3 \le O(4) \le 4$, por tanto, la cota superior dada por Lema 1.1(3) es poco útil (aunque por el razonamiento dado al principio ya sabemos que $O(4) = 4$).

Podemos iterar la acotación del Lema 1.3 dividiendo sucesivamente por 2 para encontrar $\lfloor \log_2 n\rfloor + 2 \le O(n)$, para $n > 2$.

⊙	⊙	⊙	⊙						
⊙				⊙	⊙	⊙			
	⊙			⊙			⊙	⊙	
		⊙			⊙		⊙		⊙
			⊙			⊙		⊙	⊙

1	**2**	**3**	**4**						
1				**5**	**6**	**7**			
	2			**5**			**8**	**9**	
		3			**6**		**8**		**10**
			4			**7**		**9**	**10**

Figura 1: Construyendo una solución óptima

2 SOLUCIONES COMBINATORIAS

Sea o un natural. Indiquemos para simplificar con $\underline{o}$ el valor $\lfloor o/2\rfloor$, y con $\bar{o}$ el valor $\lceil o/2\rceil$. Consideremos que el número de músicos coincide con el combinatorio $n = \binom{o}{\underline{o}}$. Vamos a construir una solución del problema para n músicos, donde todos tocan $\underline{o}$ veces y todos los conciertos tienen el mismo cardinal. Si todos tocan $\underline{o}$ veces, el producto $n\cdot\ \underline{o}$ es el total de músicos contando las repeticiones. Si además todos los conciertos tienen el mismo cardinal, ya que $n\cdot\ \underline{o} = o\cdot \binom{o-1}{\underline{o}-1}$ el cardinal de cada concierto debe ser $l=\binom{o-1}{\underline{o}-1}$. Por ejemplo, para $n = 10 = \binom{5}{2}$, $l = 4$, y todos los músicos tocan 2 veces. Para encontrar una solución de tales características consideremos las combinaciones $\binom{5}{2}$ dispuestas como en la Figura 1 (izquierda). Ahora colocamos en cada columna, en las posiciones indicadas por las marcas ⊙ , los músicos en el orden 1, 2, ..., 10 tal como indica la Figura 1(derecha). En ese caso cada fila representa un concierto, y la colección de tales conciertos es una solución *por construcción*; en efecto, puesto que cada músico se identifica con una combinación, y todas las combinaciones son del mismo orden y distintas, dados dos músicos distintos x e y, siempre existe un concierto donde aparece x y no aparece y. Este método se puede repetir con cualquier combinatorio $n = \binom{o}{\underline{o}}$. La colección de conciertos así construida ser a llamada *solución combinatoria*. Luego hemos demostrado:

Teorema 2.1 *Para $n > 2$, $2+\lfloor \log_2 n \rfloor \leq O(n) \leq \ell c\, n$.*

Las soluciones para $n = 9$, $n = 8$, ... , se obtienen eliminando un músico, o dos, etc. Curiosamente, al eliminar los 4 primeros músicos, se elimina el primer concierto y queda una solución combinatoria para 6 músicos y con un concierto menos: {5, 6, 7}, {5, 8, 9}, {6, 8, 10}, {7, 9, 10}, de donde $O(6) \leq 4$, y ya que $4 = O(4) \leq O(5) \leq O(6)$, encontramos $O(5) = O(6) = 4$. Y ahora, aplicando el Lema 1.1(3) junto al Lema 1.3 encontramos $1 + O\lceil 7/2 \rceil \leq O(7) \leq 1 + O(6) = 1 + 4$, de donde $O(7) = 5$.

El teorema permite calcular directamente aquellos valores de $O(n)$ donde las cotas coinciden. Curiosamente $\ell c\, x$ y $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ coinciden únicamente en los intervalos [3, 6], [8, 10], [16, 20], [32, 35] y [64, 70]. Para tales valores tendremos $O(x) = \ell c\, x$, de donde derivamos la siguiente tabla, donde los huecos son debidos a la desigualdad $\ell c\, x \neq 2+\lfloor \log_2 n \rfloor$:

K	1	2	3	4 ... 6	7 ... 10	16 ... 20	32 ... 35	64 ... 70
$O(k)$	1	2	3	4	5	6	7	8

Conjetura 2.2 $O(n) = \ell c\, n$

Aunque desde un punto de vista práctico el problema puede considerarse resuelto, la prueba de la conjetura anterior resuelve completamente el problema. además, resuelve también el problema inverso: *dado un número natural q ¿cual es el número máximo de músicos que pueden actuar en q conciertos?* Este número vendrá dado por la exponencial combinatoria $\binom{q}{\lfloor q/2 \rfloor}$.

Teorema 2.3 *Si, salvo biyecciones y complementos, las únicas soluciones optimas para valores de la forma $\binom{o}{\underline{o}}$ son las combinatorias, entonces $O = \ell c$.*

Demostración.– Sea $n = \binom{o}{\underline{o}}$. Basta probar que $O(n) = o \Rightarrow O(1 + n) = o + 1$. Si fuera $O(1 + n) = o$, consideremos una solución para $1 + n$ músicos que tenga o conciertos. Sea m uno de los músicos; ya que al eliminarlo resulta por hipótesis una solución combinatoria completa, bastar a demostrar que es imposible extender una solución combinatoria añadiendo un nuevo músico. En efecto. Supongamos que el músico nuevo toca p veces. Entonces, m debe ser añadido a una de las combinaciones $\binom{o}{p}$ de los o conciertos. Pero si $p \leq \underline{o}$, para cualquier p–posición existe una $\underline{o}$–posición que la cubre, por lo que el músico colocado en tal $\underline{o}$–posición no escuchará al músico nuevo, y no puede ser solución. Si $\underline{o} \leq p$ razonamos en forma similar. #

Otras técnicas para comprobar la conjetura $O = \ell c$ pueden encontrarse en [3].

REFERENCIAS

[1] Peter J. Taylor. *Tournament of the Towns 1984-1989*, Australian International Centre for Mathematics Enrichment, Australia.

[2] Pablo Guerrero. *El problema de los músicos*. Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Málaga. Diciembre de 1997

[3] Blas Ruiz. *Una conjetura sobre el Problema de los Músicos*. Dpto. de Lenguajes y C.C. Universidad de Málaga. Mayo de 2000.

LA TEORÍA DE RETÍCULOS Y LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL; UN EJEMPLO DE PASO DE LA ABSTRACCIÓN A LA REALIDAD.

FRANCISCO CARVAJAL JIMÉNEZ

INTRODUCCIÓN.

En 1854, fue el primero que introdujo una clase importante de estructuras algebraicas, las álgebras de Boole que son retículos distributivos complementados , tratando de modelar el razonamiento humano, fue Schröder en 1890, quien considero el concepto de retículo en el sentido de hoy día, simultáneamente Dedekind introduce los retículos distributivos y modulares, en sus trabajos sobre teoría de grupos e ideales.
La teoría de retículos moderna, tiene su origen en 1930 tal como la conocemos hoy, en el libro de G.Birkhoff, " *lattice theory* ", en el cuál aparecen los conceptos de poset, retículo, valuaciones, subretículos,...,etc., y sus conexiones y aportaciones a otras ramas como la geometría, la topología, el análisis, ...etc.
Las aplicaciones de la teoría de retículos no es nueva, esta aparece de forma explícita o implícita en muchas instancias de la computación y en particular en la inteligencia artificial, que se muestra a través de la extracción automática de hechos de imágenes mediante operadores morfológicos, aprendizaje de conceptos, bases de datos deductivas, redes neuronales difusas y ART, reconocimiento y extracción de hechos.
Esta teoría hoy día se esta aplicando con éxito en varios campos de la computación, como son los siguientes:

- La semántica denotacional, mediante la teoría de dominios, introducida por D.Scott que trata de modelar procesos computacionales o tipos de datos no completamente definidos mediante estructuras de orden.
- La morfología matemática (M.M), es una aproximación geométrica, algebraica y topológica al procesamiento y análisis de imágenes, primero fue una herramienta para análisis de formas de imágenes binarias .
- Conjuntos y sistemas difusos, las redes neuronales fuzzy, redes neuronales Min-Max , redes neuronales fuzzy sobre retículos,..,etc..
- Redes Morfológicas cuyos resultados más importantes son las memorias asociativas y bidireccionales asociativas, perceptron morfológico,
- Bases de datos deductivas, sistemas de control de sucesos discretos ,..,etc.

Como estructuras importantes podemos hablar de dos, el álgebra de imágenes y el álgebra minimax, la primera construye un conjunto de operadores para el procesamiento de imágenes uniendo los operadores lineales, como son convoluciones, transformadas de Fourier, filtros, ..,etc., con los no-lineales de la morfología matemática, erosiones, dilataciones, cierres, aperturas y filtros morfológicos. El álgebra minimax es definida por vez primera por R.Cuninghame-Green, se aplica a problemas sucesos discretos, control de procesos, tareas de asignación, optimización y control, ...,etc., donde se parte de utilizar operaciones habituales en los sistemas lineales de suma y producto, que son sustituidas por el máximo y suma, o por otras combinaciones, incluyendo al menos una las l.c.i del máximo (supremo) ($\oplus$) o mínimo (ínfimo) ($\otimes$), que son las que con las propiedades de la idempotencia $a\oplus a = a$, y la de absorción $a \oplus (b\otimes a) = a$, dan un comportamiento muy distinto. Normalmente los operandos son los números reales a los que se les añade los elementos $-\infty$ y $+\infty$. Asi por ejemplo tenemos $\mathbb{R}_{max} =\{\mathbb{R}\cup \{-\infty\},max,+\}$, que tiene estructura de semianillo idempotente o diode. En las matrices de elementos estas álgebras podemos definir nuevas operaciones como son los productos matriciales $c_{ij}=max(a_{ik}+b_{kj})$, productos matriciales generalizados con unas propiedades diferentes a la matrices en espacios lineales.
La teoría de retículos y estructuras de orden, aparece como un marco de trabajo útil en distintos campos de la ciencia entre ellos la inteligencia artificial, y nos hace volver hacia el estudio de los sistemas abstractos como una nueva metodología y un conjunto de herramientas, muy distintos a las de los espacios lineales, incluso en el caso del álgebra minimax por las operaciones y resultados , aunque en el lenguaje se siga con el mismo vocabulario .

II).- LA TEORÍA DE RETÍCULOS Y SUS APLICACIONES.

La estructura de retículo se puede definir como estructura ordenada, como conjunto parcialmente ordenado donde todo subconjunto finito tiene supremo e ínfimo y de forma algebraica como un conjunto con dos l.c.i (llamadas ínfimo $\wedge$ y supremo $\vee$) cumpliendo las propiedades idempotente, conmutativa, asociativa y de absorción, teniendo como puente entre una y otra, la relación $a\leq b \Leftrightarrow a\wedge b=a$ o $a\vee b=b$, y se llama completo si cualquier subconjunto finito o no tiene ínfimo y supremo. Las distintas estructuras de orden como son conjuntos parcialmente ordenados (Posets), semíretículos, subretículos, diodes,

...,etc nos permite modelar distintos sistemas, espacios E/S,...,etc., de forma natural y sencilla , veamos algunos ejemplos de espacios modelados como retículos:

a) El conjunto de partes de un conjunto $\mathcal{P}(X)$, con la relación de orden la inclusión de conjuntos($\subseteq$), y visto algebraicamente el ínfimo y supremo son intersección y unión respectivamente, tiene estructura de retículo completo (todo subconjunto del retículo tiene ínfimo y supremo, como cotas universales están el vacío Ø y el conjunto X), como ejemplo veamos que , este retículo nos sirve para modelar las imágenes binarias o en blanco y negro, i_B: $X \rightarrow\{b,n\}$, es fácil demostrar la existencia de un isomorfismo entre las imágenes binarias y las partes de un conjunto.
b) Los subconjuntos difusos definidos sobre un universo X, tienen estructura de retículo distributivo completamente, este marco es donde tenemos muchos desarrollos en redes neuronales, como son las redes Min-Max, redes FLNN, redes difuso sobre retículos .
c) El conjunto {0,1}, (álgebra de Boole), con la relación de orden usual es un retículo complementado, el ínfimo y el supremo son las operaciones Booleanas Y (AND) y O (OR), que es isomorfo al retículo de partes de X. Igualmente son retículos otras lógicas como las de Lukasiewicz, lógica de cuatro valores , que definen las conectivas Y y O como el mínimo y el máximo respectivamente.
d) El conjunto Y^X de las funciones de X a Y, con la relación de orden $f\leq g \Leftrightarrow f(x)\leq g(x)$, $\forall x \in X$, es un retículo, definiendo el sup(f) inf(f) como el máximo y mínimo de funciones puntualmente. Si tomamos como conjunto X las localizaciones de los pixels y el conjunto Y los valores de los pixels, el conjunto de las funciones de X a Y representan las imágenes en gris, para modelar las imágenes en color consideramos un vector de tres componentes de niveles de color.
e) X^n es un retículo completo, definiendo el orden puntualmente sobre los elementos de X , $A \leq_X^n B \Leftrightarrow a_i \leq_X b_i$, como ejemplo típicos de X tenemos $\mathbb{R}$ y el intervalo unidad [0,1], de la misma forma podemos tomar retículos de espacios heterogéneos X_i .

De lo ejemplos de retículos se desprende varias consecuencias, la facilidad para trabajar con distintos conjuntos de entrada, continuos y discretos, finitos e infinitos y la amplia variedad de problemas que podemos modelar de una forma unificada.

III).- UNA NUEVA METODOLOGÍA DE TRABAJO.

En este enfoque de trabajo el primer paso trata de modelar nuestro espacio de entrada como estructura de orden, esto significa considerar una relación de orden y sus operaciones binarias asociadas, ínfimo y supremo. Como por ejemplo si consideramos $\mathbb{R}^2$ podemos considerar ordenes distintos, como por ejemplo:

a) Orden puntual, $(a_1,a_2)\leq(x_1,x_2)\Rightarrow$Si $a_i \leq x_i$ $\forall i=1,2$.
b) Orden de los Intervalos,$(a_1,a_2)\leq(x_1,x_2)\Rightarrow$Si $a_1 \geq x_1, a_2 \leq x_2$ $\forall i=1,2$.
c) Orden lexicográfico, $(a_1,a_2)\leq(x_1,x_2)\Rightarrow$ Si $a_1 < x_1$ o $a_1=x_1$ y $a_2 \leq x_2$ $\forall i=1,2$.

Los distintos ordenes definen diferentes l.c.i del álgebra y además definen propiedades métricas a través de las valuaciones, que son funciones de valores reales sobre el retículo que cumplen; $v[x]+v[y]=v[x\wedge y]+v[x\vee y]$, a partir de una valuación monótona y positiva se define una métrica en el retículo mediante; $d(x,y)= v[x\wedge y]-v[x\wedge y]$, pues la posición de los elementos cambia.

Las herramientas que utilizamos entre retículos, son operadores que actúan sobre esos espacios de entrada y nos producen unos espacios de salidas, de forma automática, en el caso de la M.M se parte de unos operadores elementales y se forman otros mediante composición de tal manera que resolvamos el problema en cuestión, la clave están en la selección de la familia óptima .

En el marco de la teoría de retículos nuestro objetivo es trabajar con operadores que se comporten bien con respecto al orden, como son los operadores monótonos que son invariantes o invierten la relación de orden del espacio de entrada, los operadores extensivos ($i\leq\psi$) y antiextensivos ($i\leq\psi$), los idempotentes ($i=\psi^2$) que convergen en una sola etapa, invariantes por traslaciones, conexos, operadores que conmutan con ínfimos y supremos,...,etc.,

Los ejemplos más sencillos aparecen en la M.M, que estudia operadores entre retículos completos, donde los operadores más elementales son las erosiones y dilataciones, que se definen como aquellos operadores que conmutan con el ínfimo y supremo, a partir de estos se definen otros operadores cierres y aperturas por composisción, una dilatación seguida de una erosión un cierre y al contrario una apertura, estos tienen como propiedades la monotonía, extensividad-antiextensividad y la idempotencia, con una apertura eliminamos los conjuntos menores que un determinado conjunto llamado elemento estructurante. Otro ejemplo muy sencillo son los filtros morfológicos que se definen como operadores crecientes e idempotentes, la primera propiedad asegura que al componer varios filtros tengan buenas propiedades respecto a la convergencia y la segunda que en una sola aplicación eliminemos todos los hechos .

IV).- CONCLUSIONES.

a) La enseñanza de conceptos abstractos, categorías, conjuntos Rough, retículos, semianillos , álgebras de Heyting, ...,etc., proporciona métodos y herramientas para abordar diferentes problemas de computación e I.A.
b) La teoría de retículos y estructuras ordenadas nos permite trabajar con un metodología, modelado de las entradas como retículos, definición de las l.c.i, operadores,...,etc, que nos permite modelar distintos sistemas y trabajar con ellos.
c) Cuando se habla de matemáticas puras y aplicadas, son términos que cada vez tienen menos sentido y es muy difícil definir la frontera entre las dos, existiendo solamente una transfomación entre unas estructuras y la realidad, en cualquier dirección.
d) Los conceptos en la teoría de retículos son sencillos y unas consecuencias muy importantes en todas las ramas, como por ejemplo, el Teorema del punto fijo de Tarski, que dice que, "toda aplicación creciente de un retículo en si mismo presenta puntos fijos", este tipo de aplicaciones en procesos iterativos tienen asegurada la convergencia. Señalemos por último el caso de vectores con elementos heterogéneos se puede tratar por la definición componente a componente en la relación de orden, lo que facilita el modelado de sistemas.

V).- BIBLIOGRAFÍA.

[Birkhoff, G.; 1993] Lattice Theory. Colloquium Publications, American Mathematical Society, vol. 25, 3ª edición, 7ª reimpresión, 1993 ,(primera edición 1940).
[Cuninghame-Green, R.; 1979] Minimax algebra, Lecture Notes in Economics and mathematical systems. Springer-Verlag, Berlin.
[Serra, J.; 1982] Image Analysis and Mathematical Morphology, London, Academic Press.
[Heijmans, H.J.A.M.; 1994] Morphological Image Operators, Boston, Academic Press.

SOBRE MUESTREO EN OCASIONES SUCESIVAS

EVA Mª ARTÉS RODRÍGUEZ · AMELIA VICTORIA GARCÍA LUENGO

Un dato a destacar en el análisis de una muestra es el instante o período de tiempo al que hacen referencia los resultados muestrales. Existen dos razones fundamentales por las que ha de considerarse el factor tiempo: las características de los elementos de la población pueden modificarse a lo largo del tiempo, o bien la composición de la población puede verse modificada, debido a que nuevos individuos pueden entrar a formar parte de la misma (nacimientos) o dejar de hacerlo (muertes).

Si la composición y las características de los elementos permaneciesen inalterables, la realización de un muestreo en un instante dado sería suficiente, ya que la validez de los resultados se mantendría. En la práctica, los cambios anteriormente señalados impiden esta simplificación, y a su vez dan lugar a una serie de objetivos que pueden ser analizados mediante encuestas continuas, como son:

- Realizar la estimación de parámetros poblacionales en distintos instantes de tiempo.
- Realizar estimaciones promediadas a lo largo del periodo de tiempo.
- Medir cambios netos.
- Medir componentes de cambio individual.
- Acumular datos para cada individuo a través del tiempo.
- Acumular muestras a lo largo del tiempo.

Las circunstancias de la encuesta y las características que se quieran estimar, son determinantes para elegir el tipo de diseño muestral más adecuado. Existen varias posibilidades (Yates, 1949):

- Extraer una nueva muestra en cada ocasión (muestreo *repetido*)
- Utilizar la misma muestra en todas las ocasiones (muestreo *panel*)
- Realizar un reemplazamiento parcial de unidades de una ocasión a otra (muestreo en *ocasiones sucesivas*, también llamado muestreo rotativo cuando los elementos tienen restringido el número de etapas en las que van a formar parte de la muestra, de tal forma que cuando un elemento abandona la muestra un nuevo elemento se incorpora a la misma, como es el caso de la EPA, de periodicidad trimestral, y de la mayoría de las encuestas familiares elaboradas por el INE).

De esta manera, dependiendo del parámetro que se desee estimar, será más conveniente utilizar el muestreo repetido, el panel, o el de ocasiones sucesivas. Si el objetivo es la estimación de cambios netos, es más conveniente conservar la misma muestra en las dos ocasiones, que utilizar muestras independientes. Por el contrario para estimar el promedio sobre dos ocasiones (a lo largo del tiempo) es más conveniente obtener una nueva muestra para cada ocasión. Cuando el objetivo es la estimación de un determinado parámetro en la ocasión actual, el reemplazamiento parcial de la muestra es mejor que conservar la misma muestra o sustituirla en cada ocasión.

Particularmente, las alternativas mencionadas pueden representarse, para n=2, como sigue, donde 1 y 2 representan la ocasión primera y la ocasión segunda respectivamente :

	Panel		M.O.S.		Repetido	
Parte no común				x		x
						x
Parte común	x	x	x	x		
	x	x				
Parte no común			x		x	
					x	
	1	2	1	2	1	2

En las encuestas muestrales es frecuente la necesidad de estimar algún parámetro poblacional a intervalos regulares de tiempo. Si existe una relación entre el valor de un elemento de la población en un período de tiempo, y el valor del mismo elemento en el período siguiente, entonces es posible emplear la información contenida en la muestra del período precedente, para mejorar la estimación actual del parámetro poblacional. En este sentido, para que sea posible utilizar la información muestral precedente, se debe obtener la muestra de manera que los elementos muestrales en los dos períodos sucesivos tengan algunos elementos comunes.

Algunos motivos por los que conviene utilizar el reemplazamiento parcial de la muestra son:

- Reduce los costes, ya que utilizar una muestra completamente nueva en cada ocasión puede resultar excesivamente costoso.
- Aumenta la precisión de los estimadores.
- La permanencia indefinida de las mismas unidades en la muestra puede crear problemas y reducir la eficiencia de los estimadores.

Por ejemplo, en las encuestas familiares de tipo panel se incrementan los sesgos en las estimaciones debido a la falta de colaboración de algunas familias que pertenecen al panel de hogares.

Así, el INE utiliza principalmente encuestas de muestreo rotativo debido a que presenta ventajas sobre los dos tipos de encuestas anteriores (repetidas y tipo panel).

DISEÑO MUESTRAL

Se observa la misma variable en dos ocasiones y sólo una parte de las unidades observadas es común a dichas ocasiones. Las observaciones de la primera ocasión se utilizan como información complementaria para mejorar la estimación en la segunda ocasión. Suponemos que el muestreo es aleatorio simple con reemplazamiento, donde la población es de tamaño suficientemente grande como para poder prescindir del factor de corrección por finitud, y que tanto los tamaños de las muestras como la varianza de la población son las mismas en ambas ocasiones.

Sea *N* el tamaño de la población, de la que se extrae en la primera ocasión una muestra aleatoria simple de tamaño *n*. Sea una muestra aleatoria simple de tamaño *m* (muestra apareada) submuestreada de las *n* unidades, que se retiene para la segunda ocasión. Además, sea una muestra aleatoria simple de tamaño *u* (muestra no apareada) tomada en la segunda ocasión del Universo *N-m* que queda después de omitir las *m* unidades.

En la mayoría de las encuestas basadas en muestreo sucesivo, el interés se centra en la media poblacional de la ocasión actual.

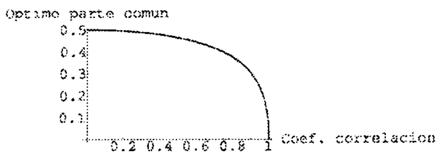
La teoría (Jessen, 1942) desarrollada hasta el momento va dirigida a obtener el estimador óptimo combinando dos estimadores de las medias: un estimador indirecto (razón, regresión, producto, difrencia, razón-producto) de doble muestreo de la parte apareada de la muestra, donde la variable auxiliar, *x*, puede ser el valor de la variable objeto de estudio, *y*, en la primera ocasión, y un estimador simple de la media de la parte no apareada.

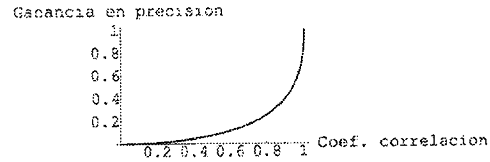
El estimador de razón es muy útil cuando la relación entre la variable objeto de estudio y la variable auxiliar es lineal a través del origen. La estimación de regresión generalmente será mejor que la de razón si la relación entre las variables es una línea recta que no pasa por el origen. El método de estimación de diferencia es similar en principio a la estimación de regresión. Funciona bien cuando la gráfica de una variable sobre otra muestra que los puntos pertenecen a una línea recta con pendiente igual a la unidad. Un análogo natural del estimador de razón es el estimador producto, donde una variable auxiliar, *x*, tiene correlación negativa con *y*, de la cual queremos estimar la media poblacional. El estimador razón-producto considera el caso en el cual se dispone de información auxiliar proporcionada por varias variables auxiliares con correlación de cualquier signo con la variable objeto de estudio.

La tabla siguiente muestra, para una serie de valores del coeficiente de correlación, el porcentaje óptimo que se debe aparear y la ganancia relativa en precisión (donde *m/n* representa la fracción de apareamiento) comparada con no apareamiento. El mejor porcentaje a aparear nunca debe exceder del 50 % y disminuye constantemente conforme el coeficiente de correlación aumenta.

$\rho \downarrow$	% óptimo apareado	% de ganancia en precisión	% de ganancia con $m/n = 1/3$	% de ganancia con $m/n = 1/4$
0.5	46	7	7	6
0.6	44	11	11	9
0.7	42	17	17	15
0.8	38	25	25	23
0.9	30	39	39	39
0.95	24	52	50	52
1.0	0	100	67	75

A continuación se muestra la curva que da el porcentaje óptimo de la muestra en la parte común en función del coeficiente de correlación y la curva que da la ganancia en precisión utilizando el estimador con parte común respecto a un estimador sin parte común





Extensión a más de dos ocasiones

Cuando hay más de dos ocasiones, las posibilidades para la formación de estimadores aumentan. En la ocasión *h*, por ejemplo, podemos tener partes de la muestra apareadas con la ocasión *h-1*, partes que estén apareadas con las ocasiones *h-1*, *h-2*, etc.
Aunque el muestreo en más de dos ocasiones puede desarrollarse con toda generalidad, por sencillez, se limita al caso de estimadores en que sólo se emplea la ocasión que precede inmediatamente a la que se está considerando. Esta simplificación implica alguna pérdida de precisión (Cochran, 1977) pero como el coeficiente de correlación generalmente decrece cuando el intervalo de tiempo entre las ocasiones aumenta, las pérdidas de precisión, en general, no serán grandes.
En la tabla siguiente se obtiene para distintos valores de *h* y del coeficiente de correlación la ganancia en precisión del estimador propuesto sobre el estimador directo (segunda fila de la tabla) y el valor óptimo para la fracción de apareamiento (primera fila de la tabla). Se puede apreciar que el estimador combinado es siempre más eficiente que el estimador media simple, alcanzando mayor precisión conforme aumentan los valores de *h* y del coeficiente de correlación. Además, a partir de la cuarta ocasión, el valor óptimo de la fracción de apareamiento se mantiene constante en 1/2.

$h \downarrow \quad \rho \rightarrow$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1
2	0.49	0.48	0.46	0.44	0.41	0.38	0.30
	1.02	1.04	1.07	1.11	1.17	1.25	1.39
3	0.50	0.50	0.50	0.49	0.49	0.47	0.42
	1.02	1.05	1.08	1.12	1.20	1.31	1.55
4	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.49	0.47
	1.02	1.05	1.08	1.12	1.12	1.33	1.61
∞	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
	1.02	1.05	1.08	1.12	1.12	1.33	1.64

BIBLIOGRAFÍA

ARTÉS RODRÍGUEZ, E. (1998), Extensión de los métodos indirectos: Aplicación al muestreo en ocasiones sucesivas y a la estimación de cuantiles, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.
COCHRAN, W. G. (1977), Sampling Techniques, third edition,John Wiley & Sons, New York.
JESSEN, R. J. (1942) Statistical Investigation of a Sample Survey for Obtaining Farm Facts, Iowa Agricultural Experiment Statistical Research Bulletin, 304.
YATES, F. (1949, 3 ed. 1960), Sampling Methods for Censuses and Surveys, Griffin, London.

EL MÉTODO DE NEWTON EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DAVID RODRÍGUEZ AGUILERA

1. INTRODUCCIÓN

El método de Newton se emplea en numerosas ocasiones en la resolución de ecuaciones. En la enseñanza universitaria se presenta con mucha frecuencia el caso unidimensional, es decir, calcular la solución de $f(x)=0$.Sin embargo también es bastante habitual encontrar situaciones que requieran tratar el caso multidimensional, a saber

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \\ \dots \\ f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

La interpretación gráfica del primer caso es conocida y fácil de encontrar en la bibliografía. En el presente trabajo se muestra una ampliación lógica de la anterior interpretación geométrica aplicada a casos particulares, así como las restricciones que se presentan en su aplicación.

2. PROBLEMA BIDIMENSIONAL

Tratemos de resolver el problema concreto:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{2.1}$$

siendo

$$\begin{cases} f(x,y)=(x-2)^2+3(y-1)^2+2y-30 \\ g(x,y)=(x-2)^2+3(y+2)^2+2y-10 \end{cases} \tag{2.2}$$

En la figura 1 se han representado ambas superficies ($S_1: z=f(x,y)$, $S_2: z=g(x,y)$), siendo la solución buscada el punto intersección de ambas cuando $z=0$.

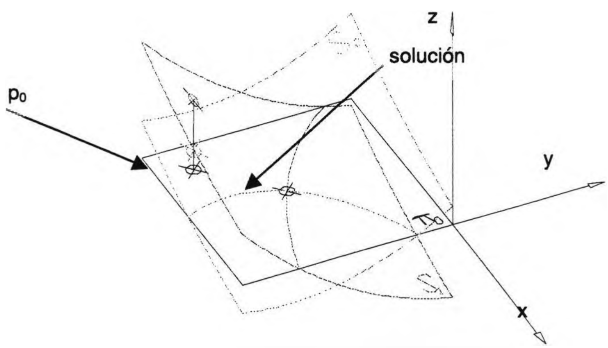


Figura 1 Esquema general

Como primera aproximación a la solución se elige el punto

$$p_0=(-2.5,-2.5) \tag{2.3}$$

Comprobemos que no es solución:

$$\begin{cases} f(-2.5,-2.5)=22\neq 0 \\ g(-2.5,-2.5)=6\neq 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

La matriz jacobiana de la transformación es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4 & 6y-4 \\ 2x-4 & 6y+14 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

cuyo valor en el punto p_0 es

$$\begin{pmatrix} -9 & -19 \\ -9 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

El método de Newton indica resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} -9 & -19 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 22 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46/81 \\ 8/9 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Por lo tanto

$$p_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -313/162 \\ -29/18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1.9321 \\ -1.6111 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

En este nuevo punto de iteración (figura 2) las funciones valen

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) \approx 2.693 \neq 0 \\ g(x_1, y_1) \approx 2.693 \neq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

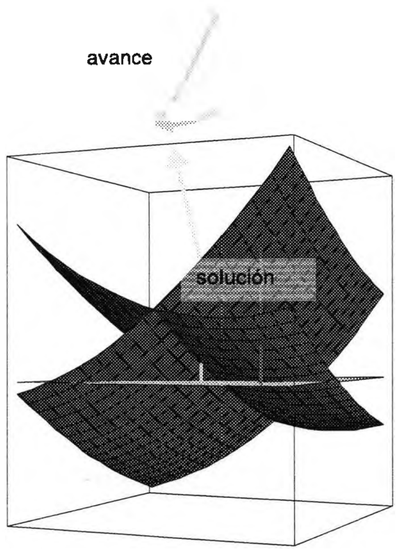


Figura 2 Proceso de iteración según modelo de Newton

Parece lógico pensar que, igual que en el caso de una curva plana ésta puede aproximarse por una recta tangente, en el caso de una superficie el plano tangente será una aproximación. Calculemos entonces los planos tangentes a las superficies

$$\begin{cases} S_1 : z = f(x, y) \\ S_2 : z = g(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

en los puntos de coordenadas

$$\begin{cases} P_1 = \left(x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right)\right) \\ P_2 = \left(x_0, y_0, g\left(x_0, y_0\right)\right) \end{cases} \tag{2.12}$$

Estos planos vienen dados por las ecuaciones respectivas:

$$\begin{cases} \pi_1 : 9x + 19y + z = -48 \\ \pi_2 : 9x + \quad y + z = -19 \end{cases} \tag{2.13}$$

La intersección de estos dos planos, con el plano de ecuación $\pi_3 : z = 0$ (representada en la figura 3) , se halla resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 9x + 19y + z = -48 \\ 9x + \quad y + z = -19 \\ \qquad\qquad z = 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

(restando a la primera ecuación la segunda se obtiene directamente)

$$\begin{cases} x = -313/162 \approx -1.9321 \\ y = -29/18 \approx -1.6111 \\ z = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

solución que coincide con la hallada por el método de Newton. Así pues el método de Newton en funciones de varias variables es equivalente al cálculo de sucesivos planos tangentes cuya intersección con el plano $\pi_3 : z = 0$ va dando las sucesivas aproximaciones a la solución del sistema de ecuaciones (2.1).

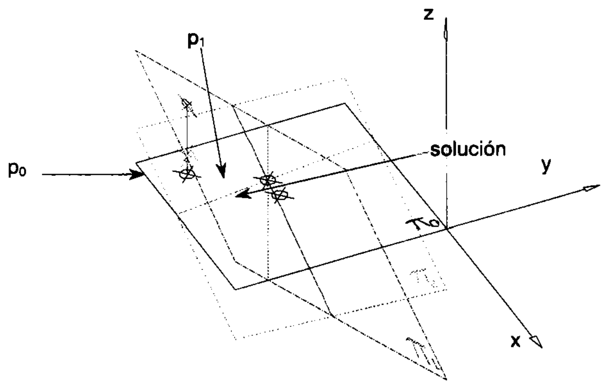


Figura 3 Intersección de los planos tangentes

3. RESTRICCIONES

En el caso del método de Newton para resolver una ecuación con una sola incógnita, se deben evitar los puntos próximos a los puntos críticos (generalmente sólo se hace referencia a extremos relativos) puesto que dan intersecciones con el eje X muy alejadas del punto inicial. En la situación bidimensional, se tendrían planos con vector normal de dirección próxima a la del eje Z, con lo que la intersección con el plano $z = 0$ se alejaría mucho del punto de iteración actual. Obviamente el método no es válido para los propios puntos críticos. Una precaución adicional, que no procede en el caso plano, es observar que la intersección de los planos tangentes a las superficies no sea una recta paralela a (o contenida en) el plano $z = 0$. Esta situación puede presentarse en superficies de revolución respecto de un mismo eje paralelo al eje Z.

AGRADECIMIENTOS:

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por la beca FP98 30799328 del Ministerio de Educación y Cultura.

APORTACIONES DE LAS TAGS SÍNCRONAS AL PROCESAMIENTO DEL LENGUAJE NATURAL

LUISA MARÍA ROMERO MORENO

INTRODUCCIÓN.

La ponencia presenta un resumen, de las posibilidades que aportan, cierto tipo de TAGs (Gramáticas de adjunción de árbol) llamadas Síncronas al estudio del procesamiento automático del lenguaje natural. Para ello, se comenzará presentando una panorámica, que sitúe en el contexto adecuado los formalismos que se van a analizar.

Desde principio de los años noventa, el tratamiento automático de los lenguajes, viene teniendo un desarrollo importante, que se ve impulsado por las aplicaciones que genera. Todas las aplicaciones (corrección de ortografía, traducción automática, realización de resúmenes) tienen necesidad de un **módulo de análisis sintáctico**.

Pero para poder contar con dicho módulo, es necesario disponer de una gramática precisa y exhaustiva, y que tenga asociados unos formalismos convenientes que permitan disponer de algoritmos de análisis que den lugar a programas eficientes.

El formalismo elegido es el de las gramáticas de adjunción de árboles (TAG), que fueron definidas por Joshi (1975), y que se basan en combinaciones de estructuras arborescentes, para la descripción y análisis de los lenguajes. Desde un punto de vista lingüístico, tienen la ventaja, de evidenciar la interacción entre fenómenos léxicos, sintácticos y semánticos. Y desde la perspectiva informática, tiene más potencia que las gramáticas libres de contexto, pero no permiten algoritmos de tratamiento muy eficaces.

De esta forma, podemos caracterizar a dichas gramáticas (TAG) como formalismos con interesantes propiedades para estudiar aspectos relacionados con la caracterización de sintaxis de los lenguajes naturales:

* El dominio de localidad en las TAGs es más amplio que el proporcionado por los formalismos de las gramáticas libres de contexto.

* Las relaciones de dependencias y recursión que son posibles en un árbol, se pueden factorizar, en el primer caso siguiendo las dependencias primitivas en un árbol elemental, y en el segundo, como consecuencia de la operación de adjunción de árboles.

Pero estas propiedades, plantean la posibilidad de la aplicación de dichas gramáticas mas allá de los límites de la sintaxis, es decir, abordar tareas de **interpretación semántica** o de **traducción automática del lenguaje natural**.

Lo presentado aquí, consiste, en una variante de las TAGs, que caracterizan correspondencias entre lenguajes. El camino seguido consiste en relacionar expresiones de los lenguajes naturales con su representación semántica en un lenguaje lógico, o sus traducciones a otros lenguajes naturales. Se estudiarán las ventajas computacionales de usar este tipo de gramáticas en los analizadores. Se presentará un ejemplo práctico, donde puedan analizarse todos estos aspectos.

DESCRIPCIÓN DE LAS TAGS SÍNCRONAS .

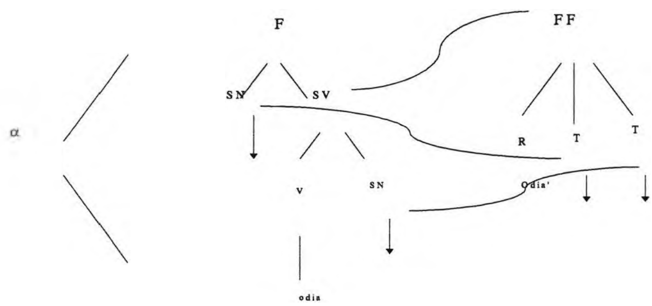
Las tareas de interpretación del lenguaje, pueden pensarse, como asociaciones entre un análisis sintáctico de una frase con otras estructuras, que pueden ser, una representación formal en un lenguaje lógico o una frase en un lenguaje objeto. El lenguaje original y sus estructuras asociadas se definen en ambos casos, usando el formalismo de las TAGs; y las dos son síncronas en el sentido que las operaciones de adjunción y sustitución se aplican a la vez, para relacionar los nodos de los dos árboles de cada lenguaje.

Analicemos un sencillo ejemplo consistente en la frase: *"Juan odia las espinacas cocinadas violentamente".*

Cada elemento de la TAG Síncrona, es un par consistente en dos árboles elementales, uno del lenguaje fuente y otro del objeto (Lenguaje lógico[LF]). Las gramáticas, se escriben ellas mismas en una variante de las TAGs, es decir, se eligen variantes simples de las TAGs lexicalizadas y se permite la adjunción y la sustitución. La operación básica permitida en una TAG síncrona, será proveniente de las operaciones básicas del formalismo, un paso de **derivación** de un par de árboles <α1,α2> se produce como sigue:

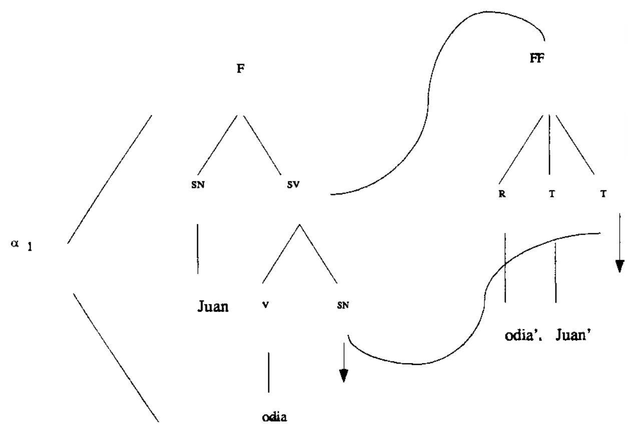
1. Elección no determinista de una unión entre el par que conecta dos nodos (sea n1 en α1 y n2 en α2).
2. Elección no determinista de un par de árboles en la gramática <β1,β2>.
3. Formación del par resultante <β1(α1,n1),β2(α2,n2)>, donde $\beta(\alpha$,n) es el resultado de aplicar una operación básica del formalismo (adjuntar o sustituir β en α en n).

De esta forma en el ejemplo que vemos se tendrá para el primer caso:



Actuando de la misma manera, tendremos un par de árboles idénticos, β conteniendo a *Juan* y *Juan*' uno para el lenguaje fuente, y otro para el formal, correspondiendo a SN y T, γ para *las espinacas* y *las' espinacas'* (también NP y T), δ para *cocinadas* y *cocinadas*' (SN con ADJ y T con R) y ε para *violentamente* y *violentamente'* (SV con ADVP y F con R).

Como aplicación de lo visto, supongamos que partimos del par de árboles de α. Se elige la unión entre el sujeto SN a T y el par de árboles de β para aplicar a sus nodos. El resultado, por sincrónica sustitución será el par de árboles:



Estas uniones ponen en evidencian la correspondencia entre *"Juan odia"* y su correspondiente forma lógica *odia'(juan')*. Las uniones entre el operador de árbol (cuando se da) se mantienen en el par resultante final.

Finalmente, se obtendrá un par de árboles finales , que asociará la frase de partida con el significado:

violentamente'(odia'(juan',cocinadas'(las' espinacas')))

Cuando una de las uniones se elige, y se produce una adjunción en el nodo, la otra unión ha de aparecer en el resultado.

JUSTIFICACIÓN DEL USO DE LAS TAGS SÍNCRONAS.

En este punto, tiene sentido preguntarse sobre la necesidad de usar, este tipo de formalismos para codificar la información semántica. Además, hemos de analizar las ventajas que aporta con respecto a otro tipo de métodos más convencionales.

Lo primero a tener en cuenta, es que los argumentos para la recursión y las dependencias dadas en las TAGs cuando se estudia la sintaxis del lenguaje natural son homólogos a los de los estudios semánticos. La estructura de las TAGs permite dependencias sintácticas, que se localizan en las primitivas de esa gramáticas como árboles elementales. Similarmente, el uso de TAGs para construir formas lógicas permite localizar dependencias semánticas en las formas lógicas de expresiones del lenguaje natural, dependencias tales como los requerimientos de la signatura (argumento, tipo y aridad) de la función y relación entre símbolos. Con otros métodos de estudio de la semántica estas dependencias no pueden ser localizadas.

Además, el uso de TAGs síncronas permite una significativa reducción en el papel de los rasgos en una gramática bajo el formalismo TAG. Porque en el dominio de localidad que las TAGs poseen, el papel de los rasgos y el de la unificación se reducen con respecto al de los sistemas basados en gramáticas libres del contexto.

CONCLUSIONES

Visto que las TAGs Síncronas proporcionan un mecanismo simple para ir más allá de una caracterización puramente sintáctica de la estructura de las frases, hemos de tener en cuenta que será de una gran importancia el disponer de algoritmos analizadores que den sustento a estos formalismos.

En un algoritmo de este tipo, la semántica puede ser interpretada analizando la frase de acuerdo con la gramática fuente; los pares determinan una derivación en el lenguaje objeto, según su forma lógica. Para la generación desde una forma lógica, se procede por un camino inverso al seguido por el analizador de la forma lógica de la expresión, es decir determinando la derivación desde la frase en lenguaje natural. La automatización de este proceso es similar a las líneas seguidas al proyectar dos TAGs. (Abeillé, 1990).

Sería muy necesario analizar convenientemente las propiedades de las TAGs Síncronas (sensibilidad al orden de derivación entre el producto de la gramática fuente y la objeto), para reflejarlas convenientemente en la elección del algoritmo analizador. La eficiencia de dicho analizador necesita que sólo una derivación canónica (la más a la izquierda o la más a la derecha) sea computada; las otras derivaciones dan el mismo objeto. Los algoritmos más generales tanto para TAGs como para gramáticas libre de contexto cuentan con esta optimización. Si se incrementan los requerimientos que generan las representaciones explícitas de todas las representaciones (por ejemplo, las derivaciones del objeto) de una determinada cadena, la optimización anterior no puede usarse, y entonces el analizador sería bastante ineficiente. Si las representaciones se dejan implícitas, se mantiene la optimización, pero la recuperación de las representaciones explícitas hará que la complejidad aumente de forma combinatoria.

BIBLIOGRAFÍA

Anne Abeillé, Thèse de Doctorat de linguistique . Une grammaire lexicalisée d'arbres adjoints pour le français. Application à l'analyse automatique. Université Paris 7. 1991.

Stuart M. Shieber, Yves Schabes. Synchronous Tree-Adjoining Grammars. In Proceedings of the 13th International Conference on Computational Linguistics, University of Helsinki, Finland. 1990.

MODELOS DE LÍMITE DE LOS ESTUDIANTES DE LA TITULACIÓN EN ECONOMÍA DE LA UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS.

Lázaro S. Dibut Toledo · José Joaquín Arrieta Gallastegui · Hassan Arteaga Rodríguez
Aurelio Antelo Collado · Ernesto R. Fuentes Garí · Narciso R. De León Rodríguez · Antonio Rey Roque
Julián Sarria González · Migdalia Torres del Toro · Jorge Luis Mazaira Fernández
Franklin Pérez González · Eduardo R. Bravo de las Casas

Introducción

El concepto de límite de una función siempre ha sido considerado básico para una comprensión efectiva del Cálculo y del Análisis Real (Ervynck,1981); sin embargo, estudios como los de (Davis & Vinner,1986), (Sierpinska,1987), (Cornu,1983,1991), (Artigue,1992,1996,1998), (Willians,1991) y (Dibut, 1999), confirman que son múltiples los obstáculos que entorpecen la comprensión del concepto de límite, lo cual logran un reducido grupo de estudiantes cuando asisten a un curso de Cálculo en el bachillerato o en la Universidad.

Las concepciones sobre el límite de una función, por lo general, se confunden entre los siguientes modelos (Willians,1991) : si una función puede alcanzar su límite, si un límite es realmente una cota, si los límites son procesos dinámicos u objetos estáticos, o si los límites están relacionadas al concepto de movimiento. Estos modelos ofrecen concepciones incompletas o alternativas del concepto de límite que están cercanas a los procesos de límite sostenidas por la comunidad de matemáticos previos a la definición rigurosa dada por Cauchy en términos de epsilon-delta.

El objetivo del estudio que se presenta está centrado en identificar los "modelos no formales o espontáneos" de límite de una función que tienen los estudiantes del primer año de la titulación de Economía de la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez".

DESARROLLO

Caracterización del Estudio.

La caracterización del estudio está referida a los siguientes aspectos: caracterización del grupo de estudiantes participantes en el estudio, métodos empleados y análisis de los resultados.

Caracterización del Grupo de Estudiantes.

El estudio se realizó durante los meses de octubre-noviembre del año 1999 con los estudiantes del primer año de la titulación de Economía de la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez", que cursaban la asignatura Matemática I y en su Plan Temático se encuentra el tema "Límite y Continuidad de una Función Real de Variable Real". El grupo de estudiantes está conformado por dos sub-grupos el E-11 y el E-12. En la siguiente tabla se presenta la cantidad de estudiantes que hay en cada sub-grupo y cuántos participaron en el estudio :

Sub-Grupo	M	P	%P/M
E-11	**22**	**18**	**81.8**
E-12	**25**	**23**	**92,1**
Total	**47**	**41**	**87,2**

<u>Simbología :</u>

M: Matrícula de cada Sub-Grupo.
P : Participantes en el Estudio.
%P/M : Por ciento de participantes en el estudio contra la matrícula.

Métodos Empleados.

Con el propósito de identificar los modelos de límite que tienen los estudiantes, a los 41 participantes en el estudio se les aplicó un cuestionario al finalizar la impartición del tema (Anexo #1). Este cuestionario consta de tres secciones . La sección A se caracteriza por solicitarle a los estudiantes que respondieran verdadero (V) o falso (F), a seis (6) planteamientos relacionados con "modelos de límite"; en esta dirección se seleccionaron los modelos utilizados por (Williams,1991), en un estudio anterior. En la sección B, debían seleccionar cuál de los planteamientos de la sección A describe mejor el concepto de límite, en esta sección tenían una opción de no seleccionar ninguno de los planteamientos de la sección

A. En la sección C se le formuló a los estudiantes la siguiente pregunta : "Describa en pocas palabras lo que Ud. entiende sobre el concepto de límite de una función en un punto. Esto es, ¿qué significado tiene decir que el límite de una función toma el valor L cuando x tiende o se acerca al punto Xo? " . Esta pregunta se consideró como el principal indicador de los modelos de límite que tienen los estudiantes, usando las respuestas a las preguntas de las Secciones A y B para ayudar a clasificar casos dudosos.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.

Análisis de los Resultados de la Sección A.

De los ítems cuyo criterio de verdad son verdaderos (1, 3 y 6) se pueden resumir los siguientes resultados. La mayoría de los estudiante reconocen al ítem 6 como una definición "formal" de límite con el 88% de respuestas verdaderas, lo cual se refleja muy similarmente en ambos sub-grupos con el 89% en el sub-grupo 11 y el 87% en el sub-grupo 12. El ítem 1 representa al límite como un modelo dinámico-teórico lo cual reconocieron los estudiantes con el 72% de respuestas verdaderas, con resultados un poco diferenciados entre los dos sub-grupos : 78% en el sub-grupo 11 y el 65% en el sub-grupo 12. El ítem 3 representa un modelo de límite formal muy similar al del ítem 6; sin embargo, sólo el 56 % de los estudiantes consideraron este ítem verdadero, cuando debió tener resultados similares al del ítem 6. Este resultado nos indica que el aspecto formal de la definición , cuando se escribe literalmente y no simbólicamente, los confunde al utilizar variantes de la misma , lo que se puede interpretar como que no tienen una clara comprensión de este concepto.

Con relación a los ítems que tienen un criterio de verdad falso (2, 4 y 5), es significativo señalar :

Sólo el ítem 4, el "límite como un modelo de no alcanzable", tuvo una respuesta alta de falso con el 72%, con un comportamiento no muy diferenciado entre ambos sub-grupos, 67% en el sub-grupo 11 y el 74% en el sub-grupo 12. Este resultado refleja la aceptación de la mayoría de los estudiantes que el límite de una función es un valor que sí es posible alcanzar. El ítem 5, el "límite como modelo de aproximación arbitraria" tuvo un 24% de respuestas falsas, resultado este que refleja la confusión que tienen los estudiantes con respecto a los procesos de aproximación que están presentes en el concepto de límite. El resultado de un 22% de respuestas falasas al ítem 2, el "límite como una cota o frontera", refleja lo que seconoce como concepciones espontáneas de los estudiantes con relación al concepto de límite provenientes de su experiencia cotidiana (Azcárate, 1996), así la palabra límite la interpretan como "no sobrepasable", pero también se puede interpretar como : no se sobrepasa pero se alcanza, ni se sobrepasa ni se alcanza, un punto al que uno se aproxima sin alcanzarlo, el final.

Análisis de los Resultados de la Sección B

La respuesta a la pregunta, ¿cuál de los ítems de la sección A representaba mejor el concepto de límite de una función?, nos permite expresar las siguientes consideraciones :Los estudiantes del sub-grupo 11 consideran que el ítem que refleja mejor el concepto de límite es el 6 con un 44%, significativamente inferior a la respuesta de verdadero dada por ellos a este ítem en la Sección A (89%). El ítem 3 lo reconocieron como el modelo que mejor refleja en concepto de límite sólo el 6% inferior en un 33% a lo expresado en la sección A. Si sumamos la cantidad de estudiantes del sub-grupo 11 que consideran que los ítems 3 ó 6 son los modelos que mejor reflejan el concepto de límite, nos arroja la cantidad de 9 que representa el 50%. El comportamiento en el sub-grupo 12 es el siguiente : consideran al ítem 6 como el modelo que mejor refleja el concepto de límite con un 48% , inferior en un 39% con lo expresado por ellos sobre este ítem en la Sección A. El 26% considera que el ítem 3 es el mejor modelo que refleja el concepto de límite, inferior en un 44% a lo expresado por ellos en la Sección A. Si consideramos la cantidad de estudiantes de este sub-grupo con mejor criterio sobre los ítems 3 ó 6, estos representan el 74%. Los estudiantes de ambos sub-grupos consideran que los ítems que mejor reflejan el concepto de límite son el 3 (17%) y el 6 (44%), lo cual es cierto pero no se corresponden estos resultados con las respuestas dadas a estos ítems en la Sección A; así por ejemplo, las respuestas verdaderas al ítem 3 de la Sección A fueron del 56% superior en un 39% a la reflejada en esta Sección B, mientras que las respuestas de verdadero al ítem 6 de la Sección A fueron del 88% superior en un 44% a la de esta sección. El 61% de los estudiantes consideran que los ítems 3 ó 6 son los que mejores reflejan el concepto de límite.

Análisis de los Resultados de la Sección C

Las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta : Describa en pocas palabras lo que Ud. entiende sobre el concepto de límite de una función en un punto. Esto es, ¿qué significado tiene decir que el límite de una función toma el valor L cuando x tiende o se acerca al punto Xo ? , nos permiten expresar que : En el sub-grupo 11 sólo tres estudiantes (17%) pudieron ofrecer un significado correcto a la pregunta formulada; o sea, si comparamos este resultado con la respuesta dada por estos estudiantes a la pregunta de la Sección B, ¿cuál era el ítem de la Sección A que mejor reflejaba el concepto de límite?, que fue del 50% entre los ítems 3 y 6 (definiciones formales de límite), podemos inferir que la gran mayoría de los estudiantes de este sub-grupo no tienen una comprensión clara de este concepto. El sub-grupo 12 tuvo el siguiente comportamiento : once estudiantes (48%) ofrecieron un significado correcto a la pregunta de esta sección. Al comparar este resultado con la respuesta dada por estos estudiantes a la pregunta de la Sección B, que fue del 74% entre los ítems 3 y 6 (definiciones formales de límite), podemos inferir que aunque hay una diferencia del 26% entre ambos resultados, la tendencia nos indica que los estudiantes de este sub-grupo tienen una comprensión adecuada del concepto de límite. Considerando ambos sub-grupos, se observa que sólo catorce estudiantes (34%) pudieron ofrecer un significado correcto a la pregunta de esta sección. Considerando que la pregunta formulada en esta Sección C es el principal indicador de los Modelos de Límite planteados, e independientemente que la respuesta a la pregunta de la Sección B fue del 63% entre los ítems 3 y 6, podemos inferir que los estudiantes tienen una deficiente comprensión del concepto de límite de una función.

CONCLUSIONES

El estudio presentado nos permite tener una información inicial sobre cuáles son los "modelos de límite " que tienen los estudiantes de la titulación en Economía de la Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez" al concluir el estudio del tema. Los resultados alcanzados permiten plantear : Entre los dos "modelos formales de límite" (ítems 3 y 6 de la Sección A), es el modelo de la pregunta 6 el que más reconocen como definición formal de límite con el 88% de estudiantes que lo consideran verdadero contra el 56% alcanzado en la pregunta 3; sin embargo, este resultado contradice en cierta forma al alcanzado a la pregunta formulada en la Sección C donde sólo el 66% pudo dar un significado correcto a la pregunta "Describa en pocas palabras lo que Ud. entiende sobre el concepto de límite de una función en un punto; esto es, ¿qué significado tiene decir que el límite de una función toma el valor L cuando x tiende o se acerca a Xo ?" . Este resultado se puede interpretar como que no hay una comprensión completa del concepto de límite, y donde el 34% no fue capaz de al menos considerar los ítems 3 ó 6 como respuesta a la pregunta de la Sección C. Los "modelos de límite no formales" se comportaron de la siguiente forma : El 71% de los encuestados considera al límite como un "modelo dinámico-teórico" (ítem 1 de la Sección A), lo cual refleja un componente correcto del concepto; sin embargo, el 73% considera al límite como una cota o frontera (ítem 2 de la Sección A) lo cual es una apreciación falsa del concepto. El 71% tiene una apreciación correcta de que el límite es un resultado que se puede alcanzar (ítem 4 de la Sección A), y el 73% considera al límite como un modelo de aproximación a arbitraria lo cual es falso (ítem 5 de la Sección A). Los resultados anteriores sugieren que la comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes, desde un punto de vista formal, requiere una instrucción cuidadosa y explícita, donde se deben explicar detalladamente los diferentes modelos de límite aquí expuestos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M., & Ervynck, G. (Eds.).(1992). ***Procceedings of Working Group 3 on students difficulties in calculus.*** ICME-7. Université de Sherbrooke. Canadá.

Artigue, M. (1996). *Teaching and Learning Elementary Analysis.* Actas ICME-8. Sevilla. España.

Artigue, M. (1998). *L´ Évolution des Problematiques en Didactique de L´ Analyse.* Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.18 (2). pp.231-262.

Cornu, B.(1983) ***Apprentissage de la notion de limits: conceptions et obstacles.*** **(thése de doctorat)**. Université de Grenoble I.

Cornu, B. (1991). ***Limits.*** En Tall, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking , pp.153-166. Dordrecht: Times Academic Press.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). ***The notion of limit : Some seemingly unavoidable misconception stages.*** **The Journal of Mathematical Behavior, 5, pp. 281-303.**

Dibut, L. (1999). ***El Hipertexto como recurso cognitivo en el proceso de formación de los conceptos de límite y continuidad.*** Tesina defendida en la Universidad de Oviedo, España.

Ervynck, G. (1981). *Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function.* Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education, pp. 330-333.

Sierpinska, A. (1987). ***Humanities students and epistemological obstacles related to limits.*** Educational Studies in Mathematics, 18, pp.371-387.

Williams, S R. (1991). *Models of limits held by college calculus students.* Journal for Research in Mathematics Education. V.22 (3), pp.219-236.

ANEXO 1

UNIVERSIDAD DE CIENFUEGOS "CARLOS RAFAEL RODRÍGUEZ"

Facultad : Ciencias Económicas y Empresariales. Dpto. : Matemática Básica y Aplicada.
Carrera : Economía. Año : 1ro. Curso : 1999-2000.
Asignatura : Matemática I. Grupo : ______ Fecha : 25/10/1999.

Cuestionario sobre el Concepto de Límite de una Función en un Punto.

A. Marque con un círculo si son verdadero (V) o falso (F) los siguientes planteamientos :

1. V F . Un límite describe el movimiento de una función cuando "x" se mueve hacia cierto punto.
2. V F . Un límite es un número o punto al cual no puede llegar una función.
3. V F . Un límite es un número tal que los valores "y" de una función pueden ser obtenidos arbitrariamente acotados restringiendo los valores de "x".
4. V F . Un límite es un número o punto en que la función se acerca pero nunca llega.
5. V F . Un límite es una aproximación que puede ser hecha como Ud. desee.
6. V F . El valor límite de una función describe el comportamiento o tendencia de una función, cuando los valores de "x" se aproximan arbitrariamente a cierto punto.

B. ¿Cuál de los planteamientos anteriores describe mejor el límite de una función en un punto?.
Circule sólo uno : 1 2 3 4 5 6 Ninguno.

C. Describa en pocas palabras lo que Ud. entiende sobre el límite de una función en un punto. Esto es, ¿qué significado tiene decir que el límite de una función toma el valor L cuando x tiende o se acerca al punto x_0?.

GRUPO 5
RECURSOS DIDÁCTICOS EN EL AULA

PUZZLES: UN RECURSO POLIVALENTE EN LA E.S.O.

ANA GARCÍA AZCÁRATE

1. INTRODUCCIÓN

Al presentar los rompecabezas como recurso para nuestras clases en la etapa 12-16, estamos defendiendo en realidad, la utilización de todo tipo de juegos en clase de matemáticas. Desde hace mucho tiempo, utilizar materiales lúdicos nos ha parecido un buen método para conseguir despertar el interés de los alumnos y alumnas de esas edades. Con los juegos, además de motivar a los estudiantes e inducirles a participar activamente, se pueden trabajar todo tipo de contenidos matemáticos, tantos conceptuales como procedimentales.

Si buscamos en cualquier diccionario, un puzzle (o rompecabezas en castellano) se define como "un juego de paciencia que consiste en componer determinada figura combinando cierto número de pedacitos de cartón, madera, plástico, etc., en cada uno de los cuáles hay una parte de la figura" Y si leemos además la definición de la palabra en sentido figurado y familiar, aparece: "cualquier cosa que entraña dificultad en su resolución".

Efectivamente, para resolver un puzzle, es necesario paciencia y para acabarlo hay que enfrentarse a ciertas dificultades. En los rompecabezas que proponemos estas dificultades estarán ligadas en general a contenidos matemáticos que harán que, al utilizarlos en clase, el profesor o profesora utilice el puzzle como juego de conocimientos[1]

Los puzzles que aportamos, constan de un soporte geométrico dividido en partes; con esas partes se debe construir formas atendiendo a criterios geométricos, numéricos o una mezcla de los dos. La finalidad será siempre por lo tanto obtener una figura final que tenga ciertas características:

- representa una escena conocida.
- cumple ciertas propiedades de simetría, geométricas etc..

2. VENTAJAS DEL SOPORTE

La primera ventaja de utilizar el recurso de los puzzles como juegos de conocimientos es que la mayoría de los estudiantes conocen las reglas del juego tradicional y les es fácil empezar a jugar incorporando los elementos nuevos introducidos por el profesor. Cualquier alumno ha jugado anteriormente con rompecabezas variados y conocen determinadas estrategias asociados con ellos (empieza con los bordes etc.)

Otra de las grandes ventajas de este tipo de recurso es su facilidad de obtención. Uno de los problemas de la utilización de juegos en la E.S.O., es que en España sigue siendo difícil adquirir en el mercado juegos didácticos para esas edades. Y resaltamos esta situación a pesar de existir algunas loables iniciativas como la del Proyecto Sur. Pero además este tipo de recursos, en general de importación, resultan caros para el profesorado que tiene que hacerse con las cantidades adecuadas a toda un aula.

Los rompecabezas son fácilmente accesibles. Con los medios tipográficos y de informática al alcance de muchos, se pueden obtener sin grandes dificultades, los puzzles necesarios para un trabajo en el aula.

Una forma de conseguir las piezas de un rompecabezas es, una vez escogido o diseñado el juego, dibujarlo en el ordenador y sacarlo en cartulina que posteriormente se plastifica.

En otros casos, es mejor coger planchas de plástico, suficientemente rígidas para que el puzzle no se tuerza, pero que sin embargo se puedan cortar con simples tijeras.

En la Feria de las Ideas, se presentarán ejemplos de rompecabezas elaborados siguiendo estos dos métodos. A lo largo de los años, hemos desechado los puzzles en cartulina, fáciles de hacer pero de vida efímera en manos de nuestros estudiantes, y puzzles con soporte de madera, contrachapado etc. por ser de elaboración demasiada laboriosa.

3. ¿QUÉ CONTENIDOS MATEMÁTICOS SE PUEDEN TRABAJAR CON LOS PUZZLES?

Hemos empezado la comunicación hablando de los puzzles como un recurso polivalente. En efecto con rompecabezas, podemos trabajar contenidos de números, de álgebra y de geometría. Para

[1] Los juegos se suelen clasificar en juegos de conocimientos cuyos contenidos son algunos de los tópicos clásicos de las matemáticas, y, los juegos de estrategia donde lo que se intenta poner en marcha son procedimientos de resolución de problemas.

cada uno de estos apartados, presentaremos uno o dos ejemplos de forma rápida (para tener más información, será necesario contar con el espacio que proporciona la Feria de las Ideas).

3.1 NÚMEROS.

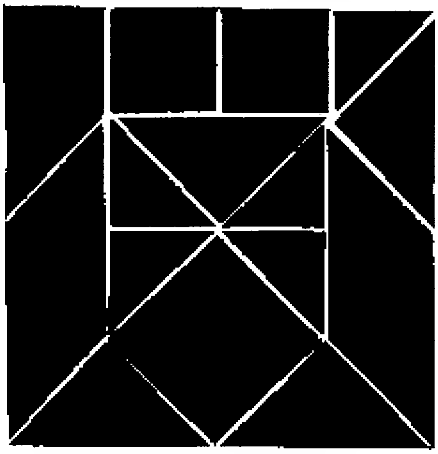
3.1.1 Operaciones con números enteros; la regla de los signos.

Los amigos del hombre.

Es un verdadero puzzle. El alumno recibe las 16 piezas, juntas pero desordenadas, debe realizar las operaciones propuestas en cada pieza, recortar las piezas y colocar cada pieza en su lugar correspondiente de la hoja soporte.

3.1.2 Operaciones con fracciones: suma

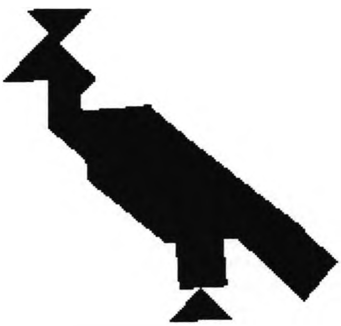
El tangram del zoológico



En esta actividad, se repasa el concepto de fracción como parte de un todo,

aprovechando las posibilidades que ofrecen las piezas de los Tangram. Hemos escogido uno de los modelos de Tangrams menos conocidos, pero que tiene la ventaja de que permite obtener fracciones de denominadores 2, 4, 8, 16 y 32.

Cada alumno debe primero dibujar en su trozo de plástico (10x10) y recortar las 15 piezas del Tangram. Una vez preparadas las quince piezas del Tangram, sea en clase o previamente en su casa, los alumnos contestarán de forma individual a las preguntas que se plantean.



La primera parte consiste en averiguar qué parte del cuadrado grande ocupan las 15 piezas del Tangram. A continuación, los alumnos y alumnas deben formar primero las figuras que se les propone, el chino, el buitre y el pavo real para después obtener, sumando, la parte del todo que representa a su vez cada figura.

La última parte, consiste en realizar el proceso inverso, se trata de pedir que se formen con las piezas del tangram, figuras que ocupen una parte del todo determinada del todo, por ejemplo una figura, que sea 14/32.

3.2 ALGEBRA

Resolución de ecuaciones de primer grado sencillas.

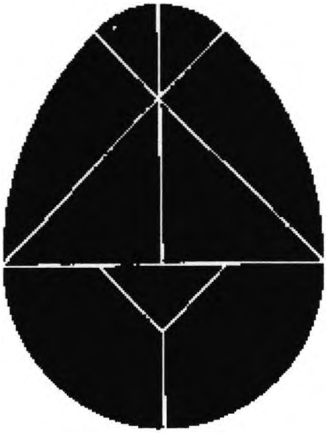
El Puzzle Blanco

Los alumnos reciben las 16 fichas desordenadas de un rompecabezas. Cada ficha tiene en cada uno de sus cuatro lados una ecuación de primer grado. Lo primero que tiene que hacer es resolver estas ecuaciones y escribir al lado el valor de las soluciones. Una vez obtenidas todas las soluciones, debe recortar las 16 fichas e intentar formar un nuevo rectángulo igual al anterior, pero en el que las ecuaciones que estén juntas en los bordes sean equivalentes.

3.3 GEOMETRÍA

3.3.1 Cálculo de área de figuras planas. Polígonos y circunferencia

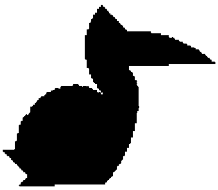
El huevo maravilloso



- Investiga cómo se ha construido este "huevo". Para eso utiliza tu regla y tu compás.

- Construye en tu trozo de plástico (10x10), un "huevo" parecido.

- Calcula el área de las 9 piezas del puzzle.



- Juega con tu puzzle, obteniendo algunas de las figuras propuestas. Calcula sus perímetros.

3.3.2 Teorema de Pitágoras. Triángulos.

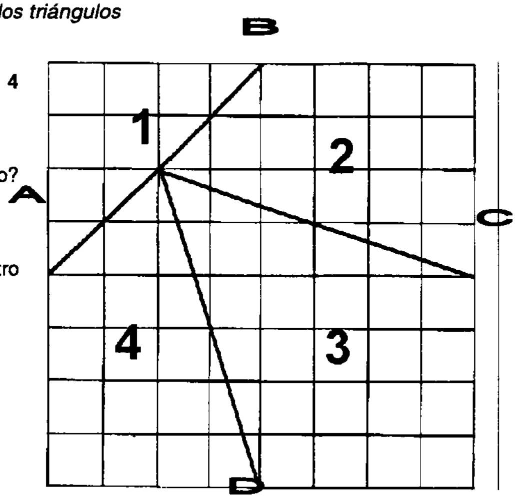
El puzzle de los triángulos

Se ha dividido esta cuadricula 8x8 de lado 1 en 4 piezas para formar un puzzle.

a) Recorta las cuatro piezas.
- Con las piezas forma un triángulo. ¿Es equilátero? Halla su perímetro.

b) Corta por las líneas AD y BC.
Con estas 6 piezas puedes formar ahora otro triángulo. ¿De qué tipo es?

- Halla su perímetro.



4. CONCLUSIONES

La introducción de juegos como los rompecabezas puede servir para eliminar el bloqueo inicial de gran parte de nuestros alumnos, sortear su rechazo hacia todo lo matemático y hacer que estos alumnos y alumnas lleguen a participar en nuestras clases.

EL VIDEO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

GRUPO DE TRABAJO: VISIÓN MATEMÁTICA II
ANA BUENO JIMÉNEZ · Mª CARMEN RUIZ ABAD · CRISTÓBAL CALVENTE IGLESIAS
Mª CARMEN VICENTE GONZÁLEZ · CRISTÓBAL NARANJO BERROCAL

DESCRIPCIÓN DE LOS OBJETIVOS

El seminario permanente "*El video en al aula de Matemáticas*", del CEP de la Axarquía, Málaga,* nació en el curso 1998/99 con el objetivo general de estudiar la utilización de los videos de contenido matemático. Rápidamente se concretaron tres objetivos específicos:

El primero fue el de establecer el estado de los fondos videográficos de este CEP. Deseábamos determinar si las condiciones de las copias permitían su uso y si su contenido era aplicable, de algún modo, en la Enseñanza Secundaria. Como consecuencia de este estudio se impulsó la adquisición de algunas cintas con la intención de reponer copias en mal estado o completar colecciones ya iniciadas.

Entendimos que para aumentar la asimilación de los contenidos, el alumno tiene que adquirir una posición crítica y activa, en cierto sentido opuesta al concepto de mero espectador. Nos pareció imprescindible que el tiempo dedicado al visionado de un video estuviera acompañado de ciertas actividades tendentes a reforzar este papel activo. Estas actividades deberían facilitar el que el video se asumiera, por los alumnos, como un elemento de trabajo más y no como un periodo de recreo tutelado por el televisor. Por lo tanto, el segundo objetivo fue el de preparar material de trabajo complementario a dichos videos para su uso en el aula. Además de reforzar los conocimientos adquiridos perseguíamos, con este material, poder evaluar el aprovechamiento real de nuestros alumnos de esas proyecciones.

Un tercer objetivo, quizás común a todos los Seminarios Permanentes, era el de fomentar el intercambio de experiencias docentes entre sus componentes. Los diferentes criterios a la hora de determinar si un material es utilizable en un aula de nuestros niveles; la elaboración del material auxiliar; la utilización de los medios audiovisuales o informáticos precisos para estas tareas..., se constituyen en motivos para establecer el diálogo sobre aspectos concretos de nuestra labor profesional.

Este diálogo no conduce necesariamente a una uniformidad del trabajo realizado, pues nuestros institutos, sus disponibilidades técnicas y los alumnos siguen siendo diversos. Por otra parte la composición del Seminario ha variado, en parte, de un curso a otro. Nuestro deseo de mantener las aportaciones originales y de no forzar la mencionada diversidad, nos ha llevado a no adoptar criterios de unificación en cuanto a los formatos de los documentos elaborados.

PROCESO DE TRABAJO

Se encontró una gran diversidad en el material videográfico disponible en cuanto a contenidos, procedimientos expositivos y recursos expresivos. Con la intención de concretar, dentro de una determinada línea expositiva, se optó por seleccionar la colección de vídeos "*Mas por menos*" atendiendo a dos criterios: Su contenido se ajustaba en gran parte a los que tenemos establecidos para tercero y cuarto de ESO; la estructuración de cada capítulo permite la aplicación de diversos modos de trabajo. Estos modos de trabajo se establecen atendiendo al momento idóneo para proyectarse:

i. En la iniciación de una unidad didáctica: como motivación, exploración de conocimientos previos...

ii. Durante el desarrollo de la unidad didáctica. En este caso se observó que permitían la reproducción aislada de escenas, montadas alrededor de motivos o cuestiones concretas.

iii. O bien al final de la unidad didáctica, como resumen para facilitar una última evaluación del aprovechamiento del alumno de las tareas realizadas.

Por lo tanto, la colección, en su conjunto, se adapta a los distintos requerimientos que cada profesor pueda formular en función de las necesidades que su aula concreta le establezca.

Otro aspecto a considerar es el del orden de presentación del video y de las actividades: En algunos casos las actividades pueden diseñarse para dirigir la atención del alumno hacia determinadas cuestiones que van a exponerse en la pantalla, son, por lo tanto previas; en otros casos, las actividades serán posteriores al visionado y explotarán los caminos abiertos durante la proyección.

Las actividades que cada profesor ha diseñado se adaptan, pues, a los diferentas modos descritos y responden a la diversidad de situaciones y criterios previsibles: Exploración; adquisición de conocimientos, conceptuales o procedimientales, y evaluación.

Finalmente se consideró conveniente conocer la opinión de los alumnos sobre esta metodología, el binomio vídeo-actividades. A tal objeto se preparó una encuesta en la que se les pedía una valoración sobre el contenido del video, las actividades realizadas, el grado de relación con el tema desarrollado en clase y, por último, si les parecía provechoso para su proceso de aprendizaje.

* Para contactar con el grupo de trabajo se pueden utilizar las direcciones e-mail siguientes karmen3@teleline.es o bien ccalvent@teleline.es

Para nuestro trabajo hemos contado con los medios disponibles en el CEP de la Axarquía, (cintas de video, local de reuniones), con los videos y televisores de nuestros Institutos. La elaboración del material ha sido variada empleándose procesadores de texto (Word97, Wordperfect6) de dibujo vectorial (Corel Draw 9) y alguno de tratamiento de imágenes previamente *scaneadas*. Junto a esto, la máquina de escribir, las tijeras y la cola se han vuelto a manifestar como herramientas todavía validas en la confección de material útil para el aula.

Los miembros de este grupo de trabajo consideramos que nos queda una tarea pendiente. Los resultados obtenidos tienen un carácter individual, específico, de cada compañero y cada aula. Nos planteamos ahora la posibilidad de estudiar la incorporación de todo el material a un único diseño de aula que permitiera el desarrollo del currículum alrededor del uso del video. Su elaboración de forma unitaria y coherente, de modo que pudiera desarrollarse en su totalidad en *la clase* de cualquier miembro del grupo o por terceros compañeros que decidieran incorporarse al proyecto.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD

El programa número 5 de la serie "*Mas por menos*" está dedicado a las cónicas. Las características de este video permiten su proyección tanto en el Bachillerato como en el último curso de la ESO, a modo de ampliación de conocimientos en el último curso. En cualquier caso, se estudian los aspectos constructivos de estos lugares geométricos, por lo que se entiende que las actividades a diseñar deben ser de esa índole.

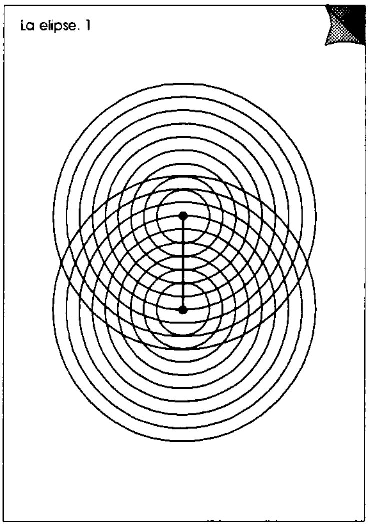
Tras una primera proyección en el que el alumno toma una idea general del contenido, se vuelve a proyectar la primera parte, dedicada a la elipse. A continuación se entrega a los alumnos las fichas de trabajo del día. Los alumnos dispondrán de material de dibujo, cartón chinchetas, cordel...

En este caso, la primera ficha incluye las cuestiones que se plantean al alumno y las siguientes son plantillas destinadas a facilitar el desarrollo de la actividad

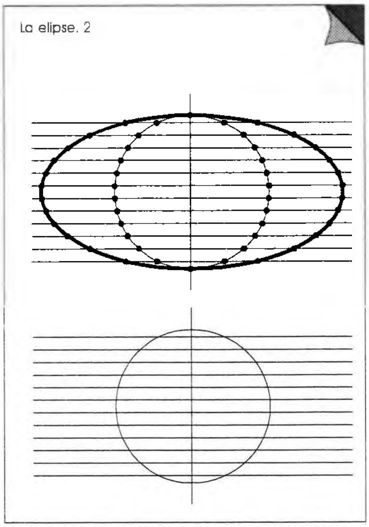
1. *De las cónicas vistas en el vídeo: ¿cuáles te son desconocidas?, ¿en qué situación conocías el resto?*
2. *Vamos a centrarnos en la elipse:*
   a) *Construye, usando las retículas adecuadas, varias de ellas.*
   b) *¿Conoces otros métodos de construcción?. Enuméralos.*
   c) *Sabes que significa el método del jardinero?. Habla sobre él.*
   d) *Construye otras elipses usando el método de los dobleces.*
   e) *Usar el CABRI (Cuando se disponga de acceso a dicho programa).*

Con cada una de las siguientes plantillas el profesor da las explicaciones complementarias oportunas.

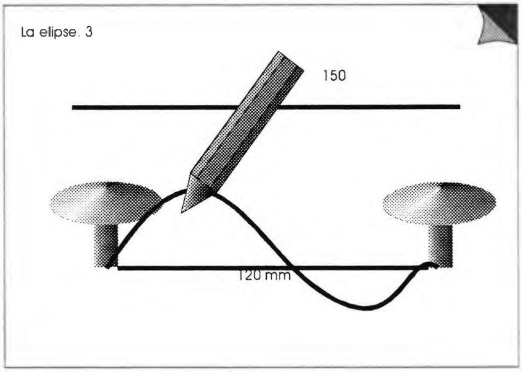
Para la primera construcción, *la elipse.1*, el alumno debe ir situando, mediante las intersecciones de las circunferencias, puntos tales que la suma de las distancias a los focos se a constante.



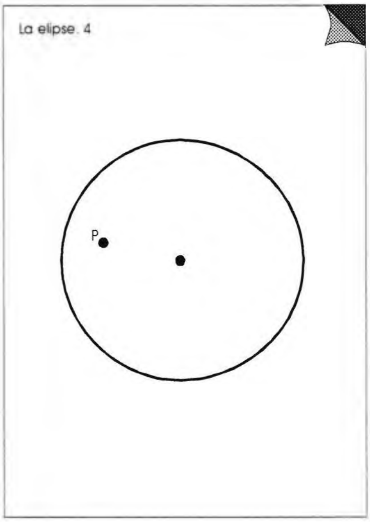
En *la elipse. 2*, siguiendo el ejemplo de la primera construcción, en la segunda circunferencia, el diámetro *AB* se divide, por ejemplo en 10 partes y se trazan rectas perpendiculares al mismo por los puntos de división.
Al punto *P* de la circunferencia se le hace corresponder el punto *P'* de modo que *MP = PP'*. Este proceso de duplicación se repite para los restantes puntos de la circunferencia. Uniendo los puntos así obtenidos aparece una elipse. En el ejemplo se ha multiplicado por 2 las distancias, se invitará a los alumnos a hacerlo por 1'25; 3, ...



En *la elipse.3* se ilustra *el método del jardinero*: Si fijan en el suelo dos estacas y a ellas se atan los extremos de una cuerda, cuya longitud sea mayor que la distancia entre dichas estacas. Manteniendo la cuerda tensa y con la ayuda de un punzón, dibuja la curva deslizando dicho punzón por el suelo. Ahora el alumno debe hacerlo con un cartón, dos chinchetas, un hilo y un lápiz.
Para dibujar la elipse mediante dobleces, haremos lo siguiente: Dibujamos una circunferencia y un punto *P* dentro de ella, ver *la elipse.4* . A continuación, mediante un doblez del papel, haremos coincidir dicho punto, con un punto de la circunferencia; cuando este proceso se haya repetido varias veces obtendremos una elipse, cuyos focos serán el punto *P* y el centro de la circunferencia.



La última actividad es la utilización del CABRI para construir una elipse. Dibujamos dos puntos F_1 y F_2, que van a ser focos de la elipse que vamos a construir. Con centro en F_1 trazamos una circunferencia cuyo radio sea mayor que la distancia entre F_1 y F_2. Activamos *punto sobre objeto* para definir un punto *C* de la circunferencia y trazamos los segmentos que unen este punto con F_1 y F_2,. Con la herramienta *mediatriz* dibujamos la mediatriz del segmento CF_2 y definimos como *E* el *punto de intersección* de esta recta con el segmento CF_1. Activamos *traza* para el punto *E* y *animación* para el punto *C*, así cuando el punto *C* recorre la circunferencia, el punto *E* describe la elipse de la figura, también se puede dibujar la elipse sin activar animación, desplazando el punto *C* con el puntero por la circunferencia. Naturalmente esta última actividad está supeditada a la disponibilidad de los medios informáticos suficientes.



GRUPO 6
TRATAMIENTO DE LA DIVERSIDAD EN EL AULA

TRABAJANDO SOBRE PROYECTOS: UNA PROPUESTA PARA EL ÁMBITO CIENTÍFICO Y TECNOLÓGICO

Mª Dolores Rodríguez Soalleiro · Rosa Mª Sanz Rodríguez

Se trata de exponer una forma de trabajar la asignatura "Ámbito Científico y Tecnológico"del Programa de Diversificación Curricular, que se está llevando a cabo en el IES Mª Zambrano de Leganés, Madrid.

En ella intervienen los alumnos como protagonistas de su propio aprendizaje en cuanto a que han de buscar y organizar la información por sí mismos; con lo que se afianza su autoestima y confianza en sus propias posibilidades. Posteriormente trabajando en grupo se centran los temas objeto de estudio. El profesor actúa como director de la tarea.

Expondremos algunos de los proyectos trabajados con su programación: objetivos, contenidos de Matemáticas, Ciencias de la Naturaleza y Tecnología y transversales, correspondientes e insistiremos en la metodología de trabajo que nos parece bastante innovadora y futurista.

Los proyectos que presentamos forman parte de una serie de unidades o proyectos didácticos que se llevan impartiendo durante los últimos años en el programa de diversificación curricular, y que se han recogido en el libro: Ámbito Científico y Tecnológico I con sus correspondientes claves para el profesorado, editado por Proyecto Sur y está dedicado especialmente al profesorado que haya de impartir clase de la asignatura de Ámbito Científico y Tecnológico dentro del Programa de Diversificación Curricular.

El libro del alumno/a de 3º de Diversificación consta de 5 proyectos: El Cangrejo de mar, El Geranio, El Tabaco, Las Basuras domésticas y La Nutrición. Estos temas no están elegidos al azar, con ellos se trata de hacer un barrido de los contenidos del Ámbito Científico y Tecnológico para un programa de diversificación curricular a dos años y para el curso 3º ESO. Se tratan desde una perspectiva globalizadora en torno a temas de interés para los alumnos y alumnas. En ocasiones se les puede proponer elegir entre varias opciones. Tales temas se presentan a los alumnos y alumnas como proyectos de trabajo o de investigación.

Consideramos que se trata de temas de interés para los alumnos y alumnas debido a la utilidad para su vida futura. Destacan contenidos transversales como: Educación Ambiental, Educación del Consumidor, Educación para la Salud, etc. porque consideramos primordial una educación centrada en valores.

De entre los contenidos, se da prioridad a los procedimentales y actitudinales.

Los proyectos didácticos son sólo una parte de los puestos en práctica en el aula y han sido elaborados tras la experiencia de seis cursos impartiendo clase a alumnos y alumnas de diversificación con problemáticas escolares y familiares muy diversas y con intereses y expectativas personales muy distintas. Esto nos ha permitido elaborar unos materiales y decidir una forma de trabajo que nos parece satisfactoria.

Con las claves para el profesorado pretendemos que éste disponga de una guía a la hora de abordar las clases en torno a los proyectos desarrollados en el libro del alumno. Lo hemos dividido en dos partes diferenciadas:

En la primera parte figura nuestra propuesta curricular para el programa de diversificación curricular. En ella se especifican objetivos, contenidos y criterios e instrumentos de evaluación, recursos, y metodología.

En la segunda parte mostramos la programación para cada uno de los proyectos que figuran en el libro del alumno/a: objetivos, contenidos de Matemáticas, Ciencias de la Naturaleza y Tecnología, e indicaciones sobre material de apoyo incluida bibliografía. Incluimos una posible prueba de evaluación que sin duda, puede resultar útil.

Los recursos utilizados son muy variados: información textual, numérica y gráfica, medios audiovisuales, medios informáticos, material de laboratorio, etc. Se sugiere a menudo utilizar los medios aportados por Ayuntamientos, Comunidades autónomas, y otros organismos de interés tanto a nivel local como nacional para poder utilizar datos locales, mapas guían, normativa vigente, servicios de gestión municipal, etc.

Los alumnos y alumnas pueden utilizar libros de texto de Matemáticas, Física y Química o Ciencias Naturales y Tecnología que conserven de cursos anteriores.

Los temas propuestos son los mismos para todos los alumnos y alumnas del grupo, por ello se han buscado temáticas de manera que todos los alumnos y alumnas puedan estar interesados por ellos, si bien hay ejercicios de diferente grado de dificultad y hay que esperar que algunos alumnos y alumnas no los sepan resolver de manera autónoma; para estos alumnos y alumnas el profesor/a debe preparar actividades de apoyo de las áreas en las que fallen y darles pistas secuenciándoles las tareas.

El trabajo es muy efectivo cuando dividimos a los alumnos y alumnas en grupos de 4. La disposición de los grupos de trabajo será en un principio de su elección, después se buscará el apoyo entre diferentes alumnos y alumnas con diferentes problemáticas respecto de sus habilidades intelectuales.

La atención del profesor/a se debe centrar en apoyar cuestiones básicas de lenguaje escrito, oral o numérico, organización del trabajo... etc., en alumnos y alumnas con mayor necesidad de atención y apoyando en la profundización de los temas, mejora de la organización personal o de técnicas de aprendizaje más específicas en alumnos y alumnas más aventajados.

La metodología se concreta en los siguientes puntos para cada uno de los proyectos de trabajo:

Empezar con ejercicios de motivación, comentario o crítica sobre aspectos que se vayan a trabajar.

1. Se presentan a los alumnos y alumnas las fichas de ejercicios de todo el proyecto, para que conozcan la secuencia de actividades a realizar

2. Cada ficha o unidad temática comienza con ejercicios orales o escritos de exploración de ideas previas, revisión de lo trabajado hasta ese momento en el curso, ubicación del nuevo trabajo y explicación de lo que todo alumno/a debe realizar.

3. Las actividades de desarrollo se trabajan a veces de forma individual y otras en pequeño grupo con una posterior puesta en común. Se pueden completar con actividades de reflexión, resumen de lo trabajado, recopilación final o ejercicios de toma de decisiones. Según la dinámica del grupo de alumnos y alumnas, cada profesor/a debe elegir en cada momento la respuesta más adecuada. De lo que se trata es de asegurar que los alumnos y alumnas entiendan, realicen y corrijan todos los ejercicios y le encuentren un sentido a la secuencia de actividades seguida.

4. Algunos de los ejercicios propuestos, formarán parte de la prueba de evaluación que se desarrollará al final del proyecto y, a veces, en varias ocasiones a lo largo del desarrollo del proyecto en el aula.

5. Existe un referente para el alumno/a, se trata de la elaboración del cuaderno personal en el que recogen sus opiniones personales, las del grupo de diversificación y los apuntes de las explicaciones y síntesis realizadas por el profesor/a.

Este cuaderno debe realizarse en hojas sueltas, para poder corregirlo por partes sin impedir su continuación, que el alumno/a debe ordenar, numerar y encuadernar debidamente.

1. Para la realización del cuaderno personal se pueden establecer unas normas mínimas como son: realización de todas las actividades, orden, presentación de un índice del cuaderno para cada tema, puntualidad, limpieza, correcta expresión escrita... etc.

2. Creemos que el profesor/a debe leer, corregir y calificar todos los cuadernos de todos los alumnos y alumnas. Según la marcha del trabajo, su calidad, la comprensión o no del alumno/a, se decide que rectifique apoyándole en la tarea. Como un problema común a la mayoría de estos alumnos y alumnas es el hábito de trabajo, conviene que el profesor/a corrija partes del cuaderno con cierta frecuencia y lo califique. De este modo el alumno/a se ve obligado a realizarlo y comprueba que se ve recompensado con una calificación.

3. La corrección individual de los cuadernos permite al profesor/a evaluar el proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas, decidir los apoyos que necesite en las áreas que conforman el ámbito y darle recomendaciones sobre organización o técnicas de trabajo. Suele ocurrir que los problemas son comunes a varios alumnos y alumnas y siempre viene bien dedicar parte de la clase a los comentarios necesarios.

4. Se exige a los alumnos y alumnas que cumplan realizando todos y cada uno de los trabajos y sus partes, incluidas las rectificaciones y nuevas elaboraciones que procedan. De la realización del trabajo se espera conseguir el aprendizaje.

5. Se le pide reflexionar sobre su proceso de aprendizaje mediante preguntas, que se incluyen casi siempre en los ejercicios de evaluación, como las siguientes:

   - ¿Qué es lo que he trabajado en este proyecto?
   - ¿Qué es lo que he aprendido que antes no supiese?
   - ¿Qué dudas me han quedado por resolver?

6. El alumno/a debe trabajar en clase y en casa. En casa debe rectificar, reescribir, completar lo realizado en clase y realizar de forma individual los ejercicios que le encomiende el profesor/a. Los padres deben conocer esto.
7. Algunos alumnos y alumnas pueden, en determinados temas, adelantar al resto con lo que le profesor/a puede proponer ejercicios de profundización o trabajos alternativos. Si se sospecha que el nivel de dificultad o de abstracción en ciertas actividades es elevado, se pueden proponer esas actividades como optativas o no obligatorias para algunos alumnos y alumnas

GRUPO 7
HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS
Y SU ENSEÑANZA

EL MÉTODO DE EXHAUSCIÓN

Mª JOSÉ MARÍN PECCI · ANTONIO GUTIÉRREZ DÁVILA · MILAGROSA COBACHO DE ALBA

BLOQUE 1: PRESENTACIÓN DEL RECURSO

El recurso que planteamos es la utilización del método de Exhausción para el cálculo de áreas y volúmenes (usando multitud de relaciones geométricas entre las figuras estudiadas) y para desarrollar la idea de convergencia y aproximación.

Con el uso de este recurso se potencian todos los objetivos curriculares del área de Matemáticas, especialmente los siguientes:

- Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados.

- Incorporar hábitos y actitudes propios de la actividad matemática.

Además de los objetivos del área se potencian otros, tales como:

1) Desarrollo de la capacidad visual y de la destreza geométrica en los alumnos.

2) Desarrollo de la capacidad de razonamiento y de pensamiento lógico, así como de la importancia de la rigurosidad en matemáticas.

3) Conocimiento y aplicación del método de Exhausción así como de múltiples propiedades relativas a ángulos, áreas, etc..., es decir, de propiedades geométricas.

4) Cálculo de áreas y volúmenes mediante el método de Exhausción.

5) Desarrollo en los alumnos de la idea de aproximación y del concepto de límite.

El método de Exhausción y los sucesivos ejemplos y ejercicios propuestos, ayudarán al alumno a desarrollar el concepto de aproximación y el de límite. Se trata de aproximar, en términos de área o volumen, ciertas figuras a partir de otras inscritas o circunscritas en la original. La forma de desarrollar la idea de límite mediante este proceso es clara, puesto que las sucesivas áreas de los polígonos inscritos irán aproximándose cada vez más al área desconocida, de forma que "en el límite" coincidirán con ella.

Concretemos a continuación, a partir de los objetivos planteados los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales que pretendemos desarrollar.

Contenidos conceptuales

- Idea de convergencia, aproximación y límite.
- Conceptos de área y volumen.
- Axioma de Arquímedes.
- Teorema de Exhausción.
- Multitud de propiedades geométricas, que serán tratadas en un apéndice para facilitarlas a los alumnos (relativo, por ejemplo, a los criterios de semejanza e igualdad de triángulos y polígonos).
- Ángulos y propiedades de los mismos (como ángulos inscritos en el círculo).
- Concepto de demostración.
- Conceptos de reducción al absurdo y otros tipos de demostración.

Contenidos procedimentales

- Aplicación del método de Exhausción.
- Procedimiento para el cálculo de áreas y volúmenes desconocidos de figuras aplicando el método de Exhausción.
- Procedimientos para la realización de demostraciones (en especial, la reducción al absurdo).
- Desarrollo de las destrezas geométricas en los alumnos (reconocimiento de la igualdad o semejanza de figuras geométricas, así como de los elementos que las caracterizan).

Contenidos actitudinales

- Capacidad visual y de visión espacial y geométrica en los alumnos.
- Desarrollo de la capacidad de razonamiento y pensamiento lógico.
- Fomentar la capacidad de verificación y cuestionamiento de alternativas.
- Conocimiento de la importancia de la rigurosidad.
- Capacidad de estudiar una figura o relación, mediante la idea de "aproximación", haciendo uso de figuras más sencillas o conocidas.

Este recurso puede ser explicado en la E. S. O. ó el Bachillerato, aunque haciendo modificaciones importantes en el contenido, en la forma de expresarlo, en el lenguaje y en las exigencias relativas a rigurosidad y demostraciones, como quedará aclarado en el bloque 3.

En el caso de alumnos de Educación Secundaria Obligatoria (E. S. O.), se explicará el método a nivel intuitivo, con casi ninguna demostración, y con procedimientos totalmente geométricos. Además se usará muy poco lenguaje matemático y se realizarán gran cantidad de casos, ejemplos y ejercicios que faciliten la comprensión del método y, en especial, las ideas que en él subyacen. Podría explicarse en temas referentes a figuras geométricas (introduciéndolo al final del mismo, una vez que se hayan asimilado los contenidos necesarios), o en aquellos que trabajan la idea de aproximación y error, por poner algunos ejemplos. La temporalización del contenido de este recurso sería de unas 3 o 4 sesiones, siempre que se estudie dentro de un bloque más general, donde se hayan trabajado los contenidos previos necesarios.

Para alumnos de Bachillerato, se explicará con algo más de formalismo, rigurosidad y lenguaje matemático, con algunas demostraciones e intentando profundizar un poco más en el método y en lo que lo sustenta. El punto donde puede desarrollarse este recurso es el mismo que en el caso de Secundaria Obligatoria, siendo la temporalización, para este caso, de 4 o 5 sesiones.

En cuanto a las modificaciones en las formas de aprendizaje de los alumnos que pueden preveerse con el uso de este recurso, podemos citar las siguientes:

- Potencia el desarrollo de la capacidad y destreza geométrica en los alumnos, al utilizar las relaciones de semejanza de triángulos, propiedades sobre ángulos inscritos y circunscritos, polígonos inscritos y circunscritos, etc. Así, aunque no lleguen a comprender la rigurosidad y justificación de los pasos de la demostración que sustenta el método, entenderán el procedimiento o proceso geométrico.

- Desarrollo de la capacidad visual, tanto plana como espacial en los alumnos, al tener que considerar y trabajar con figuras tanto en el plano como en el espacio.

- Desarrollo de la capacidad de razonamiento y pensamiento lógico en los alumnos, puesto que al aplicar el método estarán razonando, por ejemplo, por qué el área de las sucesivas figuras inscritas se va acercando cada vez más al área de la figura desconocida, potenciando así la idea de conceptos abstractos como el de límite.

- Desarrollo de la capacidad de crítica y cuestionamiento de la validez de los pasos empleados, ya que por ejemplo, al aplicar el método, el alumno razonará por qué es ésa la nueva figura elegida para la sucesión de figuras inscritas y no otra.

La evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje, irá en función del nivel al que estemos dirigiendo la utilización del recurso. Debido a la complejidad del contenido y a la dificultad de aplicación del método, que será de forma distinta para cada caso, el examen como instrumento de evaluación pierde cualquier tipo de sentido.

El proceso de evaluación se hace para: conocer si se han asimilado los contenidos trabajados, observar las modificaciones producidas en los esquemas de razonamiento de los alumnos, verificar la eficacia del recurso y la forma en que éste ha sido desarrollado. Por tanto, lo que evaluamos es el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollado, el uso del recurso, a los alumnos, a nosotros mismos y al desarrollo realizado en el aula.

Evaluaremos diariamente en clase, para ver si realmente se está asimilando el contenido del recurso, mediante la participación e interés de los alumnos, mediante una interacción directa profesor-alumno a la hora de resolver y plantear cuestiones y mediante la cooperación de los alumnos a la hora de aplicar el método a nuevas figuras y de reproducir las ya expuestas para casos particulares.

La labor del profesor y el proceso de enseñanza-aprendizaje, quedarán evaluados mediante el interés que presenten los alumnos y en los resultados mostrados por éstos, ya que todo esto dependerá de la calidad del proceso de enseñanza desarrollado, de la
habilidad del profesor para transmitirles los contenidos y de la motivación previa de los alumnos. En definitiva, el profesor y el proceso de enseñanza-aprendizaje deberán favorecer en todo lo posible al alumno el aprendizaje del recurso.

BLOQUE 2: DESARROLLO DEL RECURSO

Pretendemos aquí recoger un estudio del método de Exhausción, debido a Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), considerando aplicaciones recogidas de las obras de Euclides de Alejandría, que vivió en torno al año 300 a.C., y Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.). Dicho método permite el cálculo de áreas y volúmenes de figuras a partir de otras más sencillas, mediante un proceso de *vaciado*, que a continuación explicaremos. La importancia, desde un punto de vista didáctico, de este método reside fundamentalmente en dos aspectos. El primero se refiere a la multitud de propiedades y relaciones geométricas que se establecen entre las diferentes figuras que se estudian. Además en este método se encuentra el germen de la idea de convergencia o aproximación.

La base del método de Exhausción es el conocido como axioma de Arquímedes (debido a Eudoxo) que se recoge en la definición 4 del libro V de los *Elementos* en la forma siguiente:

> *Dadas dos magnitudes desiguales que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra.*

Este enunciado, interpretándolo en términos actuales, nos diría que dados x, y números reales positivos entonces existen $n, m \in N$ tales que $x<n y$ y $y<mx$.

A partir de aquí, Euclides enuncia en la proposición 1 del libro X el conocido como teorema de Exhausción:

> *Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, terminaremos por obtener una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.*

La idea del método de Exhausción es la que sigue: supongamos fijada una magnitud cualquiera A y otra tan pequeña como se quiera. En el primer paso se trata de encontrar una nueva magnitud A_1, menor que A pero mayor que su mitad. Podemos considerar la magnitud A-A_1. A continuación se toma una segunda magnitud A_2, menor que A y que contiene no solo a A_1 sino también más de la mitad de la diferencia entre A y A_1. Así de la diferencia anterior (A-A_1) podemos restar la magnitud A_2-A_1, mayor que su mitad, obteniendo entonces A-A_2. Si repetimos este razonamiento obtenemos, por el teorema de Exhausción y en un número finito de pasos, una magnitud A_n de forma que A-A_n es menor que la segunda de las magnitudes de partida.

También puede considerarse un razonamiento análogo, tomando A_1 una magnitud mayor que A, pero de forma que A sea mayor que su mitad. Así en cada paso se tomará una nueva magnitud A_i, menor que A_{i-1} y que contenga no solo a A sino también más de la mitad de la diferencia entre A_i y A.

De esta forma podemos encontrar magnitudes "que se aproximen a A", esto es, de forma que su diferencia con A sea menor que cualquier cantidad fijada previamente. Obsérvese que en el primer caso se tratará de una aproximación por defecto y en el segundo por exceso.

Se trata de un método riguroso y bien fundamentado que, como veremos en los ejemplos que sobre este método vamos a considerar, evita el paso al límite. Este método permite la comparación de figuras curvilíneas y rectilíneas: se trata de inscribir y circunscribir figuras rectilíneas a la figura curvilínea y proceder a multiplicar el número de lados o caras, dando así lugar a figuras rectilíneas que "se aproximan" cada vez más a la curvilínea. Dicha aproximación se hace en términos de área o volumen y se apoya en el teorema de Exhausción, de forma que el área (o volumen) de la figura curvilínea (que se supone desconocido) se toma como la primera magnitud que considerábamos en el razonamiento anterior, mientras que las sucesivas áreas (o volúmenes) de las figuras rectilíneas se corresponden con los A_n.

Para una mejor comprensión del método de Exhausción, vamos a estudiar a continuación la forma en la que podemos "vaciar" (en términos de área) un círculo mediante polígonos inscritos.

Dado un círculo A y una cantidad ε, tan pequeña como queramos, existe un polígono regular P inscrito en A, de forma que $a(A)-a(P)<\varepsilon$ donde a(A) y a(P) denotarán las áreas respectivas de A y P.

Para "vaciar" el círculo, comencemos con el cuadrado *ABHI*, inscrito en la circunferencia,

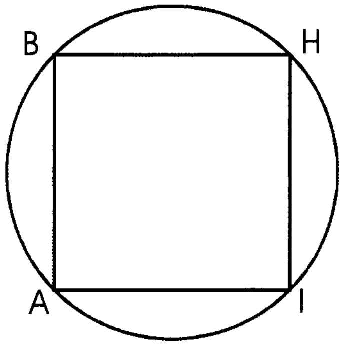


Figura 1

El área del cuadrado *ABHI* es $d^2/2$ donde *d* es el diámetro de la circunferencia. Por tanto, coincide con la mitad del área del cuadrado circunscrito a la circunferencia (cuyo lado es igual a *d*). Puesto que esta última area es mayor que el área del círculo, de aquí se tiene que el área del cuadrado inscrito es mayor que la mitad del área del círculo.

Sea ahora *C* el punto medio del arco *AB* y sean *AD* y *BE* perpendiculares a la tangente al círculo en *C*. El ángulo *1* es igual al ángulo *2* porque cada uno de ellos es igual a la mitad del arco *CB*. Teniendo en cuenta que los ángulos *2* y *4* coinciden, pues abarcan el mismo arco, se tiene que también los ángulos *1* y *4* son iguales, lo que prueba que el ángulo *ABE* el recto. Por tanto, *DE* es paralela a *AB* y *ABED* es un rectángulo cuya área es mayor que la del segmento circular *ABFCG*.

El área del triángulo *ACB* es igual a la suma de las áreas de los triángulos *ADC* y *BEC*, y por tanto mayor que la mitad del área del segmento circular *ABFCG*; repitiendo el proceso en cada lado del cuadrado, obtenemos un octógono regular que incluye no sólo al cuadrado sino más de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y la del cuadrado. En cada lado del octógono podemos construir un triángulo del mismo modo que hizo con el *ACB* sobre *AB*, obteniendo un hexadecagono regular que incluye al octógono y más de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y la del octógono. El proceso puede repetirse cuantas veces se desee. El Teorema de Exhausción permite afirmar entonces que la diferencia entre el área del círculo y la de un polígono regular con número de lados suficientemente grande puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada de antemano.

Este argumento está recogido en la proposición 2 del libro XII de los *Elementos* de Euclides. El resultado recogido en tal proposición es el siguiente:

La razón entre dos círculos es la misma que la que hay entre los cuadrados de sus diámetros.

Sean entonces *S* y *S'* las áreas de dos círculos y sean *d* y *d'* sus diámetros. Euclides desea probar que:

$$\frac{S}{S'}=\frac{d^2}{d'^2} \qquad \textbf{(1)}$$

Supongamos que no se cumple la desigualdad y que en su lugar se tiene que

$$\frac{S}{S'}=\frac{d^2}{d'^2} \qquad \textbf{(2)}$$

donde *S"* es algún área mayor o menor que *S'* (se supone aquí y en todo el *libro XII* la existencia de la cuarta proporcional como un área). Si *S"< S'*, podemos construir polígonos regulares con un número cada vez mayor de lados hasta que lleguemos a uno, digamos *P'* tal que su área difiera de *S'* en menos que *S'- S"*

$$S'- P'< S'- S''$$

Este polígono puede construirse gracias al razonamiento que hemos hecho al comienzo de la demostración.

Entonces se tiene que

$$S'> P'> S'' \ (-P'< -S'') \qquad \textbf{(3)}$$

Inscribimos en el círculo de área *S* un polígono *P* semejante a *P'*. Usando la *proposición 1 del libro XII*, que afirma que la razón entre los polígonos semejantes inscritos en círculos es como la razón entre los cuadrados de los diámetros de ambos círculos, se tiene que:

$$\frac{P}{P'}=\frac{d^2}{d'^2}=\frac{S}{S'}$$

De aquí es $\frac{P}{P'}=\frac{S}{S'}$ ó bien $\frac{P}{S}=\frac{P'}{S'}$. Dado que P<S esto prueba que P'<S" es contradicción con **(3)**.

De manera similar se puede probar que *S"* no puede ser mayor que *S'*, luego *S"= S'*, y queda establecida la proporción **(1)**.

ALGUNAS CONCLUSIONES

Por motivos de espacio no nos es posible recoger detalladamente las diferentes aplicaciones del método de Exhausción que aparecen en el libro XII de los *Elementos* de Euclides. En ellas se ha comparado el área o volumen de dos conjuntos *A* y *B*, que son

1. Dos círculos.
2. Dos cilindros con la misma altura.
3. Dos pirámides con la misma altura.
4. Un cono y un cilindro con la misma altura.

En particular, se prueba que

$$v(B)=kv(A)$$

donde la constante de proporcionalidad *k* es igual a (obsérvese que en el caso de dos círculos la igualdad anterior se refiere a áreas y no a volúmenes)

1. La razón del cuadrado de sus radios.
2. La razón de los cuadrados de los radios de sus bases.
3. La razón de las áreas de sus bases.
4. Un tercio.

A modo de resumen recogeremos un esquema de los pasos fundamentales de cada una de estas aplicaciones. El primer paso es la construcción de dos sucesiones de polígonos o poliedros, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ inscritos en *A* y $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ inscritos en *B* tal que

$$v(Q_n)=kv(P_n)$$

para todo n. El teorema de Exhausción puede aplicarse a la construcción anterior y se tiene entonces que, dado $\varepsilon > 0$,

$$v(A)-v(P_n)<\varepsilon \text{ y } v(B)-v(Q_n)<\varepsilon$$

si n es suficientemente grande.

En términos del concepto moderno de límite, podríamos completar la demostración mediante las siguientes relaciones

$$v(B) = \lim_n v(Q_n) = \lim_n kv(P_n) = k \lim_n v(P_n) = kv(A)$$

Los Griegos evitaban el paso al límite explícito, completando la demostración mediante un argumento basado en una doble reducción al absurdo. En primer lugar, suponemos $v(B)>kv(A)$ y tomamos $\varepsilon=v(B)-kv(A)$. Consideremos ahora un n suficientemente grande de forma que

$$v(B)-v(Q_n)< v(B)-kv(A)$$

De esta última desigualdad resulta $v(Q_n) >kv(A)\geq kv(P_n)$, dado que P_n está contenido en A. Pero, según la relación $v(Q_n)=k\, v(P_n)$, lo que nos conduce a una contradicción.

Invirtiendo ahora los papeles de A y B, llegamos a que la suposición
$v(A)>v(B)/k$ conduce de manera similar a una contradicción, lo que prueba la igualdad $v(B)=kv(A)$.

De esta forma se prueba el resultado sin una referencia explícita al concepto de límite. Los procesos infinitos no eran aceptados en la Matemática Griega, lo que se pone de manifiesto en el esquema de razonamiento anterior, que hemos recogido en los ejemplos estudiados.

Arquímedes y La cuadratura de la parábola

En su libro *Cuadratura de la parábola*, Arquímedes da dos métodos para hallar el área de un segmento parabólico. La demostración por el método de Exhausción demuestra rigurosamente que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios del área de un triángulo de igual base y cuyo vértice es el del segmento, es decir, la intersección del arco con el diámetro de la parábola que pasa por el punto medio de la base. Mediante una serie de consideraciones previas llega a que el área del segmento parabólico vendrá dado por la suma de una serie infinita. Arquímedes no habla, desde luego, de la suma de una serie infinita, puesto que los procesos infinitos no se aceptaban en su época, sino que demuestra, por una doble reducción al absurdo, que dicha área no puede ser mayor ni menor que el valor encontrado en la primera demostración. Para ello prueba primero, usando el teorema de Exhausción, que la diferencia entre el área del segmento y las sumas finitas de la serie anterior (lo que hoy conocemos como sumas parciales) pueden hacerse menor que cualquier cantidad fijada previamente.

El primer paso es probar que el segmento parabólico puede "agotarse" mediante una serie de triángulos:

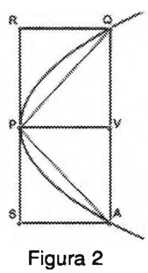


Figura 2

Sea QPA (Figura 2) el segmento parabólico y sea PV el diámetro que corta en dos partes iguales todas las cuerdas paralelas a la base QA de segmento y de manera que V es el punto medio de QA. En la proposición 18 se prueba que la tangente en P es paralela a QA. A continuación se toman QR y AS paralelos a PV. Los paralelogramos PVQR y SAVP (sumando sus áreas obtenemos la del

paralelogramo QRSA) tienen como diagonales a PQ y PA respectivamente, de donde el triángulo QPA es la mitad de paralelogramo QRSA, y así el triángulo QPA es mayor que la mitad del segmento parabólico.
Como corolario de este resultado, Arquímedes demuestra que el segmento parabólico se puede aproximar mediante un polígono tan cercano al mismo como se quiera:

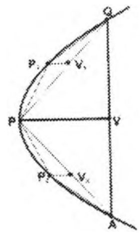


Figura 3

Al construir un triángulo en el segmento limitado por PQ (Figura 3), en el que P_1V_1 es el diámetro de este segmento, y considerando análogamente el triángulo PP_1A (construido sobre PA y con las mismas propiedades que PP_1Q) se tiene, por la proposición 21, que la suma de sus áreas es igual a la cuarta parte del área del triángulo PQA. Repitiendo el razonamiento del párrafo anterior se tiene que los dos triángulos construidos cubren más de la mitad de cada uno de los segmentos parabólicos en los que están situados. EL proceso de construir triángulos sobre las nuevas cuerdas QP_1, P_1P, PP_1 y P_1A puede continuarse.

Así tenemos condiciones suficientes para aplicar el teorema de Exhausción: podemos afirmar que el área de la figura poligonal obtenida al añadir triángulos al triángulo original PQA, es decir, el área

$$\triangle PQA + (1/4)\triangle PQA + (1/16)\triangle PQA + \ldots..$$

con una cantidad finita de términos se aproxima al segmento parabólico tanto como se quiera; esto es, fijada cualquier cantidad puede encontrarse una suma finita del tipo anterior de forma que la diferencia entre el área del segmento y dicha suma sea menor que la cantidad dada (Obsérvese la importancia de esta idea en el desarrollo de la teoría de series convergentes).

Arquímedes emplea ahora un método indirecto de demostración. Demuestra en primer lugar que dados n términos de una progresión geométrica cuya razón es 1/4, se tiene:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \tfrac{1}{3} A_n = \tfrac{4}{3} A_1 \qquad \textbf{(4)}$$

Este resultado puede obtenerse a partir de la formula para la suma de n términos de una progresión geométrica, que ya Euclides había probado. En nuestro caso, A_1 es el área del triángulo PQA; prueba entonces Arquímedes que el área A del segmento parabólico no puede ser mayor ni menor que Figura 2.

Si A fuese mayor que $\frac{4}{3}A_1$ podríamos obtener un conjunto (finito) de triángulos cuya suma S difiera del área del segmento en una cantidad menor que cualquier magnitud dada, en particular menor que $A - \frac{4}{3}A_1$. Así, $A - S < A - \frac{4}{3}A_1$, de donde $A > S > \frac{4}{3}A_1$. Supongamos que la suma tiene S tiene m términos. Por **(4)** resulta que:

$$S + \tfrac{1}{3} A_m = \tfrac{4}{3} A_1$$

Esta igualdad permite afirmar que $S < \frac{4}{3}A_1$ lo cual es contradictorio, puesto que, admitiendo que A era mayor que $\frac{4}{3}A_1$, hemos probado la desigualdad $S > \frac{4}{3}A_1$.

Supongamos entonces que el área A del segmento parabólico es menor que $\frac{4}{3}A_1$. Entonces $\frac{4}{3}A_1 - A$ es un número positivo. Como los triángulos trazados por Arquímedes son cada vez más pequeños, podemos obtener una sucesión de triángulos inscritos tales que

$$A_m < \tfrac{4}{3}A_1 - A \qquad \textbf{(5)}$$

donde A_m es el término m-ésimo de la sucesión y representa geométricamente la suma de 2^{m-1} triángulos (obtenidos a partir de los triángulos asociados al término A_{m-1} mediante divisiones, tal y como se explicó al comienzo de la demostración). Como consecuencia de **(4)** se tiene que:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_m + \tfrac{1}{3}A_m = \tfrac{4}{3}A_1 \qquad \textbf{(6)}$$

esto es,

$$\tfrac{4}{3}A_1 - (A_1 + A_2 + \ldots + A_m) = \tfrac{1}{3}A_m < A_m \qquad \textbf{(7)}$$

para que esta última expresión sea cierta, teniendo en cuenta **(5)**, se ha de cumplir que la suma de los m primeros términos sea mayor que A:

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_m) > A$$

Pero toda suma formada por triángulos inscritos es siempre menor que el área del segmento. Por tanto , también en este caso obtenemos una contradicción lo que prueba que el área buscada es $\frac{4}{3}A_1$.

BLOQUE 3: DESARROLLO A NIVEL DE AULA.

Antes de comenzar el desarrollo del tema se deberán plantear algunas actividades para que los alumnos practiquen con los conceptos previos que van a necesitar en este tema. Se deben trabajar por ejemplo los conceptos de triángulos semejantes y los procedimientos para construirlos; de esta manera les resultará más sencillo reconocer las semejanzas de los triángulos que aparezcan en las construcciones del tema. También se deben recordar las sucesiones, la forma de obtener su término general y sus sumas parciales; gracias a esto, cuando, ya una vez dentro del tema se utilicen sumas de áreas que se van aproximando cada vez más a una área dada, les resultará algo conocido. Por último, deben realizar ejercicios donde aparezcan construcciones de polígonos inscritos y circunscritos en una circunferencia y polígonos regulares construidos a partir de otros, puesto que son necesarias en el desarrollo del tema y de esta forma ya no sería necesario explicar estos pasos sino que se podría dejar a los alumnos realizarlos por ellos mismos.

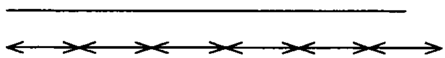
La forma de dar la clase debe ser completamente interactiva, el profesor no puede limitarse a explicar los ejemplos, ya que de esta forma es más que probable que los alumnos desconecten y acaben por no enterarse de nada, se debe intentar ir realizando preguntas a medida que se vayan desarrollando los ejemplos, para que de esta forma, se sientan más involucrados en la explicación del profesor y al ir colaborando, aumente su seguridad y vayan adquiriendo confianza en el tema.

La clase comenzaría explicando el axioma de Arquímedes:

Dadas dos magnitudes desiguales que sean del mismo tipo y ninguna de las dos sea cero, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra.

Para ello se les indicará primero que una magnitud puede ser una longitud, un área, un volumen,... es decir "algo que mide", por tanto el axioma en el caso de longitudes significa que dadas dos longitudes

al ir poniendo



llega un momento en que se obtiene una longitud que es mayor que *a*.

Llegado a este punto se les pedirá que hagan algo parecido usando áreas en lugar de longitudes, ya que de esta forma nos aseguramos de que han entendido el significado del axioma y además adquieren soltura en su manejo en el caso de las áreas y esto nos resultará muy útil en el desarrollo posterior del tema.

A continuación se les explicará el teorema de Exhausción:

Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, terminaremos por obtener una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas.

Para explicarlo, al igual que con el axioma de Arquímedes se utilizaran dos longitudes y luego se intentaría que los alumnos razonen de manera parecida en el caso de las áreas.

Una vez explicados estos dos teoremas, se pasaría a utilizarlos en las cuadraturas que serían objetos de estudio a lo largo del tema; a modo de ejemplo que ilustre la forma de adaptar los contenidos a Secundaria Obligatoria, explicaremos cómo consideramos que debe desarrollarse la cuadratura del círculo. Las demás construcciones se expondrían de manera similar.

Se comenzará diciéndoles que dibujen un círculo y que a partir de él dibujen el cuadrado inscrito; una vez dibujado dicho cuadrado, se les pedirá que, a partir de él, construyan el octógono regular inscrito en la circunferencia; luego el hexadecágono,... y así sucesivamente con algunos polígonos más.

Llegado a este punto se les preguntará cuál de todas las áreas de los polígonos que han construido se aproxima más al área del círculo y cómo podríamos continuar este proceso de aproximación.

Una vez visto esto, se intentará que entiendan que la idea que se ha utilizado es la del teorema de exhausción, puesto que el área del cuadrado es más de la mitad del área del círculo que lo circunscribe y que el área que vamos añadiendo en cada caso es más de la mitad de la que nos quedaba por cubrir; naturalmente esto no lo fundamentaremos, sino que lo explicaremos sobre el dibujo, procurando que "vean" lo que queremos explicarles, sin preocuparnos por rigorizarlo o demostrarlo, a no ser que algún alumno en particular demuestre un interés y una aptitud bastante considerable en este tema y en dicho caso, a este alumno sí se le podría dar un mayor nivel de fundamentación matemática, subiendo el nivel, según cada caso.

Una vez explicado este ejemplo, se dividirá a los alumnos en grupos de 4 o 5, teniendo en cuenta su aptitud en esta materia.

A los alumnos que presenten más dificultades a la hora de asimilar los procedimientos que se han desarrollado. A ellos se les plantearan casos particulares de los ya estudiados y a los alumnos que dominen el tema con mayor soltura se les plantearán ejercicios de investigación, donde se les dé una figura que no se halla explicado en clase para que la trabajen; el profesor debe supervisar su trabajo, explicándoles sus errores en el caso de no conseguir el resultado deseado; y en caso contrario, ayudarles a rigorizar (sólo en cierto grado) la construcción, viendo con ellos todos los pasos.

Este modo de trabajar se irá intercalando con el siguiente: se forman grupos de cuatro o cinco alumnos, donde las capacidades de sus integrantes sean diferentes; y se les hará trabajar con los dos tipos de ejercicios descritos anteriormente, de esta forma los alumnos más destacados podrán favorecer con sus ideas y sugerencias el aprendizaje y el desarrollo de las capacidades de los alumnos menos aventajados y se evitará que los alumnos a los que les mandaban los ejercicios de refuerzo se sientan frustrados por no ser capaces de avanzar construyendo como sus compañeros; de esta forma, al verse integrado en un grupo que realiza labores de investigación se sentirá participe de ésta, escuchando las ideas de sus compañeros (que comprenderán y asimilarán en mayor grado el contenido, al tener que explicarlo a los demás) y las explicaciones del profesor, por lo que aumentará su interés sobre el tema, al comprobar que pueden hacer cosas parecidas a las ya estudiadas.

A lo largo de todo el desarrollo del tema deberían tenerse en cuenta las dificultades asociadas al recurso que puedan tener los alumnos, para intentar solventarlas en la medida de lo posible y si puede ser, evitando que surjan; dichas dificultades son debidas fundamentalmente a los siguientes tres motivos:

1. A los alumnos normalmente les cuesta mucho comprender las construcciones geométricas, ver las semejanzas de triángulos,...y sobre todo comprender las construcciones donde aparezcan volúmenes, puesto que no tienen desarrollada la visión espacial. Los problemas asociados a esta dificultad son difíciles de solucionar, puesto que en la mayoría de los casos se deben a una carencia de los alumnos, luego la única posibilidad es poner muchos ejemplos e intentar que "vean" las relaciones de la forma más sencilla posible.

2. A pesar de que las ideas son sencillas, es muy complicado de rigorizar y de entender todos los pasos de las demostraciones. Precisamente por ello se evitarán las demostraciones rigurosas para los alumnos de E.S.O., trabajando sobre todo a nivel intuitivo, para que se hagan una idea de "cómo son las cosas" y sobre todo, para qué entiendan realmente que están haciendo. Esto habría que modificarlo un poco para los alumnos de Bachillerato (de los cuales hablaremos más adelante).

3. Los procesos seguidos en los ejemplos, a pesar de seguir un esquema bastante similar, se basan en una idea que es distinta para cada caso y, por tanto, es muy difícil que a un alumno se le ocurra; precisamente por esto, como ya hemos comentado anteriormente, es muy importante que, sobre todo para los alumnos de E.S.O., las clases sean muy participativas; el profesor debe guiarlos en cada ejemplo, para que ellos colaboren y sientan que puedan aportar algo en el desarrollo del tema, ya que de lo contrario, correríamos el riesgo de que los alumnos "desconecten" al pensar que los contenidos "escapan" de sus capacidades o lo entendieran como un aprendizaje memorístico.

Antes de terminar, debemos aclarar que el desarrollo y las aclaraciones expuestas van dirigidas, salvo algunas puntualizaciones, a alumnos de E.S.O., por tanto, aclararemos las diferencias que deben tenerse en cuenta cuando se explique este mismo tema a alumnos de Bachillerato.

A dichos alumnos se les explicará de forma más o menos parecida, basándose sobre todo, al igual que con los alumnos de E.S.O. en las ideas intuitivas; pero se intentará que razonen algo más y que fundamenten algunos pasos que, aunque no sean demasiados complicados requieran algo más de rigorización, por ejemplo se les puede plantear como actividad de ampliación que demuestren que la razón de las áreas de dos polígonos inscritos en dos circunferencias de radios r_1 y r_2 es la razón entre los cuadrados de dichos radios. Naturalmente se les irán dando gran cantidad de pistas para intentar que lleguen a la solución correcta.

Naturalmente no todos los alumnos obtendrían las conclusiones por sí mismos y deberíamos ayudarlos en la medida de lo posible, aunque dejándolos pensar y sobre todo, evitando resolvérselo nosotros.

También se les podría pedir que rigorizaran algunos de los pasos que se dieron en el caso de la cuadratura de las figuras desarrolladas en la E.S.O., por ejemplo en el caso de la cuadratura del círculo se les pediría que calculasen el área del cuadrado inscrito y circunscrito y que a partir de ahí concluyeran porqué el área del cuadrado inscrito es más de la mitad del área de la circunferencia.

Luego se les pedirá que demuestren que el área del triángulo *ACB* es la suma de las áreas de los triángulos *ADC* y *CEB* y que, como consecuencia, demuestren que el área añadida es más de la mitad del área que quedaba por rellenar.

A partir de aquí se intentaría que siguiesen ellos solos y que llegasen al resultado deseado utilizando el teorema de exhauscíón.

ALGORITMOS DE LA MULTIPLICACIÓN. UN BREVE RECORRIDO HISTÓRICO

YOLANDA PADILLA DOMÍNGUEZ · PEDRO RODRÍGUEZ CIELOS

Para empezar, la pregunta que nos podemos plantear es la siguiente: ¿qué interés puede tener el aspecto histórico de los algoritmos de la multiplicación?

La respuesta es sencilla. La mayoría de los profesores nos hemos educado, como todos, en la realización de una forma concreta de la misma. Así, lo más probable es que si multiplicamos dos números tal y como aparece en este ejemplo, no nos paremos ni siquiera a pensar por qué adopta esa forma. Al haber asimilado perfectamente su mecánica, puede resultarnos extraño cualquier dificultad en el aprendizaje por parte del alumno. Por lo tanto primero debemos estudiarlo nosotros.

```
  234
 X 27
-----
 1638
 468
-----
 6318
```

Pasemos a hacer un breve repaso de algunos algoritmos que han existido a lo largo de la historia. Como siempre, para iniciar este estudio hay que remontarse a los escasos documentos que nos han llegado de Babilonia y Egipto. Los descubrimientos más interesantes respecto a las Matemáticas en Babilonia, se deben a las inscripciones descubiertas por Pietro della Valle hacia 1621 y las tabletas halladas a partir de 1821 en las excavaciones que se vienen realizando hasta nuestros días. De estos documentos se puede deducir que el sistema de numeración se basaba en el número 60 como unidad principal, con enlace respecto del número 10, porque los números 60, 600, 3.600, 36.000, 216.000 y 2.160.000 reciben nombres especiales.

En documentos recientes se han encontrado los nombres sumerios de las fracciones más sencillas, pero no están referidas a sesentaavos, sino a sextos. Se sabe que los babilonios dividieron el día en 24 horas, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos; y que también dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Los babilonios conocían la técnica de las cuatro operaciones elementales con números enteros.

Pasando a Egipto se sabe que su sistema de numeración era decimal en toda su pureza y, aunque no tenían signo para indicar la carencia de unidades, no les era necesario ya que tenían diversidad de signos para representar las distintas unidades.

Es indudable que los egipcios sabían sumar y restar perfectamente, pero en ninguno de los documentos conocidos se encuentra expuesta la regla práctica para sumar varios números, ni para restar dos enteros de cualquier número de cifras.

El concepto egipcio de multiplicación, deducido de la forma práctica de efectuarla, no es el de una suma de sumandos iguales sino el de hallar un número que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad. Su procedimiento para efectuar esta operación es tan distinto del actual, que no necesitaban conocer la llamada "tabla de multiplicación". El método egipcio para multiplicar enteros es verdaderamente original. Su fundamento, explicado en lenguaje moderno, consiste en lo siguiente:

1) Cualquier número B puede descomponerse en suma de potencias de 2, incluyendo, si el número es impar, la potencia $2^0=1$. Sea, por ejemplo, $B=2^a+2^b+2^c+2^d$.

2) El producto de dos números A y B será, por consiguiente, de la forma: $A\cdot (2^a+2^b+2^c+2^d)= A2^a+A2^b+A2^c+A2^d$.

3) Los productos $A2^a$, $A2^b$, $A2^c$, $A2^d$ se pueden formar mediante duplicación reiterada del multiplicando A.

4) A los términos de la serie 1, 2, 4, 8, 16,..., 2^a,..., 2^b,..., 2^c,..., 2^d se les puede hacer corresponder los términos de la serie A, A2, A4,..., $A2^a$,..., $A2^b$,..., $A2^c$,..., $A2^d$.

5) Si se señalan los términos de la primera serie cuya suma es B, la suma de los términos correspondientes de la segunda serie dará el producto $A\cdot B$.

La práctica de la operación de multiplicar consiste en formar la tabla de los productos del multiplicando de las sucesivas potencias de 2; señalar las diversas potencias de 2 cuya suma sea el multiplicador y efectuar la suma de los productos correspondientes a los términos señalados (el signo empleado por los egipcios para señalar los números que deben sumarse es un trazo inclinado /).

Conviene observar que en muchos casos particulares se podrá descomponer el multiplicador B en otra suma cualquiera y se podrá después aplicar el mismo método.

Los documentos egipcios no definen el concepto de división de números enteros ni enuncian la regla práctica para efectuar la división, pero la disposición de los cálculos es lo suficientemente elocuente para poder asegurar que el concepto egipcio de división es el de operación inversa de la multiplicación.

54 x 13	**54 x 14**	**54 x 22**
/ 1.......54	1.......54	1.......54
2.......108	/ 2.......108	/ 2.......108
/ 4.......216	/ 4.......216	/ 4.......216
/ 8.......432	/ 8.......432	8.......432
13.......702	**14.......756**	/ 16.......864
		22.......1188

Multiplicación egipcia

La siguiente etapa de la historia del algoritmo de la multiplicación comenzaría aproximadamente allá por el siglo V o IV a.c, con la introducción del primer ábaco en la cultura mediterránea. Es la denominada tabla de Salamina, una placa con distintas líneas paralelas y alguna transversal. Tiene un gran parecido con el ábaco romano, que consistía en una serie de líneas paralelas que delimitan varias zonas: empezando por las unidades de primer orden a la derecha y siguiendo, hacia la izquierda, con las unidades de orden superior. El Suan Pan chino es un contador de bolas. Consta de varios alambres verticales atravesados por uno horizontal. Hay 5 bolas en la parte inferior y 2 en la superior. El Soroban japonés y quizás el ábaco ruso son derivaciones del anterior. El ábaco es de gran utilidad sobre todo para sumas y restas, pero tiene una menor efectividad para la multiplicación y mucho menor para la división.

Sin embargo, existió en China un instrumento anterior y de gran importancia para la multiplicación, que se conoce con el nombre de las varillas de calcular chinas. La única constancia de su fecha de aparición se refiere a que en la dinastía Han (siglo III a.c) ya se utilizaba. Los calculistas chinos disponían de varillas de distintos tamaños y materiales con las que representaban los distintos números. Así, traduciendo este proceso a notación decimal, veamos como multiplicaban, por ejemplo, 23x47:

1) Se coloca el 47 sobre el 23, dejando un amplio espacio entre ellos.
2) Se multiplican entre sí las cifras significativas de mayor orden de ambos números, de manera que el algoritmo, en realidad, se realiza de izquierda a derecha. El resultado parcial obtenido se coloca entre ambas filas. (4x2=8)
3) Se multiplica la cifra de mayor orden del multiplicando por la siguiente del multiplicador colocando el resultado a la derecha del anterior, salvo si es superior a 10 (como en este caso) en cuyo caso se sustituye el resultado anterior por la suma de los dos obtenidos hasta ahora. (4x3=12)
4) Se multiplica ahora la cifra siguiente del multiplicando por la primera del multiplicador, procediendo del mismo modo que en el caso anterior. (7x2=14)
5) Por último, se multiplican las cifras restantes del multiplicador y multiplicando, obteniéndose en la fila central el resultado final. (7x3=21)

		4	7
	2	3	

Paso 1

		4	7
	8		
	2	3	

Paso 2

		4	7
	9	2	
	2	3	

Paso 3

			7
1	0	6	
	2	3	

Paso 4

			7
1	0	8	1
		3	

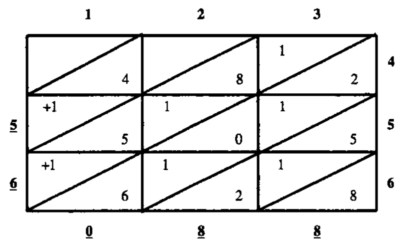
Paso 5

Multiplicación china

En la India se utilizaba un procedimiento similar, que se realizaba sobre un ábaco de arena. La única diferencia importante es que se utilizaban únicamente dos líneas horizontales. Los resultados parciales iban sustituyendo a las cifras más altas del multiplicando.

La introducción de un símbolo para el cero unido al principio posicional de las cifras de un número condujo a la desaparición del ábaco sobre la arena. Así, sobre el siglo V de nuestra era ya se utilizaba la multiplicación en cuadrícula que también se conoce con el nombre de multiplicación a la isabelina, ya que en la Inglaterra de la reina Isabel, los estudiantes de matemáticas utilizaban un sistema de multiplicación que, pese a que pueda parecer un tanto incómodo, da la respuesta correcta casi tan rápidamente como el nuestro. Llamado el método de la rejilla, opera de la siguiente forma. Supongamos que se desea multiplicar 123 por 456:

1) Dibujar una rejilla que tenga tamaño 3x3. Escribir uno de los números en la parte superior y el otro a un lado. Dividir diagonalmente cada una de las casillas.
2) Multiplicar la cifra final que aparece en la parte superior por cada uno de los números de la primera columna. Anotar las unidades de cada producto en el triángulo inferior de la casilla correspondiente y las decenas en el triángulo superior de la misma. Proceder de la misma manera con las cifras restantes de la parte superior de la rejilla.
3) Sumar cada una de las diagonales, comenzando por la correspondiente al triángulo inferior de la derecha, y anotar los totales a lo largo de la parte inferior del cuadro de derecha a izquierda, y en el lateral izquierdo, de abajo a arriba. Si alguna de las diagonales totaliza 10 o más, anótese la cifra de las unidades en su lugar correspondiente y la de las decenas llévese a la diagonal siguiente.
4) La simple lectura arroja el resultado: 56.088.



Multiplicación en cuadrícula

Este algoritmo tiene importantes ventajas sobre el nuestro. Así, por ejemplo, no es necesario recordar las cifras "que nos llevamos" en cada uno de los productos parciales. La única razón objetiva para justificar su desaparición puede residir en los problemas de edición de la tabla.

La evolución desde este algoritmo hasta el actual puede tratar de explicarse en los siguientes pasos, según se recoge en la figura adjunta:

1) Disposición vertical.

2) Suma de "llevadas" en cada producto parcial.

3) Supresión escrita del cero.

234	234	234
X 27	X 27	X 27
28	1638	1638
210	4680	468
1400	**6318**	**6318**
80		
600		
4000		
6318		

Evolución

Para terminar vamos a detenernos en un método de gran interés. Hasta que en el presente siglo se hizo posible la introducción de los sistemas educativos, los campesinos rusos se servían de un ingenioso método de multiplicación que sólo les requería saber encontrar el duplo y la mitad de un número, así como la elemental operación de sumar. El método opera de la siguiente forma. Supongamos, por ejemplo, que queremos multiplicar 97 por 39.

1) Hallar sucesivamente la mitad de los números situados en la columna de la izquierda (despreciando los residuos), y el doble de los de la columna derecha. Continuar esta operación hasta que la columna izquierda se reduzca a la unidad.
2) Señalar todos los números impares que figuren en la columna izquierda, así como los números yuxtapuestos de la columna derecha.
3) Sumar los números marcados de la columna de la derecha. Su total es el resultado.

39	97	* 39	97 *	97
19	194	* 19	194 *	194
9	388	* 9	388 *	388
4	776	4	776	3104
2	1552	2	1552	3783
1	3104	* 1	3104 *	

Multiplicación rusa

Evidentemente, aunque este procedimiento requiere pocos conocimientos numéricos, se complica mucho para números mayores.

Para finalizar, recordaremos que no hemos tratado de que este recorrido por la historia del algoritmo de la multiplicación sea exhaustivo. De hecho es muy breve, con la idea de poder aplicarlo con los alumnos en el aula. Se han elegido algunos por ser los más representativos y otros por ser curiosos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ifrah, G. Las cifras. Historia de una gran invención. Alianza Editorial, 1987.

Gómez Alfonso, B. Numeración y cálculo. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, 1993.

Maza Gómez, C. Enseñanza de la multiplicación y división. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis, 1991.

Sánchez Pérez, J.A. La aritmética en Babilonia y Egipto. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Publicaciones del instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, 1943.

Selecciones del Reader´s Digest. Curiosidades de las palabras, figuras y números. Madrid, 1983.

ANÁLISIS DEL DESARROLLO HISTÓRICO DEL LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN.

Lázaro S. Dibut Toledo · José Joaquín Arrieta Gallastegui · Hassan Arteaga Rodríguez
Aurelio Antelo Collado · Ernesto R. Fuentes Garí · Narciso R. De León Rodríguez
Antonio Rey Roque · Julián Sarría González · Migdalia Torres del Toro
Jorge Luis Mazaira Fernández · Franklin Pérez González · Eduardo R. Bravo de las Casas

INTRODUCCIÓN.

En esta comunicación pretendemos referirnos, de forma muy sintética, a la evolución histórica de los conceptos de límite y continuidad. Para organizar la explicación hemos considerado cuatro períodos que son: Desde la antigüedad hasta el siglo III d.n.e, El período medieval del siglo XI al siglo XVI, Camino al rigor, del siglo XVI al siglo XVIII, y El rigor, siglos XVIII y XIX, aunque esta es una de las formas de organizar el tema. Los trabajos de Torres (1995), Hoffmann (1972) y Turnbull (1986), contribuyeron a seleccionar la organización referida y a profundizar en algunos de los tópicos que se exponen.

2. DESARROLLO.

2.1. Desde la antigüedad hasta el siglo III d.n.e.

Los primeros contactos con estos conceptos se tienen con los pitagóricos, que al descubrir los inconmesurables, al estudiar la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado, los condujo a un proceso infinito que conduce a una situación límite, puesto que no hay un segmento finito lo bastante pequeño para que la diagonal y el lado puedan ser expresados en términos de este. Por cierto que es de destacar que dicha relación entre el cuadrado construido sobre la diagonal del cuadrado unidad y este último, fue analizada por Platón en su diálogo El Menón, en lo que constituye el primer análisis de didáctica de las matemáticas del que tenemos constancia a nivel histórico. En él, Platón establece un diálogo entre Sócrates, Protágoras y un esclavo con la finalidad de esclarecer su conocida teoría pedagógica de la mayéutica, en la que explica cómo el profesorado debe asumir la función de "partero" para que, a través del diálogo, los estudiantes "descubran" los conocimientos que, supuestamente, ya tenían en sus mentes.
Es en este período cuando los pitagóricos introducen el concepto de infinitesimal al pensamiento matemático, a través de la doctrina elaborada en el siglo V a.n.e. como resultado de las especulaciones griegas concernientes a la naturaleza del mundo físico. La definición de un punto como unidad que tiene posición, hizo que no distinguieran claramente los aspectos geométricos de los físicos. La ciencia y las matemáticas pitagóricas eran concernientes a la forma y la estructura y no tenían nada que ver con la variación. Hay que recordar que para los pitagóricos, la matemática era la ciencia de las cantidades, fuesen ellas estáticas o dinámicas, discretas o continuas. Así, las asignaturas que más adelante constituyeron el Quadrivium, a saber, la aritmética, la geometría, la música y la astronomía, eran para ellos parte de la matemática. La aritmética era la ciencia de las cantidades discretas y estáticas, la geometría, por su parte, era la ciencia de las cantidades discretas y dinámicas, mientras que la música constituía para ellos la ciencia de las cantidades discretas y móviles y, por último, la astronomía la entendían como la ciencia de las cantidades continuas y móviles. Esto trajo como consecuencias que al aplicar su filosofía a los aspectos de cambio en la naturaleza, se mostraron vulnerables a los ataques a sus concepciones, dirigidos especialmente por Zenón de Elea en sus paradojas, en las cuales se asume que el espacio y el tiempo están compuestos por elementos indivisibles. Las respuestas a las paradojas de Zenón involucran las nociones de límite y continuidad, para las que los griegos no tuvieron respuesta al tratar de aplicar una filosofía de lo estático al movimiento.

Anaxágoras de Clazomene (500-428 a.n.e) establece una aguda definición de lo que nosotros llamamos "axioma de continuidad ": " ... en lo pequeño no existe lo extremadamente pequeño, sino algo cada vez más pequeño ... De igual modo, en lo grande siempre hay algo más grande ... " Hoffmann (1972). Por cierto que este historiador, de manera algo osada y carente de rigor, atribuye a Anaxágoras el nacimiento de la ciencia matemática, aunque en ningún momento explica el por qué de dicha afirmación. Como no define lo que entiende por matemática, la tesis de que la misma empieza con ese autor griego puede aplicarse a cualquiera de los citados en el libro, griegos o no, antiguos o contemporáneos.
En la geometría griega, el continuo era interpretado en términos de subdivisión sucesiva. Esto es en términos de lo discreto y la concepción pitagórica de la proporción era la identificación de las magnitudes geométricas con números enteros. Con el descubrimiento de los inconmesurables, esta definición no puede aplicarse universalmente. Para conjurar la crisis, había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional; Eudoxo de Cnido, de la Escuela Platónica, resolvió de forma brillante la antinomia radical entre finito e infinito. Introdujo el concepto de "tan pequeño como se quiera", equivalente a

nuestro proceso de "paso al límite", con lo cual encuentra una escapatoria, mediante una definición, un axioma y un método, que explico a continuación.

Definición:

> *Se dice que la primera de cuatro magnitudes tiene la misma razón con la segunda, que la tercera con la cuarta, cuando tomando cualquier múltiplo de la primera y la tercera, y de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda, según que el múltiplo de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.*

Axioma:

> *Se dice que dos magnitudes tienen razón, cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra.*

Método:

> *Prescindiendo del número irracional, Eudoxo opera con cantidades que se pueden hacer más pequeñas que un número arbitrariamente prefijado, para lo cual introduce lo que hoy llamamos el "axioma de Eudoxo-Arquímides"o "axioma de continuidad".*

Habiéndose convertido el infinito en tabú, por el misterio que lo envolvió, es reprimido o se le esconde a través del "axioma de continuidad", el "principio de Eudoxo" o del "Método de Exhaución ", procedimiento que en cierto aspecto es la traducción geométrica del paso al límite. Los matemáticos griegos, al aplicar el método de exhaución, nunca consideraron que el proceso debía hacerse un número infinito de veces. Este método aunque equivalente en muchos aspectos al tipo de argumento que ahora se emplea para probar la existencia del límite, no representa el punto de vista involucrado en el camino al límite. Los trabajos de Aristóteles, aunque no fue fundamentalmente un matemático, estuvieron encaminados al estudio de lo indivisible, el infinito y lo continuo; sin embargo, sólo su punto de vista respecto a los indivisibles, coincide con las nociones presentes, puesto que denegó la existencia del infinito actual.

Es sin dudas Arquímedes de Siracusa el más grande matemático de la antigüedad; modificó el método de exhaución al considerar no sólo las figuras inscritas sino también las circunscritas, para hacer la demostración rigurosa de los resultados que previamente había descubierto con su famoso método. En su amplio y variado trabajo, muchos historiadores han visto el nacimiento de los conceptos del cálculo de lo infinito, llevado a la perfección sucesivamente por Kepler, Cavalieri, Fermat, Leibnitz y Newton. De este período podemos concluir que los conceptos de límite y continuidad no evolucionaron porque el método de exhaución, con su doble contradicción, evitaron o más bien dilataron el paso al límite y excluyeron el infinito de sus razonamientos. El "horror al infinito" de los griegos evitó, mediante el método de exhaución, el uso de los incipientes conceptos acerca de los límites.

EL PERÍODO MEDIEVAL DEL SIGLO XI AL SIGLO XVI.

Después de Arquímedes, el interés de los griegos fue más hacia las cuestiones prácticas que hacia los desarrollos teóricos, como lo muestra el hecho de que fueran los iniciadores de un álgebra simbólica. La Aritmética de Diofanto representa el más alto desarrollo del pensamiento algebraico griego, aunque no aporta nada al esclarecimiento de los conceptos del cálculo. En este período, el interés de los Hindúes y Arabes estuvo encaminado al desarrollo algebraico y hacia la especulación de lo inconmesurable, continuidad, lo indivisible y el infinito. Aunque su aportación al establecimiento de un mayor nivel de rigor matemático fuese escasa, es de destacar sus aportaciones en el campo del número y del álgebra. Como afirma Arrieta (1998: 72):

> *"... el olvido de la contribución árabe al desarrollo intelectual de Europa, en general, y de las matemáticas, en particular, es otro grave error de la visión "clásica". Debemos a los árabes,... , el haber unido la técnica de la medida, desarrollada desde sus raíces egipcias hasta su forma final en manos de los alejandrinos, y el notable instrumento de cálculo, nuestro sistema de numeración que nació en la India, así como el suplementar estas ramas con un lenguaje sistemático y coherente de cálculo al que le aportaron nombre: el álgebra (Al-jabr, equivalente en español a "restauración", término incluído en el título de uno de los libros del gran matemático del siglo IX Al Khwarizmi). Negar su aportación, ..., como hace también Jean Dieudonné, supone ponerse la venda eurocéntrica ante los ojos, venda que impide conocer con propiedad y rigor histórico el desarrollo multicultural de las disciplinas matemáticas".*

En el siglo XIII se destacan los trabajos de Jordanus Nemomarius con relación a la continuidad. Torres (1995) recoge lo expresado por Jordanus al respecto: *"... la continuidad es la imposibilidad de distinguir los puntos límites, unida a la posibilidad de establecer un límite ... El punto es lo que establece la continuidad simple ..."*

En general el período medieval se caracterizó por las discusiones filosóficas que se dieron acerca del continuo, el infinito y los infinitesimales. Estas discusiones jugaron un papel importante en el desarrollo de los métodos y conceptos centrales del cálculo, así como en el estudio del movimiento y la variación.

CAMINO AL RIGOR, DEL SIGLO XVI AL SIGLO XVIII.

A mediados del siglo XVI Simón Stevin dio informalmente un gran avance sobre el concepto de límite, al mostrar que el centro de gravedad de un triángulo cae sobre su mediana. En la demostración hecha por Stevin este siguió el siguiente procedimiento:

- *A partir de un triángulo ABC cualquiera, inscribe paralelogramos de igual altura y llega a la conclusión que el centro de gravedad de la figura inscrita está sobre la mediana.*

- *Como es posible inscribir el triángulo un número infinito de tales paralelogramos, concluye que el centro de gravedad de la figura cae sobre la mediana AD.*

- *Mientras crezca el número de paralelogramos, la diferencia entre la figura inscrita y el triángulo ABC será cada vez más pequeña.*

Esta demostración muestra como Stevin manejó el concepto de límite en una forma adecuada, aunque debemos indicar que Stevin no habló del triángulo como el límite de la suma de los paralelogramos inscritos.

En este período no hubo más progresos porque la línea de trabajo se fue por el lado de los indivisibles, donde encontraron como método válido de demostración en el cálculo de áreas, el desarrollado por Cavalieri. En los comienzos del siglo XVII, aparecen métodos infinitesimales intentando obviar la doble reducción al absurdo del método de exhaución; sin embargo, con el uso de indivisibles y los infinitamente pequeños, se hacen menos rigurosas las demostraciones y al mismo tiempo, van desarrollándose consideraciones sobre límites basadas en la incipiente teoría de números. El principio o método de Cavalieri, ya comentado, fue criticado por figuras de la época tales como: J. Kepler, P. Fermat, I. Barrow y J. Wallis entre otros. Ellos argumentaban que los trabajos realizados por Arquímedes eran más rigurosos, en este sentido, que los de Cavalieri. Este principio tiene como efecto práctico, ocultar el papel que juega en los cálculos de áreas y volúmenes, el proceso del paso al límite. Es decir, al igual que Arquímedes con la composición de su método mecánico, Cavalieri con su principio evita los problemas del infinito.

Es durante este período que comienzan a aparecer definiciones más claras de límites. J. Gregory en sus trabajos consideró el paso al límite como una operación independiente. J. Wallis con su capacidad aritmetizadora, supera el imperativo griego de considerar sólo lo irracional en el campo de la Geometría, removiendo así uno de los obstáculos que impedía la rigurosa formulación del concepto de límite.

Los trabajos de I. Barrow, contrariamente, no van hacia la aritmetización, ejerciendo una influencia negativa en I. Newton, y retrasando la formulación del concepto de límite. Por su parte Newton, en sus PRINCIPIA, muestra tres modos de interpretar el nuevo análisis:

- En términos de infinitesimales.
- En términos de primera y últimas razones (límites).
- En términos de fluxiones.

G. Leibnitz por su parte, aunque atacó los problemas del nuevo análisis de manera independiente de Newton, llegó a resultados similares. Cuando analizamos en profundidad el trabajo de ambos en lo referente a los conceptos de límite y continuidad, podemos darnos cuenta que los mismos no fueron clarificados, se interesaron más en desarrollar el Cálculo que fundamentarlo.

A partir de ahora el problema de la continuidad va a gravitar constantemente en la formulación de los diversos métodos del Cálculo. Leibnitz recurre a su llamada ley de continuidad:

" ... lo que es verdadero hasta el límite, es verdadero en el límite ... ", para la justificación de su Cálculo Diferencial, y Newton encubre la noción de continuidad bajo el concepto empírico de velocidad instantánea o fluxión.

EL RIGOR, SIGLOS XVIII Y XIX.

Jean le Rond d'Alembert fue probablemente el primero que reconoció el método de límites como fundamental para el Cálculo. D'Alembert interpretó la frase de Newton *"primera y última razón"* no literalmente, sino como un límite, o sea, una cantidad que él llamaba límite de otra, si la segunda podía aproximarse a la primera más allá que cualquier cantidad dada, de tal manera que la diferencia entre ellas es absolutamente insignificante. De lo anterior se puede concluir que d'Alembert consideró que la cantidad que variaba, nunca coincidía, o era igual a su límite. El definió la tangente a una curva en un punto como el límite de la secante que pasa por él. Hizo además un serio esfuerzo para clarificar la idea de la noción de límite, sin embargo no logró dar un concepto claro y preciso que fuera lógicamente inequívoco.Con el tiempo la aproximación más importante hacia la solución de la fundamentación del cálculo fue el uso de límites. d'Alembert consideró límites de variables como el valor limítrofe al cual estas variables pueden aproximarse tan cerca como uno desee.

Los esfuerzos para encontrar bases sólidas para el nuevo análisis continuaron. Cuando Lagrange era presidente de la Academia de Berlín, ofreció un premio para la mejor exposición de una clara y precisa teoría de la matemática infinitesimal. El ganador fue Simón L'Huilier con su *Exposition élémentarie des calculs superiers* que fue publicada en 1787. En esencia, él modifica el Método de Exhaución para interpretarlo en términos de límites y hace de este concepto la base de su exposición. Fue el primero que usó la notación tal y como la conocemos en estos tiempos, o sea : $\lim (\Delta y/\Delta x) = dy/dx$ si $x \to 0$ y enfatizó que dy/dx debería verse como una sola cantidad y no como un cociente.

Sin embargo, en su obra él evitó abordar los aspectos centrales de los conceptos de infinitesimales y límites, y pareció no darse cuenta de que la sutileza del concepto requería de una definición extremadamente cuidadosa. Su trabajo no fue difundido ampliamente, por lo que no influyó determinantemente en los trabajos posteriores de la época que intentaban clarificar este concepto. El trabajo del francés Lazare Camot *Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal*, parece ser que fue el que más influyó. Su enfoque fue a través de ecuaciones en lugar de funciones y estuvo más interesado en dar a conocer las facilidades de aplicación de las reglas del nuevo análisis, que en el procedimiento lógico involucrado.
Su fundamentación favorita era por medio de la ley de continuidad de Leibnitz. Sin embargo, los puntos de vista de convergencia, continuidad, funciones y límites no eran lo suficientemente definitivos para permitir una profunda clarificación de las ideas y conceptos involucrados.
No fue hasta principios del siglo XIX en que realmente se inició la formulación rigurosa de estos conceptos ; se deben destacar en esta dirección los trabajos de Bolzano. ESte se percató que lo primero que había que hacer era dar una definición clara de continuidad, la cual formuló como sigue:

> *" f(x) es continua en un intervalo, si para todo valor de x en este intervalo, la diferencia f(x+Δx) - f(x) llega a ser y permanece menor que cualquier cantidad dada Δx suficientemente pequeña, ya sea positiva o negativa ".*

Posteriormente Cauchy dio otra definición que no es esencialmente diferente que la de Bolzano:

> *" la función f(x) permanecerá continua respecto a x entre límites dados, si entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable, produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función misma ".*

Realmente con el extenso trabajo de Cauchy se llegó a la formulación definitiva y rigurosa de los conceptos de límite y continuidad tal como ahora los conocemos, enlazando ambos conceptos por medio de la siguiente definición:

> *"f(x) es continua dentro de un intervalo, si el límite de la variable f(x) cuando x se aproxima a Xo es f(Xo), para toda x del intervalo ".*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Arrieta, J. (1998). Matemáticas no eurocéntricas para una educación intercultural. Suma, 28, pp. 71-80.

Hoffman, J. (1972). Historia de las Matemáticas. Ediciones Revolucionarias. Instituto Cubano del Libro.

Torres, J., y Castro, G. (1995). Obstáculos presentes en los estudiantes para la adquisición de los conceptos de límite y continuidad. Memorias del II Taller Científico Metodológico de Matemática y Computación. COMAT'95. Universidad de Matanzas. Cuba. Nov (6-9).

Turnbull, H. (1986). Grandes Matemáticos. Editorial Científico Técnica. Ciudad de la Habana.

CUANDO LOS EPÍGONOS SON GRANDES: AL- QALASÁDÌ

ANGEL REQUENA FRAILE

INTRODUCCIÓN

Uno de los autores adalusies mas citados y utilizado durante cinco siglos sigue siendo uno de los mas desconocidos en su tierra. En tanto se repara las deudas, esta comunicación expone el contenido de su obra aritmética y algebraica.

DATOS BIOGRÁFICOS:

Abul-Hasan Ali ibn Muhammad al Qalasádì ibn Ali al-Qarasi al Qalasádì al-Basti nació en Baza a comienzos del siglo XV(IX de la Hégira), momentos tristes para el reino nazarita por la caída de Antequera.

Abul-Hasan se educa en su villa natal siguiendo los cursos de Ali ibn-Musa en Derecho, Ciencia Coránica y repartos de herencias. Posteriormente se instalará en Granada, cuya madrasa fue fundada en 1349 por Yusuf I.

En la capital del emirato Al-Qalasádì continuara los estudios habituales de Derecho, Filosofía, Filología y Ciencias.

Cumpliendo como hombre piadoso con los preceptos del Islam, Al-Qalasádì hace la peregrinación a la Meca, visitando el Norte de Africa, en especial Tremecen donde se familiariza con la Aritmética que había tenido un gran desarrollo en el siglo anterior con ibn al-Banna, el marroquí, cuyo "Talkhis" (Sumario de operaciones de Cálculo), era el libro de referencias para el estudio de la "ciencia de los números y sobre el que posteriormente escribiría un comentario.

De vuelta a Granada al-Basti se dedica a la enseñanza y redacción de una amplísima obra en Derecho, Aritmética y Algebra.

La inestabilidad del reino nazarí lleva a Al-Qalasádì a abandonar Granada definitivamente, muriendo en Túnez en 1486, mismo año en que se derrumba la parte occidental.

Su ciudad natal pasara al reino de Castilla en 1489, tras la más clara e intensa resistencia que encontraron los Reyes Católicos en su conquista.

OBRA ARITMÉTICA Y ALGEBRAICA

De la amplísima obra de al-Qalasádì destaca por su transcendencia su libro de Aritmética y Álgebra el del poético título "Se levanta el velo de la ciencia gubar".

De esta obra se encuentran manuscritos en las grandes bibliotecas. Su importancia ha sido tal que se ha seguido usando como manual hasta el siglo XX.

Modernamente se imprimió en el Cairo (1891) y en Fez (1897).

Para esta comunicación se ha seguido la traducción de Woepecke (Roma, 1859) según manuscritos encontrados en la Biblioteca de París y los manuscritos de la Biblioteca Nacional de Madrid (incompleto) y de El Escorial.

Las variaciones entre estos distintos ejemplares son poco significativas, destacando el de Madrid como el más cuidado.

Los dos manuscritos consultados utilizan tinta negra para los textos y roja para las expresiones simplificadas o resultados.

SE LEVANTAN LOS VELOS DE LA CIENCIA GUBAR

Las expresiones "desvelar" y "levantar los velos " son muy usadas en la cultura arábiga, muchos científicos la utilizan en sus títulos.

Levantar velos tiene para nosotros el encanto de la aventura, el descubrimiento de los secretos, pero en el Islam también incluye lo sagrado; Dios ha ocultado algunas cosas que deseaba que estuvieran encubiertas y solo le esta permitido descubrirlas a algunos hombres justos.

El termino "gubar" significa arena o polvo. Los calculistas hacían uso de sus bolsitas de polvo que extendían en una superficie plana para hacer sus operaciones, procedimiento que venia practicándose desde la antigüedad.

La ciencia gubar no es otra que la aritmética práctica, la despreciada por los griegos que la denominaban logística y que reservaban el termino Aritmética para las propiedades de los números, nuestra "teoría de los números".

El libro de al-Qalasádì consta de una introducción, cuatro partes y una conclusión; tratando de la numeración de posición, operaciones con enteros, operaciones con fracciones, raíz cuadrada, obtención de lo desconocido, progresiones y series respectivamente.

El éxito de este manual radica en su sistemática, pero su importancia en la ciencia esta en ser considerado como una de las fuentes del álgebra sincopada o simbólica moderna.

Las expresiones usadas por al-Qalasádì ya habían sido empleadas anteriormente tanto en occidente como en oriente pero sin tanto éxito.

La atribución a al-Qalasádì del simbolismo tiene que ser pues ponderada a la luz de nuevos datos, pero su tratado sobre la ciencia gubar, útil durante cinco siglos da una idea de su importancia.

Podemos decir que el último de los sabios andalusies ha sido el mas reproducido y utilizado aunque no sea el más brillante.

El medioevo ibérico que tiene a Isidoro de Sevilla como figura inicial termina con al-Qalasádì al-Basti, los dos autores ibéricos más comentados.

LAS CIFRAS GUBAR

Las cifras indias, el cero y la numeración de posición habían llegado al Islam en el siglo VIII, extendiéndose su uso en la ciudad circular de Bagdad en el siglo IX, periodo de esplendor del califa al-Mamun.

Fue al-Jwarizmí (el del mar de Aral) el encargado de su expansión. El tratado de "álgebra y almucabala" (de la restauración y la oposición) y su libro de aritmética llegó a occidente muy rápido a través de la península ibérica, y con ello, los términos cifra, cero, guarismo, algoritmo y álgebra.

En el siglo X el códice mozárabe del monasterio riojano de Albelda o códice vigilano (976) ya contiene las diez cifras. Lo curioso es que estas diez cifras no son las indo-arabes cultas que usan los piases islámicos sino las árabes occidentales –las gubar- que son las predecesoras directas de las universalizadas.

Las cifras usadas por al-Qalasádì no son las cultas. Para nosotros las únicas diferencias apreciables están en el cuatro y el cinco. Nuestro cuatro es mas parecido al cinco alqalasadiano, y el cuatro es como si estuviera girado 90 grados. Con estos datos los manuscritos árabes son perfectamente legibles.

Hay que recordar que el árabe se escribe de derecha a izquierda mientras que los números se escriben igual pues se leen empezando por las unidades.

LAS OPERACIONES BÁSICAS CON ENTEROS

Las cuatro operaciones básicas: sumar, restar, multiplicar y dividir no tienen especial interés para este breve resumen por su similitud al método escolar de hoy, ahora, si seria destacable el uso para multiplicar de la parrilla árabe cuadriculada que termina con la suma en diagonal de los números. También tiene interés las reglas para multiplicar algunos números, en espacial el método de las duplicaciones, de herencia egipcia y que es tan practico para el calculo mental.

Una de las elegancias alcalasadianas es la parrilla para proceder al reparto proporcional, sistema muy sencillo y fácil de usar.

LAS FRACCIONES.

La segunda parte del "Se descubre..." esta dedicada a las fracciones.

Nuestro matemático divide las fracciones en cinco tipos: simples, divididas en partes, relativas, heterogéneas y sustracivas. Recuérdese que las fracciones decimales no se emplearan hasta finales del siglo XVI y por tanto no existe en época de al-Qalasádì nada parecido a los números decimales y sí un gran virtuosismo en las operaciones con fracciones.

Las fracciones alcalasadianas ya tienen la raya horizontal que separa numerador del denominador, pero hay que tener cuidado porque los distintos tipos pueden dar lugar a confusión, en especial las llamadas relativas a modo de fracciones continuas ascendentes.

Por lo demás la operación con fracciones, una vez reducido a común denominador tiene un tratamiento similar al actual.

La utilización de fracciones obedece a la necesidad de hacerse una idea del orden de magnitud y a su utilidad en el reparto de herencias.

LA RAIZ CUADRADA

Es destacable el uso de un símbolo para la ràíz cuadrada, la letra inicial JA de raíz (jidr).

Las raíces racionales se obtienen por un método que es prácticamente el que se ha venido enseñando a los escolares.

Mayor interés tienen los métodos para aproximar las raíces irracionales. Se exponen tres procedimientos señalando como de especial interés la sencillez de uso de la aproximación que alcanza el tercer termino de la fracción continua equivalente.

EL CALCULO DE LO DESCONOCIDO

Antes del álgebra Abul-Hasan resuelve el calculo de las magnitudes desconocidas cuando están en proporción con otras tres. Lo más interesante es que la magnitud desconocida esta representada por su inicial.

A señalar también que al-Qalasádì utiliza el llamado método de la balanza para resolver por técnicas de falsa posición el calculo de la magnitud buscada.

EL ALGEBRA

La mayor fama le llega a al-Qalasádì por su simbolización de las ecuaciones de segundo grado. El desarrollo de al-Jwarizmí es fundamentalmente literario. Los seis tipos de ecuaciones se exponen de forma narrativa. El árabe tiene la ventaja de llegar a ser hasta cuatro veces más rápido de escribir cuándo no utiliza vocales.

El álgebra alcalasidiana utiliza los tres puntos (∴) de la letra CHIN para la cosa o raíz, la letra MIN para el cuadrado y LAM para indicar el signo de igualdad. Las dos primeras son iniciales mientras que la tercera es la ultima consonante.

El libro contiene los métodos de resolución una vez reducidas las ecuaciones a alguno de los seis casos básicos.

Al-Qalasádì inicia también lo que podemos llamar la operación de polinomios, realizando las cuatro operaciones con números, cosas, cuadrados, cubos, etc. Llamando vestigio a lo que nosotros denominamos grado.

FINAL

El libro de la ciencia gubar termina calculando la suma de progresiones aritméticas y la suma de las potencias de la serie natural. Se trata de cálculos que encierran cierta complejidad. La exposición de los resultados se hace de forma narrativa pero en la presentación se recurre a cuadriculas, en especial tiene interés la resolución del problema histórico de la duplicación en el tablero de ajedrez.

RECAPITULACION

Nueve siglos de presencia musulmana en la península ibérica han dejado una huella imborrable en la lengua y en la cultura.

Hubo momentos donde al-Andalus era el mayor centro cultural, literario, filosófico y científico del planeta. Pero los periodos de esplendor no duran mucho, son situaciones esporádicas entre el siglo X y el XII, y que se conservan lo suficiente para la gran tarea traductora toledana, primero con el entorno del arzobispo Don Raimundo y después de Alfonso X.

En pleno ambiente de decadencia - de la que fueron conscientes- todavía hay destellos de luz, uno de ellos fue **al-Qalasádî.**

GRUPO 8
FORMACIÓN INICIAL Y PERMANENTE DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UN ACERCAMIENTO DESDE LOS NÚMEROS RACIONALES.

ANTONIO J. MORENO VERDEJO · PABLO FLORES MARTÍNEZ

INTRODUCCIÓN

El conocimiento social acumulado es hoy de tal complejidad y amplitud que la sociedad se organiza en torno a subgrupos que tienden a la especialización de la actividad de sus miembros, a la profesionalización. El profesor de matemáticas no es ajeno al proceso que se está viviendo (Flores, 1998).

Los profesionales se caracterizan por tener competencias específicas basadas en conocimientos y destrezas adecuadas para el desarrollo de su actividad. El profesor de matemáticas tiene competencias profesionales con las que afronta los problemas de enseñanza, pero además tiene que para reconocerlas para identificarse como profesional y actuar de manera racional ante las situaciones que rodean a las pruebas de acceso y promoción del profesorado (Flores y Moreno, 1999). En las "oposiciones a profesores de secundaria" y en el "acceso a la condición de catedrático", los profesores deberían contar con una descripción de sus competencias profesionales tanto para facilitar la preparación de los candidatos, como para diseñar criterios de valoración para que puedan ser aplicados por aquellos que formen parte de un tribunal que juzgue estas pruebas. En esta comunicación reflexionamos sobre las competencias profesionales del profesor de matemáticas, describiendo el conocimiento del profesor en relación a los números racionales.

COMPETENCIAS PROFESIONALES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. ALGUNAS PROPUESTAS

Las competencias profesionales del profesor de matemáticas tienen un componente práctico, que le permite resolver los problemas profesionales de manera inmediata, y que se ejercita con la experiencia reflexiva, y un componente teórico específico de su actividad y que los hace distinguirse de otros grupos profesionales como los matemáticos. La forma en que se adquieren estas compentencias es compleja, ya que la docencia es una actividad práctica, por lo que el profesor no puede surtirse exclusivamente de una preparación teórica, y a la vez, es ingenuo e irresponsable esperar adquirir la profesionalidad por medio del ejercicio empírico, dada la complejidad e importancia social de su tarea, en la que se trabaja con sujetos que no pueden someterse a experimentos de manera irreflexiva.

La caracterización administrativa del conocimiento profesional del docente deja un margen de ambigüedad (Flores y Moreno, 1999) que ha dado lugar a que se enfatice el conocimiento matemático en las "oposiciones", por encima de otras componentes profesionales. También ha provocado que se estén ofreciendo "planteamientos didácticos" en los Temarios de Oposiciones actuales, que son listas de términos didácticos sin mucho significado para los clientes ni para los jueces. Ello hace muy difícil su estudio, recuerdo, exposición y valoración por parte de quien actua como tribunal.

Se abren pues, dos problemas: Clarificar las componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, (lo que constituye una línea de investigación en educación matemática, Llinares 1998), y buscar formas para favorecer que los profesores desarrollen este conocimiento, lo lleguen a explicitar y puedan compartirlo. Sólo cuando los profesores de matemáticas consensuen conjuntos de problemas profesionales, discutan sobre su importancia, establezcan criterios para enjuiciar si se han resuelto estos problemas o para establecer la calidad de la solución (valores de una programación, por ejemplo, o de un libro de texto), estaremos en condiciones de realizar con racionalidad pruebas de acceso a la docencia o de promoción profesional.

De acuerdo con este argumento, los autores de esta comunicación estamos elaborando un conjunto de reflexiones sobre el conocimiento matemático, desde el punto de vista del profesor de matemáticas de secundaria. En este artículo hemos querido anticipar el contenido resumido de uno de los temas, los números racionales. Nuestra intención es compartir este conocimiento profesional y abrir un debate sobre su alcance e importancia para el profesor de matemáticas.

Para facilitar la comunicación del conocimiento profesional utilizamos alguno de los organizadores curriculares de Rico (1997)[1], quien ha aportado al campo una estructura original y bien fundamentada. Nosotros comenzaremos por ofrecer algunas reflexiones sobre el concepto matemático, su significado a lo largo de la historia de la matemática y los campos en los que se emplea (Fenomenología del concepto). Posteriormente estudiaremos su aparición en el currículo, y haremos algunas precisiones sobre los demás organizadores (representaciones, errores, materiales curriculares), para terminar con algunas consideraciones de carácter metodológico.

[1] Veanse los dos textos de Rico para entender los organizadores dentro de la teoría curricular
Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, Síntesis.
Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona, Horsori.

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS NÚMEROS RACIONALES.

El número racional amplia al número entero con la posibilidad de resolver todas las ecuaciones de la forma $ax+b=c$, permitiendo resolver todos los problemas reducibles a estas ecuaciones. Este hecho acarrea la construcción del cuerpo de fracciones en un anillo, pero también la posibilidad de realizar la división y con ello la ruptura de la matemática discreta, para generar un conjunto denso. La densidad es una característica de muchas de las magnitudes, por lo que los números racionales permiten encarar la medida de magnitudes, con todo lo que esto aporta a la ciencia, la técnica y la práctica social.

Las fracciones (origen de la construcción de Q) aparecen en muchas ocasiones como la *relación entre una parte y un todo* que actúa como unidad de referencia (*a medio camino*). En otros casos aparecen como *una división sin realizar* (*le toca a cada uno un tercio*). También puede indicar *el resultado de una medida* (*cuarto y mitad*). En otros casos es un *operador* (*le corresponden los dos tercios del total*). Pero el sentido que más se aproxima al de número racional es el de la fracción *razón*, entendida como relación parte a parte, o como proporción. El número racional está, pues, en la base del razonamiento proporcional. Ligados a estos sentidos de uso de las fracciones, aparecen las equivalencias y las operaciones entre números racionales. La suma y resta son fáciles de establecer con los mismos sentidos que la suma y resta de números naturales, especialmente cuando se refieren a la misma unidad, pero la multiplicación y división obedecen a otros criterios y sentidos diferentes de las operaciones en N. En general, la multiplicación exige la actuación como operador de una fracción sobre el resultado obtenido por la otra, mientras que la división se refiere a la comparación entre partes, más que al reparto. Como se observa, los números racionales tienen su propia significación, que no siempre coincide con la de los números enteros y naturales, por lo que el profesor debe conocer estas características.

El origen histórico de los números racionales se encuentra en la necesidad de medir, lo que lleva a proponer expresiones numéricas para llevar a cabo la operación. Los Babilónicos y Egipcios emplean fracciones de numerador unidad con las que obtienen relaciones numéricas y medidas. La matemática griega encara el problema de la búsqueda de la parte aliqüota entre dos longitudes, para establecer la medida de una respecto a la otra, con la expectativa de que siempre sea posible, pero la constatación de que es imposible encontrarla entre el lado del cuadrado y su diagonal les lleva a una crisis de la que salen enfocando su atención a la geometría.

La matemática árabe va a dar un auge importante en el manejo de los números racionales, introduciendo una notación más actual. Es Stevin, en el siglo XVI quien establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal, dando un fuerte empuje a su aceptación generalizada. La formalización del número racional llegará en el siglo XIX, construyéndolo como lo que el álgebra llama cuerpo de fracciones de los números enteros.

Los números racionales se expresan de dos formas diferentes, en forma de fracción, y con notación decimal. La escritura en forma de fracción tiene, para Aleksandrov (1973) su origen en las relaciones entre la aritmética y la geometría. El uso particular de fracciones decimales y su utilización para la medida de magnitudes, como el tiempo, da lugar a la notación decimal (Centeno, 1988).

Los currículos sitúan el estudio de las fracciones y números racionales tanto en ESO como en el primer curso de todos los Bachilleratos aunque con diferentes enfoques. Mientras en la primera de las etapas se trabajará la lectura, interpretación y utilización de los números fraccionarios, sus operaciones y su relación con la proporcionalidad de magnitudes y la probabilidad; en bachillerato se utilizarán los números racionales mediante estimaciones y aproximaciones, controlando los márgenes de error adecuados con el contexto.

Representaciones y modelos.

Nos referimos al término representación como "el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico" (Rico, 1997:53). Los modelos sirven para la presentación y el desarrollo de un concepto determinado.

Las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada (3/5), representación como razón (3:5), representación decimal (0.6), representación de porcentajes (60%). En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco (Llinares y Sánchez, 1988).

Entre los modelos usuales en el trabajo con números y operaciones podemos destacar los siguientes: lineales, utilizan la recta numérica como modelo de representación numérica; métricos, emplean longitudes, superficies, balanzas para el estudio de conceptos numéricos; geométricos, que utilizan figuras geométricas para representar partes de la unidad; funcionales, aunque no son los modelos habituales actualmente se emplean para operaciones con racionales pero no con decimales, excepto algunos casos de porcentajes.

Obstáculos, errores y dificultades.

El conocimiento de los obstáculos, errores y dificultades anticipa al profesor los conceptos que van a tener una especial dificultad, pero también permite el diseño de instrumentos para su diagnóstico y tratamiento.

Algunos errores conceptuales aparecen al relacionar distintas interpretaciones de la fracción. La identificación de la fracción con una cantidad es un obstáculo para interpretar y manejar la fracción como razón, y para el número racional.

La noción de equivalencia de fracciones es origen de errores debidos al manejo simultáneo de diversos sentidos de fracción y de equivalencia, y otras veces por los problemas originados ante la transitividad del signo igual.

La introducción temprana del cálculo algorítmico puede provocar confusiones en su manejo. Estos equívocos también se pueden producir por la similitud entre las notaciones de los números naturales y las fracciones. En este sentido se puede considerar que las operaciones aprendidas con los números naturales son un obstáculo para las operaciones realizadas con racionales ya que, por ejemplo, la multiplicación no significa siempre un aumento de la cantidad.

En el aprendizaje de los números decimales, los alumnos encuentran dificultades en las operaciones, en el uso del cero, en la lectura y escritura de los números y en el orden. Estas dificultades se deben en gran medida a la persistencia de conocimientos de los números naturales.

Sugerencias metodológicas

Las orientaciones metodológicas del currículo oficial no difieren mucho de unos bloques a otros. En este epígrafe recogemos algunas sugerencias metodológicas específicas para el tema que nos ocupa y que están recogidas en la bibliografía didáctica sobre el tema.

Conviene comenzar el estudio de los racionales con la relación parte-todo para ir readaptando esta noción durante la secuencia de enseñanza, de manera que al final el concepto de número racional tenga como subconceptos las diferentes interpretaciones que el alumno ha ido adaptando a lo largo de su formación (Llinares y Sánchez, 1988). El objetivo de desarrollar la comprensión del concepto viene vinculado a la capacidad de representación que el niño pueda hacer de la noción parte-todo (lo que excluye la representación sobre la recta en edades tempranas) y a la necesidad de negociar con los alumnos el significado de los símbolos (la representación de la relación).

Para el diseño del proceso de enseñanza del número racional se sugiere comenzar a trabajar en contextos concretos, tratando de vincular las fracciones a problemas reales. Posteriormente se abordarán los contextos continuos hasta finalizar con la recta numérica.

Materiales y recursos.

Para la enseñanza de las fracciones podemos emplear materiales y recursos relacionados con la enseñanza de los números, como los marcadores, los ábacos, etc. También se pueden emplear otros materiales generales, como el Tangram y la calculadora. Otros recursos específicos son el círculo de fracciones, los puzzles troquelados de fracciones, el dominó de fracciones, la baraja de fracciones y cualquier objeto que se preste a la partición y estudio de las relaciones entre las partes. Hay que destacar la importancia de los instrumentos de medida en la enseñanza de los racionales: reglas graduadas, escalas, vasos graduados, jeringuillas, calibradores, cartulinas, papel cuadriculado, etc.

CONCLUSIONES

Hemos intentado, en este artículo mostrar un conjunto de compentencias sobre números racionales que el profesor debería conocer y manejar para poder llegar a diseñar sus unidades didácticas con mayor riqueza de objetivos educativos, y mejor adecuación entre estos y las actividades previstas. Esperamos poder compartir esta visión y recibir las críticas y comentarios que enriquezcan esta caracterización del profesor como profesional reflexivo (Flores, 1997).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Aleksandrov, A.D. y otros. (1973). *Las matemáticas su contenido método y significado*. Madrid, Alianza.

BOJA, (2000). Convocatoria de pruebas para el ingreso en los Cuerpos de Funcionarios Docentes.

Centeno, J. (1988). *Números decimales*. Síntesis. Madrid.

Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En Berenguer, M., Cobo, B. y Fernández, F. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. La tarea docente*. Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES, Granada. 13-27.

Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO* 17, 37-50.

Flores, P.; Moreno, A. (1999). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y oposiciones. Actas de las 9ª Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Lugo.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO* 17, pp. 51-64.

Llinares, S. y Sánchez, Mª V. (1988). *Fracciones*. Síntesis. Madrid.

MEC (1993). Real Decreto que regula el ingreso en los Cuerpos de Funcionarios Docentes.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, Horsori.

EL PORTAFOLIOS: INSTRUMENTO PARA LA EVALUACIÓN EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE SECUNDARIA

ANA SERRADÓ BAYÉS · PILAR AZCÁRATE GODED

INTRODUCCIÓN

En este trabajo vamos a justificar y caracterizar la propuesta de evaluación implementada con un grupo de estudiantes del Nivel I de Experto, "Especialización en Educación Secundaria" de la Universidad de Cádiz. El modelo de profesor que intentamos propiciar ha de ser un profesional con la capacidad de diseñar, desarrollar y modificar desde su propia interpretación, el currículum prescriptivo en los diferentes contextos y niveles. Orientamos la formación inicial de estos estudiantes hacia un objetivo genérico que es conseguir que los profesores sean capaces de **reflexionar en y sobre su práctica**: para descubrir, criticar y modificar los modelos, esquemas y creencias que subyacen a la misma y ser capaces de diseñar, experimentar y evaluar proyectos curriculares. Este objetivo, planteado de esta forma, ha de permitir la mejora de las prácticas educativas a los futuros profesores y a los formadores.

El potenciar la reflexión en los periodos de formación en inicial en los futuros profesores ha de considerarse como una estrategia de formación que invite a la investigación en la acción. La reflexión ha de permitir al profesor elaborar un modelo didáctico de referencia que guíe sus prácticas en los primeros años de actuación. Este modelo didáctico ha de ser coherente con el modelo de formación presentado.

Vacc y Bright (1994), señalan como uno de los resultados más significativos de su trabajo con futuros profesores, el importante efecto que tiene el buen desarrollo del proceso de formación la coherencia y consistencia entre la forma de trabajar del profesor y la filosofía que intenta transmitir el contenido del programa. Esta consistencia y coherencia se ve reflejada directamente en la intervención y actuación en el aula, caracterizada al intentar dar respuesta a los tres problemas básicos a la hora de planificar: ¿Para qué enseñar?, ¿qué enseñar?, y ¿cómo enseñar?. Y, cómo no, Qué, Cuándo y Cómo evaluar, tanto el diseño como su desarrollo, y los resultados del mismo en forma de evolución de los alumnos (Azcárate, 1999).

En esta comunicación intentamos dar respuesta a cómo entendemos nosotros la evaluación, presentando un instrumento de trabajo y evaluación que fomente la reflexión sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje realizado por los alumnos, que fundamenta el modelo didáctico subyacente en éstos.

¿QUÉ ENTENDEMOS POR EVALUACIÓN?

De los múltiples significados y definiciones del concepto de evaluación consideramos una buena aproximación a la idea que hemos presentado la que da la NCTM en la obra *Assessment Standards for School Mathematics*. En esta obra se define la evaluación como *"el proceso de obtención de evidencia sobre el conocimiento adquirido por los estudiantes, capacidad para usarlo y disposición hacia su uso, y hacer inferencias a partir de la información recogida para una variedad de propósitos"*. Esta variedad de propósitos que plantea esta definición obliga a contextualizar el significado de evaluación o assessment.

Una primera contextualización del significado de evaluación surge al considerarla basada en el currículum. Verdugo (1991: 177) explica que *"**la evaluación basada en el currículum** tiene que ver con la evaluación de los aprendizajes y la conducta en el aula, y se centra en aplicaciones educativas prácticas"*. De esta forma, no se evalúa exclusivamente al futuro profesor, y su competencia curricular, sino también los procesos y situaciones de enseñanza-aprendizaje, así como la interacción del futuro profesor con esta situación. La evaluación basada en el currículum se refiere a todos los alumnos-profesores y debe realizarse como una parte fundamental dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, el profesor adquiere un papel activo, que tiene como función valorar las necesidades en la formación de los futuros profesores. En lugar de generar prácticas profesionales que respondan a criterios técnicos alejados de la escuela y de los alumnos, se pretende coordinar la información diversa para desarrollar programas educativos adaptados al grupo. Este tipo de evaluación sugiere la adopción de un planteamiento ecológico. Estos planteamientos sugieren la necesidad de que la evaluación contemple la complejidad de las vidas y contextos de los alumnos y su influencia en la construcción de su conocimiento profesional. En este planteamiento cobra importancia la propia percepción del sujeto, las características de las distintas personas que interactúan con el sujeto, así como la influencia que ejercen en el desarrollo del mismo.

Adoptamos al mismo tiempo un **enfoque constructivista de evaluación**, en el que entendemos que el aprendizaje es una construcción de significados, donde las nuevas informaciones se seleccionan, organizan y conectan con los conocimientos previos que el alumno posee. La acepción de este enfoque obliga a qué la evaluación sea holística y dinámica, multidimensional, de forma que tenga presente la interacción entre lo cognitivo, la motivación, la autoestima y el aprendizaje. Para poder llevar a cabo el modelo de evaluación presentado es necesario usar un instrumento de evaluación que permita analizar la evolución en las concepciones de los profesores sobre el significado del conocimiento profesional, además de ver cuál es el modelo didáctico que se configura. En esta comunicación presentamos el uso del portafolio como instrumento que permite este tipo de evaluación.

EL PORTAFOLIO

De las múltiples definiciones de este instrumento, consideramos conveniente presentar la de Margalef (1997: 134), por la simplicidad y cantidad de información que aporta. Esta autora se refiere a este como *"una colección de documentos que refleja la actuación y productos realizados por el estudiante durante su proceso de aprendizaje dentro y fuera de la escuela"*. El portafolios puede contener una gran variedad de trabajos realizados por el alumno tanto en clase como en casa, durante un periodo de tiempo y en una determinada área curricular, así como la explicación de las estrategias didácticas utilizadas. Los trabajos que se incluyen reflejan las habilidades, nivel de desarrollo y condiciones ambientales del hacer del alumno.

¿QUÉ DOCUMENTOS CONFIGURAN EL PORTAFOLIOS?

En el modelo de formación inicial de profesores de Educación Secundaria que presentamos se caracteriza por ser un curso semipresencial, en el que adquiere gran importancia las actividades que los alumnos en casa. Los alumnos deben realizar dos tipos básicos de actividades: actividades obligatorias y actividades de autoaprendizaje. Las actividades obligatorias permiten al alumno conocer los elementos que configuran el modelo didáctico de intervención en el aula de matemáticas. Mientras que, las actividades de autoaprendizaje son de análisis y reflexión sobre la futura actuación del profesor como docente en Matemáticas.

Los documentos que forman parte del portafolios son las actividades de autoaprendizaje que han realizado los alumnos durante el nivel I del curso de experto (Serradó y Azcárate, 1999). Estas actividades de reflexión hacen referencia a cada uno de los diferentes contenidos desarrollados, y pretenden dar respuesta a los elementos que configuran el modelo didáctico. Los alumnos a lo largo del proceso han de reflexionar sobre las tres dimensiones planteadas anteriormente.

- En relación a la dimensión de carácter epistemológico, que aporta información sobre las características y el significado del conocimiento matemático escolar, los futuros profesores han de reflexionar sobre: qué son las matemáticas, la finalidad formativa y utilitaria del conocimiento matemático, las diferencias entre las finalidades educativas y los objetivos curriculares de la Educación matemática, el papel de las capacidades en la organización del currículum, el significado de resolver problemas, la diferencia entre educar y enseñar matemáticas.
- En relación a la dimensión de carácter cognitivo, que informa sobre el sentido de los procesos de aprendizaje de los alumnos, los futuros profesores han de reflexionar sobre: porqué existen dificultades de aprendizaje, la diferencia entre aprender matemáticas y aplicar matemáticas, la relación que se establece respecto al significado que adquiere la naturaleza de las matemáticas y el significado del aprendizaje, el papel que adquiere el profesor ante alumnos que presentan dificultades de aprendizaje, las dificultades en el aprendizaje asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, el proceso de superación de los errores.
- En relación a la dimensión de carácter curricular, que se relaciona con la línea de acción a desarrollar en el aula para tratar adecuadamente el conocimiento matemático, el futuro profesor ha de reflexionar sobre las características del modelo tradicional de intervención, el significado de la planificación en la intervención, los diferentes modelos de intervención que reconocen, las características del modelo de intervención descrito propuesto por la LOGSE, la concreción de los contenidos de aprendizaje como resultado de la concepción social que se atribuye a la enseñanza, los tipos de relaciones que se pueden establecer entre profesores y alumnos, el uso de recursos educativos, el uso del libro de texto, las diferencias entre los modelos tradicionales de evaluación y el modelo propuesto por la LOGSE, el significado de la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje,

¿CÓMO USAMOS EL PORTAFOLIO?

Farr (1994) establece en su obra varios tipos de portafolio. Por un lado, nos encontramos ante las **carpetas de trabajo;** las actividades de autoaprendizaje se incluyen en estas carpetas. Para que el portafolio adquiera su significado estas carpetas de trabajo no han de ser una recopilación de material, sino un conjunto de material trabajado. Durante el proceso de enseñanza y aprendizaje, estas aportan información sobre las dificultades en la construcción del modelo didáctico, los diferentes modelos didácticos que se establecen en el aula, cómo estos evolucionan. De forma que, el profesor puede planificar su intervención en función de las necesidades de formación de cada uno de los futuros profesores. Para el futuro profesor el contenido de la carpeta de trabajo se configura como una única actividad de reflexión sobre el modelo didáctico, en que el significado de cada uno de los elementos ha de ser coherente con los anteriores. El intentar establecer esta coherencia es lo que permite al futuro profesor evolucionar su modelo didáctico de referencia respecto a un modelo tradicional de intervención.

En la puesta en práctica de esta modalidad de evaluación y del portafolio, tal y como manifiestan los autores que hacen referencia a la misma, es importante que, tanto el futuro profesor como el formador, seleccionen los trabajos que se incluirán en el portafolios, reflexionando sobre qué criterios han seguido para seleccionar y evaluar los mismos. De esta manera al implicar al futuro profesor en la reflexión y toma de decisiones sobre el contenido del aprendizaje, permite que este tome conciencia del progreso que ha realizado demostrando cuál ha sido el trabajo real. El objetivo es potenciar la autoevaluación del alumno.

Por otro lado, nos encontramos con las **carpetas de presentación.** Estas carpetas son utilizadas para presentar al final del proceso una muestra del progreso del alumno. Las carpetas deben incluir un índice de los contenidos. En este índice deben indicar porqué han escogido cada una de las actividades. (Farr 1994) indica que elegir y preparar un portafolios es una forma de involucrar al futuro profesor en el análisis del contenido del trabajo". Así pues, para elaborar esta carpeta es necesario que el alumno reflexione para qué le ha servido el realizar cada una de las actividades de autoaprendizaje. Estas reflexiones permiten al futuro profesor autoevaluar el proceso de formación inicial. Mientras que al formador le permite evaluar la capacidad de reflexión de los futuros profesores, y el proceso de formación.

CONCLUSIONES

El uso del portafolios como enfoque alternativo de evaluación:

- Permite obtener información de primera mano sobre el aprendizaje de los futuros profesores en relación a los contenidos curriculares y sobre la evolución de su modelo didáctico.
- Promueve el diálogo entre formadores y futuros profesores, permitiendo la toma de conciencia del proceso realizado a ambos.
- Permite, a ambos, disponen de todo el proceso de aprendizaje, no sólo del producto final.
- Enriquece el proceso evaluador en el sentido de que todas las actividades de autoaprendizaje que se realizan son objeto del mismo, eliminando el riesgo de valoraciones simples.

La aplicación de estrategias de evaluación como la que hemos presentado requiere un rotundo cambio en la concepción que, sobre el término evaluación, aún sigue estando presente en las mentes de los futuros profesores como la rendición de cuentas, la comprobación de logros, y no el análisis de cómo se ha desarrollado el proceso de enseñanza y aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Azcárate, P. (1999): "Estrategias metodológicas para la formación de maestros". En Carrillo y Climent (Ed): *Modelos de formación de Maestros en Matemáticas.* Huelva: Universidad de Huelva, Servicio de Publicaciones.

Farr, R. (1994): "Building the portafolio: what goes in it". *Portafolio. Performance Assessment. Helping students evaluate their progress as readers and writers.* Fort Worth: Harcourt Brace College Publishers. 49-81.

Margalef, L. (1997): "Nuevas tendencias en la evaluación: propuestas metodológicas alternativas". *Bordón* 49(2), 131-136.

NCTM (1995): *Assessment Standarts for School Mathematics.* Reston (Virginia).

Serradó, A. y Azcárate, P. (1999): "Didáctica de las Matemáticas". En Azcárate, Ibarra y Navarrete (Ed): *Materiales curriculares para la formación inicial del profesorado de Educación Secundaria".* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Vacc, N.N. y Bricght, G.W. (1994): "Changing preservice teacher-education programs". En Aichele y Coxford (Ed): *Professional Developement for Teachers of Mathematics.* Reston: NCTM.

Verdugo Alonso, M.A. (1991): *Evaluación curricular.* Madrid: Santillana, Siglo XXI.

UNA ESTRATEGIA EN LA FORMACIÓN DE PROFESOR BASADA EN LA REORGANIZACIÓN DEL CONOCIMIENTO SOBRE LAS MATEMÁTICAS

José Mª Cardeñoso Domingo

La necesidad de formación del profesorado está siempre presente entre nosotros, bien sea en su etapa inicial o permanente. Satisfacerla requiere la implicación consciente de los sujetos en el desarrollo de iniciativas en educación matemática, desde la diversidad de intereses e interrogantes profesionales del profesor. Entendiendo que el campo del conocimiento matemático es una fuente usual de problemas del docente, y en consecuencia, planteamos una estrategia para la reconstrucción conceptual de dicho conocimiento. Este planteamiento parte de cuestionar qué saben los profesores interesados de dicho conocimiento, para a través de un proceso indagatorio, lograr una síntesis argumentada, en forma de mapas conceptuales y procedimentales, relativo al conocimiento matemático escolar, del nivel educativo correspondiente.

Un hecho por todos conocido es el proceso de reforma de la educación obligatoria en el que nos encontramos, marco en el cual el profesor está considerado elemento fundamental para la evolución del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que se espera conseguir con esta reforma educativa. Esto nos lleva a afrontar como formador de profesores cuál es la naturaleza del conocimiento profesional del profesor, cuáles son las necesidades formativas que requieren los profesores, tanto en su formación inicial como permanente, para adecuarse a la visión de las nuevas orientaciones curriculares, en tanto en cuanto las compartimos críticamente. Esto nos posibilita el afrontar la cuestión de cómo formar a los profesores y cuáles son las estrategias que tienen una mayor potencialidad para lograr la emergencia de las creencias implícitasfacilitar y así, facilitar la evolución de las concepciones de los profesores implicados, en relación con el currícula del nivel educativo correspondiente.

El conocimiento del profesor es la base de su actuación profesional en el aula y este desempeño, a su vez, tiene carácter de fuente de información para la evolución de las ideas del profesor, sobre todo si se trata de la propia práctica docente cuando nos referimos al desarrollo de profesionales en ejercicio. El conocimiento del profesor sobre las matemáticas es, como nos relatan numerosos autores, una pieza clave en la caracterización del profesor de matemáticas, asumiendo los dos sobreentendidos que se dan en nuestro entorno: el saber matemáticas no garantiza un buen profesor de matemáticas pero es un conocimiento imprescindible para su consecución. La reflexión que nosotros aportamos es que dicho conocimiento no ha de ser solamente "de matemáticas" sino que ha de complementarse con el conocimiento "sobre las matemáticas". Quiere esto decir que tenemos que conseguir en los procesos formativos de los docentes que su saber académico y estructurado según la epistemología de la propia matemática, se transforme hacia un conocimiento de la matemática para ser enseñada, reorganizando su saber inicial para construir visión novedosa de lo que nombramos como la *matemática escolar.*

En esta comunicación vamos a plantear escuetamente una estrategia que hemos puesto en marcha en el aula de formación inicial de profesores de educación primaria, dentro de la asignatura de "Matemáticas y su Didáctica" troncal de primer año de la diplomatura. En esta materia tenemos consensuado un desarrollo documental del temario para la implementación del programa, con independencia de los profesores que la desempeñen en año, dejando que el modelo didactico de cada uno se concrete en la diversidad de estrategias metodológicas personales, constituyen la aportación profesional de cada uno. El temario de la materia se puede encontrar en la página del departamento, (http://www.ugr.es/~dpto_did/didmat.htm#Primaria), y si se requiere más detalles de dicha documentación, nos la podéis solicitar por correo electrónico. La ventaja es que dicho desarrollo está ampliamente contrastado en los últimos cursos por al menos seis profesores por cada año desde 1994, lo cual fue origen de interesantes debates dentro del *Seminario de Docencia* de la Sección de Granada, fruto de los cuales se elaboró y refinó estos dossiers acordados.

Esta materia se programa con un tema cero y seis temas más, tres de los cuales son de Aritmética: **El Número Natural. Sistemas de Numeración. Aritmética. Números Racionales.** Para poner en antecedentes al lector, comentar que hemos realizado ya el tema introductorio donde se intenta decodificar los elementos relevantes de cualquier noción estructurante de la matemática (objetos de estudio, representaciones, fenomenología, significados, relaciones, transformaciones y estructura) y la relación existente entre los diversos bloques temáticos del currículo de matemáticas hasta conformar una visión global. Entendemos que ese "todo matemático" tiene la utilidad en la escolaridad obligatoria de aportar diferentes conocimientos y visiones complementarias de la realidad. Así inicialmente, se puede abordar la comprensión de la vida cotidiana desde una doble visión: indeterminada y determinada, dando cabida en un primer momento a un estudio posibilista para pasar posteriormente a una concreción en la realidad global que nos rodea, es ese el momento en el que afrontamos la visión espacial y geométrica.

Es decir, es la temática aritmética la tercera visión de la realidad, en este caso centrada en las situaciones que se presentan de una forma discreta ante el sujeto y que va a originar una lectura cuantitativa, frente a la cuantificación del continuo magnitudinal con el que cerramos el curso.

Es este nuevo intento de mirar la vida desde la cuantificación de la realidad discreta para originar una nueva visión, cuestión que afrontamos desde un *Proyecto de Acción* que acordamos en el aula con los alumnos: "Inventar un sistema secreto de códigos al objeto de comunicar datos numéricos". Este plan de trabajo se desarrolla en grupos de trabajo compuestos por 3, 4 o 5 alumnos (14 grupos por aula este año), comprometidos a trabajar dentro y fuera del aula, facilitando tanto la independencia entre los mismos cuando es requerida, como la interacción cuando se afrontan la segunda parte del proyecto acordado: "Descubrir el sistema secreto de otro grupo del aula", grupo que se asigna por sorteo. La estrategia formativa que hemos desarrollado en el aula ocupó más de un mes de clase a tres horas/semana, originando 11 sistemas estructurados de numeración, que no sean una mera traducción de alguno de los sistemas numéricos al uso, expresión inicial de las concepciones de los grupos de alumnos. Para lo cual, afronto esta cuestión, que funciona como un obstáculo, desempeñando en una sesión asamblearia, el papel de "adivinador" del sistema, después de solicitar que se me conteste a cuestiones triviales y cotidianas (la edad que tiene, la fecha de nacimiento, la dirección postal de su pueblo, el número de teléfono, el código secreto de la tarjeta de la universidad, etc.) expresándose en su código inventado. Como es de suponer, esto no entraña mayor dificultad y se logra el efecto deseado, originando que realmente se problematice la cuestión de "inventar un sistema numérico" realmente, aumentando la consciencia del estudiante ante la complejidad del proyecto.

Una vez desautorizadas las versiones triviales, cuestión que tampoco impide que tres de dichos sistemas numéricos lo sigan siendo al término del proceso, se origina un segundo momento metodológico donde desde la problematización de la tarea, se plantean en cada uno de los pequeños grupos ¿qué es un sistema de comunicación cuantitativo?, ¿qué elementos requiere?, ¿cuáles son las necesidades de reglas, códigos, relaciones, acuerdos y notaciones necesarias?,... es decir, afrontan reflexivamente la tarea propuesta. Es aquí donde comienza la explicitación y posterior reflexión metacognitiva sobre su conocimiento aritmético, llegando a realizar un análisis de algún sistema por ellos conocido o histórico que facilitamos. Iniciamos por tanto, con posterioridad a este análisis reflexivo, la búsqueda de la información que les hace falta para tener la seguridad de que han inventado un Sistema potente, que pueda dar respuesta, en la segunda parte del proyecto, a todas las preguntas y tareas que el grupo competidor les cuestione. Se ha acordado que con una periodicidad temporal (10-15 minutos si estamos en el aula) y una vez cada día sin clase, cada uno de los grupos traslada al grupo competidor una hoja con un número de cuestiones para que se responda, con la mayor brevedad posible, por sus contrincantes.

Este momento metodológico de contraste y prueba des invento, origina un nivel competitivo que usualmente hay que moderar, puesto que ganar no es la finalidad de la interacción de cada pareja de pequeños grupos, sino tomar un referente externo que nos dé una medida de la valía del producto, sobre la base de su potencialidad para comunicar. Durante este periodo se autoriza modificaciones y matices en los Sistemas inventados, en aras a su crecimiento, pero también se autoriza a que no sea necesario el "mejorar" el sistema, cuestión que muchas veces los alumnos entienden como obligatoria, cuando las limitaciones del sistema no le permiten dar respuesta a cierta tarea planteada. El término de este momento llega cuando el interés decae y/o los sistemas no evolucionan y/o las hipótesis de los grupos, respecto al sistema del grupo contrincante se estabilizan. Por bajar al concreto, este curso se adivinaron 5 "Sistemas inventados" en el aula.

El siguiente momento de actividad se centra dentro de cada pequeño grupo, en preparar al informe caracterizador de su sistema, explicitando la potencia del mismo, sus usos posible y sus carencias. Les solicité que tipificasen matemáticamente su sistema, cuestión que les lleva a buscar semejanzas con sistemas numéricos históricos, originando la necesidad de conocer alguno de los más representativos, para lo que se introduce la historia de los sistemas de numeración, siguiendo a Ifrah (1987) (y se les facilita información de los sistemas indo-arábigo, sistema en base 7 y 24, el romano, egipcio, azteca y babilónico del texto de Miller, Ch D y Heeren, V E (1979)).

Pasamos al siguiente momento metodológico referido a la comunicación de logros y dificultades encontradas en el proyecto, cuestión para la que cada grupo realiza una minisesión. Una vez expuestos todos los sistemas inventados, les planteo el interrogante de sí los niños pudiesen inventar a su vez distintos sistemas de numeración, más acordes con sus necesidades crecientes, cuestión que completo cuestionando la posibilidad didáctica de que los maestros trabajen en Ed. Primaria con la construcción sucesiva de distintos sistemas de expresión numérica, acorde a las necesidades y tareas que afrontan los niños en los sucesivos cursos. Esto supondría la reelaboración continua del incipiente sistema numérico escolar de partida, consideradas como las ideas previas de los niños, cada vez que la expresión de la situación escolar afrontan lo requieran. Esto genera la necesidad de indagar en el campo cognitivo, para lo que se les facilita la información que aparece en el apartado de referencias, proveniente del IMIPAE de Barcelona, pero también requiere una información proveniente del marco educativo, para lo que se les facilita los textos de Moreno (1988) y Kamii (1995).

Esta nueva información facilita la tipificación y la ordenación de los Sistemas inventados, siguiendo a Ifrah (1997: 793-804), en Sistemas con "el principio aditivo", Sistemas con "el principio de multiplicidad" y

Sistemas con "el principio de posición" (cuestión que realizo, una vez expuestos los sistemas inventados, como cierre matemático de la cuestión de los sistemas numéricos en la historia del hombre). Es decir, una vez que se ha reflexionado desde el marco matemático, se afronta enriquecer y transformar ese conocimiento desde la información disponible del marco cognitivo y del marco educativo. Este ultimo momento metodológico, origina la necesidad de afrontar, como siguiente Proyecto de Actividad, la elaboración un "mapa de conocimientos y procedimientos de la aritmética escolar" (Cardeñoso y Azcárate, en prensa), enlazando el de Sistema de Numeración, como concepto estructurante del campo numérico, con el resto de cuestiones aritméticas. En síntesis, hemos relatado una estrategia de formación del docente desde la problematización profesional del conocimiento matemático de los participantes (Azcárate y Cardeñoso, en prensa) para, a través del *proyecto de aula* afrontado, originar la reelaborar de este conocimiento de matemáticas, originando *mapas conceptuales y procedimentales* como expresión de su incipiente visión del *conocimiento aritmético escolar*, base para la organización de su futura *labor profesional docente.*

REFERENCIAS COMPLEMENTARIAS

Bassedas, M y Sellarés, R. (1982). Construcción individual del Sistema de numeración convencional, en *Infancia y Aprendizaje* 19-20: 75-88

Bassedas, M y Sellarés, R. (1983). Construcción de Sistemas de numeración en la historia y en los niños, pp 87-104, en Moreno y otros (Eds) *La pedagogía operatoria.* Barcelona : Laia

Bassedas, M y Sellarés, R (1983) La evolución de la comprensión de las operaciones aritméticas elementales, pp 81-101, en Moreno y Sastre (Eds). *Aprendizaje y desarrollo intelectual.* Barcelona: Gedisa

Ifrah, G. (1987) Las Cifras. Historia de una gran invención. Madrid: Alianza

Kamii, C. (1985). El niño reinventa la aritmética. Cap. I, pp 17-35, Barcelona: Aprendizaje-Visor

Miller, Ch D y Heeren, V E (1979) Introducción al pensamiento matemático, Cap1: 5-64, México: Ed Trillas

BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, P y Cardeñoso, JM (en prensa): La resolución de problemas profesionales como eje metodológico en la formación inicial de profesores de matemáticas, en *IV Simposio Propuestas metodológicas y evaluación en la Form. Inicial de los Profs. del Área de Dca de la Matemática,* Oviedo, 2000

Cardeñoso, JM y Azcárate, P (en prensa): La transposición didáctica en el aula de formación profesores de matemáticas: los mapas conceptuales como estrategia formativa, en *IV Simposio Propuestas metodológicas y evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del Área de Didácticas de la Matemática,* Oviedo, 2000

Dto. de Dca de las Matemáticas, Universidad de Granada: http://www.ugr.es/~dpto_did/didmat.htm#Primaria

Ifrah, G. (1997) Historia Universal de las cifras. Madrid: Espasa –Calpe.

UNA PROPUESTA DE FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA

M. García · I. Escudero · V. Sánchez · S. Llinares

Introducción

¿Qué voy a dar?, ¿Cómo lo voy a dar? y ¿Por qué? , son tres preguntas claves que nos planteamos con mucha frecuencia en nuestro trabajo como profesores. Estas preguntas en nuestro caso, se sitúan en el contexto particular de la formación inicial de profesores de Primaria en relación a las Matemáticas.
A lo largo de los diferentes apartados de esta comunicación vamos a plantear las respuestas que hemos dado a cada una de esas preguntas en nuestro programa de formación.

Contexto

Nos situamos en una clase de Didáctica de las Matemáticas en un grupo de segundo o tercero de una cualquiera de las distintas especialidades de la Diplomatura de Maestro. En clase hay unos 75 alumnos que han realizado un curso previo de Matemáticas especialmente diseñado para maestros. La asignatura de Didáctica de las Matemáticas es cuatrimestral y tiene entre 4.5 y 6 créditos (entre 45 y 60 horas) según la especialidad. En un momento dado del curso se plantea a la clase la siguiente tarea:

TAREA: ANÁLISIS DE PROTOCOLO

Profesor: **Roberto tiene 5 coches de juguete. Su amigo le da 7 coches más. ¿Cuántos tiene ahora?.**
* Carolina hace un grupo de 5 fichas y luego un grupo de 7 fichas. Luego, las coloca todas juntas y empieza a contarlas *"1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12"* señalando una ficha cada vez que dice un número. Luego responde *"tenía 12 coches".*
* Ana dice en alto *"5* (pausa), *6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Tiene 12 coches".* Cuando Ana va contando levanta un dedo cada vez que dice un número. Cuando tenía 7 dedos levantados, paró de contar y dio la respuesta.
* Jorge dice en alto *"7* (pausa), *8, 9, 10, 11, 12. Doce coches".* Jorge levanta sus dedos para contar pero sus movimientos son muy ligeros, y apenas se aprecia que los está utilizando para mantener las pistas.
* Angela contesta de inmediato *"12 coches".*
Profesor: *¿Cómo lo sabes?*
Angela: *Porque 5 y 5 son diez, y dos más son doce.*

CUESTIONES

1.- Analizar el tipo de problema propuesto por el profesor. Explicar los criterios y distintas formas de mirar que te han llevado a los diferentes aspectos del análisis.
2.- Estudiar y analizar cada una de las estrategias utilizadas por los niños para resolver el problema. Puedes para ello intentar responder a las preguntas ¿qué utilizan?, ¿en qué se basan?, ¿qué conocimientos necesitan?, ¿qué dificultades intuyes?. Comparar entre ellas las diferentes estrategias.
3.- ¿Crees que se debería plantear en el aula distintas actividades en las que se pueda trabajar las diferentes estrategias? ¿Qué recursos instruccionales crees que te ayudarían? ¿Cómo lo organizarías? ¿En que te fijarías para evaluar el aprendizaje de los alumnos?

¿Qué?

Lo que estas cuestiones plantean a nuestros alumnos son una serie de temas en relación a la enseñanza-aprendizaje de los Problemas aritméticos elementales de estructura aditiva (PAEV), que agrupamos de forma que nos definan una serie de 'espacios problemáticos'. Algunos de los asociados a esta tarea tienen que ver con las respuestas que se pueden dar a preguntas como:
* ¿los problemas aritméticos que aparecen en el curriculum escolar de matemáticas en Primaria, qué estructuras muestran? ¿en concreto, respecto a los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva, qué tipos aparecen? ¿cómo se organizan?
* ¿cómo se enfrentan los niños a la resolución de esos distintos problemas (PAEV de estructura aditiva)? ¿qué subyace detrás de las diferentes estrategias de resolución? ¿qué tipos de dificultades pueden aparecer y qué relación tienen con los tipos ?
* ¿qué elementos son necesarios desde la enseñanza para trabajar los distintos problemas y estrategias de resolución? ¿cómo se puede planificar una clase de resolución de problemas? ¿cómo se puede

gestionar una clase en la que se esté resolviendo problemas? ¿qué elementos son centrales en el proceso de evaluación del aprendizaje de los alumnos en relación a los PAEV?
Estas preguntas tienen que ver con curriculum, aprendizaje y enseñanza, y se concretan en un conocimiento sobre:
* Curriculum: Problemas aritméticos en el curriculum de Primaria, tipos de problemas aritméticos de estructura aditiva de una etapa en el curriculum de Primaria.
* Aprendizaje: Estrategias de resolución de los PAEV de estructura aditiva. Dificultades ligadas a los distintos tipos de PAEV de estructura aditiva.
* Enseñanza: Elementos a considerar en la enseñanza de los PAEV de estructura aditiva. Planificación de una clase de resolución de problemas. Gestión de una clase de resolución de problemas. La evaluación.

¿CÓMO?

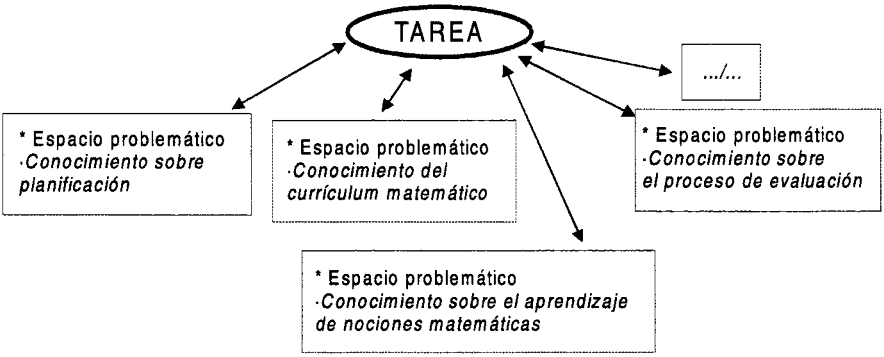
Esta tarea se presenta a los estudiantes para profesores (para su discusión en pequeños grupos) mediante un texto escrito. Una vez que han tratado de dar respuesta a las preguntas que se plantean en la tarea, surge la necesidad de información teórica que les sirva como referencia. En esta ocasión, esta información la presentamos por medio de algunos documentos como:
* Fennema & Carpenter, (1989): "Estrategias de resolución empleadas por los niños". Se presenta una adaptación de los trabajos de estos autores, en la que se pone de manifiesto los distintos niveles y estrategias de resolución, vinculados a los tipos de problemas elementales de estructura aditiva, que se dan en los niños de los primeros niveles de Primaria.
* Puig, L. & Cerdán, F. (1989) *Problemas aritméticos.* Síntesis: Madrid. Capítulo 3: "Problemas de una etapa: adición y sustracción". En este capítulo, los autores presentan distintos criterios de clasificación de los problemas elementales de estructura aditiva, planteando ejemplos de las diferentes alternativas.
* Llinares, S. & Sánchez, V. (1993) "La comprensión del significado del número. Resolución de problemas aritméticos elementales de estructura aditiva". *Serie:Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las Matemáticas. Conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices. Contenido Aritmética. Nivel Enseñanza Primaria.* Videos 4a, 4b. Secretariado de Medios Audiovisuales de la Universidad de Sevilla. Este material nos resuelve el problema que tenemos al tratar de presentar las estrategias de resolución de problemas por parte de los niños en un contexto real. Queremos destacar que, análogamente a lo que sucede con la información escrita, el video tiene una gran potencialidad como instrumento metodológico. Comparte con la presentación escrita el aporte de información, pero presenta además una especificidad que permite la visualización de determinadas situaciones.
La información que aportan estos trabajos debe posibilitar a los estudiantes para profesor el plantearse y discutir de nuevo la tarea, de una manera más completa, y plantearse nuevas cuestiones. El proceso se continua con un tiempo en el que los estudiantes para profesores analizan (tanto desde una perspectiva individual como en el grupo) su propio proceso de aprendizaje, reflexionando y concretando sobre los cambios que se han producido en su conocimiento y creencias en relación a los temas tratados. Todo ello se completa con otras tareas complementarias, en función de la evolución producida. En definitiva se configura un itinerario de formación.

LOS FUNDAMENTOS DEL QUÉ Y EL CÓMO

Las ideas que hemos ido expresando a lo largo de los diferentes apartados son fruto de nuestros intentos por definir un curriculum en la formación inicial de profesores de primaria a partir de unos planteamientos teóricos en relación al conocimiento y al aprendizaje. El tratar de determinar qué debe formar parte de los programas de formación ha sido objeto de estudio dentro de nuestro grupo de investigación, y motivo de discusión y reflexión al pensar en nuestro trabajo como formadores de profesores. Llinares (1994), apoyándose en el análisis del trabajo del profesor cuando intenta que un grupo de estudiantes doten de significado a ideas y procedimientos en un contexto de actividad matemática, ha identificado distintas componentes, de las que derivan dominios del conocimiento base necesarios para enseñar matemáticas que pensamos deben ser tenidos en cuenta en los programas de formación: conocimiento de y sobre las matemáticas, del aprendizaje de las nociones matemáticas y del proceso instructivo. Estas ideas han tenido su reflejo en el diseño de tareas como la anteriormente mostrada y la identificación en ellas de los espacios problemáticos, que tienen relación con esos diferentes dominios, considerados en forma integrada. Por otro lado el aprendizaje del futuro profesor se desarrolla mediante un proceso a través del que adquiere un conocimiento y una forma de razonar como un experto. Este proceso de aprendizaje tiene lugar a través de la participación activa en un contexto, definido por actividades auténticas (entendidas como prácticas ordinaria de la cultura (Brown et al, 1989, Llinares, 1999)). Además, pensamos que la práctica social es un aspecto integral e inseparable del aprendizaje, desarrollada a través de la participación en 'comunidades de práctica', que caracterizan a un grupo social en el que los miembros comparten una determinada actividad (Lave & Wenger, 1991). Los estudiantes para profesores de matemáticas no pertenecen inicialmente a la 'comunidad de práctica' de los profesores de matemáticas, pero los programas de formación de profesores desde la Educación Matemática deben crear los medios para capacitar al estudiante para profesor para integrarse en ellas. Por lo tanto, estos programas deben favorecer que estos estudiantes participen en lo que podríamos denominar 'comunidades de aprendizaje', caracterizadas a través de entornos de aprendizaje definidos por los siguientes elementos: tareas relevantes, conocimiento y destrezas significativas para la práctica, participación activa en el contexto, trabajo en grupo, consideración del conocimiento y creencias previos y explicitación de los procesos de razonamiento (García, 2000). La materialización de estas ideas ha sido plasmada en el apartado anterior en la descripción de lo que hemos llamado un itinerario de formación.

Conclusiones

En estos momentos, los trabajos que se han desarrollado dentro del campo de la Didáctica de las Matemáticas nos posibilitan considerar la formación inicial de profesores de Primaria más allá de una simple preparación instrumental para enseñar. Un paso adelante en esta formación es llegar a hacer operativas las ideas que hemos ido comentando en el apartado anterior y que son esquematizadas en el siguiente gráfico.



Referencias

Brown, J., Collins, A. & Duguid, P. (1989) "Situation cognition and the culture of learning". *Educational Researcher*, pp.32-42.

García Blanco, M. (2000) "El aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas desde la naturaleza situada de la cognición: implicaciones para la formación inicial de maestros". Actas del IV Simposio Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la formación inicial de los profesores del Área de Didáctica de la Matemática. Oviedo, pp. 113-140.

Lave, J, & Wenger, E. (1991) *Situated learning. Legitimate peripheral participation.* Cambirdge University Press: NY.

Llinares, S. (1994) "El profesor de Matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional". En L. Santaló, S. Llinares, V. Sánchez, A. Taibo, y A. García-Hoz (Eds), *La enseñanza de las Matemáticas en la Educación Intermedia*. Rialp Editores: Madrid. pp. 296-337.

Llinares, S. (1999) "Preservice Elementary Teachers Learning to teach Mathematics. Relationship between context, task and cognitive activity". En N. Ellerton (Eds) *Mathematics Teacher Development. International perspectives*. Meridian Press: Australia. pp. 107-119.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1993) *Serie de videos: Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las Matemáticas. Conocimiento sobre el aprendizaje y los aprendices. Contenido Aritmética. Nivel Enseñanza Primaria.* Secretariado de Medios Audiovisuales de la Universidad de Sevilla: Sevilla.

LAS FRACCIONES EN LA FORMACION INICIAL DE PROFESORES DE MATEMATICAS DE SECUNDARIA

OLIVERIO MORCOTE HERRERA · PABLO FLORES MARTÍNEZ

INTRODUCCION

La investigación sobre el pensamiento del profesor en atención a su rol como profesional ha dejado clara la intervención directa de su conocimiento profesional, reflejada en el abordaje y desarrollo de su labor docente, desde la misma planeación y diseño de clases, hasta una etapa final de evaluación de los procesos educativos. En los futuros profesores de matemáticas de secundaria el conocimiento profesional que se empieza a generar, se vá estructurando a través de la planeación y diseño de unidades de clase, así como de la propia experiencia de la práctica en institutos. Con relación a ésta programación de clases se quiere detectar algunos elementos allí existentes del conocimiento profesional asociados a la noción de "fracción" (su contenido y cómo se usa) desde la organización dada por Bromme (1994). Se pretende también caracterizar el tipo de programación y planeación de clases y subsiguientemente indagar sobre el conocimiento didáctico de las fracciones que está interactuando en dichas programaciones. En este artículo se presentan esas generalidades y resultados parciales del trabajo.

CONTEXTO

En el curso 1999-2000 dentro de la asignatura Prácticas de Enseñanza se desarrolló el módulo "Preparación y Programación de clases" para los estudiantes de 5º año de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada. Producto de éste, los estudiantes elaboraron en grupo la planeación de una clase para alumnos de 1º de ESO, sobre el contenido matemático "fracciones". Estos documentos elaborados por los futuros profesores están siendo analizados a partir de una rejilla fundamentada en la categorización del Conocimiento Profesional dada por Bromme (1994): Matemáticas como Disciplina, Matemáticas Escolares, Filosofía de las Matemáticas Escolares, Pedagogía General y Conocimiento Didáctico del Contenido. Algunas conclusiones parciales se presentan en la parte final de esta comunicación.

EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL

Reconocida la existencia de una línea de investigación sobre Formación de Profesores, diversos trabajos han apuntado hacia la búsqueda de elementos que caractericen la profesionalidad del profesor de matemáticas, su competencia profesional. En la gama de reconocidos autores que organizan el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, se observan mínimamente elementos comunes tales como la componente matemática y la componente pedagógica; otro rasgo existente es la relación entre lo teórico y lo práctico; o la inclusión independiente de elementos de la enseñanza, del contexto, de lo curricular, de lo cognitivo. (Shulman, 1986; Llinares, 1991; Bromme, 1994; García, M. 1997).
Nos adherimos a la organización dada por Bromme (1994) por cuanto presenta "una integración cognitiva desde varios campos del conocimiento que tiene lugar durante la formación práctica y experiencia personal" (Bromme, 1994) que a nuestro juicio recoge acertadamente diversas variables didácticas dignas de atención desde una visión retrospectiva y prospectiva de la relación teoría-práctica que pueden conducir a trazar dimensiones útiles en los futuros profesionales de la educación matemática:

SISTEMA DE CATEGORIAS

MATEMATICAS DISCIPLINA	MATEMATICAS ESCOLARES	FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS	PEDAGOGIA GENERAL	CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL C.
■ Conocimiento Conceptual ■ Conocimiento Procedimental ■ Incorrecciones matemáticas	Currículo de la ESO: ■ riqueza de aspecto Matemáticos ■ riqueza de actividades ■ Dimensiones didácticas ■ Conocimientos previos	■ Concepción instrumentalista ■ Concepción resolución problemas ■ Concepción idealista platónica	■ Características Programación ■ Enseñ tradicional ■ Enseñ espontan. ■ Enseñ tecnológ. ■ Concepciones de los prof. compren y preconcep alum	■ Fenomenología ■ Materiales y Rec. ■ Aspectos Históricos ■ Sistemas de Representación y Contextos ■ Errores y Dificult ■ Concepciones de los profesores enseñanza en matemáticas

Comentamos brevemente las componentes asociadas a cada una de tales categorías:

1. MATEMATICAS COMO DISCIPLINA: Para Bromme (1994) el profesor de matemáticas ante todo requiere una formación matemática, adquirida en parte debido a sus estudios universitarios y en parte a su formación permanente. ¿Qué sabe el estudiante para profesor sobre fracciones? Puesto que en una planeación de clase difícilmente se expresa y desarrolla totalmente tal componente matemática, hemos decidido detectar parte de ése tipo de conocimiento matemático (en cuanto a grado de profundidad) en las programaciones, a partir de la asunción del conocimiento matemático disciplinar desde las componentes conceptual y procedimental. Más detalladamente usamos la clasificación dada por Rico (1995) para cada uno de los dos grandes bloques:

- Conocimiento Conceptual: hechos, conceptos y estructuras conceptuales
- Conocimiento Procedimental: destrezas y técnicas, razonamientos y estrategias

Consideramos que ésta estructuración del conocimiento matemático es lo suficientemente rica para no dar lugar a ambigüedades dentro de los fines y metas de la educación matemática. Finalmente, usamos un ítem para situar las incorrecciones matemáticas que pudieran aparecer.
2. MATEMATICAS ESCOLARES: El futuro profesor incorpora conocimiento de la matemática escolar desde su experiencia como alumno, el currículo escolar oficial y su propia práctica docente. Partimos de la base de que el futuro profesor definirá, y situará los contenidos matemáticos acordes a trabajar en el contexto curricular pertinente. Las directrices curriculares asociadas a la ESO expresadas en los boletines oficiales y en algunos textos invitan a establecer al menos tres focos de atención: Riqueza de aspectos matemáticos, Riqueza de actividades y Dimensiones didácticas. El reconocer su existencia por parte de los estudiantes para profesor y su consiguiente interpretación en la programación de clases, son aspectos de las matemáticas escolares que queremos recoger. Un cuarto ítem en esta categoría tiene que ver con los llamados "conocimientos previos" de los alumnos como requisitos necesarios para abordar nuevo conocimiento matemático; consideramos que su selección juiciosa y equilibrada, y su consistencia encadenando los ciclos de conocimiento y respondiendo a los requerimientos del currículo enriquece la programación.
3. FILOSOFIA DE LAS MATEMATICAS ESCOLARES: Una determinada concepción de las matemáticas escolares sin duda influirá en el proceso de enseñanza de las mismas. Basados en trabajos de investigación sobre formación de profesores, vamos a destacar algunos aspectos que configuran la filosofía de las matemáticas escolares. Hemos aceptado y usado la clasificación dada por Carrillo/98 sobre las 3 concepciones:

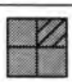
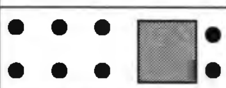
- Concepción instrumentalista: enfatiza en la creación y uso de algoritmos como impulsor de la construcción del conocimiento matemático
- Concepción como resolución de problemas: se construye la matemática en la interacción social, cultural y científica.
- Concepción idealista platónica: prioriza el descubrimiento antes que la creación. La matemática construida para explicar otras ciencias.

4. PEDAGOGIA GENERAL: Es una de las categorías más amplias consideradas, comprendiendo aspectos metodológicos de la clase, organización escolar, y otros indirectos respecto del área. Desde esta componente profesional se intenta observar:

- Características de la programación de clases (plan, guión, coherencia, actividades)
- Tipo de enseñanza sugerido (tradicional, espontaneísta, tecnológico, Carrillo 1998)
- Concepciones de los profesores sobre comprensión y preconcepciones de alumnos.

CONOCIMIENTO DIDACTICO DEL CONTENIDO

Sobre el Conocimiento Didáctico del Contenido, Shulman (1986) lo definía como "...las analogías mas poderosas, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones - en una palabra, las formas de representar y formular el contenido que lo hace comprensible a los demás..." Se trata del conocimiento del concepto con vistas a su enseñanza. Para indagar este tipo de conocimiento fundamentalmente nos basamos en los organizadores curriculares de Rico (1997): Fenomenología (significados y usos), Aspectos Históricos, Materiales y Recursos, Sistemas de Representación y Errores y Dificultades. Todos adaptados a la noción matemática de fracción
Respecto de la fenomenología, recogemos las 4 interpretaciones de la fracción que presentan Llinares y Sánchez (1988): parte-todo, razón, operador y cociente; de igual forma los diversos usos como modelo explicativo de situaciones cotidianas: tiempo, supermercado, distancias, etc. Análogamente tomamos como base los Principales Sistemas de Representación de la Fracción, Morcote (1999):

F I G U R A L		
CONTINUO	DISCRETO	LINEAL
		
Cuatro partes iguales	Dos de las 8	Señala punto entre 0 y 1

NUMERAL			LITERAL
FRACCION	PORCENTAJE	DECIMAL	
1 / 4	25%	0,25	CUARTO
Cociente de dos números	Sugiere 100 como la unidad	25 de 100	4 partes iguales

En las componentes del Conocimiento Didáctico del Contenido, Grossman (1990) (citado por García, 1997) contempla como elemento fundamental las "concepciones de lo que significa enseñar un determinado tema (ideas relevantes, prerrequisitos, justificación, etc..". Así mismo señala que "las creencias, valores y concepciones, estarían en la base de la toma de decisiones curriculares sobre los materiales y medios, objetivos perseguidos en las clases, tareas apropiadas a realizar y criterios y formas que emplean los profesores para evaluar el aprendizaje". Por esta razón agregamos una componente clave del Conocimiento Didáctico del Contenido:

- Concepciones y creencias de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas

RESULTADOS PARCIALES

Se hicieron entrevistas semiestructuradas a 4 grupos de estudiantes, para precisar algunos elementos expresos en el documento elaborado, ratificar otros y verificar la detección de algunas características particulares lo que permite enriquecer el análisis.
Los primeros resultados del trabajo muestran:

- Ausencia existente en dos grupos sinó del reconocimiento, sí del uso explícito de los contenidos y directrices curriculares en cuanto a las matemáticas escolares.
- El organizador curricular aspectos históricos sólo aparece en la programación de un grupo, lo que permite inferir la baja valoración dada a este aspecto asociado a las mismas.
- Los errores y dificultades como elemento para diseñar clases no son tenidos en cuenta por algún grupo, lo cual evidencia la nulidad valorativa y significativa dada.
- Sólo hay un grupo que presenta similares niveles de contenido en el tratamiento del conocimiento tanto conceptual como procedimental. El resto, o bien se inclinan notablemente en los conceptos, o bien lo hacen en técnicas y destrezas.
- Existe un grupo que no usa absolutamente lo relativo a materiales y recursos, mostrando o su desconocimiento sobre el existente para el tema, o su infravaloración a efectos didácticos.
- Frente a los diversos sistemas de representación, todos los grupos presentan un uso de peso específico notable en cuanto a figural continua y numeral fracción solamente, demostrando tanto significatividad en esos dos sistemas, como desconocimiento en la planeación respecto de los otros cinco principales sistemas de representación de la fracción.

BIBLIOGRAFIA

Bromme, R. (1988): Conocimientos Profesionales del Profesor. *Enseñanza de las Ciencias,* 6(1), pp.19-29

Bromme, R. (1994): Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer Academic Pb

Carrillo, J. (1998): *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de investigación y relaciones.* Huelva, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva

García, M. (1997): *Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas.* GIEM, Universidad de Sevilla.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1988): *Fracciones.* Síntesis: Madrid

Llinares, S. (1991): *La Formación de Profesores de Matemáticas*, GID, Sevilla

Morcote, O. (1999): *¿Cómo se usan las fracciones en el periódico?.* Investigación en el Aula de Matemáticas. Matemáticas en la Sociedad. SAEM THALES, Universidad de Granada

Rico, L. (1995): Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *EMA,* 1(1), pp.4-24.

Rico, L. (1997): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Horsori: Barcelona

Shulman, L. (1986): Those Who Understand: Knowledge Growth in *Teaching. Educational Researcher,* febrero, pp.4-14

GRUPO 9
EDUCACIÓN A DISTANCIA

MATEMÁTICAS EN EL BACHILLERATO SEMIPRESENCIAL Y A DISTANCIA

Una experiencia de enseñanza y aprendizaje

LUIS AMALIO GÓMEZ ESPÍNOLA · ANA MATA GONZÁLEZ · JOSE MIGUEL LÓPEZ AUGUSTÍN

INTRODUCCIÓN. LA FORMACIÓN DE ADULTOS.

La Educación Permanente de las personas se consagra como un principio básico de todo sistema educativo. Encuentra su fundamento en el hecho de que la formación es un proceso continuo que tiene lugar a lo largo de toda la vida, en el concepto de educación como derecho cuyo ejercicio no puede quedar limitado a las edades habituales, y del hecho de la necesidad de una actualización permanente en una sociedad cambiante.
Uno de los aspectos que trata de regular la LOGSE en su Título III es el concerniente a la Educación de las Personas Adultas, estableciendo en su artículo 51.1 que "el sistema educativo garantizará que las personas adultas puedan adquirir, actualizar, completar o ampliar sus conocimientos y aptitudes para su desarrollo personal y profesional".
En este aspecto podemos diferenciar por un lado aquellos que buscan adquirir los conocimientos de la enseñanza obligatoria no obtenidos anteriormente. Para estos, siguiendo las indicaciones del artículo 52.1 de la citada ley, se establece la ESO de Adultos en centros ordinarios o en centros específicos como los IPFAs (Institutos Provinciales de Formación de Adultos) en el caso de la C.A. andaluza.
Por otro lado para las enseñanzas no obligatorias el artículo 53.2 establece que "Las personas adultas podrán cursar el bachillerato y la formación profesional específica en los centros docentes ordinarios siempre que tengan la titulación requerida. No obstante, podrán disponer para dichos estudios de una oferta específica y de una organización adecuada a sus características". Por ello a continuación en su punto 3 se dice que "Las Administraciones competentes ampliarán la oferta pública de educación a distancia con el fin de dar una respuesta adecuada a la formación permanente de las personas adultas".
En Andalucía esta función queda encomendada a los IBADes integrados en los actuales IPFAs.
Las circunstancias familiares y/o laborales de muchas de ellas hacen difícil una enseñanza reglada presencial como la que se puede recibir tanto en la modalidad de "diurno" como en la de "nocturno" a lo que se une el hecho de aquellos estudiantes que pudiendo acogerse a un régimen de enseñanza semipresencial o a distancia lo eligen antes que el modelo presencial.

PROGRAMACIÓN DE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE SEMIPRESENCIAL Y A DISTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO Y COU.

El curriculo para las Matemáticas del Bachillerato semipresencial y a distancia no se diferencia de la modalidad presencial que se imparte en los habituales I.E.S. Sus contenidos, objetivos y procedimientos son los mismos y por tanto lo que cabe es su adaptación a este tipo de enseñanza. Esta tarea se viene desarrollando en el seno de un grupo de trabajo constituido en el I.P.F.A. de Granada por profesores de dentro y fuera del centro interesados por este tipo de enseñanza.
El establecimiento de una programación adecuada para desarrollar los contenidos y alcanzar los objetivos propuestos para el currículo de Matemáticas en esta etapa es el primer paso que se ha de cocretar. Dicha programación ha de ser conocida por el alumnado al inicio de curso de forma que sepa como se va a desarrollar la materia y de que material didáctico dispone. Para ello se opta por realizar una secuenciación de contenidos por **quincenas** teniendo en cuenta el calendario escolar.
El resultado es de un total de 12 quincenas agrupadas en tres evaluaciones de 4 quincenas cada una, salvo para COU y 2º Bachillerato que se ven reducidas a 10 quincenas con una última evaluación de 2 quincenas. Sabido es la menor duración de estos cursos por las pruebas de acceso a la Universidad.
Esta temporalización obliga a dividir los contenidos establecidos para cada curso en 12 ó 10 **unidades temáticas** de modo que en cada una de las quincenas se ubique una unidad temática o excepcionalmente en dos. Como ejemplo de esta temporalización de contenidos sirva la que se acompaña para la asignatura de Matemáticas II de la opción de Ciencias de la Naturaleza e Ingeniería de 2º Bachillerato y de la opción de Ciencias Sociales y Humanidades del COU.
Establecida la programación del curso el siguiente paso es la facilitación de los contenidos de cara a que estos puedan ser asimilados por los alumnos tanto semipresenciales como a distancia. Para ello es necesario proporcionar a los alumnos un **libro de texto** que los oriente en los conocimientos a adquirir, surgiendo aquí el primer inconveniente serio puesto que actualmente no existen textos adaptados para este tipo de aprendizaje a este nivel.
La solución por la que se optó fue la de dar libertad a los alumnos, con el asesoramiento del profesor, sobre el texto que cada uno eligiera o tuviera, entre otras causas porque en muchas ocasiones son alumnos que no cursan por primera vez esta asignatura y ya disponen de uno. No obstante el Seminario de Matemáticas eligió uno de estos textos para cada curso como referencia para aquellos alumnos que lo solicitaban. Tomando como base el texto seleccionado se incluye en la programación para los

alumnos la relación entre las unidades temáticas de las quincenas y los temas correspondientes del libro. Ver ejemplo anterior.
Como complemento y para orientar el estudio de los temas, el grupo de trabajo constituido por el Seminario de Matemáticas elaboró una serie de actividades de autoevaluación para cada una de las unidades temáticas quincenales.. Estas actividades, que recibían el nombre de "**actividades quincenales**", trataban de abarcar todos los conceptos y procedimientos fundamentales que el alumno debía conocer.de la asignatura. Junto con la programación del curso se les adjuntaba las correspondientes actividades quincenales. En el ANEXO se muestran algunos de estos ejercicios quincenales.

METODOLOGÍA DESARROLLADA Y EVALUACIÓN EN LA ENSEÑANZA SEMIPRESENCIAL Y A DISTANCIA DE LAS MATEMÁTICAS EN BACHILLERATO Y COU.

La atención y evaluación de los alumno/as hay que diferenciarla según se trate del caso semipresencial o a distancia, puesto que con los primeros el profesor tiene contacto directo y con los segundos puede incluso no tener conocimiento de su existencia hasta el día de las pruebas de evaluación.
Los ejercicios quincenales son obligatorios para los alumnos "**a distancia**" y deben ser enviados regularmente antes de las evaluaciones para su corrección y comentario por el profesor. Además este tipo de alumnado dispone de las tutorías individuales para resolver dudas o aclarar conceptos. Estas tutorías se desarrollan en horario de mañana o tarde y puede realizarlas directamente o por teléfono. Con estos medios este alumnado debía de ser capaz de asimilar los contenidos.
Los alumnos semipresenciales disponen en principio de una hora semanal de **tutoría colectiva** en turno de mañana o tarde que se dedican a la explicación y/o comentario de las unidades temáticas. Por tanto son dos horas de tutoría colectiva quincenales para las que se elaboraban esquemas, resumenes y material de apoyo que se entregaban a los alumnos/as. Si algún alumno de "a distancia" podía acudir a estas tutorías se le invitaba a ello. Estas tutorías colectivas suponen para los alumnos la asistencia al centro de dos días a la semana para el conjunto total de las asignaturas.
Estas tutorías se completan con otra sesión semanal de **refuerzo colectivo** que podía llegar a las dos horas en las cuales se plantean y resuelven ejercicios, se aclaran dudas y conceptos, etc... En general la tutoría colectiva solía ser más conceptual y el refuerzo más procedimental o práctico. En total el alumno podía disponer de unas 5 horas colectivas para cada unidad quincenal. A esto hay que añadir las **tutorías de atención individual** de las que también podían hacer uso en horario de mañana o tarde.
Los alumnos semipresenciales también disponen de los "**ejercicios quincenales**" a los que se les recomendaba la realización y entrega para su posterior corrección y comentario. Este trabajo voluntario se les tenía en cuenta para las evaluaciones y de hecho generalmente quienes lo realizaban progresaban mejor que los que no lo hacían.
El uso de las posibilidades que permiten los ordenadores se utilizaron en algunas tutorías individuales como complemento de aquellos alumnos que lo requerían. En concreto se trataban de programas interactivos elaborados para las matemáticas de Bachillerato y COU por la Escuela de Informática de la Universidad Pontificia de Salamanca. Están estructurados en una parte teórica y otra práctica con cuestiones y ejercicios sobre la que los alumnos repasaban. Sin embargo no eran muchos los que aprovechaban estos medios puesto que la mayoría prefería las explicaciones del profesor.
Sin duda sería muy interesante potenciar el uso de los medios informáticos para asistir a este tipo de enseñanza. Para ello se utilizarían las aulas de informática, como complemento de las tutorías colectivas e individuales, contando con "software" adecuado que permitiera el auto- aprendizaje de los alumnos con el acompañamiento del profesor.

PROGRAMACIÓN DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS II C.O.U. CIENCIAS SOCIALES Y HUMANIDADES

(SEMIPRESENCIAL Y A DISTANCIA)

BLOQUE I: "ELEMENTOS DE ALGEBRA LINEAL"

1ª Quincena: Matrices y determinantes. Operaciones. Matriz inversa.
Temas 2 y 3 del libro de texto.
2ª Quincena: Sistemas de ecuaciones lineales. Soluciones. Expresión matricial. Método de Gauss.
Temas 1 y 4 del libro de texto.
3ª Quincena: Programación Lineal.
Tema 5 libro de texto.

BLOQUE II: "ANALISIS DESCRIPTIVO DE FUNCIONES Y GRAFICAS"

4ª Quincena: Funciones reales y gráficas. Funciones a trozos. Límite y continuidad.
Temas 6 y 8 libro de texto.
5ª Quincena: Derivadas. Aplicaciones de las derivadas al estudio de una función.
Temas 9, 10 y 11 libro de texto. (Excepto gráficas a partir de otras)
6ª Quincena: Integrales inmediatas. Integrales de funciones a trozos. Cálculo de áreas.
Temas 12 y 13 libro de texto.

BLOQUE III: "ESTADISTICA DESCRIPTIVA Y CALCULO DE PROBABILIDADES"

7ª Quincena: Variable estadística discreta y continua. Gráficos. Medidas de posición y centralización. Medidas de dispersión. Coeficiente de variación.
Temas 14 y 15 libro de texto.
8ª Quincena: Variable estadística bidimensional. Coeficiente de correlación. Rectas de regresión.
Tema 16 libro de texto.
9ª Quincena: Cálculo de Probabilidades. Probabilidad condicionada.
Temas 17 y 18 libro texto. (Sin teorema de Bayes y de la Probabilidad Total)
10ª Quincena: Variable aleatoria discreta y continua. Distribuciones Binomial y Normal.
Temas 19 y 20 libro de texto.

- **Libro de texto**: "Algoritmo. Matemáticas II COU".
  Editorial S.M. Autores: Vizmanos-Anzola.
- **Evaluaciones**: Primera → Quincenas 1 a 4.
  Segunda → Quincenas 5 a 8.
  Tercera → Quincenas 9 y 10.
  Junio y Septiembre.

ANEXO

5ª Quincena Matemáticas II COU **Actividades**

1. Halla la derivada por la definición de la función dada, si existe, en los puntos x = -2, x = 0 y x=4. Determina la ecuación de la recta tangente en los puntos en que sea posible.

$$f(x)=\begin{cases} x^2\text{-}1 & x\leq 0 \\ |x\text{-}2| & x\geq 0 \end{cases}$$

2. Estudia la derivabilidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} 3x+5a & si \;\; x<0 \\ bx^2+3 & si \;\; 0\leq x<2 \\ x^2-4 & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} e^{x+1} & si \;\; x<-1 \\ \dfrac{4}{x+3} & si \;\; -1\leq x\leq 1 \\ 1+\log x & si \;\; x>1 \end{cases}$

3. Si de una función f(x) se conoce que su derivada es f '(x) = 2x+3. Se pide:
   a. Representa la gráfica de f '
   b. Estudia el crecimiento de f(x)
   c. ¿Tiene f(x) algún extremo relativo?

4. Realiza el mismo ejercicio anterior si la derivada es f '(x) = x^2 + x – 2. Estudia además la curvatura y los puntos de inflexión.

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{-2x}{x-2}$ $si \;\; x\neq 2$, se pide:
   a. Estudia su comportamiento para valores grandes de x y en las proximidades de x=2.
   b. Estudia su crecimiento y decrecimiento.
   c. Representa la función.

6. Dadas las funciones f(x) = x^3 –3x y g(x) = x^4 –2x^2 Calcula:
   a. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos
   b. Intervalos de concavidad y covexidad, puntos de inflexión.
   c. Puntos de corte, simetrías y utilizando los apartados anteriores representa sus gráficas.

7. Halla los valores de a, b, c en la función f(x) = x^3 +ax^2 +bx+c para que f(x) tenga un máximo en x=1, un punto de inflexión en x=2 y corte al eje OY en el punto de ordenada -1.

8. Los beneficios en euros de una empresa por la venta de bolígrafos viene dada por la función b(x) = -x^2 +130x – 3000. Responde razonadamente: ¿Qué beneficio obtiene si vende cada boligrafo a 0'5 euros? ¿Entre que valores obtiene un beneficio positivo? ¿A qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo?

ESTADÍSTICA INTERACTIVA EN LA RED: UN ENTORNO PARA LA ENSEÑANZA ABIERTA Y A DISTANCIA

LUIS M. MARÍN TRECHERA · ANTONIO GÁMEZ MELLADO

El avance de las nuevas tecnologías ha abonado el camino para desarrollar entornos hipermedia de enseñanza-aprendizaje en los que gracias a las posibilidades de interconexión y comunicación que ofrece Internet, se pueden llevar a cabo multitud de experiencias docentes que contribuyan a mejorar la formación académica de nuestros alumnos a través de la formación virtual.

El proyecto "Estadística Interactiva en la Red" que aquí presentamos ofrece a los profesores y a los alumnos herramientas interactivas multimedia que permiten la enseñanza-aprendizaje de la Estadística a través de la Red.

Este entorno consta de recursos interactivos desarrollados con los lenguajes Java, JavaScript, DHTML, etc. que permiten su máxima difusión y utilización. Se han desarrollado usando Java y JavaScript porque al ser lenguajes multiplataforma permiten que nuestro entorno sea ejecutable en distintos ordenadores independientemente del sistema operativo que utilicen.

El sistema incorpora un curso, casi completo, de Estadística Básica, con lecciones interactivas, problemas resueltos y propuestos, y por supuesto, aplicaciones hipermedia para desarrollar problemas interactivos en la red. Se incorpora también, un entorno de autoevaluación-autoaprendizaje muy eficaz para la enseñanza abierta y a distancia.

Palabras Clave: Enseñanza a distancia, Internet, Enseñanza Interactiva, Estadística.

1. INTRODUCCIÓN.

El entorno educativo es posiblemente uno de los ámbitos en los que con más fuerza se deja notar la influencia de las nuevas tecnologías de la información, que con tanto empuje están cambiando todos los aspectos de la sociedad. Cada vez se van introduciendo nuevos elementos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los últimos pasos en este proceso han sido la utilización de ordenadores personales y de redes de comunicaciones como Internet.

El ordenador en primer término, y las redes de comunicaciones, y en especial Internet, proporcionan nuevas vías para la implementación y desarrollo de la labor docente. Así, el concepto de aula puede verse totalmente transformado, ya que puede ocurrir que los alumnos no tengan que desplazarse físicamente hasta un lugar común, pudiendo seguir las explicaciones del tutor desde sus propios domicilios. El profesor tutor también puede ver totalmente alterada su tarea, debiendo adaptarse a las diferentes circunstancias que los nuevos entornos formativos reclamen.

Se han experimentado diversos usos didácticos de las herramientas que Internet brinda a sus usuarios. El correo electrónico, los grupos de noticias, la transferencia de archivos, los buscadores, los foros de discusión, etc. pueden ser utilizados como herramientas educativas.

En este contexto proponemos el proyecto *"Estadística Interactiva en la Red (EIR)"*, donde examinaremos algunos de los ámbitos en los que puede utilizarse Internet en la educación. Hoy disponemos de la infraestructura y de los conocimientos necesarios para hacer efectivas algunas de las promesas que la telemática ha realizado al mundo educativo. Si la escuela da la espalda a las nuevas tecnologías, ¿no estará dando también la espalda al futuro?

2.- EL PROYECTO EIR. OBJETIVOS.

El proyecto *"Estadística Interactiva en la Red (EIR)"*, está dirigido a alumnos y profesores de Matemáticas y Estadística de todos los niveles educativos, fundamentalmente de educación secundaria y universitaria. Los alumnos podrán encontrar una serie de contenidos interactivos, tanto teóricos como prácticos, que les faciliten el aprendizaje de la Estadística. Para los profesores el proyecto plantea la realización de un curso a distancia, donde además de impartir contenidos específicos de Estadística, se les introduzca en la utilización de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y sus usos educativos.

Nos planteamos, por tanto, los siguientes objetivos, de forma que al finalizar el curso (EIR), el alumno / profesor deberá ser capaz de:

- Poseer conocimientos generales acerca de Internet como nueva tecnología de la información y la comunicación, haciendo especial hincapié en su aplicación al ámbito de la educación.
- Conocer las distintas posibilidades de creación y desarrollo de recursos didácticos multimedia con soporte en Internet, que sean interactivos, abiertos y bidireccionales.
- Poseer los conocimientos mínimos esenciales que le permitan utilizar un navegador para el acceso a Internet, y le permitan diseñar aplicaciones interactivas propias.
- Conocer las aportaciones educativas de Internet en la Comunidad Andaluza.
- Reflexionar sobre el futuro de las nuevas tecnologías, incidiendo especialmente en los entornos: aula virtual y enseñanza a distancia.
- Comprender la necesidad de creación de aplicaciones educativas que posean contenidos dinámicos.
- Usar recursos informáticos en la red de ámbito educativo, tanto de propósito general como específico.
- Adquirir y profundizar en conocimientos generales y específicos de Estadística y Cálculo de Probabilidades que le permitan adaptarlos al mundo real y a sus intereses personales.

Para los alumnos el proyecto no plantea la realización del curso completo, sino la utilización de aquellos contenidos que se correspondan con los tratados en sus asignaturas específicas. De este modo, los objetivos que el proyecto se plantea para los alumnos son los siguientes:

- Disponer de contenidos teóricos en la red para su uso como bibliografía complementaria.
- Acceder a aplicaciones interactivas que afiancen los conceptos teóricos explicados.
- Disponer de herramientas interactivas que puedan utilizarse como ayuda en la realización de ejercicios.
- Utilizar sistemas interactivos de autoevaluación.

3.- CLASIFICACIÓN DE CONTENIDOS DE EIR.

Dentro del material incluido en EIR, podemos diferenciar los siguientes tipos de contenidos:

Páginas Web con desarrollos teóricos.

Se ofrecen distintas unidades temáticas de carácter teórico en hipertexto, bien en formato HTML, bien en formato PDF. El procedimiento habitual de trabajo ha sido desarrollar las unidades didácticas usando LaTeX para posteriormente usar los conversores TtH, LaTeX2Html o dvi2pdf. Las páginas con contenidos teóricos son enriquecidas dotándolas de interactividad incorporando aplicaciones interactivas sencillas usando DHTML, JavaScript o Java. Por la importancia de estas aplicaciones las trataremos más detenidamente en un punto posterior.

Problemas resueltos y propuestos con solución.

Al igual que en el caso anterior, se ofrecen en formato HTML o PDF. La inclusión de notación matemática se ha realizado usando TtH.

Cuestiones prácticas para autoevaluación.

Se han elaborado distintos sistemas de autoevaluación a través de Internet aplicados a la enseñanza de la Estadística para alumnos universitarios de carreras técnicas. Estos sistemas pueden adaptarse a cualquier materia. Se han realizado mediante páginas escritas en HTML que realizan llamadas a funciones de JavaScript.

Programas interactivos.

Una de las características fundamentales del proyecto *"Estadística Interactiva en la Red (EIR)"* es, como su propio nombre indica, la interactividad. Esta es la diferencia fundamental entre utilizar la red en lugar de otros sistemas tradicionales, como los libros de consulta. Esta interactividad se consigue a base de aplicaciones interactivas desarrolladas en DHTML, JavaScript o Java.

La complejidad de la aplicación es normalmente el criterio empleado para decidirse por un sistema u otro de desarrollo. Así, si la aplicación requiere el manejo de un gran volumen de datos o emplear representaciones gráficas, se utilizará Java. Para aplicaciones de menor envergadura, es más aconsejable utilizar JavaScript, ya que su carga y ejecución se hará de un modo más rápido. Para dotar de mayor atractivo a las aplicaciones JavaScript, se incluirán elementos de HTML Dinámico, como el manejo de capas.

Descripción de entornos de formación con soporte en Internet:

Dentro del Sistema EIR, se incluyen una serie de indicaciones sobre las distintas posibilidades educativas que ofrece la red, así como demostraciones prácticas, mediante el uso aplicado en distintos situaciones, de cada una de las mismas. Entre estos entornos virtuales de formación con soporte en Internet podemos citar, entre otros, los siguientes:

- Exposición de contenidos a través de páginas Web.
- Ampliación de contenidos a través de páginas Web.
- Propuestas de trabajos a través de páginas Web.
- Sistemas de correo electrónico para la difusión de noticias, materias, etc.
- Discusiones on-line a través de IRC.

- Sistemas de videoconferencia.
- Transmisión de ficheros con programas, imágenes, textos, etc. a través de FTP.
- Sistemas de audio video bajo demanda.
- Búsqueda de nuevas fuentes de información a través de Internet.

Difusión de otros contenidos de Internet.
El Sistema EIR incluye una colección de páginas con enlaces a otras direcciones de Internet en las que hay información de interés desde el punto de vista matemático y estadístico. Estas páginas están clasificadas en varios grupos:

- Direcciones correspondientes a servidores institucionales en las que puede encontrarse información de datos estadísticos reales. Esto permite importar dichos datos y realizar ejercicios basados no en supuestos sino en datos completamente obtenidos de la realidad.
- Enlaces a páginas que contienen recursos didácticos que pueden ser utilizados en el aula, así como software de libre difusión que puede obtenerse directamente a través de la red.
- Enlaces a organizaciones matemáticas y estadísticas, así como a las versiones electrónicas de diversas revistas del área. Muchos de los artículos incluidos en dichas revistas son directamente accesibles vía Internet.

4.- FASES DE DESARROLLO DEL PROYECTO.

El Proyecto EIR se ha dividido en una serie de fases, cada una de ellas formada por varias etapas. Muchas de estas fases se han ido desarrollando en paralelo, otras, en cambio, necesitan para su inicio que sean terminadas con éxito otras fases anteriores. Pasemos a comentar las distintas fases y el estado de desarrollo de cada una en el proceso actual.

Elaboración de los contenidos teóricos.
Dentro de esta fase podemos distinguir dos etapas:

- **Redacción de los contenidos teóricos.** Esta etapa está completamente terminada.
- **Conversión en hipertexto.** Aunque esta etapa pudiera considerarse ya lista, está siendo sometida a procesos de depuración y mejora, así como de inclusión de interactividad.

Elaboración de los problemas resueltos y propuestos con su solución.
Al igual que en el caso anterior podemos distinguir dos etapas. La de redacción de los problemas resueltos y propuestos está ya completamente acabada. La etapa de conversión en hipertexto está en un proceso bastante avanzado, al no necesitar de tantos programas explicativos interactivos como en el caso anterior.

Elaboración de las cuestiones de autoevaluación.
Esta fase está completamente terminada y en funcionamiento. Durante los cursos 1998/1999 y 1999/2000 nuestros alumnos de la Universidad de Cádiz han podido acceder a este material a través de servidores de la UCA (http://aquiles.uca.es/ingenie) y del servidor de la SAEM Thales (http://thales.cica.es), en la sección de recursos.

Programas interactivos.
La elaboración de los programas interactivos en Java y JavaScript es la parte más laboriosa del proyecto. En la actualidad se encuentran prácticamente ultimados los correspondientes a las tres primeras unidades temáticas. Puede encontrarse más información en los siguientes trabajos:

- **Estadística Descriptiva Unidimensional Para Internet.** (S. Oviedo, A. Gámez y L. Marín)
- **Análisis Estadístico Bidimensional Desarrollado En Java** (D. González, A. Gámez y L. Marín)
- **Aplicaciones Interactivas Para La Enseñanza Del Cálculo De Probabilidades** (R. Gutiérrez, A. Gámez y L. Marín)

Descripción de entornos de formación con soporte en Internet:
Como parte de EIR se incluyen una serie de artículos presentados en congresos sobre Informática Educativa y sobre Enseñanza de las Matemáticas. En estos artículos se analizan las distintas posibilidades que ofrece Internet como herramienta educativa, los distintos entornos virtuales de formación, las ventajas que representa el tener la información en la red frente a otras alternativas, etc.
Los artículos incluidos en esta sección están refrendados por el hecho de haber sido aceptados en diversos foros de contrastada solvencia. En la actualidad se está procediendo a la conversión de los textos a los formatos más difundidos de la red.

Difusión de otros contenidos de Internet.
En la actualidad hay elaboradas ya una serie de páginas con enlaces a todo tipo de contenidos matemáticos y estadísticos de interés en la red. Se está procediendo a contrastar, actualizar, ordenar, clasificar e incluir en entornos gráficos más atractivos toda la información disponible. Esta labor de clasificación se ha hecho imprescindible al ser ya varios centenares los enlaces incluidos.

5. CONCLUSIONES

Las herramientas multimedia a través de Internet deben incluirse en la oferta educativa actual. A través del proyecto EIR se pretende ofrecer a los profesores y alumnos una serie de contenidos interactivos, tanto teóricos como prácticos, que les faciliten la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística. Para los profesores el proyecto plantea la introducción a la utilización de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación para fines educativos.

El proyecto se encuentra ya en un avanzado estado de desarrollo. Durante los cursos anteriores se ha estado utilizando por alumnos de la Universidad de Cádiz de modo parcial. Para el curso 2000/2001 entrarán en funcionamiento nuevos contenidos, estando previsto que el proyecto esté por completo en uso con todas sus potencialidades en el curso 2001/2002.

De cualquier manera, el proyecto debe de considerarse como algo dinámico, en continua evolución, permanentemente abierto a la incorporación de nuevos contenidos y a la mejora de los existentes. El proyecto está abierto a recibir las aportaciones, sugerencias y críticas de todos los interesados.

6. REFERENCIAS

Estadística Práctica con Statgraphics. Rodríguez Huertas, R. et al. Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz.

Enseñanza de la Estadística vía Internet. Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L. VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática.

La Educación en Internet. Guía para su aplicación práctica en la Enseñanza. Peña Pérez, R.

Tutoriales multimedia para el aprendizaje de la Estadística. Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L. VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática.

Brna, P. & D. Dicheva. 1998. Guest Editorial: Meeting the challenge of new technologies. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**:81-82.

Issroff, K. & M. Eisenstadt. 1997. Evaluating a virtual summer school. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**:245-252.

Koper, E. J. R. 1998. A method and tool for the design of educational multimedia material. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**:19-30.

Trentin, G. 1996. Internet: does it really bring added value education? *International Journal of Educational Telecommunications*, **2**:97-106.

Internet como herramienta de apoyo a la docencia. Marín Trechera, L.M. y Gámez Mellado, A. VII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas.

Estadística Descriptiva Unidimensional Para Internet. S. Oviedo, A. Gámez y L. Marín. IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "THALES". San Fernando, 2000.

Análisis Estadístico Bidimensional Desarrollado En Java. D. González, A. Gámez y L. Marín. IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "THALES". San Fernando, 2000.

Aplicaciones Interactivas Para La Enseñanza Del Cálculo De Probabilidades. R. Gutiérrez, A. Gámez y L. Marín. IX Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas "THALES". San Fernando, 2000.

ESTADISTICA DESCRIPTIVA UNIDIMENSIONAL PARA INTERNET

SUSANA OVIEDO BOCANEGRA · ANTONIO GÁMEZ MELLADO · LUIS M. MARÍN TRECHERA

La finalidad de este trabajo es proporcionar al alumno un soporte de ayuda en la compresión y el aprendizaje de conceptos de Estadística Descriptiva unidimensional.

Esta aplicación se incluye dentro de un proyecto más completo denominado "Estadística Interactiva en la Red". Dicho proyecto se estructura conteniendo: Desarrollos teóricos interactivos, Ejercicios y ejemplos interactivos y Test de autoevaluación.

Dicha aplicación se ha desarrollado usando los lenguajes Java, JavaScript, etc... con el objetivo de ser incorporado a la red y que de esta manera pueda ser utilizada de forma remota.

Palabras clave: Java, Estadística, Interactivo, Educación a distancia, Internet.

1) INTRODUCCION

Hemos desarrollado esta herramienta porque no conocemos la existencia de ninguna otra aplicación con soporte en Internet que no sólo realice el cálculo de las diferentes medidas estadísticas, represente las distintas tablas de frecuencias y los resultados de dichos cálculos, sino que además permita el aprendizaje de cada uno de estos conceptos y que proporcione al alumno un interfaz interactivo.

2) OBJETIVOS

Esta aplicación forma parte de un proyecto más completo denominado "Estadística Interactiva en la Red". Esta herramienta concretamente, está dedicada a la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos de Estadística Descriptiva unidimensional: media, varianza, desviación típica, tabla de frecuencias, etc... Al final de esta aplicación se pretende que:

- El alumno haya comprendido todos los conceptos en él incluidos. Para ello dispone de desarrollos teóricos interactivos con representaciones gráficas. Además se incluyen ejemplos con los que el alumno podrá variar el conjunto de datos de entrada y comprobar en ese momento las modificaciones producidas.

- El alumno sea capaz de poner en práctica dichos conceptos realizando los ejercicios propuestos.

- Al final de ésta el alumno pueda evaluar el nivel de conocimientos adquiridos. Para ello se incluye una aplicación que genera cuestiones de tipo test al azar. El alumno podrá elegir el nivel de dificultad del test, el número de cuestiones que desea contestar y podrá hacer una selección de cuestiones según diferentes unidades temáticas.

- Esta aplicación permite además que el profesor pueda modificar, añadir y eliminar sus propias cuestiones, de forma que pueda adaptarlas a las necesidades de sus alumnos.

- Por último, al estar diseñadas para ejecutarse en la red, permiten que un mayor número de alumnos acceda a ellas, ya que en todas las universidades se facilita a los estudiantes el acceso a Internet, eso sin tener en cuenta que actualmente casi todo el mundo tiene un ordenador en casa y que el número de "internautas" cada día crece más y esa es la tendencia para el futuro.

3) MEDIOS UTILIZADOS

Esta aplicación se ha desarrollado usando los lenguajes Java, JavaScript, HTML y las herramientas TtH y Latex. La decisión de los diferentes lenguajes de programación se ha basado principalmente en que se deseaba una aplicación interactiva que pudiera ser incorporada a la red y que pudiera ser utilizada de forma remota.

Para la creación de dicha aplicación se han seguido los siguientes pasos:

1.- Crear las páginas web con los diferentes desarrollos teóricos.

Los textos de las diferentes unidades temáticas se han realizado en LaTeX (tipográfo para escribir documentos matemáticos). Para pasarlos a formato HTML hemos hecho uso de una aplicación de uso gratuito descargada de la red denominada TtH. La herramienta TtH traduce ficheros TeX y LaTeX a su equivalente en HTML. Es un programa sumamente rápido, el código generado es completamente transportable y genera documentos web más compactos, manejables y de más rápido acceso que los documentos generados por otras aplicaciones. Su potencia reside en que realmente traduce las ecuaciones en vez de convertirlas en imágenes.

TtH (versión para Windows) y LaTeX2HTML (versión para Unix) ofrecen soporte para todos los comandos matemáticos de TeX, con excepción de algunos comandos menos frecuentes y que no aparecen normalmente en las fuentes que facilitan los navegadores. Incluye soporte para ecuaciones, subíndices y superíndices, fracciones, acentos, delimitadores (llaves, corchetes, paréntesis), matrices, etc...

Cuando TtH encuentra una construcción en TeX que no puede traducir bien porque no existe su equivalente en HTML o bien porque no es capaz de traducirla, el programa intenta eliminar el código erróneo creado que generalmente daría un aviso si no está seguro de lo que está haciendo.

La World Wide Web es una gran colección de documentos hipertexto conectados entre sí a los que se puede acceder a través de Internet. HTML es un lenguaje estándar de etiquetas para el hipertexto. Un documento hipertexto contiene enlaces a otros documentos, estos enlaces suelen ser palabras del propio texto que destacan de las demás, aunque también pueden ser gráficos. Al hacer clic sobre uno de estos enlaces, se desencadenará una acción.

Gran parte de la potencia de la World Wide Web es su independencia de las plataformas. Es decir, presenta la información de tal forma que puede verse desde cualquier tipo de máquina y sistema operativo, así se trabaje con un PC, Macintosh o una estación de trabajo Unix.

2.- Creación de los diferentes applets incorporados en las páginas web.

Para ello hemos hecho uso de los lenguajes Java, JavaScript y HTML.
HTML permite describir la manera en que deben mostrarse las paginas web. Para hacer paginas altamente interactivas se requiere un mecanismo diferente. Uno de estos mecanismos es JAVA.

Java es un lenguaje orientado a objetos que permite que las aplicaciones sean completamente interactivas cuando se utilizan a través de la Web. En una página web pueden incluirse pequeños programas Java, convirtiendo las páginas estáticas en aplicaciones que se ejecutarán dentro del ordenador del usuario. Estos programas se denominan APPLETS. Los applets permiten que las paginas web sean interactivas.

Por último, Java permite la escritura de programas totalmente fiables, a la hora de crear aplicaciones para redes la seguridad debe ser un punto a tener en cuenta. Además Java permite trabajar con una cantidad amplia de plataformas.

JavaScript es un lenguaje de programación independiente relacionado con Java. Se puede codificar directamente en los documentos HTML, con lo que pasa a formar parte del propio código del documento. JavaScript es menos potente que Java, pero proporciona al programador más control sobre el navegador.

3º Creación de una aplicación que genere tests combinando Java y bases de datos.

Para ello se ha construido una base de datos con las cuestiones que compondrán los test y se ha creado un interfaz gráfico de usuario Java que permite el mantenimiento de dicha base de datos. Se contemplan acciones de bases de datos tales como añadir, modificar, eliminar y consultar.

4) APPLET: CÁLCULO DE PARÁMETROS ESTADÍSTICOS.

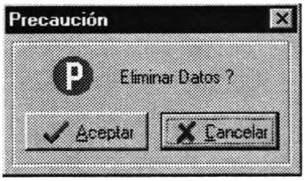
Tal y como se ha mencionado anteriormente, en esta aplicación se incluyen un conjunto de applets que le proporcionan interactividad a la herramienta. Aquí se presenta uno como ejemplo. Es una pequeña aplicación que realiza el cálculo de los distintos parámetros de Estadística Descriptiva.

En dicha aplicación podemos distinguir cuatro grupos de componentes con funcionalidades distintas, como puede verse en la figura 2:

- Un primer grupo, llamado "Parámetros Estadísticos", compuesto por un conjunto de check box (cajas de opción). Cada uno de ellos representa la media geométrica, media aritmética, media armónica, moda, mediana, varianza, desviación típica, máximo, mínimo, rango, primer cuartil, tercer cuartil, rango intercuartílico, coeficiente de variación, coeficiente de curtosis y el coeficiente de simetría, de manera que el alumno pueda seleccionar una o más opciones que quiera que sean calculadas. Para seleccionarlas el alumno simplemente deberá hacer clic con el ratón sobre el check box correspondiente.

- Un segundo grupo llamado "Entrada de Datos", que se encuentra formado por una caja de texto y por una lista. El funcionamiento es el siguiente: el alumno inserta un dato en la caja de texto. Nuestra aplicación comprobará que ese dato es correcto. Sólo se permitirán entradas numéricas. Por ejemplo, no se permitirá una entrada del tipo "ab". Una vez que el dato haya sido validado, la aplicación lo inserta en la lista. La lista contendrá el conjunto de valores válidos sobre los que se realizarán los cálculos. En el caso de que deseara modificar algún dato de la lista de valores, el alumno debe seleccionar un ítem de la lista, introducir el nuevo valor en la caja de texto y hacer clic sobre el botón Modificar. Al igual que antes, se valida el dato introducido y en caso de que sea correcto se modifica la lista de valores. De igual modo, si el alumno desea borrar un elemento de la lista, seleccionará el ítem correspondiente, y hará clic sobre el botón Borrar. Tanto si se desea eliminar o modificar un dato, después de hacer clic sobre el botón correspondiente aparecerá una ventana solicitando la confirmación de que realmente se desea realizar esa operación, ver figura 1. En este caso, haría clic sobre el botón aceptar. Si no, haría clic sobre el botón cancelar y no se habrá producido ninguna modificación sobre la lista de valores.

Figura1. Ventana de confirmación.



- Un tercer grupo llamado "Resultados Obtenidos", está formado por un conjunto de etiquetas en las que se incluyen el nombre del parámetro correspondiente y un conjunto de cajas de texto en las que se mostrará el resultado obtenido. Por defecto las cajas de texto están vacías, no contienen ningún valor. El resultado aparecerá cuando el alumno pulse el botón "Calcular". En el caso de que algunos parámetros no hubiesen sido seleccionados, la caja de texto correspondiente seguirá estando vacía. El alumno no tendrá posibilidades de modificar ningún valor de los incluidos en las cajas de texto resultado.

- Por último, encontramos un conjunto de botones que describen la funcionalidad de la pantalla. Tenemos cuatro opciones: calcular los parámetros, generar datos aleatorios, borrar todo y salir del applet.

- Para que la aplicación muestre los cálculos realizados, el alumno hará clic sobre el botón "Calcular" y aparecerán los resultados en la parte "Resultados Obtenidos". Previamente el alumno deberá haber seleccionado algún check box de la parte "Parámetros Estadísticos". En el caso de que ninguno hubiera sido seleccionado, simplemente las cajas de texto aparecerán vacías.

- La aplicación permite que el alumno introduzca los datos sobre los que desea realizar los cálculos, pero también le ofrece la posibilidad de generar datos aleatoriamente. Para ello el alumno debe hacer clic sobre el botón "Generar datos". El conjunto de datos generados aparecerá en la lista, pudiendo ser modificados y borrados tal y como se ha descrito anteriormente.

- En el caso de que el alumno deseara borrar todos los datos y las selecciones realizadas, deberá hacer clic sobre el botón "Borrar" y se desactivará la selección de todos los check box y todas las cajas de texto y la lista de valores aparecerá vacía.

- Por último, si el alumno desea abandonar la pantalla solamente deberá pulsar el botón "Salir"

5) CONCLUSIONES

Lo que se pretende es conseguir una aplicación que permita la enseñanza y el aprendizaje de la Estadística. La herramienta podrá ser utilizada por cualquier persona que disponga de un ordenador con conexión a Internet y un navegador, y dado que el número de usuarios de la red va en aumento, esta aplicación permite que pueda ser utilizada por un elevado número de personas. Además al estar desarrollada en Java, puede accederse desde cualquier plataforma: Windows, Unix, Macintosh...

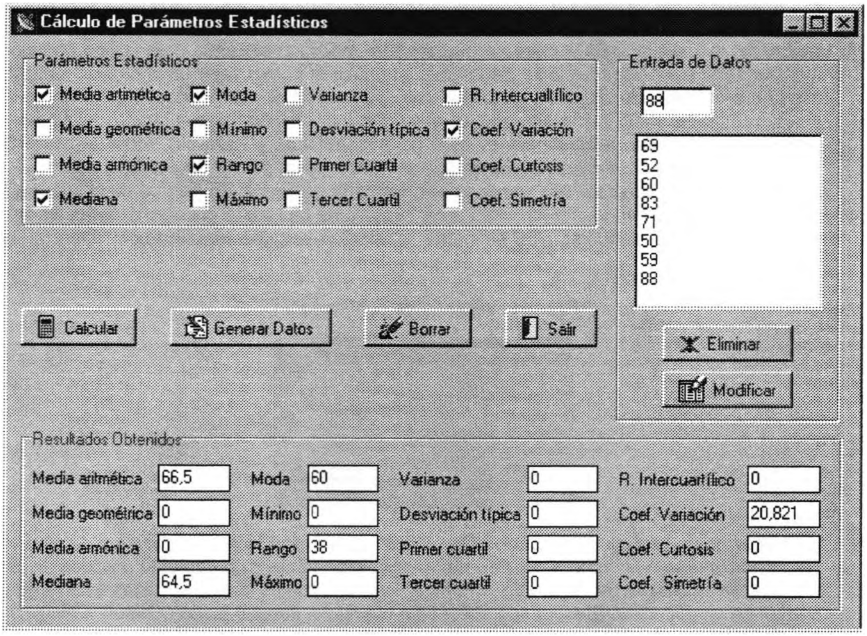


Figura 2. Applet: Cálculo de parámetros estadísticos.

BIBLIOGRAFÍA

Zukowski, John. [1999]."Programación en Java 2", Anaya Multimedia.
Hutchinson, Ian. [1997-8]. "Manual TtH"
Tanembaum, Andrew S.[1997] Redes de Computadores, Prentice-Hall "*Estadística Interactiva en la Red.*", IX Congreso SAEM THALES.

APLICACIONES INTERACTIVAS PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DE PROBABILIDADES

REMEDIOS GUTIÉRREZ MARTÍNEZ · ANTONIO GÁMEZ MELLADO · LUIS M. MARÍN TRECHERA

Con este trabajo se pretende proporcionar al alumno herramientas interactivas con soporte en Internet que sean útiles tanto para la enseñanza como para el aprendizaje del cálculo de probabilidades. Se presentan aplicaciones tanto analíticas como gráficas que permiten el cálculo del valor de probabilidad de distribuciones teóricas así como la simulación de distintos procesos que ayudan a comprender y visualizar de modo gráfico el Teorema Central del Límite. Esta simulación describe de forma interactiva como la distribución del estadístico media muestral se va aproximando a la distribución de una Normal al ir creciendo el número de la variables aleatorias independientes. Estas aplicaciones propias se han diseñado usando los lenguajes Java y JavaScript por su universalidad en la red.

Palabras Clave: Enseñanza a distancia, Internet, Probabilidad, Interactivo, Estadística.

1. OBJETIVOS

El fenómeno Internet está transformando la sociedad. En el ámbito educativo esta transformación afectará de manera especial. El trabajo que aquí presentamos forma parte de un proyecto mucho más amplio de enseñanza abierta y a distancia, que realmente pretende ser un curso a distancia en la red, denominado "Estadística Interactiva en la Red". Consta de una serie de documentación con soporte en Internet, que puede ser útil tanto para la enseñanza como para el aprendizaje de algunos conceptos de estadística y cálculo de probabilidades.

La escuela, según algunos autores, será transformada por las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. Algunos Centros Educativos ya están utilizando de forma imaginativa y poderosa las herramientas que Internet nos ofrece, integrándolas en sus actividades de enseñanza - aprendizaje y sacando partido a sus inmensas posibilidades.

Internet puede ser una fenomenal herramienta educativa, y como tal se utiliza ya en numerosos lugares. Surge la necesidad de conocer y utilizar las distintas herramientas que la tecnología nos proporciona, tanto para buscar como para exponer resultados.

El área de Matemáticas puede ser una de las disciplinas más adecuadas para la incorporación de estos medios. En este área, el uso de las nuevas tecnologías, especialmente Internet, ha de tener repercusiones en la manera de enseñar Matemáticas y en la selección de los contenidos.

El uso de ordenadores presenta hoy en día una dificultad añadida, pues se ha de trabajar en un aula específica, y no puede aún ser un medio integrado en la clase habitual.

El cambio metodológico fundamental consiste en que el alumno trabaja con el ordenador como ayudante - guía en lugar de ejercer esta función sólo el profesor, pero este último ha elaborado previamente la guía de trabajo, los ejercicios y los recorridos que los alumnos realizarán con los "programas informáticos multimedia".

El ordenador, sin duda, ofrece grandes y variadas posibilidades en el área de Matemáticas como son:

- La realización de variadas pruebas sobre un mismo problema con gran rapidez.
- La obtención de resultados numéricos y gráficos de forma simultánea.
- La simulación de otros modelos, y, en fin la utilización del método universal de ensayo y error.
- La posibilidad de presentar contenidos interactivos y dinámicos.

Los lenguajes de programación y lenguajes de autor como HTML, Java, JavaScript, etc. permiten la elaboración de aplicaciones "a medida", tutoriales multimedia más o menos complejos y completos. La principal dificultad estriba en que requieren por parte del profesorado mucho más trabajo, y unos mayores conocimientos técnicos que los programas comerciales ya diseñados para actividades específicas.

Hoy en día los entornos de programación multimedia se han convertido en cómodas y potentes herramientas para la creación de aplicaciones concretas. El manejo por parte del profesorado de estos programas, como destacábamos anteriormente, también requiere mayor esfuerzo y tiempo, lo que hace que no sea aún el método más extendido para la creación de aplicaciones educativas.

Los entornos multimedia con soporte en Internet, permiten además la presentación y exposición de resultados a través de lo que se conoce como "aula virtual". Este tipo de aula permite que cada alumno avance a su propio ritmo y realice su recorrido personal. Estas herramientas constituyen sin duda un excelente recurso para la enseñanza abierta y a distancia, ya que permiten graduar y adecuar los tiempos, los modos y las situaciones personales del alumno.

Por otra parte estas herramientas multimedia ofrecen la posibilidad de formación a distancia, tanto para profesores como para alumnos. Cabe destacar que este aspecto es más interesante cuanto más alejados nos encontremos de las grandes ciudades, ya que promueve la igualdad de oportunidades.

2. DESARROLLO

Cuando pensamos en el desarrollo del curso queríamos tener presente que los medios afectan enormemente al proceso de enseñanza, pues la tecnología facilita el acceso a un repertorio temático novedoso y actual. Todo ello implica la renovación tecnológica, aparcando ciertos temas, incluyendo otros nuevos, cambiando radicalmente el acceso a la comunicación y a la información.

Creemos que la interactividad, bidireccionalidad y personalización son los tres aspectos donde realmente se puede poner en juego el interesante carácter *hipermedia* de Internet.

Concretamente en el diseño de páginas interactivas que resuelvan problemas, aquellas en las que el alumno pueda personalizar, que contengan elementos aleatorios, etc., es donde se encuentra la diferencia fundamental entre aprender con un libro, o aprender en un entorno *hipermedia* a través de Internet.

Actualmente, con el uso de los lenguajes de programación Java y JavaScript es posible diseñar *tutoriales hipermedia* en Internet que sean capaces de personalizarse, aleatorizarse, etc. Estos aspectos proporcionan una interacción entre enseñanza y aprendizaje que estamos en la obligación de considerar. Estamos trabajando actualmente en este aspecto, y estamos desarrollando tutoriales multimedia vía Internet para la enseñanza de la Estadística, que constituyen un curso casi completo de Estadística Básica denominado (EIR). Este curso se incorporará como un recurso educativo para la enseñanza-aprendizaje de la Estadística en el servidor thales.cica.es, de forma que pueda resultar útil a profesores y alumnos de educación secundaria y universidad.

Concretamente, en el bloque de cálculo de probabilidades hemos diseñado herramientas multimedia interactivas desarrolladas usando HTML, Java y JavaScript que permiten el aprendizaje de conceptos tales como independencia, cálculo de probabilidades y cuantiles de distribuciones tanto discretas como continuas, simulación del teorema central del límite, etc.

Al ser aplicaciones con soporte en Internet, permiten que puedan utilizarse de forma remota, que se puedan ejecutar en cualquier plataforma, Window, Mac, Unix, etc. Otro de los aspectos importantes es la posibilidad de adaptación, actualización casi inmediata de los contenidos y ejemplos. Con respecto al carácter abierto, éste queda contemplado ya que es posible la incorporación de nuevas aplicaciones que respondan a necesidades especiales de nuestros alumnos.

El procedimiento habitual de trabajo ha sido:

- Desarrollo de la Unidad Didáctica usando el paquete LaTeX.
- Uso de los conversores TtH, LaTeX2Html.
- Incorporación de aplicaciones interactivas sencillas usando JavaScript.
- Inclusión de aplicaciones con carácter global usando Java.
- Desarrollo de entornos de autoevaluación usando Java y JavaScript.

Presentamos aquí una serie de aplicaciones de diseño propio que permiten la enseñanza y aprendizaje de algunos conceptos de cálculo de probabilidades tales como independencia, cálculo de probabilidades de distribuciones estadísticas tanto discretas como continuas, cálculo de percentiles, y simulación del Teorema Central del Límite. Estas aplicaciones van acompañadas de breves explicaciones teóricas, y de pequeñas aplicaciones interactivas diseñadas con los lenguajes Java , JavaScript y HTML.

Algunas de estas aplicaciones permiten la exposición de contenidos, y van acompañadas de pequeñas aplicaciones interactivas, que permiten al alumno cambiar e introducir datos diversos, de forma que cada alumno realice un itinerario diferente y propio al recorrer las páginas Web. Puede verse en la figura 1, un ejemplo en el que se plantea un problema interactivo específico desarrollado usando Scripts.

Crear nuestras propias páginas puede considerarse una labor trivial si lo que se pretende es simplemente que aparezcan en la red los textos escritos por el profesor. Si lo que se pretende es dotar a dichas páginas de interactividad, haciéndolas más atractivas y posibilitando la personalización de los contenidos en función del alumno, se requiere de técnicas más avanzadas, ver figura 2. El profesor deberá conocer por tanto las características hipertexto de HTML, el manejo de Frames, la creación de subrutinas en JavaScript y Java, etc.

Si analizamos con detalle el tema de la autoevaluación, es frecuente que los alumnos, conforme van avanzando en el estudio de una determinada materia, necesiten asegurarse que tienen afianzados los conceptos antes de continuar estudiando. Necesitan, por tanto, autoevaluarse para comprobar si superan las materias anteriores. Si la autoevaluación se supera, el alumno se ve reafirmado en su posición como sujeto activo en el proceso y se siente capacitado para ir enfrentándose a nuevos contenidos. Si la autoevaluación no se supera, el alumno detecta dónde están sus fallos y se ve forzado a repetir la materia anterior para corregirlos.

Proponer ejercicios para que sean resueltos por los alumnos al final de cada tema es uno de los métodos más empleados tanto por profesores como por libros de texto para que los alumnos se autoevalúen. En nuestro curso interactivo en la red (EIR), también hemos desarrollado aplicaciones hipermedia que permiten conocer al alumno el grado de conocimientos alcanzado. Las hemos organizado por unidades didácticas, niveles de dificultad y tipos de autoevaluación. Un ejemplo puede verse en la figura 3.

Por ejemplo, en la figura 1, podemos observar cómo se presenta la distribución binomial, exponiendo las características fundamentales de esta distribución. Así, como ejemplo interactivo, el alumno puede calcular, introduciendo los parámetros correspondientes, distintas probabilidades de sucesos correspondientes a dicha distribución. Para cada distribución, tanto discreta como continua, se presentan aplicaciones similares. A continuación, el profesor puede proponer ejemplos sencillos, de forma que el alumno pueda adaptarlos a la situación anterior.

Si observamos el ejemplo de la figura 1, cada alumno puede probar con distintos valores, y realizar la aplicación cuantas veces desee.

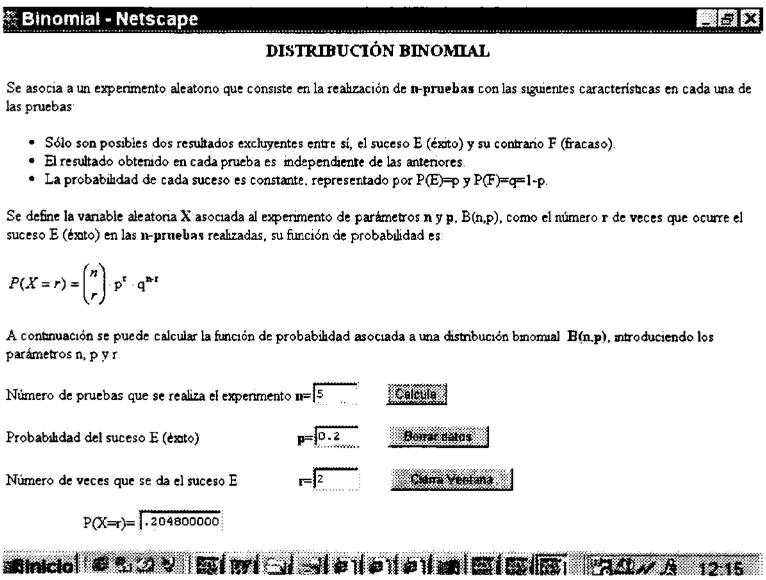


Figura 1. Script: Cálculo de probabilidades Distribución Binomial.

Cuando se han presentado las distribuciones estadísticas, el alumno puede ser capaz de resolver problemas globalizadores, de forma que usando distintas distribuciones pueda interpretar las distintas soluciones obtenidas. Este recurso es especialmente útil cuando queremos comparar los distintos resultados que se obtienen al aproximar unas distribuciones por otras. Sin duda, estas herramientas generales hipermedia permiten poner en juego la capacidad de cálculo del ordenador, la capacidad de interrelación de los distintos conceptos y la capacidad de síntesis a partir de diversas situaciones problemáticas.

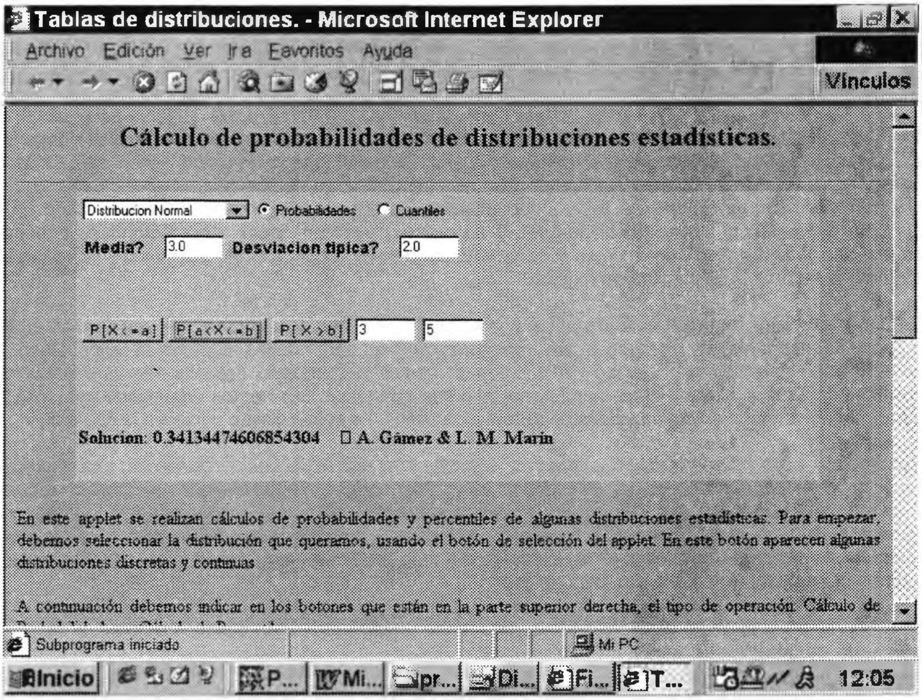


Figura 2. Applet: Tablas de distribuciones estadísticas.

Podemos ver, en la figura 2, una herramienta general que permite el cálculo de probabilidades y percentiles de distribuciones estadísticas tanto discretas como continuas. Hemos conseguido así convertir el ordenador en una potente herramienta a disposición de nuestros alumnos.

Esta herramienta, desarrollada con el lenguaje Java hace posible el cálculo de probabilidades de distribuciones estadísticas, el cálculo de percentiles, etc. Además permite comparar las distintas soluciones obtenidas con distribuciones con distintos parámetros. Así, en la figura 2, hemos obtenido en una distribución normal con media 3 y desviación típica 2, la probabilidad de que esta distribución se encuentre entre los valores 3 y 5. Es evidente que esta herramienta puede además ser útil para estudiar distintas propiedades de la distribución, como simetría, desplazamiento o cambio de escala, normalización, etc.

Uno de los tipos de autoevaluación más comúnmente utilizado es el de tipo test. Estas pruebas objetivas pueden ser de varios tipos, siendo las *pruebas de selección múltiple* las que utilizaremos. Pueden incluirse pequeños problemas que requieran pocos cálculos. A la hora de confeccionar este tipo de pruebas deberán tenerse presentes los siguientes requisitos:

- Todas las opciones han de parecer válidas.
- No es conveniente emplear proposiciones negativas.
- Habrá que tener presente la posibilidad de emplear distintos criterios de redondeo.
- No es conveniente incluir soluciones que numéricamente parezcan ser la correcta.

Son muchos los libros dedicados exclusivamente a proponer al lector cuestiones de este tipo. Presentan un inconveniente grave: cuando el lector aborda por segunda vez la resolución de las cuestiones puede encontrarse con que recuerde mecánicamente la respuesta correcta, aunque no sea capaz de establecer el proceso adecuado para llegar a dicha respuesta.

Esto se ve agravado por el hecho de que en un libro el número de posibles preguntas planteadas debe de ser forzosamente reducido.

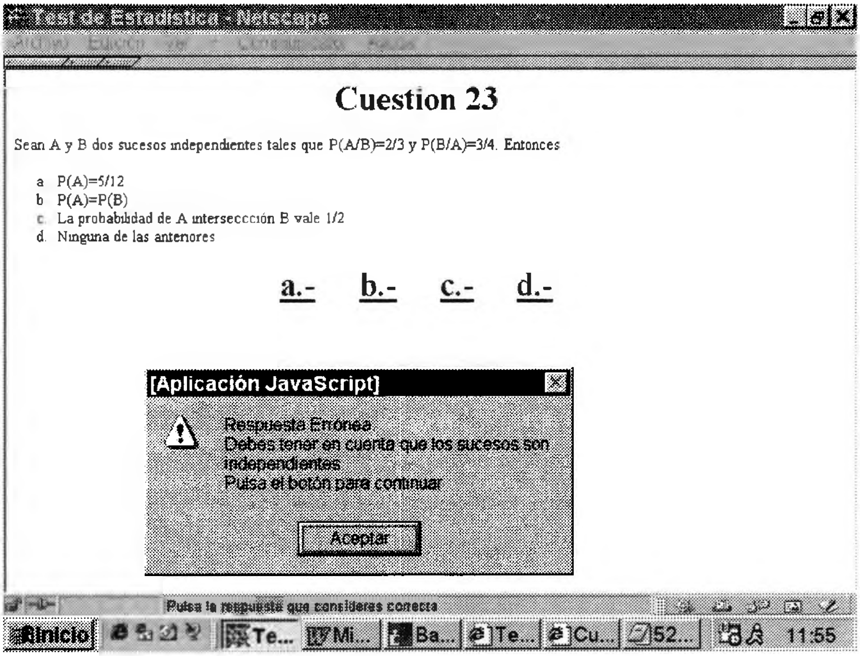


Figura 3. Sistema de autoevaluación mediante Scripts.

Existen también programas informáticos que realizan preguntas de este tipo. Presentan la ventaja de que las cuestiones se pueden ir generando al azar, de modo que sea más complicado el responder basándose simplemente en el recuerdo de un intento anterior. El número de posibles preguntas puede ampliarse considerablemente, con lo que incluso puede reducirse la probabilidad de que ya haya sido formulada anteriormente.

Además, en el caso de cuestiones de Estadística puede plantearse el repetir la misma pero con diferentes valores de una serie de parámetros, con lo que generando al azar los valores de estos parámetros se tendría un elevado número de posibles preguntas.

A lo largo de estos dos últimos años hemos desarrollado entornos hipermedia para la autoevaluación, cada uno de ellos tiene características propias, ventajas e inconvenientes que tras sucesivas etapas de diseño se han ido corrigiendo, y aún no son la versión definitiva. Hemos elaborado tres sistemas de autoevaluación a través de Internet aplicados a la enseñanza de la Estadística para alumnos universitarios de carreras técnicas, un ejemplo puede verse en la figura 3. Estos sistemas poseen las siguientes características generales:

- Posible adaptación a cualquier materia.
- Páginas escritas en **HTML**.
- Incorporación de funciones **JavaScript**.

3. CONCLUSIONES

Como comentábamos anteriormente, estos herramientas interactivas para la enseñanza del Cálculo de Probabilidades:

- Permiten al alumno conocer el progreso que va alcanzando.
- Al estar en soporte Internet, hace que sea más atractivo, dinámico, etc.
- Nuestra experiencia demuestra que los resultados obtenidos por los alumnos que han usado estas aplicaciones son claramente mejores que aquellos que sólo han utilizado el sistema tradicional.
    1. Las denominadas nuevas tecnologías constituyen un excelente recurso didáctico.

2. Es necesario situar las tecnologías como una herramienta y no como un fin.
3. Ayudar a otros a aprender tiene que ver con ofrecer:
   - Mejores canales de comunicación.
   - Mejores herramientas para la exposición.
   - Mejores estrategias para la investigación.
4. Las herramientas multimedia Internet deben incluirse en la oferta educativa actual.

REFERENCIAS

Estadística Práctica con Statgraphics. Rodríguez Huertas, R. et al. Servicio de Publicaciones Universidad de Cádiz. 1997

Enseñanza de la Estadística vía Internet. Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L. VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Jaén, 1998.

La Educación en Internet. Guía para su aplicación práctica en la Enseñanza. Peña Pérez, R.

Tutoriales multimedia para el aprendizaje de la Estadística. Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L. VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Jaén, 1998

Brna, P. & D. Dicheva. 1998. Guest Editorial: Meeting the challenge of new technologies. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**:81-82.

Issroff, K. & M. Eisenstadt. 1997. Evaluating a virtual summer school. *Journal of Computer Assisted Learning*, **13**:245-252.

Koper, E. J. R. 1998. A method and tool for the design of educational multimedia material. *Journal of Computer Assisted Learning*, **14**:19-30.

Trentin, G. 1996. Internet: does it really bring added value education? *International Journal of Educational Telecommunications*, **2**:97-106.

Internet como herramienta de apoyo a la docencia. Marín Trechera, L.M. y Gámez Mellado, A. VII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. Huelva, 1999.

Entornos hipermedia para autoevaluación en Estadística. Modelos de enseñanza en Internet, Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L.M. Congreso Nacional de Informática Educativa. Puertollano (C. Real). 1999.

Estadística Interactiva en la Red. Gámez Mellado, A. y Marín Trechera, L.M. IX Congreso sobre Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas "THALES". Cádiz, 2000.

ANALISIS ESTADISTICO BIDIMENSIONAL DESARROLLADO EN JAVA

DANIEL GONZÁLEZ ORTEGÓN · ANTONIO GÁMEZ MELLADO · LUIS M. MARÍN TRECHERA

Este artículo presenta un applet realizado en el lenguaje Java que permite el análisis conjunto de variables bidimensionales, tanto desde el punto de vista analítico como gráfico. Se presenta dentro de un proyecto más global denominado "Estadística Interactiva en la Red". Este proyecto constituye un interfaz de usuario que utiliza Java, JavaScript, DHTML, ... con la intención de incorporarlo a la red de redes.

Se ha elegido Java como lenguaje de programación por sus propiedades multiplataforma y su posibilidad de difusión a través de Internet, por lo que puede ser de gran interés para la enseñanza-aprendizaje a distancia.

Palabras clave: Java, Estadística, Interactivo, Educación a distancia, Internet.

INTERNET

Es un sistema de redes heterogéneas, todas conectadas entre sí que intercambian información textual o gráfica, es decir información audio-visual o multimedia para que el acceso y la comprensión a todo el mundo sea más fácil. Internet se concibe como un medio para acceder a una gran cantidad de recursos, fuentes de información donde el usuario desde cualquier punto, y con una gran comodidad y eficiencia pueda consultar de modo simple y consistente sin tener que preocuparse de dónde está la información almacenada ni en que formato.

Hay un término que cabe señalar: *Hipertexto.* Es un atributo referido a un documento que contiene enlaces para acceder a información adjunta del documento en cuestión o de otros documentos. Los enlaces son palabras claves que son expandidas para proporcionar información sobre el concepto señalado, de esta manera es más fácil estructurar y acceder a la información. Los documentos no sólo contienen texto, sino que pueden adjuntarse imágenes, sonidos, o animaciones y estos a la vez pueden servir de enlaces; así obtenemos '*documentos hipermedia*'.

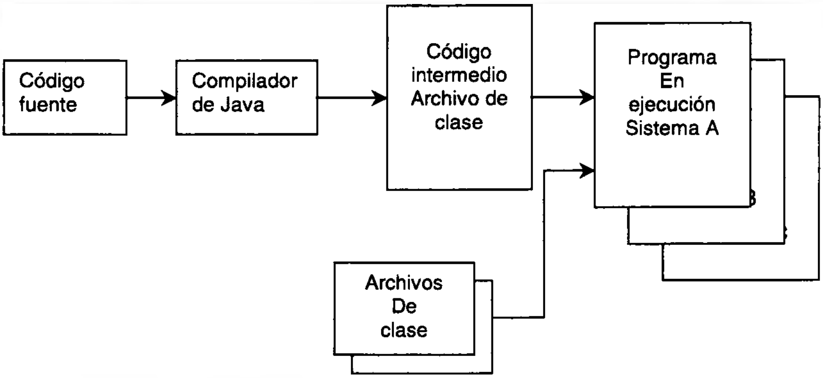
INTERNET COMO APOYO A LA DOCENCIA

Internet ofrece una gran cantidad de recursos educativos. El uso de estas nuevas tecnologías permite a los alumnos usarlas como una herramienta de apoyo para ampliar sus conocimientos de forma dinámica. Documentos hipertexto para realizar tutoriales, aplicaciones interactivas donde el sistema atiende las peticiones de los alumnos, son una manera clara de usar los servicios que ofrece Internet para la educación a distancia.

MARCO TEÓRICO

1.1. ¿POR QUÉ JAVA?

A la hora de implementar una aplicación, el desarrollador de software debe tener en cuenta una serie de requisitos técnicos, como el entorno de ejecución en el que la aplicación va a ser ejecutada, y como consecuencia unas llamadas específicas de bibliotecas asociadas al sistema. Java contiene sus propias bibliotecas llamadas paquetes que son independientes de la plataforma. El compilador de Java genera un código intermedio que puede ser interpretado en cualquier máquina con la ayuda de la *Máquina virtual de Java(JVM)* que es la encargada de generar el código ejecutable para cada sistema específico. Java además posee paquetes de comunicaciones de red para facilitar la escritura de aplicaciones atentas a Internet.



1.2. ANÁLISIS DE LA APLICACIÓN

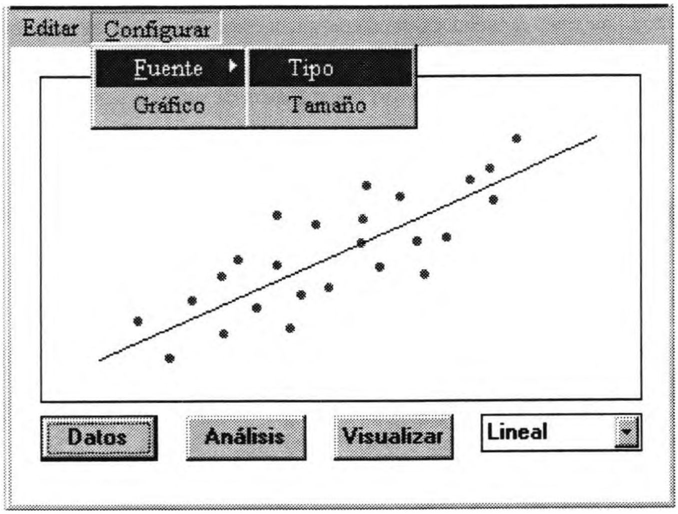
No se trata de analizar en profundidad las fases de análisis que conlleva la metodología concreta para realizar la aplicación. Este punto analiza, a un nivel de abstracción muy alto, lo que hace el programa, haciendo referencias teóricas a la estadística bidimensional.

En principio, la aplicación intenta familiarizar al alumno con el tipo de regresión que tiene que aplicar a partir de unos datos de muestreo. Para esto la aplicación es capaz de admitir pares de datos, bien manualmente o automáticamente, que son visualizados (nube de puntos). A partir de este momento el usuario selecciona el tipo de ajuste que cree adecuado a la nube de puntos, la aplicación tomará la petición dando como respuesta la visualización gráfica de la curva de mínimos cuadrados correspondiente o los resultados analíticos de los valores de entrada. El usuario a continuación y sin perder los datos de entrada puede optar por continuar su estudio estadístico seleccionando otro ajuste.

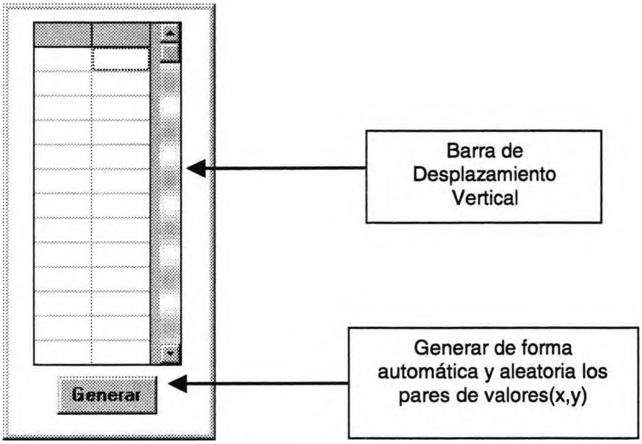
La aplicación permite cambiar los datos de entrada, en cualquier instante, añadiendo, modificando o eliminado pares de datos, reflejándose en la nube de puntos y en la curva de regresión que cambian de forma simultánea e interactiva.

1.3. DISEÑO DE LA INTERFAZ GRAFICA DE USUARIO (GUI)

Ventana Principal de la aplicación.



Entrada de Datos



1.4. IMPLEMENTACIÓN DE LA APLICACIÓN

La aplicación está compuesta de una ventana principal que presenta un menú de selección en la parte superior. El menú presenta funciones adicionales a la aplicación como la configuración gráfica de la nube de puntos y de la regresión, tipo de letra, tamaño de los resultados analíticos de los datos de entrada, etc.

La visualización gráfica de la nube de puntos y de la regresión aparecen juntas en un área o marco (frame) al que se le aplican propiedades gráficas para poder hacer las representaciones requeridas.

Por último, en la parte inferior aparecen unos botones y un cuadro de selección para aplicar la regresión que el usuario desee.

Funcionalidad de los botones:

- Botón Datos: Al inicio de la aplicación, es el único botón que está activado. La función que tiene es la inserción de los pares (x,y) de valores. Al pulsar el botón aparece una ventana secundaria, que presenta una tabla con scroll vertical para introducir los valores manualmente, en caso de que el usuario desee la inserción automática y aleatoria de valores puede pulsar el botón 'Generar' que presenta esta ventana.
- Botón Análisis: Activado cuando hay valores de entrada. Su funcionalidad es presentar el estudio analítico en un cuadro de texto.
- Botón Visualizar: Activado cuando hay valores de entrada. Su funcionalidad es presentar de forma gráfica, la nube de puntos y la regresión seleccionada en el cuadro de selección que presenta la ventana principal.

CONCLUSIONES

El uso de las nuevas tecnologías aplicado al ámbito educativo, proporciona al estudiante un método innovador transformando el aprendizaje en un proceso interactivo y a veces recreativo, agilizando la mente de una manera más eficaz y rápida.
Por la metodología utilizada, este recurso educativo puede ser útil tanto para profesores como para alumnos, ya que se puede utilizar en las prácticas de laboratorio de una asignatura de Estadística, y puede también servir como complemento de formación virtual y a distancia para los alumnos.

REFERENCIAS

Mike Morgan,1999. Descubre Java 1.2. Editorial Prentice Hall.
Harold J. Larson. Introducción a la teoría de probabilidad e Inferencia Estadística. Editorial Limusa
Luis Ruiz-Maya. Problemas de Estadística (2 Edición). Editorial AC.
Apuntes del Departamento de Estadística de la Universidad de Cádiz.
"*Estadística Interactiva en la Red.*", IX Congreso SAEM THALES.

GRUPO 10
EXPERIENCIAS EN EL AULA

LOS NÚMEROS ENCIERRAN SORPRESAS

JUAN ANTONIO HANS MARTÍN

Al principio fue la palabra, pero después debió ser el número.

En al antigüedad el hombre asociaba significados simbólicos o mágicos a los números. Para los pitagóricos, cuyo lema era "Todo es número", el cosmos estaba regido por los números, y por ello se dedicaron a estudiar sus propiedades y relaciones con la Geometría y la Música.

A lo largo de la historia los matemáticos, una veces por necesidad y otras por ejercicio intelectual, han trabajado y clasificado los números: pares, impares, primos, compuestos, finitos, infinitos, racionales, irracionales, positivos, negativos, cardinales, ordinales, naturales, enteros, decimales, fraccionarios, reales, imaginarios, complejos, capicúas, figurados, primos gemelos, primos gemelos capicúas, perfectos, amigables, sociables, especulares...

En la historia de las Matemáticas y en las biografías de los matemáticos encontramos propiedades, igualdades y relaciones curiosas entre los números y las operaciones, que garantizan la sorpresa en nuestros alumnos. Si las presentamos adecuadamente estas curiosidades numéricas pueden ser:

- Ricos elementos de motivación.
- Útiles para la introducción de cualquier tema del bloque numérico.
- Actividades que complementen o refuercen el bloque numérico del currículum de Secundaria o Primaria.

Veamos algunas de ellas:

LA TABLA DEL 142.857

El estudio de las tablas de multiplicar (algo realmente tedioso y poco atractivo) se puede aderezar para su "digestión" con un poco de "magia". Observa los resultados de esta tabla de multiplicar.

A los números tales como el 142.857 se les conocen como "Números Cíclicos". ¿Por qué?

142.857 x 1 = **142.857**
142.857 x 2 = **285.714**
142.857 x 3 = **428.571**
142.857 x 4 = **571.428**
142.857 x 5 = **714.285**
142.857 x 6 = **857.142**
142.857 x 7 = 999.999
142.857 x 8 = 1.142.856
142.857 x 9 = 1.285.713

Otra tabla de multiplicar, también realmente sorprendente, es la tabla del 91. Constrúyela y observa los resultados.

SUMAS Y PRODUCTOS QUE DAN EL MISMO RESULTADO

¿Hemos pedido alguna vez a nuestros alumnos que busquen dos números que sumados y multiplicados den el mismo resultado?

Si lo hacemos, al momento responde la mayoría: "*dos más dos y dos por dos*", a algunos no se les escapa y dicen: "*cero más cero y cero por cero*"; pero pronto se produce un bloqueo al seguir buscando soluciones enteras.

Si a la pregunta le damos un planteamiento algebraico la respuesta nos conduce a pares de la forma (n, $\frac{n}{n-1}$).

$$X + Y = X \cdot Y$$

Despejando Y, obtenemos:

$$Y = \frac{X}{X-1}$$

Si damos valores a "n" en la siguiente igualdad:

$$n + \frac{n}{n-1} = n \cdot \frac{n}{n-1}$$

Obtenemos:

$$\begin{gathered}
0+0=0\cdot 0\\
2+2=4=2\cdot 2\\
3+1'5=4'5=3\cdot 1'5\\
4+1'33...=4'33...=4\cdot 1'33...\\
5+1'25=6'25=5\cdot 1'25\\
6+1'2=7'2=6\cdot 1'2\\
7+1'166...=8'166...=7\cdot 1'166...\\
8+1'142857...=9'142857...=8\cdot 1'142857...\\
9+1'125=10'125=9\cdot 1'125\\
10+1'11...=11'11...=10\cdot 1'11...\\
...
\end{gathered}$$

¡SORPRESA!, los resultados de la suma y el producto de los mismos números son iguales y entre ellos hay números enteros, decimales exactos, decimales infinitos periódicos puros y periódicos mixtos.

LOS CUADRADOS PERMUTADOS

La permutación es cambiar de lugar varios elementos entre sí. Al elevar un número de dos cifras al cuadrado, si permutamos las cifras de la base ¿Hay algún caso en que las cifras del resultado también se permuten?

En esta situación hay dos ejemplos:

$$\mathbf{12^2=144 \rightarrow 21^2=441}$$
$$\mathbf{13^2=169 \rightarrow 31^2=961}$$

Queda abierta la puerta a la investigación y al cálculo: Si la base tiene tres cifras, ¿cuántos números hay?¿Y si la base tiene cuatro cifras?

LOS NÚMEROS CONGRUO-CONGRUENTES

La biografía de Leonardo de Pisa (1170-1250), también conocido como Fibonacci, escrita por Ettore Picutti, cuenta que en su libro "*De quadratis numeris*" se encuentra el siguiente problema: "Hállame un número cuadrado que, sustraída de él cierta cantidad, siga siendo cuadrado, y añadiéndosele la misma cantidad aún sea cuadrado".

Este problema se encuentra también en el libro de Luca Pacioli (1445-1514) "*Summa*", donde al número cuadrado le llama "congruo" y al número que hay que restar o sumar da el nombre de "congruente".

El problema se puede traducir algebraicamente en una doble ecuación:

$$\boxed{Y^2 - C = X^2 \qquad Y^2 + C = Z^2}$$

El encontrar estos números es una búsqueda por tanteos. "Hoc opus, hic labor est.", diría Fibonacci.

Luca Pacioli da unas igualdades que permiten encontrar números congruo-congruentes:

Siendo (a, b.) números enteros.

$Y = a^2 + b^2 \qquad C = 4ab(b-a)(b+a)$

Dando valores a (a, b) y aplicándolos a las igualdades de Pacioli, podemos completar el siguiente cuadro y obtendremos parejas de números congruo-congruentes:

a	b	Y	C	Y^2	$Y^2 - C = X^2$	X^2	X	$Y^2 + C = Z^2$	Z^2	Z
1	2	5	**24**	**25**	25 –24 = 1	1	1	25 + 24 = 49	49	7
1	3	10	**100**	**96**	100 – 96 = 4	4	2	100 + 96 = 196	196	13

LOS NÚMEROS NARCISISTAS

Narcisismo es la excesiva complacencia en la consideración de las propias facultades u obras. Se consideran a aquellos números que utilizando los dígitos que lo forman y las operaciones necesarias se obtienen su propio valor.
Conocemos estos:

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$
$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$
$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$
$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$
$$1.634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$
$$8.208 = 8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4$$
$$9.474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$$
$$4.150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$$
$$4.151 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$$
$$54.748 = 5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 4^5$$
$$92.727 = 9^5 + 2^5 + 7^5 + 2^5 + 7^5$$
$$93.084 = 9^5 + 3^5 + 0^5 + 8^5 + 4^5$$
$$194.979 = 1^5 + 9^5 + 4^5 + 9^5 + 7^5 + 9^5$$

El primer número (153) lo podemos encontrar utilizado significativamente en el Evangelio según San Juan (capítulo 21, versículo 11) para indicar los peces que contenía la red después de arrojarla al mar para pescar: "*Simón Pedro subió a la barca, sacó a tierra la red, llena de ciento cincuenta y tres grandes peces; y con ser tantos, no se rompió la red*".

¿Porqué la utilización de este número y no de otro?

PRODUCTO Y SIMETRÍA

Simetría es la regularidad en la disposición de las partes o puntos de un cuerpo o figura, de modo que posea un centro, un eje o un plano de simetría.

Teniendo en cuenta la definición y utilizando el signo igual como eje de simetría, ¿existen productos de números cuyos dígitos estén en disposición simétrica respecto al signo igual y sea cierta la igualdad?

Sabemos de estos:

$$ab \cdot cd = dc \cdot ba$$
$$12 \cdot 42 = 24 \cdot 21$$
$$12 \cdot 63 = 36 \cdot 21$$
$$12 \cdot 84 = 48 \cdot 21$$
$$13 \cdot 93 = 39 \cdot 31$$
$$23 \cdot 64 = 46 \cdot 32$$
$$23 \cdot 96 = 69 \cdot 32$$
$$24 \cdot 84 = 48 \cdot 42$$
$$36 \cdot 84 = 48 \cdot 63$$
$$46 \cdot 96 = 69 \cdot 64$$

PRODUCTOS CURIOSOS

Al trabajar múltiplos y divisores podemos proponer las siguientes investigaciones:

¿ Cuáles han de ser los factores de los anteriores productos para que los resultados sean siempre números formados por unos?

$$a \cdot b = 111$$
$$c \cdot d = 1111$$
$$e \cdot f = 11111$$
$$g \cdot h = 111111$$
$$i \cdot j = 1111111$$
$$k \cdot l = 11111111$$
$$m \cdot n = 111111111$$

LOS DÍGITOS SIGNIFICATIVOS, EL JUEGO QUE DAN...

Los diez dígitos y las operaciones fundamentales pueden ser un excelente recurso para trabajar y repasar de forma llamativa (en la forma y su presentación está la sorpresa y el atractivo para el alumnado de Primaria y Secundaria) el bloque de la Aritmética o Números. Para terminar esta comunicación presentamos actividades en la que estamos trabajando con los diez dígitos, buscando todas las soluciones posibles.

Nueve dígitos. Utilizando los dígitos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), ¿ para que valores se cumplen estas igualdades?

$$abc + def = ghi$$
$$ab + cd + ef = ghi$$
$$abcd \cdot e = fghi$$
$$abc \cdot de = fghi$$
$$ab \cdot c = de \cdot f = ghi$$
$$ab \cdot c = de \cdot f = gh \cdot i$$

Todos presentes. Con los diez dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) ¿ cuándo se verifican las igualdades?

$$\boxed{\begin{array}{c} abcd \cdot e = fghi \cdot j \\ abc \cdot de = fgh \cdot ij \\ abc \cdot de = fghij \end{array}}$$

Si las actividades que proponemos te parecen interesantes, participa en la experiencia, llevándolas a clase y si no te importa haznos llegar las soluciones que encuentres, para ello añadimos nuestros correos electrónicos:

Juan Antonio Hans Martín juanhans@teleline.es
José Muñoz Santonja pepemunoz1@teleline.es
Antonio Fernández-Aliseda Redondo aliseda2@teleline.es

BIBLIOGRAFIA

HOLT, Michael. (1988): *Matemáticas recreativas 2*. Ed. Martínez Roca.
MADACHY, J. S. (1994): *Las esferas doradas*. Zugarto ediciones.
VV.AA. (1995): *Monográfico sobre grandes matemáticos*. Temas 1. Investigación y ciencia. Prensa científica s.à.

TRABAJO COOPERATIVO EN CLASE DE MATEMÁTICAS

LUIS BERENGUER · BELÉN COBO · PABLO FLORES · ANTONIO MORENO · JUANA NAVAS · MANUEL TOQUERO

> *"Plantear la cooperación como práctica pedagógica en una situación como la actual, de fuerte individualismo, es un acto valeroso y necesario para recuperar un valor formativo que la sociedad y la escuela han arrinconado u olvidado" (Mario Lodi, 1997).*

En el Decreto de Educación Secundaria Obligatoria de la Junta de Andalucía se presenta el aprendizaje como un proceso social y personal que cada individuo construye al relacionarse, activamente, con las personas y la cultura en que vive. Por otro lado, establece entre sus objetivos generales, el conseguir que los alumnos se relacionen con otras personas, se integren de forma participativa en actividades de grupo, y sean capaces de obtener y seleccionar información, tratarla de forma autónoma y crítica y transmitirla a los demás de forma organizada e inteligible. En el área de Matemáticas, en particular, se insiste en que la enseñanza debe ayudar a que los alumnos reflexionen sobre las propias estrategias utilizadas en las actividades matemáticas. El grupo permite la confrontación de puntos de vista y opiniones; ayuda a relativizar la perspectiva propia y conduce al logro de una objetividad creciente.

En esta comunicación partimos de que se puede contribuir a desarrollar los objetivos anteriores proponiendo a los estudiantes trabajos de tipo cooperativo, puesto que , como defiende Rué (1998), *para que se pueda desarrollar un proceso educativo de carácter positivo en las personas, es necesario que éstas puedan activar y conducir situaciones comunicativas entre iguales.*

Se han dado diversas definiciones de trabajo cooperativo y, aunque todas aportan elementos a tener en cuenta, nosotros partimos de la que proponen Artzt y Newman (1990): *Una actividad que involucra a un pequeño grupo de estudiantes que trabajan juntos como un equipo para resolver un problema, completar una tarea, o realizar un objetivo común.*

La cooperación hace una serie de aportaciones a la educación (Gavilán, 1997):

a. Como estrategia de desarrollo cognitivo, favoreciendo procesos intrapersonales de asimilación, a partir de situaciones de coordinación y acciones que requieren la comunicación entre las personas que participan en el trabajo.
b. Como metodología para la interacción. Cooperar significa tener algo que compartir y obliga a interactuar y dialogar. No es el hecho de dar o recibir ayuda lo que mejora el aprendizaje, sino la necesidad consciente de comunicar las ideas propias y la de esforzarse en comprender las demás e integrarlas.
c. Como organización del trabajo que favorece hábitos metacognitivos (conciencia de si mismo y conocimientos propios) y de autoevaluación.
d. Como estrategia de socialización, favoreciendo el ejercicio de hábitos sociales y posibilitando la creación de conciencia social (integración, autonomía de juicio moral y ético).

Como rasgos básicos de las situaciones de cooperación, Jonhson y Jonhson (1991), proponen los siguientes:

- Interdependencia positiva, puesto que los alumnos se perciben como necesarios.
- Favorecimiento de la interdependencia cara a cara, al tener que ayudarse en su esfuerzo.
- Responsabilización individual tanto del propio trabajo como de sus aportaciones al grupo.
- Habilidades de intercambio interpersonal y en pequeño grupo. Los miembros tienen que practicar habilidades de relación social.
- Conciencia del propio funcionamiento como grupo.

La eficacia del aprendizaje cooperativo depende de la calidad de la interacción entre los miembros del grupo, y ésta no se produce de manera espontánea. Para que un grupo de estudiantes realice un trabajo cooperativo no basta con que se sienten juntos y traten de realizar la misma tarea (César, 1998). Es necesario que compartan objetivos, estrategias, conjeturas, en definitiva, que el trabajo sea una suma del esfuerzo de todos los componentes. Sin embargo, la experiencia muestra que esto no siempre es así, muchas veces lo que se obtienen son resultados individuales aportados por las personas que integran el grupo.

En este sentido, Rué (1998), propone una serie de principios para desarrollar un trabajo cooperativo:

- Asignarle un uso funcional.
- Familiarizarse con este recurso a través de la práctica.
- Desarrollar tareas ajustadas a las posibilidades de control y regulación de alumnos y profesores.
- Ajustarse a condiciones de usuarios, alumnos y profesores.
- Ajustarse a las condiciones materiales.

Para favorecer la interdependencia positiva entre los miembros de un grupo, se pueden utilizar ciertas estrategias. Johnson (1991) propone asignar a los estudiantes roles específicos que ayudarán a implicarse en la actividad y evitarán que el trabajo lo realice una sola persona. Por ejemplo, se puede nombrar a una persona encargada de asignar tareas, moderar las discusiones y ayudar a mantener el grupo en funcionamiento, otra encargada de resumir las discusiones y las soluciones al problema, alguien encargado de sugerir al grupo otros métodos, de explorar otras maneras de resolver un problema, de enseñar al grupo lo que se puede aprender de los errores cometidos, etc.

Con el fin de potenciar la práctica real de una forma de trabajo que consideramos con un alto valor formativo, presentamos una serie de actividades de resolución de problemas, organizadas de forma que la colaboración entre las personas que forman el grupo resulte imprescindible para abordarlas. Hemos partido de un problema, presentado en la forma tradicional, y hemos ido transformándolo y completándolo desde la perspectiva del trabajo cooperativo.

El enunciado original del problema era el siguiente:

> *La Cooperativa de Agricultores LA TOMATINA ha vendido, durante el pasado mes de Marzo, a un país de la Comunidad Europea una partida de patatas, envasadas en bolsas de 4 kilos, al precio de 1 Euro cada bolsa. En total la Cooperativa ha recibido un importe de 15.000 Euros.*
>
> *¿De cuántos kilos de patatas se componía el envío?*
>
> *¿Cuál ha sido el precio de venta, expresado en pesetas, de cada kilo de patatas? (Debes recordar que 6 Euros equivalen a 1.000 Pesetas)*
>
> *Esa misma Cooperativa también vendió una partida de aguacates, por la que recibió un importe de 12.600 Euros. Esa partida estaba compuesta por 14.000 kilos, envasados en cajas de 2 kilos. ¿A cómo vendió la cooperativa cada caja?*
>
> *En este país los productos se venden en el mercado al doble de lo que se han pagado a los españoles. Suponiendo que en ese país un ciudadano compra en un supermercado 2 bolsas de patatas y 1 caja de aguacates, y entrega para pagar un billete de 10 Euros, introduce en un sobre el cambio que le debe devolver el empleado del supermercado.*

El problema propuesto queda como sigue:

La Cooperativa Agrícola LA TOMATINA cultiva y vende alguno de los frutos tropicales que se producen en la Costa de Granada.

Al final del mes de Marzo se reúnen el TESORERO, el ENCARGADO DE NEGOCIOS y el ALMACENISTA de la Tomatina, para hacer balance de lo que han vendido en el año 2000 hasta ese momento.

El **TESORERO** de la Cooperativa es el que se ocupa de las cuentas, tiene que saber lo que se gasta y lo que se recibe (ingresos). Se ocupa de la cuenta bancaria de la cooperativa.

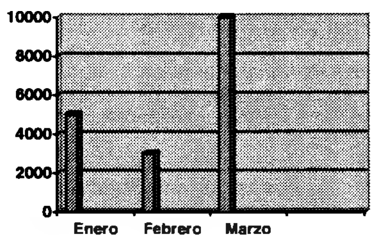
El **ENCARGADO DE NEGOCIOS** es el que realiza las ventas y compras. Sabe cuanto se vende, el precio de cada producto, y los encargos que se han hecho. Tiene que ofrecer los productos a otros para que los compren.

El **ALMACENISTA** es el responsable de la fruta, sabe cómo se almacena, cómo se envasa, qué hay en el almacén, etc. Lleva el registro de lo que entra y sale en el almacén.

Cada uno de vosotros va a ser uno de estos tres personajes, así que repartir los papeles y que cada uno elija el sobre que le corresponda. En estos sobres encontraréis las informaciones que tiene cada personaje. Poned en común estas informaciones y, trabajando en equipo, responded a las cuestiones y realizad las tareas que se os piden en la hoja siguiente.

CUESTIONES

1) ¿Cuántos Kilos de **mangos** se han vendido en Bélgica?
2) ¿Cuál es el precio en pesetas del kilo de aguacates?
3) ¿A qué precio vendió la Cooperativa cada caja de **aguacates**?
4) Obtener todas las bolsas diferentes de tres frutos variados que se hacen en la cooperativa
5) La siguiente gráfica muestra los kilos de **mangos** que se han vendido en los tres meses del año 2000.



Rellenar la siguiente tabla con estos datos

	Enero	Febrero	Marzo	Total
Número Kilos				
Ganancia				

6) M. Poirot, ciudadano belga compra en el supermercado de su barrio 2 bolsas de **mangos** y una caja de **aguacates**. Entrega un billete de 10 Euros. Introduce en el sobre del Tesorero el cambio que le da el empleado del supermercado a M. Piorot.

Contenido de los sobres:
TESORERO

- 6 Euros = 1000 pesetas
- La venta de **aguacates** a Bélgica le ha producido a la Cooperativa 12.600 Euros
- Por la venta de **bananas** a Francia se han ingresado 12.660 Euros
- Se han recibido 15.000 Euros por la venta de **mangos** a Bélgica

ENCARGADO DE NEGOCIOS

- Rusia ha pedido 3000 kilos de **kiwis**
- Los **mangos** se venden a 1 Euro la bolsa
- En Bélgica venden la fruta que compran a la Cooperativa al doble de lo que les ha costado
- Se han vendido 14.000 kilos de **aguacates** a Bélgica

ALMACENISTA

- Los **mangos** se venden en bolsas de 4 kilos
- Las **bananas** se almacenan en piñas de 12 kilos
- Los **aguacates** se envasan en cajas de 2 kilos
- En la Cooperativa se trabaja con 5 frutas: Aguacates, Bananas, Chirimoyos, Kiwis y Mangos. Se preparan bolsas de frutas variadas en las que se introducen tres tipos distintos.

(Además, cada uno de los sobres contiene 2 cartulinas representando las frutas y un juego de billetes de Euros)

Al presentar el problema a partir de tres personajes, con responsabilidades diferentes y pedirles a los miembros del grupo que asuman cada uno un rol, se fuerza a la interdependencia, puesto que los tres son necesarios para abordar el problema. Por otro lado, cada uno de los personajes recibe la información relacionada con su tarea, por lo que se deben responsabilizar con su propio trabajo en beneficio del grupo. Esta situación favorece la interdependencia cara a cara, obliga a ejercitar intercambios de información y propicia, por tanto, el desarrollo de habilidades sociales, también obliga a organizar la información y presentarla de forma clara, así como a escuchar a los demás miembros del grupo. En definitiva, como se puede observar, la transformación del problema inicial ha dado lugar a una propuesta de trabajo que presenta los rasgos básicos de las situaciones de cooperación citados arriba, así como los principios para desarrollar el trabajo cooperativo.

Como conclusión, defendemos que, en una sociedad cada vez más plural:

- Es necesario educar en cooperación para que los alumnos acepten la diversidad cultural.
- Es necesario ejercitar la cooperación en clase para que se contemple su potencial educativo.
- Es necesario formar profesores en hábitos de cooperación para que la practiquen en clase y en su trabajo profesional (equipos de profesores diseñando unidades didácticas y proyectos curriculares).

BIBLIOGRAFÍA:

Artzt, A. & Newman, C. (1990) How to use cooperative learning in the mathematics class. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

César, M. (1998) ¿Y si aprendo contigo? Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas. En Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas nº 16, pp. 11-23. Grao.

Decreto 106/1992 (9 junio) de Educación Secundaria Obligatoria. Junta de Andalucía.

Gavilán, P. (1997). El aprendizaje cooperativo: desde las matemáticas también es posible educar en valores. *UNO 13*, 81-94.

Jonhson, D.W. & Jonhson, R.T. (1991). *Joining together.* Boston: Allyn y Bacon.

Ley Orgánica 1/1.990 de 3 de Octubre de Ordenación General del Sistema Educativo. Preámbulo. B.O.E nº 238.

Lodi, M. (1997). Aprender a colaborar. En Campiglio, A. Y Rizzi, R. (Eds.). *Cooperar en clase. Ideas e instrumentos para trabajar en el aula.* Madrid, Publicaciones del MCEP.

Rué, J. (1998). El aula: un espacio para la cooperación. En Mir, C. (Coord.). *Cooperar en la escuela. La responsabilidad de educar para la democracia.* Barcelona, Grao.

TRANSFERENCIA DE LOS CONTENIDOS MATEMÁTICOS A LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS

MANUEL HUERTOS RODRÍGUEZ

Desde hace tiempo trabajo en mi aula con recursos informáticos, y sobre todo con DERIVE, siempre observaba que en el alumnado esto producía una serie de motivaciones y de factores positivos, que incidían en su rendimiento. Pero de esto que yo observaba o intuía, quería cerciorarme de una forma más cualitativa y científica.

Por tanto en este trabajo lo que expongo es una investigación realizada con alumnado de primero de Bachillerato (grupo control y experimental) sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de contenidos matemáticos (conceptos, procedimientos y actitudes) utilizando como recurso didáctico un programa informático "DERIVE para Windows". Utilizando este recurso una hora al final de cada unidad y mediante una metodología adecuada el proceso de enseñanza y aprendizaje del área mejora cualitativa y cuantitativamente.

1. FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA DE LA EXPERIENCIA:

Esta experiencia es el estudio de un caso concreto. En educación el estudio de casos es considerado además de como una estrategia metodológica de investigación, como una metodología apropiada para la formación o como instrumento en el diagnóstico y la orientación. Pérez Serrano (1994) señala que este método cualitativo puede verse y contemplarse desde diferentes perspectivas: como modalidad de investigación educativa, como medio de formación de profesionales o estudiantes y como instrumento de conocimiento de un sujeto o realidad única con finalidad de diagnóstico, terapia y orientación.
Su importancia en la formación del profesorado ha sido destacada por numerosos autores, Clark (1986), Marcelo (1992), Kilbourn (1988) señala cómo puede ayudar en el logro de profesores más reflexivos, "*la lectura de historias sobre la práctica pueden proporcionar experiencia ... pueden ser un medio poderoso para ayudar a los profesores a reflexionar sobre la acción, con el objetivo de mejorar la reflexión en la acción*".
El objeto de esta técnica, no es comprobar la eficacia de una teoría, es enseñar a analizar situaciones concretas y aportar vías de solución a los problemas, teniendo como soporte la experiencia personal, los conocimientos científicos necesarios, la comprensión de la situación que describe el caso y un cierto sentido común que aporte operatividad a las conclusiones
Como en toda investigación educativa se planifica, se recogen datos, se analiza e interpreta la información y se elabora el informe, con la peculiaridad de que el propósito de la investigación es el estudio intensivo y profundo del caso.
Las etapas que he seguido han sido las siguientes:

- Etapa inicial: exploración y conocimiento. Se analizan sujetos (grupo control y experimental), lugares y acontecimientos que van a ser objeto de estudio(clase de informática y de matemáticas), así como las cuestiones fundamentales (actitud ante la materia, contenidos conceptuales, procedimentales, evaluación del proceso) y los problemas implicados en el mismo, estrategias a utilizar y duración del estudio.
- Segunda etapa: Obtención de datos a través de diferentes estrategias e instrumentos (Análisis indirectos, diario, cuestionarios, etc.).
- Tercera etapa: se realiza el análisis e interpretación de los datos obtenidos, para terminar con la elaboración del informe. A lo largo de la investigación se incorporan nuevas ideas o planteamientos que van surgiendo, lo que hace posible modificar o reestructurar las anteriores (Ruiz Carrascosa: 1995)

2.1. ETAPA INICIAL: EXPLORACIÓN Y CONOCIMIENTO

En primer lugar ha sido necesario decidir con qué grupo de alumnos y alumnas realizaba la experiencia. Elegí un curso de Primero de Bachillerato (1ºG) ya que podía tener otro grupo de control al que le impartía clase (1ºE).

RUIZ CARRASCOSA, J. (1995): Es estudio de casos. Una estrategia para el análisis del uso de las nuevas tecnologías de la información (NTI) en Educación. *En LÓPEZ-BARAJAS Y J.M. MONTOYA (Eds.):* El estudio de casos . Fundamentos y Metodología. *Madrid. UNED*

Con el grupo control y el grupo experimental se trabajan el proceso de enseñanza aprendizaje de forma normalizada. Pero en el grupo experimental, cuando se termina la unidad, se afianzan los contenidos conceptuales de la unidad a través de un recurso didáctico, un programa informático: EL DERIVE.

2.2. SEGUNDA ETAPA: OBTENCIÓN DE DATOS

Se han obtenido datos a través de diferentes estrategias e instrumentos: Diario del profesor, cuestionarios, exámenes, entrevistas, análisis indirectos con viñetas, observación y análisis de los trabajos.
En función del instrumento utilizado se analiza la practica docente, el proceso o el aprendizaje de los alumnos y alumnas de los distintos contenidos conceptuales, procedimentales o actitudinales
El diario del profesor se ha utilizado como instrumento de evaluación del profesor y del proceso, Los cuestionarios y las viñetas para evaluar la practica docente, la actitud del alumnado, los exámenes para evaluar los contenidos conceptuales. Veamos algunos ejemplos de los instrumentos

Diario del profesor:

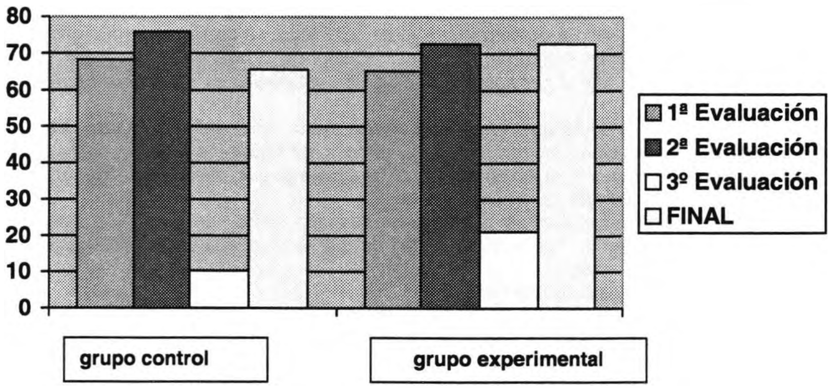
En el diario se han ido recogiendo las preguntas y dudas que el alumnado realizaba más frecuentes. En segundo lugar, se anotó el comportamiento, su actitud en clase y las sensaciones que el profesor tenía de cada día y de cada sesión, de lo ocurrido en clase de su percepción de la situación.

Cuestionarios:

Las clases de informática m*e "parecen muy atractivas puesto que el Derive for Windows me sirve para completar todo el conocimiento que he adquirido de las derivadas en las anteriores clases. Además, es un método muy rápido y eficaz aunque para manejarlo es imprescindible conocer muy bien la teoría, el Derive es únicamente una aplicación a ésta. Estoy aprendiendo, es muy interesante"*

Exámenes:

En la gráfica podemos observar cómo cada grupo evolucionó en cada trimestre. Como podemos ver el grupo experimental con un 72,7 % tiene un tanto por ciento mayor al final del curso que el grupo control 65,5 %. La experiencia se empezó a desarrollar en marzo, podríamos decir que, al ser los dos grupos prácticamente iguales, el tratamiento realizado en el grupo experimental ayudó en el aspecto conceptual del área.



Viñetas:

- No comprenden lo que se explica y les da vergüenza preguntar cuando no se enteran. *"¿ Y si lo que pregunto es un pego? Me da corte preguntar "*. Tienen dudas pero esperan que los demás las pregunten para no intervenir (timidez) *"Anda esa es la misma duda que yo tengo, ahora me voy a enterar. De donde procederán esos números... que lío..."* El que pregunta puede parecer que lo hace para que lo tenga en cuenta de una manera favorable (*pelotas*)
- Obsesión por la calificación.*" Nos bajará la nota.. podría decir las notas"*
- Por la mañana les cuesta centrar la atención en el razonamiento matemático, sobre todo cuando son razonamientos muy largos: *"es muy temprano y tengo sueño,... es muy largo y me distraigo..."*
- El realizar más ejercicios sobre el tema les aclara y se enteran
- Ven necesaria la ayuda del profesor y valorar su actitud: *" Si no fuera por él ¿tu crees que nos enteraríamos por nosotros solos? ¿ Cuántas horas trabajará en su casa? ¡¡ Madre mía la cantidad de ejercicios!.*
- Atención: *"Calla que nos está mirando" ¿ Sabes que hicimos ayer? Esta noche me voy con mis amigos. Ojalá ganemos esta tarde ¿Qué haces esta tarde? Tengo unas ganas de comerme un*

*bocadillo. estoy deseando que llegue el recreo para comerme un bocadillo de...*Por falta de sueño, alimentación o motivación

- *Motivación: Yo me entero pero me da igual, no me interesa porque no sirve de nada. Si hubiera estudiado en mi casa ayer ahora me enteraría de lo que el profesor está explicando. Como me lo pregunte, me pone un buen cate. En cuanto llegue a casa me pongo a estudiarlo ..Seguro que en el examen saco muy buena nota, porque me entero muy bien Cuando llegue a casa me pongo a estudiar una hora y no tendré ninguna duda... Me encantan las matemáticas... Podemos repetir un ejercicio de ayer que lo intenté y no me sale...*
- Ven necesaria la ayuda del profesor y valorar su actitud: *va un poco rápido pero se preocupa más que otros profesores.. Qué espíritu de enseñanza y qué energía, con este profesor da gusto...*
- Ambiente de clase: *Cállate, que no me voy a enterar de nada*
- Relación con la clase de informática: *las clases de derive son muy interesantes y educativas.. Con el derive terminaré de aprender la lección...*

2.3. TERCERA ETAPA: ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN E INFORME.

Uno de los puntos importantes en esta investigación acción ha sido el proceso de evaluación llevado a cabo. Se posibilita la autoevaluación y facilitan formas de aprendizaje y de enseñanza más reflexivas, criticas y participativas. Se evalúa al mismo tiempo el proceso de enseñanza y el de aprendizaje.

El utilizar este recurso, solo una hora al final de la unidad, ha tenido una serie de ventajas en el grupo experimental, no sólo desde el punto de vista conceptual, sino procedimental y, sobre todo, actitudinal para el área de Matemáticas.

Al utilizar este recurso informático se ayudó en primer lugar a analizar situaciones concretas y aportar vías de solución a los problemas, teniendo como soporte la experiencia personal, los conocimientos científicos necesarios, la comprensión de la situación que describe el caso y un cierto sentido común que aporte operatividad a las conclusiones; en segundo lugar motivar al alumnado y como decía Berral J. y Serrano I. mejorar el ambiente de la clase "*el ordenador mejora tanto la comprensión de esta asignatura como el ambiente de clase y el interés de nuestros alumnos y alumnas por esta materia".;* en tercer lugar es un recurso que ayuda al profesorado a la exposición de conceptos y a cambiar su metodología, reforzando los conocimientos y dando la posibilidad de usar un procedimiento especifico de software.

3. BIBLIOGRAFÍA

BERRAL J y SERRANO I. (1995): *EL ordenador, una herramienta multiuso.* Las Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática " Thales".

PÉREZ SERRANO, G. (1994) *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes. I. Métodos.* Madrid: La Muralla.

RUIZ CARRASCOSA, J. (1995): Es estudio de casos. Una estrategia para el análisis del uso de las nuevas tecnologías de la información (NTI) en Educación. En LÓPEZ-BARAJAS Y J.M. MONTOYA (Eds.): El estudio de casos. Fundamentos y Metodología. Madrid. UNED.

UNA EXPERIENCIA EN 4º DE E.S.O.

CARMEN ARESE OLIVA · Mª GUADALUPE BUENDÍA CASTIÑEIRA · PILAR CAZENAVE BERNAL
PILAR ESCUTIA BASART · DOLORES PEREIRA FIGUEROA · ENRIQUE RAMÍREZ GUERRERO
MANUEL SÁNCHEZ VÁZQUEZ

En esta comunicación pretendemos presentar la experiencia realizada este curso con los alumnos de todos los grupos de 4º de E.S.O. de nuestro centro (seis en total). Estos alumnos ya en 3º de E.S.O. realizaron trabajos de investigación trimestrales con lo que adquirieron bastante experiencia. Con ellos intentamos acercar a los alumnos a las Matemáticas, la idea de estos trabajos es que los alumnos profundicen en los conocimientos matemáticos y los relacionen con otros aspectos fuera de las matemáticas del curriculum, proponiéndoles otros temas de la vida cotidiana, más o menos relacionados con las matemáticas. Así hemos conseguido motivarlos y también ayudarles a aprobar la asignatura de Matemáticas.

Estos trabajos:

- Han sido obligatorios para todos los alumnos y alumnas de 4º de E.S.O.
- Han realizado uno cada trimestre, suponiendo el 20% de la nota de la evaluación correspondiente.
- Se han realizado en grupos de tres o cuatro alumnos y alumnas.
- Se han elaborado fuera del horario escolar, salvo algunas actividades muy concretas.
- A cada trabajo se le ha dedicado una o dos clases para orientar al alumnado.
- Para evaluar los trabajos se ha tenido en cuenta:
- La presentación: ortografía, expresión, claridad, limpieza, etc.
- El contenido matemático del mismo.
- La creatividad y originalidad.
- La colaboración en el grupo.

Durante este curso hemos realizado los tres trabajos siguientes:

- El Planeta Tierra. Este trabajo, por ser el primero del curso lo enfocamos de una manera muy dirigida. A cada grupo se les entregaron un par de folios con una serie de preguntas y un guión muy concreto de lo que tenían que hacer. En él se ha trabajado: la esfera, dimensiones de la tierra, coordenadas geográficas y husos horarios.

- Fotografía y Matemáticas. Este trabajo ha sido bastante menos dirigido, los alumnos tenían que hacer fotos "matemáticas" y buscar imágenes, también "matemáticas", en revistas y periódicos, luego tenían que poner un título y comentar las matemáticas que veían en esa imagen. La mayoría de los conceptos que han aparecido en este trabajo son, lógicamente, de geometría pero nos han sorprendido con otras muchas cosas y algunos han sido muy originales, tanto en las fotos e imágenes, como en los títulos que les han puesto.

- Juegos Matemáticos. En el último trimestre el trabajo ha consistido en realizar un juego: elaborar el material para el mismo, explicar las reglas y buscar las estrategias ganadoras, si las hubiera. Además tenían que inventar otro juego distinto que se pudiera jugar con el mismo material o similar. Para ello a cada grupo se le entregó un guión sobre un juego (todos distintos, unos 35 juegos en total) y ellos tenían que encargarse de todo lo demás.

A final de curso se les ha pasado una encuesta para conocer su impresión sobre los trabajos realizados durante el mismo. En la encuesta queríamos saber que trabajo les ha resultado más fácil, si les parece que están relacionados con las matemáticas, si se han divertido realizándolos, si están contentos con el resultado, etc.

Los resultados han resultado bastante claros, el trabajo que menos les ha gustado hacer ha sido el primero, pero les han resultados muy amenos los otros dos, y el resultado con el que han quedado más satisfechos ha sido con el juego. La mayoría de los alumnos piensa que la nota que han obtenido en el trabajo era la que se merecían y muchos de ellos creen que estos trabajos les han ayudado a superar la asignatura.

A continuación adjuntamos los dos primeros trabajos (la misma hoja que se les entrega a los alumnos) y el tercero se puede ver en el taller de juegos.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

IES GONZALO NAZARENO

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN 1º TRIMESTRE
4º E.S.O.

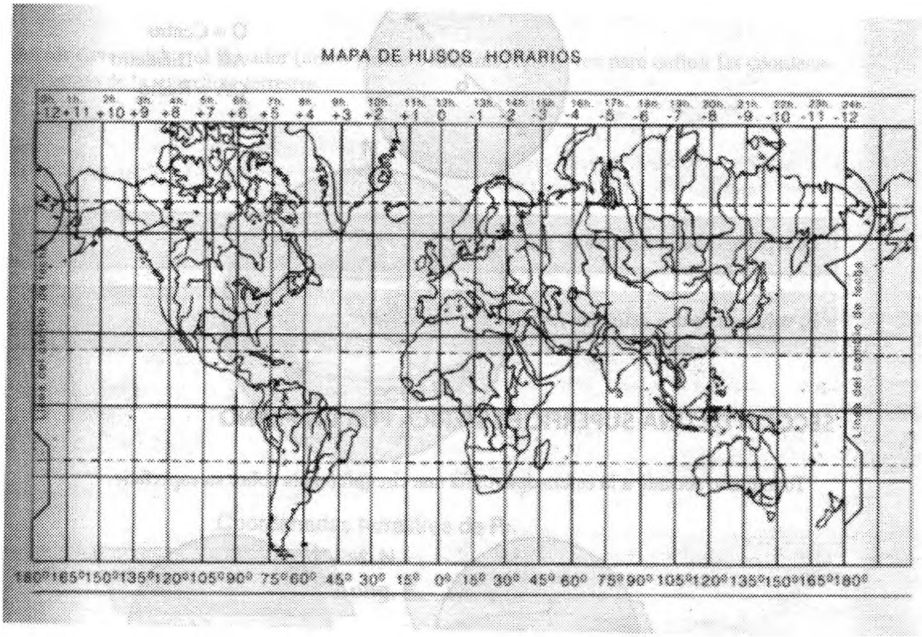
EL PLANETA TIERRA

La tierra es un planeta del sistema solar de forma aproximadamente esférica. Haz un estudio geométrico de esta figura. (Definición de esfera, elementos importantes, fórmulas, etc.)

El planeta Tierra, además del movimiento de traslación alrededor del sol, realiza un movimiento de rotación sobre sí mismo, cuyo eje pasa por los polos. Para conocer con precisión la superficie de la tierra existe una red geográfica de líneas imaginarias. Descríbelas y háblanos de todo lo relacionado con estas líneas (Paralelos, meridianos, coordenadas terrestres, husos horarios, etc.)

Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Por un punto de la superficie terrestre ¿Cuántos paralelos pasan?
b) ¿Cuántos paralelos hay con el mismo radio?
c) ¿Todos los meridianos son circunferencias máximas?
d) ¿Todos los meridianos pasan por los polos?
e) Por todos los puntos de la superficie de la tierra ¿pasa un meridiano?
f) Indica en qué hemisferio están las siguientes partes de la tierra: Europa, Australia, Polo Sur, Chile.
g) ¿Todos los puntos de un paralelo, que estén en la superficie terrestre, tienen la misma latitud?
h) ¿Tiene sentido decir que un punto tiene 120º de latitud Norte? ¿Y 95º de latitud Sur?
i) ¿Cuál es la latitud mínima?¿ Dónde están los puntos de latitud 0º?
j) ¿Cuál es la latitud máxima?
k) Un grado de latitud ¿equivale siempre a la misma distancia terrestre medida sobre un meridiano?
l) El meridiano de Greewich pasa cerca de Castellón. Entonces ¿la mayor parte de España está en el hemisferio este o en el oeste?
m) ¿Tiene sentido decir que un punto terrestre tiene 120º de long. Oeste?¿Y 230º long. Este?
n) Entre qué latitudes y qué longitudes está situada la península ibérica?
o) Busca un mapa apropiado y determina aproximadamente las coordenadas terrestres de Dos Hermanas.
p) Halla las coordenadas terrestres de: Madrid, Santa Cruz de Tenerife, Nueva Delhi, Moscú y San Francisco.
q) Si viajamos desde España hasta Asia ¿tenemos que adelantar o atrasar el reloj?
r) ¿Qué diferencia horaria (solar) existe entre Madrid y Tokio? Y entre Madrid y Nueva York?¿Y entre Tokio y Nueva York?
s) Calcula la diferencia horaria entre Moscú y Nueva York. ¿Qué hora es en dichas ciudades si en Londres son las diez de la mañana?
t) El protagonista de *"La vuelta al mundo en 80 días"* de Julio Verne, al regresar a Londres se da cuenta que "ha ganado un día" . Estudia el mapa siguiente para explicar este fenómeno.



Una antigua definición del metro es: "Un metro es la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre". Aceptando esta definición, calcula:

- El radio de la tierra.
- La superficie de la tierra.
- El volumen de la tierra.
- Compara los resultados obtenidos con los que vienen en una enciclopedia.
- Busca el radio del trópico de Cáncer.
- Calcula el área del casquete esférico que se encuentra entre el polo Norte y el trópico de Cáncer.
- Halla el área de una cuña esférica de 25º de amplitud.
- Busca otra definición de metro.

Recuerda:

1) Hay que trabajar "en grupo".
2) Cuida la presentación.
3) Atención a la ortografía.
4) No olvides añadir índice y bibliografía.
5) Contesta a cada pregunta razonadamente y si es necesario, pon un ejemplo.

Sugerencia:

Podéis utilizar el libro de texto de Matemáticas de 3º de ESO (Editorial Edelvives)

Fecha de presentación: 1 de Diciembre.

I.E.S. GONZALO NAZARENO

Fotografía y Matemáticas

TRABAJO 2º TRIMESTRE **MATEMÁTICAS 4º E.S.O.**

El impacto de la imagen en nuestra sociedad es cada dia más evidente. La televisión, el cine, la publicidad, nos someten diariamente a un continuo bombardeo de imágenes de todo tipo.

Pues sí, estamos rodeados de imágenes pero ¿nos hemos parado a pensar alguna vez en el contenido matemático de muchas de estas imágenes?. Dado que este año se celebra el *Año Internacional de las Matemáticas*, vamos a buscar "la parte matemática" de estas imágenes que nos rodean.

Nuestro trabajo tendrá dos apartados distintos:

a) Buscar imágenes (publicidad, periódicos, revistas,...) que tengan algún contenido matemático. Adjuntar una copia de cada una de estas imágenes, y contestar a las siguientes cuestiones:
b) ¿Por qué nos ha llamado la atención esta imagen?
c) ¿Qué nos sugiere?
d) Enumeración de los contenidos matemáticos que tiene.
e) Realizar al menos tres o cuatro fotografías originales (una por cada miembro del grupo) relacionadas con las Matemáticas (Al menos una de ellas realizada en la visita a Córdoba). Presentar estas fotografías en tamaño 20x15 pegadas sobre una cartulina de tamaño folio (Pueden ser en color o en blanco y negro). Para cada una de ellas se contestará a las siguientes cuestiones:
    a. ¿Qué contenido matemático tiene?
    b. ¿Con que tema/s matemático está relacionado?
    c. Título de la fotografía.

Las mejores fotografías se expondrán en el Centro, en el tercer trimestre.

Fecha de entrega: 3 de marzo

GRUPO 11
TRANSVERSALIDAD EN MATEMÁTICAS

MATERIALES PARA UNA PROPUESTA INTERDISCIPLINAR ENTRE MATEMÁTICAS E IDIOMAS

MANUEL RONDÓN BUENDÍA · PEDRO J. MARTÍNEZ FERNÁNDEZ · RICARDO CONTRERAS CALVACHE

La relación de las asignaturas de Inglés y de Francés con las Matemáticas se reduce normalmente a ver cómo se dicen los números más sencillos. De hecho, cuando empezamos a pensar en este proyecto, los profesores de matemáticas que formamos este grupo tampoco íbamos mucho más allá: pese a que en nuestra formación hemos tenido que consultar libros y artículos de matemáticas "superiores" en estos idiomas no éramos capaces de expresar ni las operaciones más sencillas, ni los términos más elementales. La situación no era mucho mejor en nuestros compañeros de idiomas. La idea era intentar introducir en el currículo de las asignaturas de idiomas la terminología usada con más frecuencia en las matemáticas escolares. Así que empezamos por investigar sobre cómo se traduce ésta al francés y al inglés. En la figura 1 puede verse un pequeño extracto del vocabulario que posteriormente elaboramos.

ESTADÍSTICA - STATISTICS - STATISTIQUE		
estadística descriptiva	descriptive statistics	statistique descriptive
Población	population	population
Muestra	sample	échantillon
tamaño de la muestra	size of the sample	taille
Carácter	character	caractère
variable estadística	statistical variable	variable statistique
variable cuantitativa	quantitative variable	variable quantitative
variable cualitativa	cualitative variable	variable qualitative
variable discreta	discreet variable	variable discrète
variable continua	continuous variable	variable continue
dato/s	datum/data	donnée

Figura 1

Las primeras actividades que confeccionamos fueron lecturas introduciendo históricamente en los diferentes idiomas la aritmética, la geometría y las funciones y gráficas. Además tomamos algunas actividades recreativas de los libros que habíamos consultado.

Aprovechando que, con la implantación de la E.S.O., las editoriales habían inundado nuestros centros de libros de texto, lo primero que hicimos el segundo año fue buscar actividades relacionadas con las matemáticas en los textos de idiomas, obteniendo gran cantidad de material, pero que nos pareció de escaso interés en su mayor parte. Tras consultar aproximadamente la misma cantidad textos de matemáticas, encontramos una sola página relacionada con las asignaturas de idiomas. Después de esto, modificamos nuestra línea de trabajo: teníamos que tratar de introducir las matemáticas en las clases de idiomas (y viceversa). Así, ese mismo año, comenzamos a diseñar materiales y actividades interdisciplinares:

- Los primeros fueron sopas de letras, de números y otros "pasatiempos".
- Copiamos pequeños artículos matemáticos de revistas extranjeras de divulgación sobre los que los alumnos realizan actividades puramente lingüísticas en las clases de idiomas.
- Tradujimos al inglés y al francés actividades sobre gráficas que nuestros compañeros usan para trabajar con sus alumnos cómo se pregunta y cómo se responde en esos idiomas. Además, la gran cantidad de información que se puede extraer de una gráfica, les permite proponer redacciones.
- Fotocopiamos hojas de teleprogramas ingleses y franceses para realizar operaciones con unidades sexagesimales.

Pero cierto día, en cierto cursillo, tuvimos la fortuna de cruzarnos con un tal Luis Berenguer, que venía de Granada a hablarnos sobre materiales manipulativos para el Aula de Matemáticas y a partir de ese cierto día hemos desarrollado la parte de nuestro trabajo de la que nos sentimos más satisfechos:

- Elaboramos un dominó en cada idioma para trabajar las horas. El dominó tiene 36 piezas, aunque puede convertirse en otros más sencillos (de 28 piezas, de 21,...) eliminando las fichas que llevan las horas más complicadas. En la figura 2 aparece parte de una plantilla.

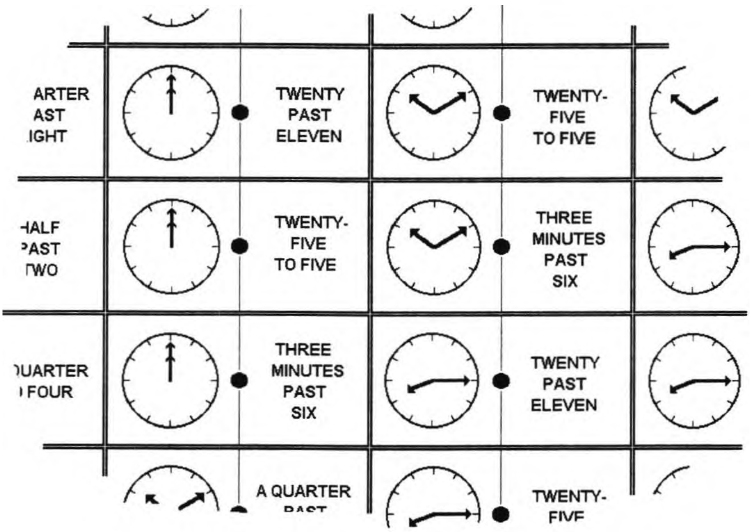


Figura 2

- Fabricamos barajas en las que hay que conseguir el mismo número de cuatro formas diferentes. En cada idioma, construimos dos versiones: una que llamamos fácil, ya que aparece la expresión numérica de la operación, además de la lingüística (figura 3), y otra difícil en la que sólo aparece la expresión lingüística.

Figura 3

- Diseñamos un puzzle que se va montando al unir tres formas del mismo verbo. Las piezas tienen forma de rombo, cada verbo forma un triángulo equilátero y la clave para poder terminar de montar el puzzle la dan los colores.

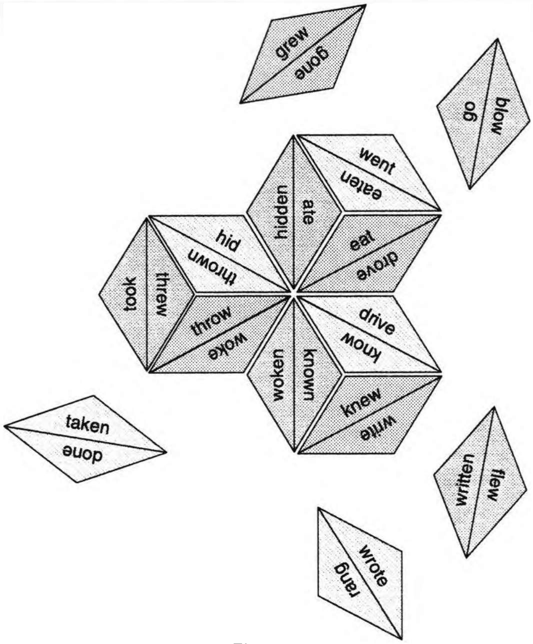


Figura 4

Las sugerencias dadas por los alumnos nos han ayudado a perfeccionar estos materiales. También hemos incorporado las mejoras sugeridas por compañeros que los han utilizado. Por último, hemos diseñado una página web, en la que estamos insertando las actividades y los materiales que hemos elaborado durante estos casi cuatro años que ya llevamos trabajando juntos. Esperamos colgarla en la red lo antes posible, recibir sugerencias, ideas y comentarios por parte de los que la visiten y, sobre todo, que les sea útil. Creemos que estará dentro de la página del CEP de Almería. Lo que podemos asegurar es que se podrá acceder a ella desde la página de la SAEM Thales de Almería: http://thales.cica.es/almeria.

BIBLIOGRAFÍA

CHAMBADAL, LUCIEN, (1969), Dictionnaire des Mathématiques Modernes, Lib. Larousse, Paris.

CHEVALIER, JEAN-CLAUDE Y OTROS. (1964), Grammaire Larousse du Français Contemporain, librairie Larousse, Paris.

COLLINS GEM ENGLISH DICTIONNAR. (1977).

GARCÍA-PELAYO Y GROSS, (1967), Dictionnaire Moderne Français-Espagnol, Lib. Larousse, Paris.

GILBERT, BRENDA, You are a genius! First Break. Road to English. Readers 1. S.M.

GRÉVISSE, MAURICE, (1969), Précis de Grammaire Française, editions Duculot, Gembloux.

JONES, LEO AND ALEXANDER, RICHARD, (1983), International Business English. Cambridge University Press.

MARTÍNEZ FERNÁNDEZ, P. J. Y OTROS, (1997), Traducción de terminología matemática al Inglés y al Francés. Aplicaciones didácticas en las clases de idiomas y de matemáticas. Investigación en el Aula de Matemáticas, la tarea docente. Universidad de Granada y SAEM Thales. Granada.

MARTÍNEZ FERNÁNDEZ, P. J. Y OTROS, (1998), Interdisciplinariedad en Idiomas y Matemáticas, VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Universidad de Jaén y SAEM Thales. Jaén.

NORMAN, SUSAN, (1983), We're in Business. Longman.

NOUVEAU PETIT LAROUSSE, (1971), Librairie Larousse, Paris.

PAQUETTE, ANNE Y ROEHNER, BERTRAND, (1986), Science in English. Larousse.

SWAN, MICHAEL, (1986), Practical English Usage. Oxford University Press.

UR, PENNY AND WRIGHT, ANDREW, (1994), Five-Minute Activitien. Cambridge Handbooks for Language Teachers. CUP.

VOX CHAMBERS ENGLISH LEARNERS'DICTIONARY, (1990), Barcelona.

WEBSTER'S NEW ENCYCLOPEDIC DICTIONARY, (1996), New York.

WILSON, MARTIN, (1987), Writing for Business. Nelson.

DE TOROS Y MATEMÁTICAS LA DIVINA PROPORCIÓN.

EL NÚMERO DE ORO EN EL ARTE DEL TOREO. LA ESPIRAL DEL ARTE

ELENA AGUILAR VALDERAS

Matemáticos, artistas, filósofos y astrónomos a lo largo de toda la Historia centraron muchos de sus trabajos en una proporción muy presente en la naturaleza y a la vez muy especial llamada, por Luca Paccioli, divina proportione[1]. El número de oro lo han aplicado a algunas de sus obras maestras escultores, pintores y arquitectos, como también se ve reflejado en experiencias en el mundo de la música y poesía.[2]

Esta comunicación se centra en la relación existente entre ese número áureo y toro, torero y toreo. Es un análisis del toro y de cada momento de la lidia donde se produce, en determinadas situaciones, unas relaciones proporcionales entre cada uno de los elementos que forman la faena que podemos encuadrar en las proporciones áureas.

Torear es una forma de expresión del arte. En la faena se tiene que producir una armonía, un equilibrio perfecto, por eso no es de extrañar que esté ligado a las matemáticas.

EL TORO

Muchos han sido los estudios a cerca del trapío del toro de lidia, Corrochano, Ortega, Areva, Sánchez Belda, etc.[3] El trapío variará según cada encaste y ganadería, pero el que el taurino denomina "bien hecho", encaja perfectamente en el rectángulo áureo. Se puede decir que posee la divina proporción. Y no deja de ser hasta cierto punto lógico que un animal que crea tantos momentos de emoción y plasticidad en su constitución posea lo que en muchos momentos de la historia y para muchos artistas ha sido canon de belleza.

El toro visto de perfil se puede inscribir en un rectángulo donde la *altura* sean las agujas, y el *lado* su longitud total de la cabeza a la penca del rabo. Cuanto más se acerquen estas dos dimensiones a la línea recta, mejor inscrito quedará y se ajustará más a la teoría. El rectángulo áureo se divide en un cuadrado y otro rectángulo de forma sucesiva. Estas nuevas dimensiones han de ajustarse a la anatomía del animal.

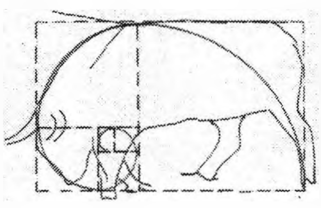


Fig.1

Estas divisiones nos permiten, cuando el toro humilla al embestir, ver como dibuja con el lomo una espiral[4], igual que luego veremos que se produce al torear bien. *(Fig. 1)* El cuadrado, al bajar el toro la cara, queda arriba, y el rectángulo abajo.

EL TOREO

Corrochano escribió del toreo refiriéndose a dos líneas[5]. Para mí hace falta una serie de relaciones proporcionales bastante más complejas aunque basemos también nuestro estudio en la línea vertical. Entre toro y torero hay momentos que se crean entre ellos unas relaciones proporcionales que coinciden con el número áureo. Sólo en esos instantes –cuanto más despacio se toree más largos serán esos instantes – la faena adquiere profundidad, estética y encaja de manera especial es estas proporciones a las que aludimos.

[1] PACIOLI L., *La Divina Proporción.* Introducción de Antonio Manuel González. Fuentes de Arte 3. Madrid. Ediciones Akal.S.A. 1991

[2] GHYKA, M.C. *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes.* Barcelona. Ed. Poseidón 1983.

[3] .P.PAÑOS MARTÍ. *El toro de lidia en la escala zoológica.* Los Toros en España. Carlos Orellana 3 volúmenes. Madrid. Editorial Orel 1969. Volumen 1.p.56

[4] Video de YORKSHIRE TELEVISION. "Rectángulo áureo y razón aurea". *Ojo Matemático.* Programa 17.Números Fibonacci y números primos. Madrid. Metrovideo escuela. 1992.

[5] G.CORROCHANO: *De cómo ver las corridas de toros.* Los Toros en España. Carlos Orellana. 3 volúmenes. Madrid. Editorial Orel 1969. Volumen 1.p.268

El torero *fijo en la arena* provoca y determina un rectángulo áureo cuya espiral lo recoge a él y a la embestida del toro. Este rectángulo se divide según la proporción áurea en otros menores. A su vez se puede seguir subdividiendo.

Gracias a esta sucesión de rectángulos se nos forman unos cuadrados que guardan la misma relación proporcional, sobre los que se traza la espiral. Para esto tienen que estar relacionados según la divina proporción: la cintura o cadera del torero, la altura de la muleta, la proximidad del toro, el giro de caderas y brazo, así como reunirse con el toro en el centro de la suerte. *(Fig.2)*

Según el lugar de la plaza en que se esté situado, el rectángulo mayor tendrá una disposición o tamaño diferente pero siempre la misma proporción. Desde cualquier punto de vista hay unas constantes íntimamente relacionadas que nos mantienen el equilibrio y nos permite dividir éste en otros menores.

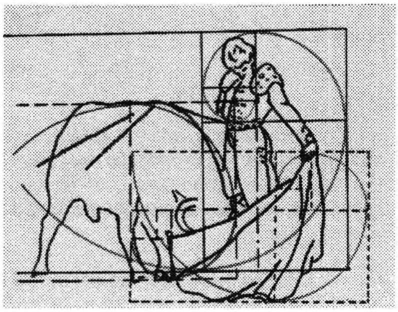


Fig. 2

De gran importancia es también la altura a la que se coloca la muleta en relación con las otras dimensiones. Al bajar la mano se determina un rectángulo áureo, de la muñeca al suelo, siendo el *estaquillador,* bien colocado, por supuesto, uno de los lados del rectángulo. Al final de la suerte, éste pasa a ser la diagonal como prolongación del brazo y de la mano. Si el torero no se mueve y la mano de la muleta se mantiene a la misma altura, logrará redondear su obra.

Existen notables diferencias técnicas, si el toreo se ejecuta con capote o muleta, con la mano derecha, si se trata de naturales, si se lidia por bajo... si se torea bien o mal que entonces no encaja en esos rectángulos. Todo esto merece un análisis mucho más detenido. Sin duda influirán las proporciones físicas del diestro. Cuanto más se acerque a esta relación más fácil le será.

Tan fundamentales en la colocación son el toro y el torero como los huecos que se producen entre ellos. El arquear el cuerpo y/o la forma de poner la muleta, hacen que queden unos espacios vacíos que son parte también de la composición, siendo muy importantes a la hora de conseguir, o no, la armonía. De producirse una composición perfecta, se crean rectángulos áureos independientes en el toro, torero y muleta, determinándose por tanto varias espirales que han de cortarse en un punto concreto, nada arbitrario. Es imprescindible para que encajen, insisto, pasarse al toro muy cerca.

Otro aspecto a tener en cuenta es ligar los muletazos, de esta manera, se conserva la proporción durante toda la tanda aunque sea fundamental que cada *pase* tenga una unidad interior.

Al torear con el capote entran en juego el movimiento de los dos brazos por eso, generalmente y según el lance, se forman dos espirales, una marca la entrada del toro y otra la salida pero las dos envuelven la composición. (*Fig.3)*

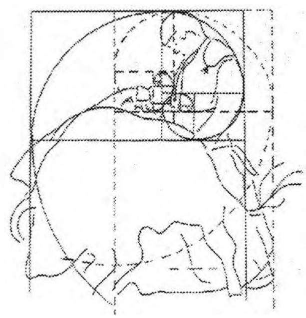


Fig. 3

La aparente armonía no es suficiente si debajo no hay un equilibrio estable. La diferencia está en el segmento vertical que marca el peso del torero. Este segmento se origina en el punto en que el torero está fijo en la arena durante el lance y debe permanecer ahí. En caso contrario, el torero deja el peso de su cuerpo en la pierna de detrás en lugar de apoyarse en la pierna de salida y poco a poco el toro continua su trayectoria; cuando se afianza en esa pierna el toro ya ha pasado.

A la hora de trazar el rectángulo o los rectángulos áureos hay que desplazarlos, y en el mejor de los casos, sólo en un momento excesivamente breve habrá equilibrio proporcional. Sin embargo, al apoyarse sobre la pierna de salida, la vertical permanece en el mismo punto y la sensación de estabilidad, equilibrio y dominio es mayor, quedándole solo alargar y llevar la embestida, recreándose en la suerte.

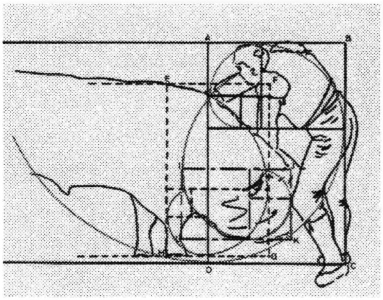


Fig.4

La divina proporción hay que cumplirla con mayor exactitud si cabe, a la hora de matar al toro, aquí mas que en ningún momento tiene que haber equilibrio, ritmo y armonía, ya que al entrar a matar se produce una relación entre las alturas a las que se colocan las dos manos. Esta relación es la que marca la ejecución, no obstante, el cuerpo del torero con la mano que lleva la espada también mantienen la misma relación proporcional. *(Fig.4)* Digno de resaltar es que las tres espirales se cortan coincidiendo en un punto fundamental para el éxito de la suerte.

Parece impensable que un momento de inspiración único, breve e irrepetible se pueda relacionar con las matemáticas.

En la plaza disfrutamos de la geometría, la luz, el color, el sonido, y otro factor más, el ritmo, como producto de estas relaciones proporcionales. Dentro de ellas hay distintos matices que diferencian a los toreros que interpretan, según su concepto, el toreo. Este aspecto merece un análisis aparte y más detenido.

En resumen, para mí, creo que la divina proporción encaja en el toreo y no hace sino mostrar, que tanto el toro en sí mismo como el toreo, está construido sobre una base matemática clara y concreta.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. ESTRATEGIAS.

MONTSERRAT SÁNCHEZ PÉREZ · RAFAEL IBÁÑEZ LÓPEZ.

INTRODUCCION.

"La capacidad de soslayar una dificultad, de seguir un camino indirecto cuando el directo no aparece, es lo que coloca al animal inteligente sobre el torpe, lo que coloca al hombre por encima de los animales más inteligentes, y a los hombres de talento por encima de sus compañeros, los otros hombres". (G.Polya. Mathematical Discovery).

La resolución de problemas en matemáticas ha atravesado diferentes etapas, en relación con la concepción matemática dominante. Para la matemática clásica, los problemas estaban en el origen de los conceptos. Así muchos de los conceptos geométricos primitivos derivan de los problemas no resueltos centrados en la cuadratura del circulo o la trisección del ángulo; mas adelante, los problemas basados en el cálculos de tangente a una curva y su recíproco, centrado en el cálculo de la superficie encerrada por una curva, dieron lugar al cálculo diferencial. La introducción de la matemática formalista dejó un tanto de lado los problemas de aplicación, y se centro en problemas de fundamentación de la matemática (S.XIX y XX).

La resolución de problemas es considerada en la actualidad la parte más esencial de la educación matemática. Mediante la resolución de problemas, los estudiantes experimentan la potencia y utilidad de las Matemáticas en el mundo que les rodea. El párrafo 243 del Informe Cockroft señala que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la " resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas a situaciones de la vida diaria". El N.C.T.M. de Estados Unidos declaraba hace más de diez años que el objetivo fundamental de las Matemáticas no debería de ser otro que el de la resolución de problemas. Aquí en España la resolución de problemas aparece de forma explícita en el Curriculum de la E.S.O. y del Bachillerato como una tarea necesaria en el proceso enseñanza – aprendizaje.

Según el procedimiento seguido en la resolución de un problema podemos clasificar a estos en cuatro tipos:

1. ***Problemas de aplicación directa***: sólo requieren de operaciones matemáticas simples (por ejemplo, sustitución de datos de las variables de una ecuación y despeje de la incógnita) y suelen denominarse "*ejercicios*".
2. ***Problemas algorítmicos***: Implican el seguimiento de una secuencia de operaciones cerrada ("*algorítmo*") que garantiza la consecución de la solución.
3. ***Problemas eurísticos***: Estos problemas suelen precisar de la puesta en juego de una estrategia con una planificación consciente previa (en este grupo se pueden encuadrar la mayoría de los problemas clásicos.)
4. ***Problemas creativos***: Estos problemas permiten la adopción de estrategias de resolución que no suelen adaptarse a ningún patrón predeterminado (admitiéndose incluso la resolución por intuición) aunque no se garantiza que todos los sujetos puedan hallar una solución y que esta sea la optima.

En cuanto al número de soluciones se suele hablar de problemas cerrados cuando la solución es única y no admite dudas en cuanto a su validez y problemas abiertos que son aquellos problemas que admiten varias soluciones que a priori no pueden ser aceptadas o rechazadas con total certeza.

Desde un enfoque ligeramente distinto Watts (1.991) habla de ***problemas "dados"***, donde el resolutor dispone del objetivo y las estrategias, ***problemas "objetivos"*** donde el resolutor sólo cuenta con el objetivo, debiendo desarrollar sus propias estrategias y ***problemas " propios"*** en el que el resolutor decide tanto el objetivo como las estrategias.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

"Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados." (G. Polya).

Se acostumbra llamar modelo de resolución de problemas a una doctrina que clasifica y analiza la fase del proceso de resolución del problema, las sugerencia y estrategias eurística y los distintos aspecto de orden cognoscitivo, emocional, cultural, científico etc. que intervienen en el proceso.

Polya, en su libro clásico " *Cómo plantear y resolver problemas*" propuso un modelo ideal para describir el proceso de resolución de problemas que lo divide en cuatro fases. Desde entonces se han propuesto otros modelos que derivan del propuesto por Polya. Cabe destacar el modelo de Mason - Burton – Stacey y el de Schoenfeld. Todos ellos incluyen una última fase de comprobación de los resultados. Esta última parte es de vital importancia para que la tarea de resolución de problemas dé origen ha aprendizajes significativos; ya que se trata no sólo de mirar hacia atrás sino también hacia los lados y hacia delante. Examinar lo que se ha hecho para encontrar la solución, para ver si es correcto no basta para que se aprenda gran cosa, hace falta ver si el problema se puede resolver de otra manera; relacionar, si es posible distintas formas de resolverlo; examinar qué problemas relacionados con el que se ha resuelto están también solucionados al haber solventado éste; a que otros se puede extender el procedimiento de resolución de manera natural; cuales se podrían solucionar con lo que se acaba de obtener.
El proceso de enseñanza – aprendizaje de la resolución de problemas conlleva mucho tiempo, la habilidad para resolver problemas no sólo se adquiere de modo cuantitativo, sino más bien, familiarizándose con una serie de técnicas de resolución.
Hemos realizado una experiencia con un grupo de 30 alumnos de 3º de E.S.O. sobre *el "Estudio de la Combinatoria"*, al que hemos dedicado 8 horas; basándonos en el hecho de que en la vida cotidiana aparecen situaciones en la que escogemos o seleccionamos una serie de objetos pudiendo contener elementos repetidos y, en las que con frecuencia se establecen ordenaciones. Estas situaciones se denominan; "*situaciones de Combinatoria*". Las estrategias de tipo combinatorio requieren un método de trabajo sistemático y ordenado, válido para ayudamos en nuestras actitudes y comportamientos cotidianos. Al encontrar todas las posibles formas de ordenar los elementos de un conjunto, se facilita la toma de decisiones en muchos problemas.

ESTUDIO DE LA COMBINATORIA

En primer lugar, motivamos a los alumnos del porqué de este tema, les comentamos situaciones y ejemplos reales. Los pasos que se ha seguido para la comprensión de estos conceptos han sido:

A) Introducción de las Variaciones y Permutaciones.

Problema 1.

Con los dígitos 1,2,3,4 y 5 ¿ cuántos números de dos cifras se pueden formar ?.
Se les dijo a los niños que primero leyeran el problema y que después contestaran a la siguiente pregunta : *¿ Se pueden repetir los dígitos?.*
Algunos contestaron que sí y otros que no. Aquí el alumno pone en juego las estrategias.

- Admitiendo la repetición y generalizando con más dígitos los alumnos llegaron a obtener la relación: n^2 → *Fórmula de Variaciones con Repetición de "n" elementos tomados de 2 en 2.*
- Admitiendo la no repetición y generalizando llegaron a obtener la relación: *n(n-1)→Fórmula de Variaciones Ordinarias de "n" elementos tomados de 2 en 2.*

La siguiente pregunta que se les formuló fue:
¿ De cuántas maneras se pueden elegir 3 elementos de entre un conjunto de "n" elementos distintos?.

i) *Sin Repetición*
ii) *Con Repetición.*

Sucesivamente, con bastantes ejemplos llegaron a una generalización :

Variaciones Ordinarias: $\boxed{V_n^k = n(n-1)(n-2).......(n-k+1).}$

Variaciones con Repetición: $\boxed{VR_n^k = n^k.}$

Problema 2.

Con los dígitos 1,2,3,4 y 5, ¿ cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar?.
Los alumnos se percataron de que el problema era similar al primero, por lo que comentaron que eran Variaciones Ordinarias (sin Repetición), se les comentó que en este caso se llamaban Permutaciones Ordinarias: $\boxed{P_n = n!}$

Para introducir el concepto de Permutaciones Con Repetición se sugirió el siguiente problema:
¿ Cuántos números se pueden formar con tres "1" y dos "2"?
Las estrategias, que utilizaron, fueron muy diversas, al igual que sus respuestas. Analizamos, entre todos, las respuestas y después de desbloquearlos en ciertas situaciones, se llegó a la Fórmula de Permutaciones Con Repetición:

$$\boxed{PR_N^{\alpha,\beta} = \frac{n!}{\alpha!\beta!}. \quad (\alpha + \beta = n).}$$

(Sólo trabajamos con dos elementos repetidos)

B) Introducción a las Combinaciones.

Problema 3.

¿ Cuántos productos diferentes se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4 y 5?.

El procedimiento seguido fue análogo al que se siguió en los días anteriores, al trabajar con Variaciones y Permutaciones. Se llegó a las Fórmulas de:

Combinaciones Ordinarias: $\boxed{C_n^k = \binom{k}{n}.}$

Combinaciones Con Repetición: $\boxed{CR_n^k = C_{n+k-1}^k.}$

Los problemas trabajados fueron analizados y revisados llegando a la importancia del *Orden* en este tipo de agrupamientos.

Una vez que todos estos conceptos fueron asimilados se les plantearon una diversidad de problemas, de menor a mayor complejidad, y todos ellos relacionados con situaciones de la vida cotidiana, donde ellos aplicaron las técnicas de contar que habían adquirido. Pudimos observar el entusiasmo y la satisfacción que les producía el obtener resultados correctos, sobre todo cuando los particularizaban a casos concretos relacionados con sus propias experiencias; además nos dimos cuenta que motivamos al alumno a evitar el " bloqueo" ante problemas similares.

Como conclusión, queremos resaltar que esta experiencia ha sido lo suficientemente satisfactoria. Como profesores debemos de ***"mantener un esfuerzo permanente"***, para transmitir a los alumnos la confianza necesaria para ***"abordar y resolver problemas".***

GRUPO 12
EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS

LAS ACTITUDES EN MATEMÁTICAS Y SU EVALUACIÓN

Mª ISABEL FUENTES ORTEGA

Las actitudes son nuevos contenidos curriculares que se deben transmitir y evaluar en la Educación Secundaria Obligatoria. Una de las principales dificultades a las que se enfrenta el profesorado es la de cómo medir y evaluar las actitudes. En esta comunicación se pretende realizar un acercamiento a los contenidos actitudinales en matemáticas. También se reflexiona sobre las actitudes de los alumnos y alumnas en el marco de las clases de matemáticas y se describen brevemente algunas de las técnicas e instrumentos para su evaluación.

INTRODUCCIÓN

La importancia atribuida a los contenidos es una de las novedades que más llama la atención en las propuestas curriculares elaboradas en el marco de la Reforma del sistema educativo español (Coll y otros, 1992). Estas propuestas han introducido los contenidos actitudinales, al mismo nivel que los procedimentales y conceptuales; lo cual supone aceptar el hecho de que pueden y deben ser objeto de enseñanza y aprendizaje en la escuela.

El estudio de las actitudes "no sólo tiene sentido en la medida en que contribuye a caracterizar mejor o con más amplitud el fenómeno educativo, sino también porque puede ser un instrumento que caracterice la eficacia del propio proceso educativo" (Gairín, 1987: 23). Una de las áreas del conocimiento dentro de la que se han analizado de forma más sistemática las actitudes de los alumnos y alumnas es la de las matemáticas (Giménez, 1997).

La importancia de las actitudes en el aprendizaje de las matemáticas se justifica, entre otras múltiples razones, por el interés que se deriva del alto fracaso en esta materia, a pesar de ser considerada una de las más importantes del currículo escolar. Este fracaso puede deberse a la aparición de actitudes negativas causadas por diversos factores personales y ambientales, cuya detección sería el primer paso para tratar de contrarrestar su influencia con efectividad.

Pero, a pesar de todo lo dicho, tanto alumnado como profesorado de matemáticas prestan mucha menos atención a las actitudes que al resto de componentes de los diseños curriculares y de las programaciones. Las causas pueden ser diversas (imprecisiones conceptuales, visiones contradictorias, etc.), pero los principales problemas están en el ámbito de la práctica evaluadora (Gairín, 1987; Hernández y Gómez-Chacón, 1997). Muchos profesores y profesoras no saben cómo se pueden medir y evaluar; otros no consideran necesaria su evaluación.

¿QUÉ SON LAS ACTITUDES?

Cuando alguien se acerca al tema de las actitudes el primer problema con el que se encuentra es la propia delimitación del concepto. Resulta más fácil caracterizar las actitudes que definirlas; de hecho, desde principios de siglo se han recogido cientos de definiciones (Bolívar, 1992). Una de las más conocidas es la que proponen Coll y otros (1992) como "tendencias o disposiciones adquiridas y relativamente duraderas a evaluar de un modo determinado un objeto, persona, suceso o situación y a actuar en consonancia con dicha evaluación" (p. 137).

Podemos diferenciar tres componentes básicos con los que actúa siempre la formación y el cambio de actitudes: cognitivo, afectivo y conductual. El primero, consta tanto de las creencias de la persona sobre el objeto de la actitud como del conocimiento que posee sobre él. El segundo, está compuesto por los sentimientos y emociones que dicho objeto despierta. El tercero, incluye las tendencias, disposiciones e intenciones hacia el objeto, así como las acciones dirigidas hacia él.

Si el objeto actitudinal es el área de Matemáticas, podemos distinguir dos grandes categorías (NCTM, 1991; Hernández y Gómez-Chacón, 1997): actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas.

a) Las *actitudes hacia las matemáticas* se refieren a la valoración y el aprecio de esta disciplina y al interés por ella y por su aprendizaje, subrayando más el componente afectivo que el cognitivo. Dentro de esta categoría podemos señalar: actitudes hacia la matemática y los matemáticos/as, interés por el trabajo matemático, actitudes hacia las matemáticas como asignatura, actitudes hacia determinadas partes de las matemáticas y actitudes hacia los métodos de enseñanza.

Entre los contenidos actitudinales recogidos en el Diseño Curricular Base del área de Matemáticas para la ESO (MEC, 1989), se señalan dentro de esta categoría actitudes referentes a la apreciación de las matemáticas: reconocer su utilidad para resolver problemas de la vida cotidiana, por sus aplicaciones a otras ramas del conocimiento, y también la belleza, potencia y simplicidad de sus lenguajes y métodos propios.

b) Las *actitudes matemáticas*, por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo y se refieren al modo de utilizar capacidades generales como la flexibilidad del pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc., que son importantes en el trabajo en matemáticas.

También en el Diseño Curricular Base, en relación a esta segunda categoría, se destacan las actitudes referentes a la organización y los hábitos de trabajo: la curiosidad y el interés por investigar y resolver problemas, la creatividad en la formulación de conjeturas, la flexibilidad para cambiar el propio punto de vista, la autonomía intelectual para enfrentarse con situaciones desconocidas y la confianza en la propia capacidad de aprender y resolver problemas.
Las actitudes de los alumnos y alumnas (actitudes matemáticas y hacia las matemáticas) en el contexto escolar se insertan en complejos actitudinales más amplios (actitudes hacia la educación, escuela, profesorado, etc.), pudiéndose distinguir entre las variables asociadas a la actitud variables personales (sexo, edad, personalidad), familiares y escolares (profesor/a, estrategias metódicas, rendimiento) (Gairín, 1987).

¿PUEDEN EVALUARSE LAS ACTITUDES?

Las actitudes, tal como las hemos definido anteriormente, se pueden valorar, e incluso se pueden medir, asignándoles una determinada puntuación a través de ciertas escalas. Ahora bien, esto no significa que esta evaluación responda a esquemas similares a los de la evaluación del rendimiento académico en el dominio cognitivo (a los que están acostumbrados los docentes), ni que tampoco sea problemática.
La evaluación de las actitudes nunca debe equipararse con los exámenes y las calificaciones escolares, puesto que es la orientación formativa y de diagnóstico la que debe primar en la evaluación de estas actitudes. Tenemos vías y procedimientos, aunque sean inferenciales, para evaluar las actitudes de un estudiante en relación con las matemáticas, situándole en un rango entre lo más favorable y lo más desfavorable y, por consiguiente, pudiendo comparar su situación relativa con la de otro estudiante y con la de otros criterios de referencia.
Sin embargo, esto no posibilita de manera directa una calificación valorativa del estilo de la que, por ejemplo, se puede obtener sobre el aprendizaje y comprensión de conceptos matemáticos. Un estudiante puede tener unas actitudes más o menos favorables o desfavorables al trabajo en equipo y al trabajo individual en el aula, pero no parecería sensato calificarle por ello como insuficiente o sobresaliente. En la práctica, sí que podría ser aplicable la calificación si se ha establecido de antemano que la actitud favorable o desfavorable ante algo debe calificarse (negativamente, con puntuaciones bajas, o con puntuaciones altas, de manera positiva).
Pero debe aclararse que calificar actitudes al estilo de otras variables de rendimiento académico, para considerarlas de la misma manera en decisiones promocionales, requiere decisiones previas en el proceso de la planificación curricular en la línea concretada anteriormente.
Otro elemento a tener en cuenta, que ya hemos apuntado, es el hecho de que las actitudes no se pueden medir directamente. Es necesario inferirlas a partir de las respuestas del alumnado ante el objeto, persona o situación de la que se realiza la evaluación subjetiva (Bolívar, 1992; Coll y otros, 1992; Junta de Andalucía, 1996). Estas respuestas pueden ser verbales o comportamientos manifiestos. En ambos casos, deberemos realizar una interpretación de tales respuestas, como paso previo a la evaluación de actitudes.
Cuando el profesorado de matemáticas se plantea la evaluación de las actitudes, debe tener en cuenta que el alumno o alumna desarrollará actitudes positivas o negativas no sólo en función del contenido de la asignatura, sino también, y de un modo ineludiblemente interrelacionado, en función del ambiente que se genere durante el aprendizaje de dichos contenidos; de las posibilidades que se ofrezcan de realizar una variedad de actividades y de mostrar un comportamiento que sea aceptable para los demás.

TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Una evaluación de la actitud del alumnado requiere información acerca de sus tres componentes en una gran variedad de situaciones, y debe considerar todos los aspectos de la actitud y hasta qué grado están presentes (NCTM, 1991). Además, dependiendo del sistema de medición que empleemos, podemos encontrar resultados bien distintos para una misma actitud en un alumno o alumna.
Todo lo anterior nos pone de manifiesto la necesidad de que el profesorado de matemáticas se apoye en un buen número de técnicas e instrumentos (Bolívar, 1995; Clemente y Fernández, 1992; Perles y San Martín, 1995) a la hora de evaluar actitudes, entre las que destacamos las técnicas de observación, los intercambios orales, las escalas de actitudes y la revisión de las tareas del alumnado.
A través de las **técnicas de observación** la información se obtiene de la observación de la conducta o comportamiento que los alumnos y alumnas manifiestan espontáneamente durante su trabajo diario en el aula.
Para aprovechar mejor la información que puedan aportar estas observaciones, sería conveniente que el docente construyera sus propios instrumentos de observación y registro, que le permitieran estimar la situación inicial del grupo con respecto a una determinada actitud, o estimar los progresos que se van alcanzando con las intervenciones realizadas.
Entre los instrumentos para sistematizar las observaciones subrayamos las *escalas de observación* que son un conjunto de cuestionarios/escalas con aquellos indicadores o categorías que nos interesa observar. Según el formato podemos distinguir: *listas de control* (en las que se observa la presencia o

ausencia de una categoría o rasgo de conducta); *escalas de valoración* (en las que se estiman además, los grados en que se presenta, y se recogen matices de los aspectos observados) y, finalmente, *pautas de observación* (en las que se presentan un conjunto de indicadores o pautas).
Otro de los instrumentos para facilitar la observación es el *registro anecdótico.* Con él registramos (en cuaderno o fichas) los incidentes sucedidos a un estudiante, o a un grupo, que denoten una actitud o comportamiento representativo de ésta.
Por último, el *diario de clase* del profesor o profesora, de escasa tradición en nuestro país, puede ser también un medio útil para recoger datos con una cierta continuidad: observaciones, sentimientos, reflexiones, impresiones personales, etc. sobre el ambiente de clase, lo que ha sucedido, o las actitudes del alumnado. Puede también alentarse al alumnado a mantener diarios sobre el mismo tema con objeto de obtener información desde diferentes perspectivas.
Una variedad específica de las anteriores técnicas de observación son los **intercambios orales** con los alumnos y alumnas, más estructurados, entre los que incluimos entrevistas, debates, asambleas, puestas en común, exposiciones orales, juegos, autoevaluación, coevaluación, etc. Estos intercambios permiten advertir la manifestación y progresiva incorporación o consolidación de actitudes, tanto individualmente como en grupo.
En otro nivel distinguimos las **escalas de actitudes** que consisten en proporcionar un cuestionario con una lista de enunciados (escalas tipo Likert) o con adjetivos bipolares (diferencial semántico) sobre el tema objeto de la medida, y solicitar que los alumnos y alumnas respondan, de acuerdo con unos grados, según sus sentimientos o actitudes.
En ocasiones, junto a estas cuestiones cerradas, puede dejarse alguna pregunta abierta a partir de la cual los alumnos y alumnas puedan expresarse libremente en relación con sus actitudes.
En último término, la **revisión de las tareas** del alumnado puede aportarnos información sobre actitudes de una manera continuada, a través del análisis del cuaderno de clase, o de una forma puntual, a través del análisis de monografías, o de textos escritos y pequeñas investigaciones que periódicamente el profesor o profesora propone.

CONSIDERACIONES FINALES

La Reforma ha introducido cambios visibles en la evaluación, pero aún imprecisos y vagos. Destacamos dos grandes cambios: la consideración de las actitudes como objeto de evaluación y la diversificación de los instrumentos; aunque no se elimina, el instrumento de evaluación por excelencia: el examen.
No obstante, se detecta habitualmente la separación artificial de las actitudes de los conceptos y procedimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje y, por lo tanto, en la evaluación. Además, las actitudes que se suelen evaluar parecen universales y genéricas: entregar los trabajos y portarse bien.
Los profesores y profesoras de matemáticas suelen encontrar distintos tipos de dificultades en la práctica habitual de la evaluación. Por una parte, tienen dificultades centradas en el conocimiento de técnicas e instrumentos de evaluación, que son propias de una deficiente formación inicial y de la inexistencia de una formación permanente. Por otra, tienen dificultades centradas en las condiciones del centro.
Parece que para reorientar la evaluación de actitudes en matemáticas es preciso que se modifiquen las actuales concepciones del profesorado sobre qué son las actitudes y cómo funcionan, la epistemología de las matemáticas, el proceso de enseñanza-aprendizaje y la misma evaluación (Sagarra y Traver, 1997).
A pesar de estas y otras limitaciones, insistimos en la necesidad de superar obstáculos y barreras con la finalidad de realizar la evaluación de las actitudes de los alumnos y alumnas de una forma coherente, integrada plenamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De este modo, la evaluación ofrecerá al profesorado de matemáticas la información necesaria para ajustar su programación y fomentar el avance de los estudiantes hacia la obtención de su autonomía intelectual.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLÍVAR, A. (1992). Los contenidos actitudinales en el currículo de la Reforma. Problemas y propuestas. Madrid: Escuela Española.
BOLÍVAR, A. (1995). La evaluación de valores y actitudes. Madrid: Anaya.
CLEMENTE, M. y FERNÁNDEZ, I. (1992): La medición de las actitudes. En Clemente, M. (Ed.). Psicología Social. Métodos y Técnicas de Investigación. Madrid: Eudema.
COLL, C. y otros (1992). Los contenidos en la Reforma. Madrid: Santillana.
GAIRÍN, J. (1987). Las actitudes en educación. Un estudio sobre Educación Matemática. Barcelona: PPU.
GIMÉNEZ, J. (1997). Nunca es tarde para mejorar las actitudes: El caso de las fracciones. Uno, 13: 63-80.
HERNÁNDEZ, R.P. y GÓMEZ-CHACÓN, I.M. (1997). Las actitudes en Educación Matemática. Estrategias para el cambio. Uno, 13: 41-61.
JUNTA DE ANDALUCÍA (1996). Andalucía Educativa. Suplemento nº 1 dedicado a la Evaluación Educativa. Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia. Junta de Andalucía.

MEC (1989). Diseño Curricular Base del área de Matemáticas. Educación Secundaria Obligatoria. Madrid: MEC.

NCTM (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. Sevilla: SAEM Thales.

PERLES, F. y SAN MARTÍN, J. (1995). Medición de actitudes. En Gómez, J. y Canto, J.M. (Coords.). Psicología Social. Madrid: Eudema.

SAGARRA, H. y TRAVER, J.A. (1997). La enseñanza de las matemáticas y la construcción de actitudes. Uno, 13: 23-30.

GRUPO 14
OLIMPIADAS Y CONCURSOS

MATEMÁTICAS EN LA PLAZA MAYOR DE VERA

ÁNGELES LÓPEZ · Mª ENCARNA AZNAR · BELÉN ÁVILA · BÁRBARA ALARCÓN
CATALINA CASTILLO · TERESA LÁZARO · CARMEN RUIZ

Pretendemos contar nuestra pequeña contribución al Año Internacional de las Matemáticas. Se trata de un concurso-espectáculo para equipos de alumnos y alumnas de ESO y Bachillerato llevado a cabo en la Plaza Mayor de Vera (Almería). Además del concurso, el público tenía actividades para grandes y pequeños, y exposiciones. Empezamos por el principio.

LA IDEA DEL PROYECTO.

La idea del concurso surge en el grupo de trabajo que, para este curso 99/00 denominamos "Matemáticas fuera del aula", pero que se trata de un grupo de trabajo consolidado, ya que, prácticamente las mismas componentes, formamos durante los seis años anteriores un Seminario Permanente sobre "Historia de las matemáticas en el aula". Para este curso decidimos trabajar de forma más sistemática otro de los aspectos que abordábamos en nuestro trabajo en los institutos: las actividades matemáticas en horario extraescolar, fuera del aula. El hecho de que el año 2000 haya sido declarado por la UNESCO Año Internacional de las Matemáticas y el haber sido algunas de nosotras testigos, en las Jornadas de la Thales en Jaén, de las actividades desarrolladas en los parques de Jaén y Úbeda, nos animaron a hacer alguna actividad de este tipo, abierta a todo el público, en la calle. Las componentes del grupo desarrollamos nuestra labor docente en los institutos de Cantoria (1), Turre (1), Roquetas de Mar (1) y Vera (4). La elección estaba clara. Propusimos la idea al Ayuntamiento de Vera, que financió económicamente el proyecto. El concurso se desarrollaría en la Plaza Mayor de Vera el día 20 de mayo de 2000, sábado, día del mercado semanal.

GRAN FESTIVAL MATEMÁTICO VERA 2000

Este fue el título elegido para la actividad. A las 10 de la mañana estaba todo instalado en la Plaza y, los más madrugadores, que deseaban hacer sus compras antes de que calentara el sol, se encontraron con una sorpresa. En el lugar donde habitualmente estaban los vendedores de zapatos, camisetas,... hoy encontraban ¡MATEMÁTICAS!

Rincones temáticos.

En la Plaza podían encontrar rincones temáticos con material manipulativo y amables monitores que animaban a la participación y explicaban cualquier duda sobre si *"lo que teníamos allí se vendía o no"*. Los rincones eran:

* Topología, con todo tipo de juegos topológicos en los que había que desenredar, sacar,...
* Juegos lógicos y de estrategia.
* Tan-gram, en el que se desafiaba a quienes se acercaban a construir mil y una figuras.
* Problemas de ingenio.
* El problema de Plateau o cómo encontrar superficies mínimas con ayuda de agua jabonosa.
* Rincón infantil, con matemáticas para los más pequeños.

Exposiciones.

Al otro lado de la Plaza situamos las exposiciones, atendidas también por monitores, que eran:

* Fractales.
* Fotografías de matemáticos y matemáticas ilustras y breve resumen biográfico.
* Fotografía matemática.
* Sistemas de numeración en diferentes culturas y pueblos.
* Desafíos a la percepción.
* Matemáticas para sonreír, selección de tiras de Mafalda en las que se alude a las matemáticas.
* La obra de Escher y su relación con las matemáticas.
* Curiosidades matemáticas.

Además, entre las dos fases del concurso, el público pudo participar en un bingo matemático.

El concurso.

El concurso-espectáculo comenzó a las 11 de la mañana. Participaban cinco grupos de estudiantes de ESO y Bachillerato. Cada grupo estaba formado por seis alumnos y alumnas, dos del primer ciclo de ESO, dos del segundo ciclo de ESO y dos de Bachillerato. El alumnado procedía de los centros de la comarca que desearon participar, siendo seleccionados por cada centro a criterio de sus profesores/as. La formación de los equipos la hicimos nosotras procurando que, en cada grupo, hubiese alumnado de todos los centros, para evitar competitividad "inter-centros" y para tratar de favorecer la colaboración y el trabajo en equipo entre personas que acaban de conocerse.

Cada equipo llevaba el nombre de un matemático o matemática famosa (Pitágoras, Gauss, Ada Byron, Hipatia y Newton) y llevaban camisetas distintivas.

El concurso constaba de tres fases:

1ª FASE. Durante media hora, todo el equipo, trataba de resolver el máximo número de pruebas posibles de entre 18, tres pruebas de cada uno de los siguientes tópicos: geometría, topología, juegos numéricos con calculadora, medidas, tan-gram y problemas de ingenio.

2ª FASE. En esta segunda fase había pruebas diferentes para cada nivel:

- Los/as participantes del primer ciclo de ESO debían contestar a un bombardeo de preguntas durante 30 segundos cada uno, 1 minuto por equipo.
- El alumnado del segundo ciclo de ESO debía jugar una partida de un dominó de fracciones.
- Para los mayores, había una frase sobre Historia de las Matemáticas, en la que faltaban cinco palabras que debían completar con ayuda de libros y enciclopedias que poníamos a su disposición.

Un complicado sistema de puntuación clasificaba a tres de los equipos participantes para la FASE FINAL. Cada equipo debía desvelar, mediante mímica, una clave secreta a un grupito de personas escogidas entre el público. Se proclamaba vencedor absoluto del concurso el equipo que antes lograra que se adivinase su clave.

Se terminó, por supuesto, con entrega de premios, alegría y alborozo.

VALORACIÓN DE LA ACTIVIDAD.

Nuestra valoración no puede ser más positiva , por muchas razones:

- Se ha consolidado nuestra experiencia de trabajo en grupo, de forma solidaria, ilusionante, con buen humor,...
- Ha supuesto un gran reto organizativo, que creemos haber superado dignamente.
- El pueblo de Vera y quienes acudieron ese día al mercado pudieron tener un contacto con "otras matemáticas".
- Ha sido una tarea ilusionante para los alumnos y alumnas que se implicaron como monitores y monitoras y que dieron pruebas de responsabilidad, simpatía, rigor y amor hacia las matemáticas.
- Profesionalmente, hemos aprendido, ¿cómo no? En la búsqueda y elaboración del material, tanto del concurso como de las exposiciones o actividades para el público, hemos encontrado cosas nuevas, resuelto problemas didácticos, obtenido ideas para el aula.

GYMKHANA MATEMÁTICA POR CÓRDOBA

FRANCISCO-JOSÉ ANILLO RAMOS · MARÍA DE LOS ÁNGELES BENÍTEZ GARCÍA
Mª ISABEL DOMÍNGUEZ RUBIO · FLORES SERRANO ORTA · LORENZO MARTÍN HIDALGO

Esta actividad surge de la experiencia de intentar aunar el curriculum de matemáticas con el conocimiento de nuestra ciudad, con la finalidad de demostrar a nuestros alumnos cómo la matemática está inmersa en nuestro contexto real diario y que, al mismo tiempo, esta realidad se puede descubrir de una forma lúdica y divertida.

Desde su primera edición, en Marzo del 96, en la que participaron 276 alumnos de los últimos cursos de B.U.P., C.O.U., Bachilleratos L.O.G.S.E. y F.P. de 9 Institutos de Secundaria de Córdoba, y 26 profesores de matemáticas, la GYMKHANA MATEMÁTICA POR CÓRDOBA ha evolucionado muy positivamente. Hemos aumentado, hasta llegar a 500, el número de alumnos participantes, así como el de profesores organizadores. Asimismo, con el apoyo de la Delegación Provincial de Educación y el C.E.P. de Córdoba, se ha mejorado la compleja infraestructura necesaria para la organización, preparación y realización de esta actividad, de la cual ya se han realizado 5 ediciones. Igualmente hemos contado en las dos últimas ediciones con la colaboración de la S.A.E.M. "THALES" de Córdoba.

¿EN QUÉ CONSISTE?

En la enciclopedia Espasa-Calpe encontramos la siguiente definición de GYMKHANA:

> ***GYMKHANA**. Dep. Toda una serie de deportes que se ejecutan en las estaciones militares de la India en las que hay facilidad de ejercicios atléticos y juegos. El origen de estos deportes fue el deseo de quitar la monotonía a la vida de los soldados y oficiales en dichas estaciones, por lo cual en 1.861 el mayor John Trotter estableció la primera gymkhana (así llamada de gend-khana, patio para tenis), y el nombre del local pasó a designar el conjunto de los deportes.*
>
> *Enciclopedia Espasa-Calpe.*

Como se puede comprobar, la frase: "el deseo de quitar monotonía a la vida de los soldados y oficiales" es perfectamente aplicable a la idea que sustenta este evento educativo.

La Gymkhana Matemática es una prueba por equipos, de 4 participantes cada uno, en la que los alumnos deben identificar y encontrar algunos lugares de la ciudad (Puntos Bases) dados en clave matemática, y, a la vez, resolver una serie de problemas para cuya resolución es necesario tomar algún dato o referencia en torno a dichos lugares.

Las dos peculiaridades más importantes de nuestra Gymkhana son:

El sistema de Puntos Base:
Dado el gran número de alumnos participantes (525, en la última edición de la Gymkhana), para conseguir que cada grupo siga su propia estrategia de realización de la prueba es muy importante la dispersión de los mismos en el casco urbano. Esto supone cubrir la zona con una red de PUNTOS BASES (en adelante PB.) que cada equipo podrá recorrer, total o parcialmente, en el orden que determinen.

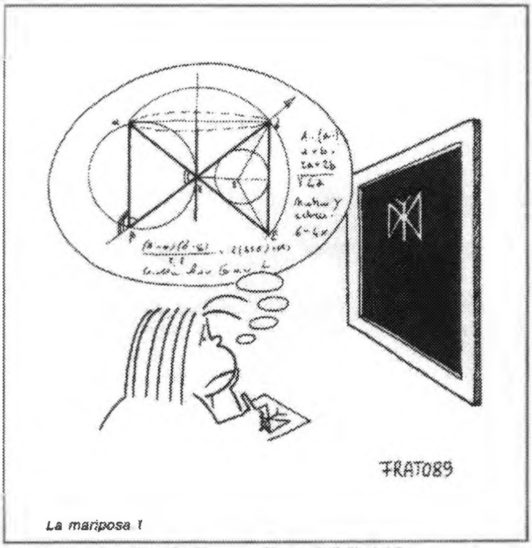
Los problemas "in situ":
Denominamos así a aquellos problemas y/o ejercicios en los que para completar su enunciado o su resolución, es necesario obtener información en el lugar en el que se haya ubicado el problema, ya sea ésta de carácter geométrico, numérico o de cualquier otro tipo.

OBJETIVOS

Los profesores responsables de esta actividad estamos convencidos de que existen caminos complementarios a nuestras explicaciones matemáticas en el aula, que pueden cubrir determinados objetivos que no se consiguen completamente en el recinto de la clase. Estos objetivos podrían resumirse en cinco:

a) **Realizar unas matemáticas en las que el alumno tenga más libertad de razonamiento para utilizar los conocimientos académicos adquiridos en clase.**

Para la consecución de este objetivo, es muy útil la "matemática recreativa", entendida como conjunto de problemas y pasatiempos en los que, aunque se utilizan los contenidos académicos, juega un papel muy importante el ingenio personal y la investigación autónoma de estrategias de resolución. Así nuestros alumnos estarán más preparados para aplicar la matemática académica a distintas situaciones que se les pueden plantear en sus estudios universitarios de cualquier tipo, su trabajo y, en general, en su vida cotidiana.



La Soledad del niño, Franceso Tonucci, Editorial Barcanova.

b) **Aplicar los contenidos académicos a objetos y situaciones que se encuentran en nuestro entorno vital, pero no en los textos matemáticos al uso ni en nuestras explicaciones en el aula.**

Estamos acostumbrando a nuestros alumnos a situaciones abstractas, que quizás no todos son capaces de relacionar con los problemas "reales" que les pueden surgir fuera de la clase de matemáticas.

c) **Conseguir un conocimiento más profundo de la ciudad en la que viven.**

Puede parecer que ésta es tarea de otras áreas, pero pensamos que no es así dado que nuestro contexto urbano, en sus vertientes histórica, artística, sociológica, económica, ... etc., tiene múltiples posibilidades de estudio y una de ellas es, sin duda, desde la perspectiva matemática.

d) **Sacar las matemáticas del aula.**

No es que no creamos en la forma convencional de enseñar matemáticas, pero también pensamos que "la calle" puede ser necesaria para "enganchar" a aquellos alumnos a los que las explicaciones en el aula en ocasiones les resultan tediosas y, por falta de motivación, incomprensibles.

e) **Potenciar el trabajo en equipo.**

La forma de trabajar en la Gymkhana les exige cooperación, un proporcionado esfuerzo individual y la máxima implicación en una tarea común.

Muy a menudo las preguntas y situaciones que son capaces de romper los *"bloqueos intelectuales"* y que por tanto hacen avanzar el pensamiento matemático, surgen cuando somos capaces de colocar a nuestros alumnos en actitud distendida y lúdica, fuera del contexto severo con que se reviste normalmente la ciencia oficial.

Pero sobretodo nuestros alumnos y alumnas han aprendido que las matemáticas también pueden ser divertidas, que se puede jugar "haciendo y descubriendo matemáticas" por toda la ciudad, y que se puede aprender matemáticas, "jugando".

EJEMPLIFICACION

A continuación se muestran varios ejemplos de localización de Puntos Base y de problemas propuestos en ediciones anteriores de nuestra Gymkhana:

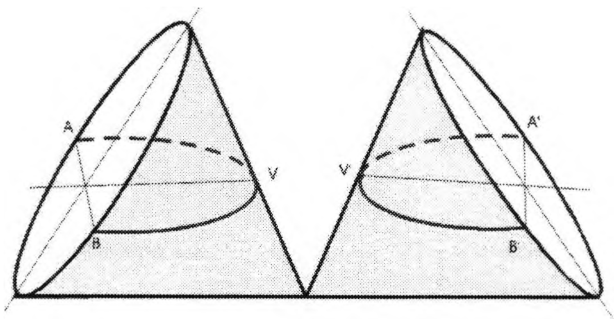
LOCALIZACIÓN DE PUNTOS BASE:

1) Junto al descubridor de la penicilina encontrarás el cuadrado de agua y los semicírculos concéntricos. Pasa el arco que te introduce en la antigua ciudad y continúa hasta la encrucijada. Muy cerca de ella encontrarás sentado al más famoso médico judío. Allí esta el PB.

2) Nos situamos en la Calle Doctor Fleming, nos dirigimos al arco que permite al acceso a la antigua ciudad (junto al conocido Mesón "La Luna"), y a través de un vericueto de calles estrechas nos encontramos en la Plaza de Tiberiades donde se halla ubicado el monumento a Maimónides

ste Punto Base verás los tres cuerpos cónicos de granito. Si los cortaras por el plano que contiene a las barras que los unen, verías tres parábolas iguales.

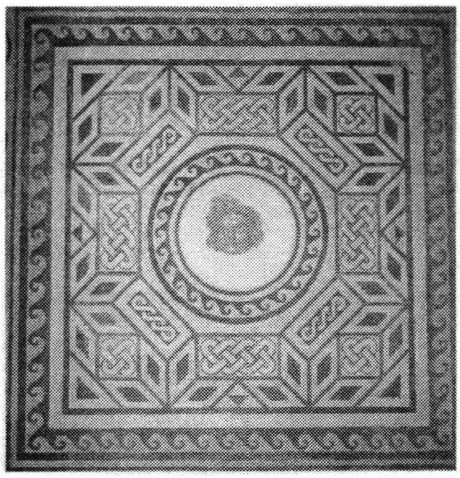
Al cortar una sección cónica por planos paralelos a las generatrices se obtienen parábolas. El PB. Está situado próximo a los "Llanos del Pretorio", en la acera donde se ubica el monumento al famoso torero Rafael Guerra Bejarano "Guerrita".



PROBLEMAS ALREDEDOR DE CADA PUNTO BASE:

1.- En este Salón, busca el mosaico que ha dado origen al logotipo de la gymkhana. El perfecto entramado geométrico de este mosaico te ayudará a calcular lo que se conoce como "PROPORCIÓN CORDOBESA". Se llama así al cociente que resulta de dividir el radio de la circunferencia circunscrita a un octógono regular entre el lado de dicho polígono. Calcula el valor de esta proporción con cinco cifras decimales.

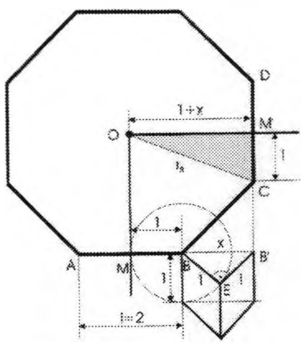
Se refiere el enunciado al "SALÓN DE LOS MOSAICOS" en el Alcázar de los Reyes Cristianos de Córdoba, en donde se puede contemplar el siguiente mosaico que dio origen al anagrama de nuestra Gymkhana:



Mosaico de la cabeza de Medusa. Siglo II (2,60 x 2,55).
Localizado en 1958 y extraído del subsuelo de la actual Plaza de la Corredera, lugar donde se hallaba la entrada al anfiteatro romano de la ciudad.
Salón de los Mosaicos, Alcázar de los Reyes Cristianos de Córdoba.

SOLUCIÓN:

Podemos suponer que el lado del octógono de este mosaico mide 2 y calcular, utilizando la figura adjunta, el radio de la circunferencia circunscrita al octógono (r_8).



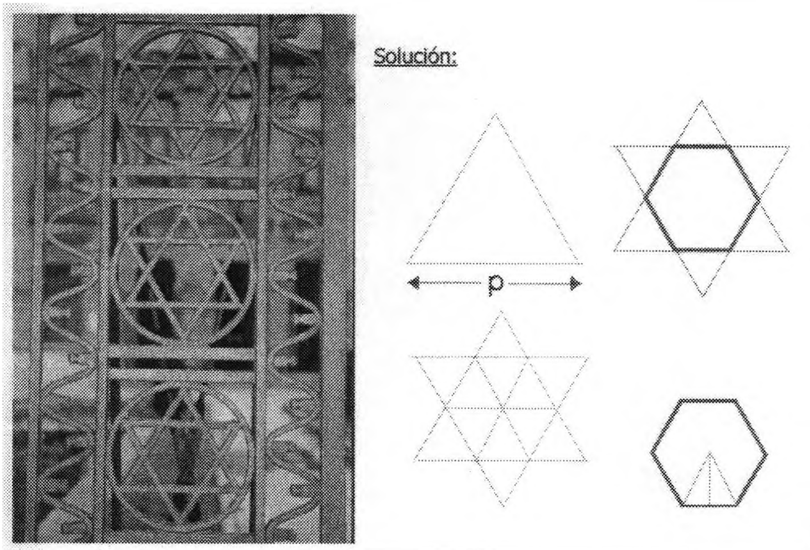
En primer lugar calculamos la hipotenusa "x" del triángulo rectángulo BEB' cuyos catetos miden 1, por tanto $x = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Seguidamente consideramos el triángulo rectángulo OM'C de la figura, cuya hipotenusa es el radio de la circunferencia circunscrita al octógono. Según lo anterior su cateto mayor mide $1 + \sqrt{2}$, y el menor 1. La hipotenusa será por tanto:

$$r_8 = \sqrt{1^2 + \left(1 + \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + 2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Luego el valor de la "proporción cordobesa" será: $\frac{r_8}{l} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}{2} \cong 1{,}30656$

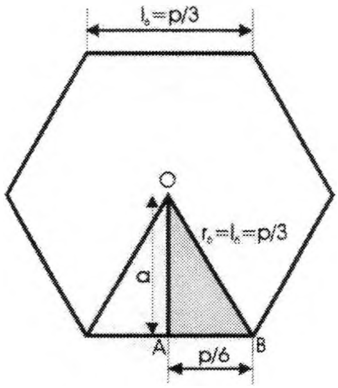
6.- Este edificio en el que te encuentras, proyectado en 1.914 por el arquitecto Gonzalo Domínguez Espínez, representa la muestra más destacada del Regionalismo en Córdoba. En la verja exterior puedes encontrar estrellas generadas a partir de triángulos equiláteros. Si el lado de uno de los triángulos mide "p" unidades, calcula, en función de esta longitud, la apotema del polígono regular inscrito en la estrella. (Da el resultado exacto.)

Nos encontramos en uno de los edificios más emblemáticos de Córdoba, la Escuela de VETERINARIA, en cuyas verjas de acceso localizamos las siguientes estrellas:



La figura inscrita es un hexágono regular que se puede subdividir en 6 triángulos equiláteros. En realidad la figura ha quedado subdividida en 12 triángulos equiláteros de lado "p/3" cada uno.

La apotema del hexágono regular es por lo tanto la altura de uno de estos 12 triángulos equiláteros.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo OAB, se obtiene:

$$\left(\frac{p}{3}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{p}{6}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{6}p$$

CONCLUSIÓN

Para el grupo de profesores y profesoras el organizar una serie de pruebas en su contexto real –diversos lugares de nuestra ciudad tienen un especial interés de tipo matemático– para que sean superadas por los equipos participantes en la prueba, tiene como finalidad básica la de estimular y animar a nuestros alumnos a desarrollar su comprensión de las formas (capacidad para detectar las distintas "figuras geométricas" y "regularidades" que aparecen por la arquitectura de toda la ciudad), de los números, del álgebra, de la teoría combinatoria, de la lógica, de la teoría de grafos, ... y del pensamiento matemático en general, además de fomentar entre nuestros alumnos y alumnas un conocimiento mejor y más profundo de la ciudad en la que viven.

MATEMÁTICAS Y PATRIMONIO HISTÓRICO-CULTURAL; EL CONCURSO DE PROBLEMAS DE INGENIO DE LA SAEM THALES DE ALMERÍA

Ricardo Contreras Calvache · Pedro J. Maqrtínez Fernández
Encarna Arznar Sánchez · Ángeles López Hernández.

PRESENTACIÓN

Puede parecer extraño, o cuando menos pintoresco (aunque cada vez hay menos gente que comparte ese parecer) presentar una comunicación con este título en un Congreso sobre Educación Matemática. Nuestro grupo lleva trabajando varios años ya sobre el tema de la interdisciplinariedad y la globalización, el conocimiento humano no está parcelado, es un todo integrado por partes que están perfectamente interconectadas e imbricadas y la Matemática juega un papel esencial en ese conocimiento. No es difícil relacionar la Matemática con el Teatro, la Escultura, la Pintura, con las Artes en general, porque desde su origen, es una actividad generadora de belleza y creatividad capaz de acercarnos a la comprensión del Universo.
Que duda cabe de que la Matemática ocupa un lugar primordial en nuestra cultura y precisamente por eso, hemos querido aportar nuestro humilde granito de arena llevando a cabo esta actividad de la que vamos a tratar en esta comunicación.
Todo tiene un principio más o menos definido, los antecedentes del concurso de problemas de ingenio de la THALES de Almería hay que buscarlos en un concurso denominado *"Problemas Problemáticos"* que se organizó por el departamento de Matemáticas del Instituto Nicolás Salmerón y Alonso de Almería; por aquel entonces se dirigía exclusivamente al alumnado de ese centro (BUP y COU). El concurso se organiza, por primera vez, abierto a toda la provincia de Almería, en el año 1992; a partir de ese momento pasa a denominarse *"I Concurso de Problemas de Ingenio THALES"* y es organizado por la SAEM THALES de Almería. Por aquel entonces se trataba, más o menos, de hacer algo parecido a la Olimpíada Matemática THALES pero a nivel de Secundaria. Se organizan sucesivas ediciones en 1993 (II C. de P. de I.) y 1994 (III C. de P. de I.) dirigidos a alumnado de BUP (1º, 2º y 3º). En 1995 no fue posible organizarlo por falta de recursos (tanto humanos como económicos). Retomamos la tarea en 1996 (IV C. de P. de I.), restringiendo la participación a alumnas y alumnos de 4º de ESO y 2º de BUP y así continuamos en 1997 (V C. de P. de I.) y 1998 (VI C. de P. de I.). En 1999 se organizó la VII edición del concurso y en ella dimos un giro esencial que explicamos en el siguiente apartado. En el 2000, el VIII C. de P. de I. ha ido dirigido ya sólo a alumnado de 4º de ESO.

LOS CAMBIOS

En las dos últimas ediciones hemos introducido cambios sustanciales en el concurso:

- Hemos sacado la prueba a la calle.
- Se añade una prueba por equipos, potenciando el trabajo participativo.
- Sube de 6 a 8 el nº de participantes por centro.
- Se ofrece comida a los participantes.
- Se añaden actividades lúdicas (Bingo matemático, juegos topológicos, ...)
- Se potencia la componente de popularización de las matemáticas a través de la repercusión en prensa (aspecto que hemos cuidado con esmero).
- Se pide a los participantes una cuota de 500 pts. (la pasta siempre es un problema).
- Se potencian las relaciones humanas entre los participantes.
- Y, la más relevante, utilizamos esta actividad para dar a conocer el patrimnonio histórico-cultural de Almería y provincia a nuestro alumnado y a la sociedad.

Respecto a este último aspecto, creemos que en Almería existe un partimonio histórico-cultural tan interesante como desconocido para el alumnado (más del 90% de los participantes reconoció no conocer la Alcazaba); estamos convencidos de que los pueblos tienen la obligación de hacer todo lo posible por dar a conocer a los jóvenes su patrimonio, en ese sentido la delegación de Cultura nos ha apoyado decididamente en esta idea. Los dos últimos años hemos desarrollado la actividad en la Alcazaba de Almería y tenemos intención de organizarla en años sucesivos en otros conjuntos monumentales tanto de la capital como de la provincia: el descargadero de mineral, la catedral, el parque de las almadrabillas, las minas de oro de Rodalquilar, los restos de arqueología industrial, la antigua estación de ferrocarril, ...
Entre los problemas que se proponen a los chavales incluimos siempre algunos que utilizan elementos del lugar en el que se desarrolla la prueba, por ejemplo el año pasado pedíamos a los chicos en la prueba por equipos lo siguiente:
¿Cuántas personas de religión musulmana, como máximo, podrían situarse en la explanada del segundo recinto de la Alcazaba?. No olvidéis las genuflexiones que hacen los musulmanes para orar.

Con lo cual tratamos de educar también en temas transversales tan candentes en nuestra provincia como son la interculturalidad y el racismo; algunos de los participantes pertenecen a otras culturas.

LOS OBJETIVOS

Tras ocho años de avatares (aunque siempre fue gratificante para nosotros, pues de otro modo no habríamos continuado) hemos ido aprendiendo de nuestros errores y modificando nuestras pretensiones de modo que ahora estos son los objetivos fundamentales que perseguimos con esta actividad:

- Popularizar las Matemáticas.
- Tratar de hacer perder el temor a las Matemáticas a nuestro alumnado, haciéndoles ver que éstas no constituyen algo aislado del mundo en el que vivimos y que pueden llegar a ser hasta divertidas.
- Utilizar pasatiempos lógico-matemáticos, problemas de ingenio, rompecabezas lógicos..., para hacer que los participantes se cuestionen, experiementen, estimen, exploren, hagan conjeturas y sugieran explicaciones para la resolución de los mismos.
- Desarrollar la capacidad de pensar y elaborar estrategias de resolución basadas en el razonamiento lógico-matemático.
- Fomentar el trabajo en equipo, la solidaridad y el espíritu crítico.
- Propiciar el intercambio de experiencias y las relaciones de amistad entre alumnado y profesorado de distintos centros.
- Educar en termas transversales: coeducación, interculturalidad, respeto al medio ambiente, ...
- Propiciar la innovación y el perfeccionamiento continuo en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas entre el profesorado y motivarlo para investigar sobre nuevas perspectivas metodológicas.
- Dar a conocer, a través de las Matemáticas, el patrimonio artístico e histórico-cultural de nuestra provincia y enseñar a apreciarlo.

PROGRAMA DE ACTIVIDADES DEL VIII CPI (18-03-2000)

El Concurso de Problemas de Ingenio va dirigido al alumnado de 4º de ESO de los centros públicos, concertados y privados de la provincia de Almería.

Cada centro puede inscribir un máximo de 8 alumnos seleccionados de la manera que estime más conveniente . En algunos centros, desde el principio de curso se incentiva al alumnado a trabajar en la resolución de problemas de ingenio, bien convocando miniconcursos internos, bien trabajándolos dentro del área de Matemáticas como un recurso más. En otros centros dejan la convocatoria abierta a los que quieran participar voluntariamente, hasta un máximo de ocho (somos flexibles con las bases y si algún centro quiere inscribir uno o dos alumnos más, no hay ningún problema; como tiene que ser).
Estas fueron las actividades programadas para el sábado 18 de marzo de 2000:

10h	Recepción en la Alcazaba y entrega de material.
10h 30m.	Prueba escrita individual (4 prob.) en los jardines de la Alcazaba.
12h	Organización de los grupos para la prueba por equipos en la explanada que da acceso al segundo recinto. Descanso y refresco.
12h 15m	Prueba por equipos utilizando elementos de la Alcazaba como objeto de los problemas a resolver.
13h	Actividades lúdico-Matemáticas en el patio de armas. Comida picnic a todos los asistentes. Visita didáctica guiada al conjunto monumental de la Alcazaba. Entrega a los asistentes de material didáctico sobre la Alcazaba.

En definitiva se trataba de pasar un día a lo grande conjugando las matemáticas con el patrimonio histórico, porque estamos convencidos de que los pueblos tienen la obligación de cuidar y divulgar entre las gentes (en especial la juventud) su patrimonio histórico-artístico-cultural.

LA EVALUACIÓN DE LAS PRUEBAS Y DE LA ACTIVIDAD

Una vez acabada la jornada, un equipo evaluador (integrado por profesorado de la organización y otros) se reúne, comentan los incidentes y se reparten los problemas. Cada problema de la prueba individual se corrige por una sola persona de acuerdo con los siguientes criterios generales que se acordaron con antelación:

En la resolución de un problema interesa saber sobre todo:
- Si se ha sabido clasificar datos.
- Si se ha identificado la condición.
- Si se sabe lo que me piden (la incógnita).
- Si se han usado estrategias.
- Si se ha tenido una idea original.

- Si se atreve a formular la conjetura.
- Si se ha comprobado, justificado o demostrado su solución.
- Si vuelve a buscar otra estrategia.
- Si se usan recursos para la resolución de los problemas.

También se tienen en cuenta la presentación y el orden.

Asímismo se pasó a todos los asistentes una encuesta para evaluar la actividad. Este año la participación fue más alta que nunca: más de cien alumnas y alumnos de 15 centros de ESO.

VALORACIÓN GLOBAL.

La valoración que hacemos de esta actividad es altamente positiva puesto que se cumplen sobradamente los objetivos: para el alumnado suele ser una experiencia agradable de intercambio con otros compañeros y estimulante como reto personal; para el profesorado supone una jornada en la que hay ocasión de mantener contactos profesionales y personales con colegas lo cual, en estos tiempos que corren, resulta muy gratificante; el eco en los medios de comunicación (prensa local y regional, radio, televisiones locales, ...) contribuye a extender la idea de que las Matemáticas son algo vivo, creativo, imaginativo, gratificante, útil, ..., totalmente diferente a la tradicional de "materia-ogro" del currículo escolar.

Para terminar tenemos que dar las gracias a las entidades, casas comerciale y organismos colaboradores (Deleg. de Educación y Ciencia, Deleg. de Cultura, Concejalía de Cultura del Ayuntamiento de Almería, Patronato de turismo, CEPs de la provincia de Almería, Caja Rural de Almería, Papelería Dilop, PRYCA e IES Al-yanub de Vera) y en especial al profesorado de los centros que han participado en este concurso a lo largo de estos 8 años por la labor que han llevado a cabo, no sólo acompañando a los participantes el día de la prueba, también animándolos durante el curso, preparando material para sus alumnos y aportando sugerencias e ideas, problemas y ánimos (que a veces es lo que más falta nos hace) al equipo organizador.

Salud.

$$\infty^{\infty}$$

OLIMPIADAS MATEMÁTICAS DE 6º DE PRIMARIA EN GRANADA

Mª ISABEL BERENGUER · JAVIER BERENGUER · LUIS BERENGUER · BELÉN COBO · MIGUEL A. FRESNO · PABLO FLORES
JUANA Mª NAVAS · ANTONIO MORENO · MONTSERRAT SÁNCHEZ · MANUEL TOQUERO.

Hace cuatro años, con la implantación de la LOGSE, y la adscripción de los maestros a Primaria y Secundaria, surgió la necesidad de recoger todos los esfuerzos que los maestros de octavo de EGB habían realizado para que las Olimpiadas fueran un éxito. En esta situación pensamos que plantear unas Olimpiadas para 6º de Primaria podría ser una forma excelente para seguir contando con el apoyo y el buen hacer de todos los que colaboraban con nosotros.

De esta forma, y teniendo conocimiento de otras experiencias similares decidimos poner en marcha las I Olimpiadas para 6º de Primaria en la provincia de Granada.

La participación se instrumenta con equipos de tres componentes. Todos las pruebas intentan abarcar todas las áreas del currículum de Matemáticas en Primaria.

Las pruebas recogen una serie de ejercicios, problemas y demás cuestiones que pretenden una reflexión sobre distintas situaciones problemáticas. Se hace más énfasis en el proceso de resolución que en el propio resultado final. No se puede utilizar la calculadora, pero sí se aconseja utilizar los instrumentos de dibujo y ser cuidadosos con la presentación.

Las pruebas se dividen en Prueba de Equipos, Prueba de Velocidad y Prueba de Relevos, en las dos primeras se trabaja en grupo, y en la última el trabajo es individual, aunque la colaboración del equipo es primordial.

La Prueba de Equipos, donde intentamos promocionar el trabajo cooperativo, tiene una duración de cuarenta minutos, repartidos en dos partes: cinco minutos para la lectura del problema y elaboración de las estrategias iniciales, y treinta y cinco minutos, para su resolución. Esta prueba es una situación problemática en la que deben meterse como protagonistas y pensar, crear, hacer estimaciones y si el tiempo lo permite conseguir la resolución total. Se plantea como un problema adaptado para que su resolución no sea sólo un agregado de trabajos independientes, sino consecuencia de una puesta en común de pistas, estrategias, planificación y resultados que se vuelcan en una sola hoja de respuestas.

EJEMPLO DE UNA PRUEBA DE EQUIPOS

Este año, el Año Internacional de las Matemáticas, la entrega de premios de la Olimpiada de Primaria se celebra en el Salón de Actos de La General, en la Plaza de Villamena de Granada.
Cuatro matrimonios, un matrimonio amigo y tres de ellos padres, de un equipo que ha participado en la prueba Final, han quedado en la puerta del edificio, pero cada persona llega por separado.
¿Cuántas personas tendrán que haber llegado, como mínimo, para que con certeza estén Cosme y su mujer?
¿Cuántas personas tendrán que haber llegado al restaurante, como mínimo, para que con certeza haya al menos un matrimonio?
¿ Cuántas personas tendrán que haber llegado, como mínimo, para que haya con certeza dos personas del mismo sexo?
¿Cuántas personas tendrán que haber llegado, como mínimo, para que haya con certeza dos mujeres?

A medida que van llegando los ocho, se saludan de diversas maneras: con un simple "hola", un beso o un apretón de manos. Los saludos vienen expresados en la siguiente tabla:

	Antonio	Bernardo	Cosme	Daniel	Ana	Berta	Carmen	Dora
Antonio								
Bernardo	Manos							
Cosme	Hola	Hola						
Daniel	Beso	Hola	Manos					
Ana	Beso	Beso	Hola	Beso				
Berta	Hola	Manos	Hola	Manos	Beso			
Carmen	Manos	Beso	Manos	Beso	Beso	Beso		
Dora	Beso	Hola	Beso	Manos	Beso	Hola	Manos	

Haz una lista de quiénes se saludan dándose un beso, dándose un apretón de manos, o simplemente diciéndose hola.

Cuando una persona les avisa que está comenzando la entrega, se encuentran con que sólo hay sitio en las dos últimas filas, pero cuatro asientos delante y cuatro detrás. Si los hombres se sientan detrás, porque son más altos y Ana se sienta en el lado de fuera, ¿de cuántas formas se pueden sentar las otras tres?
Os sugerimos que empleéis la siguiente ficha, y os ayudéis del ejemplo:

A	A
B	
C	
D	

Por si aún no los conoces, los hombres se llaman, respectivamente, Antonio, Bernardo, Cosme y Daniel, y las mujeres, Ana, Berta, Carmen y Dora.

Durante la entrega de premios se han repartido caramelos. Al final Ana se ha comido 4 caramelos; Berta, 3; Carmen, 2, y Dora, 1. Antonio ha comido los mismos caramelos que su mujer; Bernardo, el doble de la suya; Cosme el triple de la suya, y Daniel, cuatro veces más que la suya. En total, en una bolsa que llevaba Dora en el bolso y que han utilizado para no tirarlos al suelo, hay 32 envoltorios de caramelos.
¿ Podríais decirnos cómo se llama la mujer de Cosme?
Cuando termina el acto, se despiden, ¿cuántos saludos de despedida se dan en total? (Si tenéis que hacer alguna suposición, explicadlas en la respuesta).

La Prueba de Velocidad, que consta de 5 ejercicios, se resuelve también en equipo, pero el tiempo de realización de cada ejercicio se limita a cinco minutos. Los ejercicios que se proponen en esta prueba tienen una amplia serie de respuestas.

EJEMPLO DE UNA PRUEBA DE VELOCIDAD

La figura sombreada.

Dibuja en la cuadrícula todas las figuras que puedas que tengan la misma superficie que la figura sombreada.
Se presenta una cuadrícula con la figura de una Z con un área de 5 cuadraditos.

No todos fueron al viaje de estudios.

En un viaje de estudios de un colegio, los 68 alumnos del último curso deben cubrir unos gastos de 8.228 euros, pero, al final, no han podido ir todos, y tienen que pagar 187 euros cada uno. ¿Cuántos alumnos no han podido ir a dicho viaje?

La Prueba de Relevos, que consta de 8 ejercicios, se trabaja de forma individual, si bien cada equipo trabaja sobre la misma resolución de los ejercicios, cinco minutos cada componente del equipo en cada vuelta, con un minuto de intercambio de información de lo realizado, totalizando dos vueltas por la mesa de trabajo. Todos los ejercicios que se entregan permanecen en la mesa de trabajo hasta el final, estén o no terminados.

EJEMPLO DE ALGUNOS EJERCICIOS DE LA PRUEBA DE RELEVOS

1.- ***Cuadrado mágico***. Distribuye los números 1, 2, 3, 4,...,25, por los cuadros de la figura, (conservando en su lugar los que ya están colocados), de manera que cada fila, cada columna y cada diagonal sumen lo mismo.

3	16			15
20	8		14	2
7			1	
24	12	5		6
11		17	10	23

2.-Colocad entre las nueve cifras siguientes signos de las cuatro operaciones aritméticas (+, -, ×, ÷) en los lugares adecuados (no necesariamente en todos), para que esta expresión sea una igualdad:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \ = 100$$

Hay más de una solución, así que a ver cuántas podéis encontrar.

3.- ***Entre tabla y tabla***

En una copistería hay un letrero que dice: *"Cada fotocopia a 5 pesetas".* En otro letrero, que tiene el aspecto de tabla, pero que no se ven bien algunos números, hay escrito:

Nº de fotocopias	1	5	10	15	20	25	...	46	84
Precio (en pesetas)	5				100				

Termina de rellenar los datos que faltan en la tabla.

En una librería hay una oferta del tipo 3 × 2 de libros de cuentos. A 154 pesetas un libro, y 3 libros por 308 pesetas.

Rellena la tabla siguiente en la que figuren los precios de las 10 primeras unidades:

Nº de libros	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Precio	154	308								

Las pruebas se han ido modificando durante estos cuatro años en aquellos aspectos que se ha visto necesario, tanto en cuanto a la organización del tiempo, por ejemplo, la duración de debate en la prueba de equipo, que ha pasado de 10 a 5 minutos, mientras que el tiempo de resolución se ha ampliado de 30 a 35 minutos, como en el número de ejercicios en la prueba de velocidad que ha pasado de 6 ejercicios a 5. Respecto a las situaciones problemáticas que se plantean, estamos consiguiendo que vayan en consonancia con la participación por equipos, y con todo lo que ello conlleva de trabajo cooperativo.

Las Olimpiadas de 6º de Primaria se celebran en su primera fase, la comarcal, simultáneamente con las Olimpiadas de 2º de Secundaria, con sedes en Baza, Granada capital, Guadix, Motril, Órgiva, y una fase final, con los equipos seleccionados en la fase provincial, que celebramos en Granada y cuyos resultados y premios damos a conocer al mismo tiempo que los finalistas para la fase Regional de dichas Olimpiadas de Secundaria. Los colegios que quieren participar pueden presentar un máximo de tantos equipos, formados por tres componentes, como grupos de 6º tengan.

En cuanto a la participación, ya son 82 centros de primaria los que se han presentado este año, reuniendo a un total de 414 alumnos, y distribuidos de la siguiente forma:

	CENTROS	ALUMNOS
Granada	45	249
Motril	14	60
Baza	10	45
Guadix	7	30
Órgiva	6	30
TOTALES	82	414

En vista del éxito que supone para nosotros la participación en este evento, el curso que viene organizaremos nuestra quinta edición.

PANELES

LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA ADITIVA Y ESTRUCTURA MULTIPICATIVA EN EL SEGUNDO 1Y TERCER CICLO DE LA EDUCACIÓN PRIMARIA

APOLONIA PINTEÑO GÓMEZ · ANA ALCALÁ CRIADO

INTRODUCCIÓN

Una parte importante de la investigación educativa en el área de Matemáticas recae en la resolución de problemas matemáticos. Esto no resulta sorprendente, ya que, en la actualidad, es un hecho comúnmente aceptado que la adquisición y transferencia de las habilidades de resolución de problemas constituyen uno de los objetivos fundamentales de la escolarización en general, y de la educación matemática en particular.

El consenso alcanzado con respecto a que el objetivo central de la educación matemática radica en la resolución de problemas, contrasta vivamente con una gran cantidad de datos consistentes de investigación en los que se hace patente que muchos estudiantes no dominan, o al menos no suficientemente, las habilidades requeridas para abordar eficientemente nuevas tareas y problemas matemáticos, que garanticen una oportunidad razonable de tener éxito. Numerosas publicaciones y estudios muestran datos que indican cómo los alumnos de la escuela actual no dominan suficientemente el conocimiento y las habilidades cognitivas necesarias para abordar con éxito y eficientemente nuevos problemas y tareas de aprendizaje.

Entre las variables que influyen en la resolución de problemas aritméticos se cuentan las de carácter lingüístico, siendo las variables semánticas las más importantes en la determinación de las dificultades que encuentran los niños en la resolución de problemas verbales (Puig y Cerdán, 1988). La estructura semántica de los problemas de suma y resta ha sido denominada Problemas de Estructura Aditiva y se clasifican en cuatro categorías: Cambio, Combinación, Comparación e Igualación.

Los problemas de tipo **Cambio** implican una cantidad inicial y una acción que que causa una transformación (incremento o decremento) de esa cantidad, produciéndose un resultado final. Puede preguntarse al resolutor por la cantidad inicial, el resultado final o por el cambio. Los problemas de Cambio pueden ser de 6 tipos diferentes.

Los problemas de **Combinación** describen relaciones estáticas entre conjuntos. Responden al esquema parte- parte- todo. Puede darse una parte y la otra y preguntar por la cantidad de la unión (el todo); o bien expresan el todo y una parte, teníendose en este caso que averiguar la parte que falta. Los problemas de Combinación son de 2 tipos.

En los problemas de **Comparación** se presentan relaciones estáticas de comparación entre dos cantidades. Pero esta comparación se hace sobre dos cantidades disjuntas. Una de las cantidades hace funciones de "referente" y la otra de "cantidad comparada". Un tercer elemento del problema es "la diferencia" o cantidad que excede entre el referente y la cantidad comparada. Utilizan los términos comparativos "más que" y "menos que". Los problemas de Comparación son de 6 tipos.

La última categoría, **Igualación**, son un híbrido de problemas de comparación y cambio. Se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen, pero como se pide igualar las dos cantidades comparadas es también un tipo de problemas con relaciones dinámicas, es decir, se produce una transformación sobre una de las cantidades para conseguir igualar numéricamente a la otra. Estas relaciones se establecen por el uso del comparativo de igualdad "tantos como", "tener los mismos que ", "igual número que". Pueden ser de 6 tipos.

En la tabla siguiente presentamos los tipos de problemas de estructura mutlplicativa, los que se resuelven con un multiplicación o con una división.

1 Este trabajo ha sido realizado gracias a la subvención otorgada por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. Proyecto DGEEFP/IGB/AFG (116).

Tabla I Resumen de los problemas de Estructura Multiplicativa.

ISOMORFISMO DE MEDIDAS (IM).	IM1	Se resuelve con una multiplicación
	IM2	Se resuelve con una división partitiva
	IM3	Se resuelve con una división cuotitiva (Agrupamiento)
ESCALARES GRANDES Y PEQUEÑOS	EG1	Emplea el término "veces más". Se resuelve con una multiplicación
	EG2	Se resuelve con una división partitiva.
	EG3	Se resuelve con una división cuotitiva
	EP1	Emplea el término "veces menos". Se resuelve con una multiplicación
	EP2	Se resuelve con una división partitiva.
	EP3	Se resuelve con una división cuotitiva
PRODUCTO CARTESIANO (PC)	PC1	Se resuelve con una multiplicación.
	PC2	Se soluciona con una división.

El propósito de este estudio es contribuir a un mejor conocimiento teórico y aplicado de los procesos implicados en el aprendizaje de las matemáticas elementales, y en concreto en el campo de los problemas aritméticos de una sola operación. Tratamos de conocer el rendimiento de los niños y niñas de los dos últimos Ciclos de educación primaria para luego entrenarlos en la resolución de problemas con varias estrategias que les hagan dominar los diferentes tipos de problemas de estructura aditiva y estructura multiplicativa.

MÉTODO

Participantes

El estudio se ha llevado a cabo sobre 95 alumnos de segundo y tercer Ciclo de Educación Primaria distribuidos en 5 unidades del Colegio Público Jaime Balmes de la ciudad de Cádiz.

MATERIALES

Todos los alumnos han realizado una batería de problemas de estructura aditiva y multiplicativa, distribuida a lo largo de cinco sesiones.

Asimismo se ha diseñado un Programa Instruccional en Resolución de Problemas Artiméticos Elementales Verbales de Estructura aditiva y estructura multiplicativa. Este diseño se compone de varios subprogramas. En detalle son:

1. Programa de entrenamiento para los problemas de Cambio.
2. Programa de entrenamiento para los problemas de Combinación.
3. Programa de entrenamiento para los problemas de Comparación.
4. Programa de entrenamiento para los problemas de Igualación.
5. Programa de entrenamiento para los problemas de Isomorfismo de Medidas
6. Programa de entrenamiento para los problemas de Escalares Grandes y Pequeños
7. Programa de entrenamiento para los problemas de Producto Cartesiano

En la elaboración del Programa Instruccional se han introducido variables que pueden influir en el resultado final del resolutor. Para este estudio hemos introducido las siguientes variables al construir los problemas que han sido entrenados en las categorías entrenadas.

A. Aspectos manipulativos, gráficos y simbólicos.

B. Resolver problemas con números pequeños como estrategia para resolver los mismos problemas enunciados con números grandes.

C. Presentar los problemas con cambios en la secuencia de la aparición de las proposiciones numéricas.

D. Presentar problemas con la proposición interrogativa al final del enunciado o comprendiendo todo el texto del problema.

E. Realizar recodificaciones del enunciado del problema para aumentar su comprensión.

PROCEDIMIENTO.

En primer lugar se ha realizado la evaluación del dominio de los Problemas Aritméticos Escolares Verbales de una sola operación en todos los sujetos de la muestra (N= 95). El instrumento utilizado fue la batería de problemas descrita antes. El orden de aplicación de los problemas se hizo totalmente al azar.

Después de la fase de evaluación inicial se ha empezado a aplicar el programa instruccional a lo largo del último trimestre del curso 1999-2000. Cualquier sesión sigue este esquema general de trabajo:

a. Introducción por parte del instructor con los componentes manipulativos.

b. Idem con los componentes gráficos y simbólicos.

c. Realización por parte de los sujetos de los demás problemas (En las Hojas de las Lecciones o Sesiones de Trabajo). Esta tarea es realizada individualmente, en parejas o en pequeños grupos de cuatro/tres alumnos que es como están agrupados en el aula.

e. Corrección de la tarea. Cuando la mayoría del grupo ha terminado el trabajo se realiza la corrección. Esta suele ser colectiva, siendo guiada por la maestra. Se discuten las soluciones aportadas por los alumnos, se crea conflicto cognitivo en el caso de soluciones divergentes entre el alumnado. Se hace especial hincapié en la comprobación de la solución volviendo a leerse la pregunta del problema y comprobando si la solución aportada se corresponde con lo pedido. Se ha tenido especial cuidado en el tratamiento correcto de los errores.

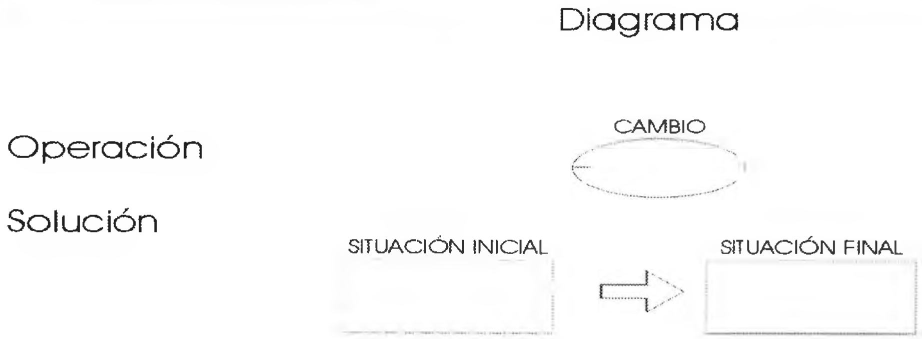
FASE MANIPULATIVA	1. Pensando en el problema sin números 2. Representando la situación con fichas 3. Resolviendo el problema
FASE DE DIAGRAMA	1. Elección del diagrama adecuado. 2. Situación de la incógnita en el diagrama del problema. 3. Resolviendo el problema
FASE SIMBÓLICA	1. Elegir la operación adecuada y su representación simbólica. 2. Comprobar que la solución es adecuada.

En el Cuadro se presenta un resumen de las sesiones instruccionales.

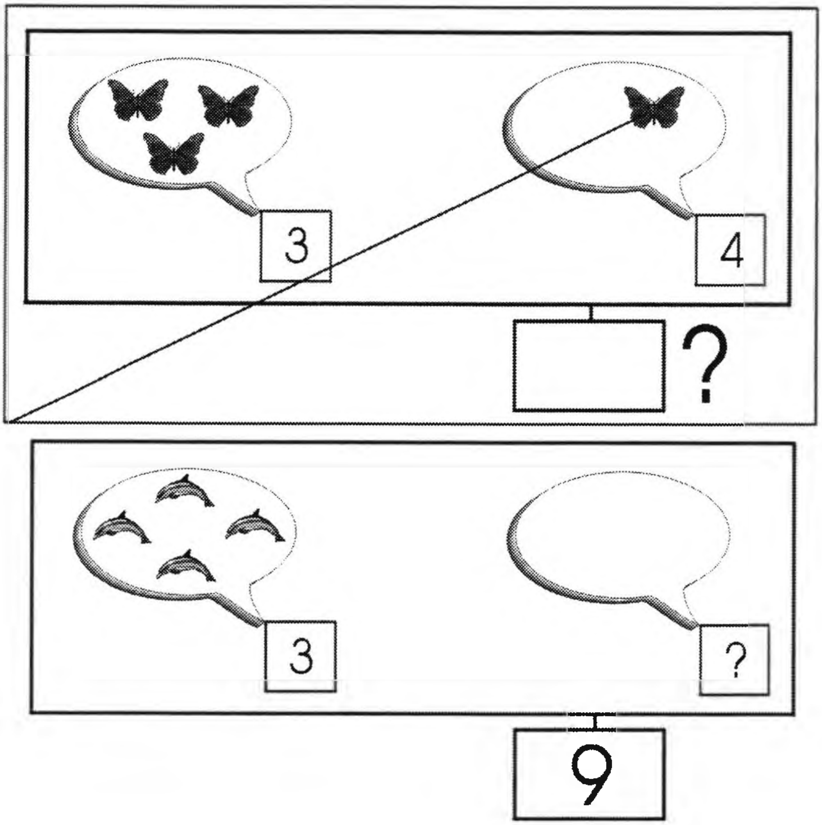
La temporalización ha sido dedos sesiones por semana durante el período que se lleva aplicando.

EJEMPLO DE LA PRESENTACIÓN CON DIAGRAMAS DE UN PROBLEMA DE CAMBIO 6.

A Verónica le quedan 5 libros después de regalarle a su sobrino Sergio otros 4 libros. Cuántos libros tenía Verónica al principio?



EJEMPLOS DE DIAGRAMAS PARA LOS PROBLEMAS DE COMBINACIÓN.



RESULTADOS

Por limitaciones de espacio vamos a presentar los resultados encontrados realizando un cómputo global por cursos y categorías semánticas dentro de las dos estructuras consideradas (aditiva y multiplicativa). Se presentan utilizando como medida el Indice de Dificultad (mientras más se acerque a 1 más fáciles son los problemas). Estos resultados nos sirven, cuando se analizan en detalle, para conocer cuáles son los problemas que deben recibir mayor atención en función de su dificultad y categoría. La

Tabla II presenta los resultados de los problemas de estructura aditiva y la Tabla III los resultados de los problemas de estructura multiplicativa.

Tabla II. Resultados de los problemas de estructura aditiva por cursos y categorías.

	CAMBIO	COMPARACIÓN	IGUALACIÓN	COMBINACIÓN
3º	0,45	0,38	0,50	0,52
4º	0,75	0,63	0,83	0,81
5º	0,89	0,63	0,88	0,92
6º	0,89	0,74	0,89	0,97

Los problemas que en conjunto resultan ser más difíciles son los de Comparación, aquellos que encierran relaciones proposicionales con "más que" y "menos que". Por contra los más fáciles son los de Combinación, los que engloban relaciones entre las "partes y el todo"

Tabla III. Resultados de los problemas de estructura multiplicativa por cursos y categorías.

	ISOMORFISMO DE MEDIDAS	ESCALARES GRANDES	ESCALARES PEQUEÑOS	PRODUCTO CARTESIANO
3º	0,41	0,06	1	0,25
4º	0,67	0,12	0,09	0,10
5º	0,66	0,28	0,09	0,11
6º	0,79	0,44	0,44	0,42

Globalmente, los problemas multiplicativos son bastante más difíciles que los aditivos. Son los problemas de comparación multiplicativa del tipo Escalares (Grandes y Pequeños) los más difíciles, son los problemas del tipo "veces más" y "veces menos". También los problemas de Producto Cartesiano resultan inaccesibles prácticamente hasta el final de la Educación Primaria, aún así menos de la mitad de los alumnos resuelven este tipo de problemas.

REFERENCIAS.

Puig, L: Cerdán, F. (1988). *Problemas Aritméticos Escolares.* Madrid: Síntesis.

DOS MIL PARA EL 2000

José Muñoz Santonja · Juan Antonio Hans · Antonio Fernández-Aliseda Redondos
Grupo Alquerque - Sevilla

INTRODUCCIÓN

La asignatura de Matemáticas es fundamental en todos los planes de estudios del mundo. Sin embargo, son muchas las personas que la recuerdan de sus años escolares con desagrado, cuando no con franca aversión. No es raro encontrar declaraciones de famosos: artistas, deportistas, políticos, etc. que no tienen reparo en quedar como incultos al afirmar que ellos no saben nada de Matemáticas porque nunca se les dieron bien.

Entre la gente de la calle tampoco es raro encontrarse con personas que cuando tienen que realizar alguna cuenta, tuercen el gesto y prefieren delegar en otros ("Hazla tú, que eres matemático"), aunque esas mismas personas se lanzan a hacer cuentas con devoción, cuando se trata de saber si su equipo favorito tiene aún posibilidades de permanecer en primera división, y estudian complicadísimas estructuras en las que entran en liza todos los equipos, planteando todos los posibles casos según lo que hagan terceros, cuartos y hasta quintos equipos o más. Por eso pensamos que el Comité para la celebración del 2000 como Año Mundial de la Matemática debería realizar algún acto de agradecimiento a la Selección Española, pues con su habitual estrategia de comenzar perdiendo, ha conseguido que prácticamente toda España echara mano de cálculos para saber cómo deberían quedar los restantes partidos, de forma que la Selección tuviera posibilidades de pasar a cuartos de final de la Eurocopa de fútbol.

LAS MATEMÁTICAS EN LOS PASATIEMPOS.

A pesar de la aversión que parece existir hacia las Matemáticas, no deja de resultar curioso la gran profusión de elementos matemáticos que podemos encontrarnos, especialmente en los medios de comunicación, y que se utilizan para hacer llegar de una forma más directa y concisa, la información a los usuarios de esos medios.

Un ejemplo muy significativo de esto lo son los pasatiempos que abarrotan los medios impresos (diarios, revistas,...), en especial los suplementos de fin de semana, que suelen traer una selección bastante amplia de pasatiempos de todo tipo. En un gran número de ellos se utilizan conceptos o procedimientos propios de las Matemáticas.

Aunque no queremos aquí insistir en este aspecto, que por otra parte es motivo de un taller, también recogido en estas actas, sí queremos dar un par de detalles. Estos pasatiempos con elementos matemáticos son muy aprovechables por los profesores para distintos eventos. Por supuesto, son muy útiles en el aula como recurso didáctico, y esto lo corrobora el hecho de que en muchos libros de texto actuales de E.S.O. hay entre las actividades pasatiempos del mismo tipo de los que aparecen en la prensa. Por otro lado, también son pruebas ideales para gymkhanas, olimpiadas, competiciones matemáticas, etc. porque suelen ser muy bien acogidas por los alumnos que participan en esas actividades recreativas.

PASATIEMPOS NUMÉRICOS.

Entre estos juegos y entretenimientos de Matemáticas recreativas, existe un amplio bloque formado por acertijos y pruebas basados en números. Como los conocimientos básicos de operaciones y la dificultad de su propuesta suelen estar al alcance de cualquiera, estos rompecabezas tienen bastante aceptación en cualquier edad. En concreto y haciendo referencia a nuestras clases, hemos podido comprobar que esos mismos alumnos que rechazan de plano realizar cualquier tipo de operaciones, se enfrascan febrilmente en toda una vorágine de sumas y productos, cuando se les plantea alguno de estos acertijos y realizan muchas más operaciones que si se las presentáramos de otra manera, y además de una forma voluntaria (algunos siguen buscando soluciones en casa) y gratificante cuando consiguen los objetivos.

Entre este tipo de pasatiempos existen varios que son muy conocidos y que no faltan en ningún texto especializado en la materia. De todos modos pensamos que no está de más hacer referencia a algunos de ellos. Así que pongamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: *Los cuatro cuatros.*
Utilizando 4 cuatros y las operaciones aritméticas que se deseen obtener los números naturales del 0 al 10.
Las cifras pueden usarse independientemente o agrupándolas para formar números de varias cifras. Los primeros números se pueden obtener fácilmente, como por ejemplo:

$$44 - 44 = 0$$
$$44 / 44 = 1$$
$$4/4 + 4/4 = 2$$
$$(4+4+4) / 4 = 3$$
$$4 + 4 \times (4-4) = 4$$

Estas soluciones no son únicas, sin embargo, a medida que vamos ampliando la cuenta aparecen algunos números difíciles de conseguir. Incluso es posible continuar la lista obteniendo números superiores al 10. Es interesante plantear en clase por grupos cuántos números distintos se pueden conseguir.

Ejemplo 2: *Todo a cien.*
Utilizando las cifras del 1 al 9 y las operaciones aritméticas que se deseen, conseguir como resultado el número 100.
A continuación añadimos algunos ejemplos de los cientos de soluciones posibles para que se vean diversos tipos, según las operaciones que se usen y las agrupaciones o no de cifras.

$(1+2)\cdot 3\cdot 4+5-6+7\cdot 8+9$	$1+23\cdot 4+5-6+7-8+9$
$9+8+7+6+5+4^3+2-1$	$(1234-5\cdot 6)/7-8\cdot 9$
$1\cdot 32+68\cdot(5-4)^{(9-7)}$	$65+34+9-8\cdot(2-1)^7$
$\sqrt{(9)}\cdot(8+7)+[6\cdot(5+4)]+3\cdot 2\cdot 1$	$(9!/8!)\cdot[(7!/6!)+(5!/4!)]-3!-2!\cdot 1!$

En este ejemplo, como en el anterior, es fundamental el manejo de las operaciones y sobre todo, el correcto uso de la jerarquía de operaciones para escribir una expresión que realmente dé el resultado requerido. En clase hay que hacer hincapié en que los alumnos escriban correctamente la serie de operaciones que da lugar al resultado.

HOMENAJE AL 2000.

Basado en el último ejemplo que hemos propuesto, se nos ocurrió este año hacer una modificación con motivo del año 2000 y nos planteamos si sería posible obtener esa cantidad, utilizando las cifras del 1 al 9 (incluso algunos alumnos trabajaron con las diez cifras, del 0 al 9). Al principio, poco a poco, comenzaron a aparecer algunas soluciones; más tarde vimos que se obtenían con relativa facilidad y comenzamos a trabajarlas en nuestros talleres. Esta actividad la hemos realizado con alumnos de secundaria obligatoria, desde el primer curso, hasta alumnos de 2º de bachillerato. También han aportado algunas soluciones recientes licenciados en Matemáticas que realizaron el C.A.P. en nuestros centros y profesores de secundaria que han asistido a diversos cursos de Matemáticas recreativas que hemos impartido durante este año.

Ahora queremos presentar una muestra de las soluciones que hemos recogido. Por lo limitado del espacio, sólo aparecen algunas que son ejemplos de distintos tipos. Existen muchas más. Nuestro compañero Miguel Castillo, profesor del I.E.S. San Isidoro de Sevilla, tuvo la gentileza de colgar en su página web varias soluciones más. Independientemente de lo anterior, esta página, de título "Gacetilla Matemática", es merecedora de una visita, pues es atractiva y con mucha información. Su dirección es www.arrakis.es/~mcj
Hemos agrupado las soluciones en distintos tipos y hemos puesto algunas soluciones de cada caso.

1er tipo: cifras sin agrupar y operaciones básicas.

2x(9-7)x4x5x(6-1)x(8-3)	[(9x8x7x3x2:6)-5+1)]x4
(9+1)x(8+2)x{6x4-[(7+5):3]}	(6+4):5x(8+2)x(7+3)x(9+1)
5x4x(9x8+6x3+7+2+1)	(1+2x3x5x6)x(7+8-4)+9

2º tipo: cifras agrupadas y operaciones básicas.

987x2+6x3+5+4-1	7968:4+(5+3)x(2-1)
(913+87)x(4-2)x(6-5)	1986+7x5-(4+2-3)
1985+7+6+(4+2)/3	1342+756–98

3er tipo: soluciones utilizando potencias.

2^3x5x[8x9-(4x7-6)]x1	{6^4-[98x3+(7-5)]}x2x1
(6+4):5x$(8+2)^{(9-7-1)x3}$	$[(6+8):7]^4$X$5^{(9-1-2-3)}$

$(1+4+5)^3x2+(6-7)-(8-9)$ $45^2-3-6-7-9x1^8$

4º tipo: soluciones con las cifras ordenadas (las más difíciles de encontrar)

$1^2x34x56+7+89$ $12^3+4x[(5-6)+78-9]$
$[987+(6-5)+4x3]x2x1$

PARA ACABAR, UN RETO.

Cuando trabajamos esta actividad en los cursos de formación que hemos impartido, lanzamos un reto a los compañeros que asistían. Solicitamos que la actividad se llevara a clase con el fin de conseguir dos mil soluciones distintas para esta prueba. Ese mismo reto os queremos lanzar: conseguir entre todos, antes de acabar el año, esa cifra redonda de dos mil soluciones. A tal fin, durante las jornadas habrá un panel en blanco junto al nuestro para quien quiera aportar su solución. Desde estas páginas os animamos a ello.

También puedes participar en la experiencia llevando la actividad a tu clase y enviándonos las soluciones que encuentres. Para ello añadimos nuestros correos electrónicos:

José Muñoz Santonja pepemunoz1@teleline.es
Juan Antonio Hans Martín juanhans@teleline.es
Antonio Fernández-Aliseda Redondo aliseda2@teleline.es

UN ITINERARIO POR LA HISTORIA DE LA PROBABILIDAD Y LA ESTADÍSTICA EN LA BIBLIOTECA DEL REAL OBSERVATORIO DE LA ARMADA DE SAN FERNANDO

GABRIEL RUIZ GARZÓN

RESUMEN

Este trabajo expone un posible itinerario por los ricos fondos bibliográficos de la biblioteca del Real Observatorio de la Armada de San Fernando, a través del cual podemos repasar la hitos más importantes en la historia de la Estadística. Utilizando como recurso didáctico los ejemplares de algunas obras maestras, podemos fomentar en nuestros alumnos el amor por la Estadística.

ITINERARIO.

De acuerdo al aserto de que sólo se ama lo que se conoce, seguidamente presentamos un posible itinerario por los fondos documentales de la Biblioteca del Real Observatorio de la Armada. Fondos que podrían ser admirados en una visita siguiendo un orden cronológico:

Podríamos comenzar nuestro recorrido, admirando del holandés Christian Huygens un breve tratado titulado *De ratiocinnis in ludo alae* ("Sobre los razonamientos relativos a los juegos de dados"), publicado en 1657. Huygens fue quien primero se inspiró en la correspondencia entre Fermat y Pascal. En esa obra define el concepto de *expectatio* y que despues se tradujo por el concepto de esperanza, como valor de un juego justo. A cualquier alumno le llamará la atención el manual donde se dio nombre a la esperanza.

De Pierre Remond de Montmort (1678-1719), en el Observatorio se cuenta con un ejemplar del *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* publicado en París en 1713. En esta obra se ofrece un análisis más completo del realizado por Pascal, Fermat o Huygens, del "problema del reparto". Se analizan toda una serie de juegos de cartas y azar populares entre los nobles de aquella época. Su éxito fue inmenso, incluso superior al que tuvo el *Ars Conjectandi,* obra póstuma de Jacques Bernoulli y que apareció simultáneamente con la segunda edición del texto de Montmort.

Podemos continuar nuestro recorrido con otra obra clásica del matemático de origen francés Abraham de Moivre (1667-1754): *The Doctrine of Chances: or, a method of calculating the probability of events in play.* Se publica en 1718 en Londres, donde el autor tuvo que exiliarse por ser hugonote. Allí entabló amistad con Newton y Halley y se dedicó a dar clases particulares de Matemáticas. En esta obra se fija la teoría de permutaciones y combinaciones a partir de los principios de la teoría de probabilidades y expone varios problemas sobre las probabilidades de extraer una serie de bolas de una urna, así como cuestiones relativas a anualidades de vida. En el prólogo de esta obra se cita los trabajos de Jean, Jacques y Nicolás Bernoulli. De Moivre estaba interesado en construir para la teoría de probabilidades métodos y notaciones generales, en la forma de lo que él imaginaba como un álgebra nuevo. Es famoso el problema que lleva su nombre: Se trata de hallar la probabilidad de obtener un número de puntos dado al lanzar n dados que tienen cada uno m caras.

Durante el siglo XVII, algunos eruditos muestran interés por la Estadística Demográfica como resultado de la utilidad que tenía para los gobernantes conocer si se producía un aumento o una disminución de la población. Dentro de este apartado, podemos admirar de Antoine Deparcieux (1703-1768), el *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine;d'où l'on déduit la manière de déterminer les Rentes viageres, tant simples qu'en Tontines...* publicada en París en 1746. En esta época el estado reunía capitales vendiendo rentas vitalicias. En las tontinas una serie de personas aportan una determinada cantidad que forma un fondo; los últimos sobrevivientes se reparten el capital y los intereses entre ellos. Este libro trata de calcular, basándose en distintas tablas de mortalidad, los réditos que dichas tontinas dejan en función del capital inicial, intereses, etc... Estas tablas de Deparcieux fueron largamente empleadas en las compañías de seguros. Otro libro del mismo estilo pero escrito en holandés es el *Derde verhandeling over de probable meenigte des volks in de provintie van Holland en Westvrieslandt...* publicada en 1742, del autor Kersseboom, que se convirtió en un referente en su época.

En 1777 aparece publicada la obra *Essai d'Aritmétique moral,* de Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon (1701-1788), en la que introduce una nueva rama en la teoría de las probabilidades, la Probabilidad Geométrica, mediante el conocido problema de la aguja: ¿Cuál es la probabilidad de que una aguja lanzada al azar sobre el suelo, en el que hay trazadas una serie de rectas paralelas, caiga sobre una de las líneas?. Se supone que la longitud "l "de la aguja es inferior a la distancia "a" entre paralelas sucesivas. Buffon calcula correctamente que

$$p = \frac{2l}{\pi\ a}$$

Esta obra se halla dentro de la *Histoire naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roy* de 31 volúmenes publicados en París de 1749-89. Esta obra es un tratado sobre la Tierra, comprende una historia natural del hombre, una parte anatómica, etc... Es el primer tratado moderno que intenta abordar la naturaleza íntegramente. De esta obra, el "Essai", es uno de los suplementos y contiene también una colección de tablas de nacimientos, matrimonios y defunciones correspondientes a la ciudad de París entre los años 1709-1766, así como resultados obtenidos a partir de ellas relativos a la esperanza de vida. Dichas tablas no sólo eran útiles para saber cuál era el poderío de los estados en cuanto a hombres y haciendas, sino para fijar las primas de diversas rentas vitalicias.

La aportación española a este recorrido por la historia de la Estadística, viene de la mano del presbítero español Joseph Isidro Morales que en 1797 publica en Madrid, su *Memoria matemática sobre el cálculo de la opinión en las elecciones.* Esta obra trata de estudiar los distintos métodos de elección contemplados en la época, siguiendo los trabajos de Jean-Charles Borda y M. Condorcet.

De Pierre Simon Laplace (1749-1827) podemos admirar un libro clásico: *Théorie analytique des probabilités,* publicado en París en 1812. Esta obra de un consumado matemático, donde se incluyen integrales con las funciones beta y gamma. En él se demuestran resultados como que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

Laplace en esta obra extiende el problema original de la aguja a una cuadrícula formada por dos haces de rectas paralelas equidistantes y perpendiculares el uno al otro. Si las distancias entre las rectas de cada uno de los haces son "a" y "b", entonces la probabilidad de que una aguja de longitud "l" (menor que "a" y "b") corte a una de estas rectas es

$$p = \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi\ ab}$$

En este libro Laplace rescata la fórmula de Bayes, la teoría de mínimos cuadrados y las llamadas transformadas de Laplace.

Contamos también con su *Essai philosophique des probabilités* de 1814, donde Laplace hace una introducción de la teoría de probabilidades para el lector no versado.

La distribución de Poisson como límite de la distribución binomial cuando p tiende a cero y n tiende a infinito aparece en *Recherches sur la probabilité des jugements en matiére criminelle et en matière civile, précedées des régles générales du calcul des probabilités,* de Simeón Denis Poisson (1781-1840), publicado en 1837. En este clásico de la probabilidad, Poisson trabaja con el Teorema Central del Límite para la distribución hipergeométrica aplicándoselo al estudio del sistema electoral francés.

Trata en esta obra de comparar porcentajes de condenados en diversos tipos de juicios y en diversos períodos de la historia de Francia, con objeto de averiguar si la institución del jurado produce una anormal lenidad. Fijó las leyes probabilísticas de la conducta de los votantes. Poisson es famoso por su frase: La vida vale la pena vivirla por dos motivos solamente: el hacer matemáticas y el enseñarlas, algo que seguro firmarían muchos enseñantes de las matemáticas de la actualidad.

Siguiendo con nuestro recorrido por los fondos documentales de la Biblioteca del Real Observatorio, podríamos pasar a deleitarnos con Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) y su *Exposition de la Thèorie des Chances et des Probabilités* publicado en 1843. En este libro se formula de una manera clara la teoría frecuencialista de la probabilidad y el inicio de la estimación por intervalos de confianza.

Si bien Laplace desarrolló los conceptos fundamentales de la teoría estadística, la aplicación de ésta a las ciencias sociales, en especial a las medidas y proporciones del cuerpo humano (antropometría), aparece vinculada al belga Adolphe Quetelet (1796-1874). De Quetelet el Observatorio cuenta con *Lettres a S.A.R. le Duc Régnant de Sax-Cobourg et Gotha, sur la Théorie des Probabilités, apliquée aux Sciences Morales et Politiques*, publicadas en 1846 en Bruselas. Este libro original, trata de la estadística social y de probabilidad de una manera elemental. Es un compendio de una serie de cartas dirigidas a los sobrinos del rey de los belgas, Ernesto (a quien iba dedicado el libro) y Alberto (el que fue marido de la reina Victoria de Inglaterra), ambos tutorados suyos. En este trabajo explica al Duque de Sax-Cobourg su concepto de "hombre medio", es decir, un hombre que por su estatura represente a su pueblo y en relación con el cual deben considerarse todos los demás hombres de la misma nación como desviaciones más o menos grandes. Consagra la curva normal como la que representa gran cantidad de rasgos humanos. Gracias a ella descubrió un fraude en el reclutamiento de jóvenes franceses para el servicio militar, observando que muchos de ellos fingían una baja estatura para rehuir tal servicio.

Para finalizar quizás hacer hincapié en el conjunto de importantes publicaciones periódicas que el Observatorio atesora desde su fundación como: las *Actas Eroditorum,* las *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de París,* las *Philosophical Transactions,* etc... revistas donde, los mejores matemáticos de la época han dejado plasmado lo mejor de su saber hacer.

Hasta aquí, nuestro pequeño itinerario por la Historia de la Probabilidad y de la Estadística, con los fondos del Real Observatorio. Seguro que no es el único que se nos ocurre, pero al menos abre la puerta a otros que podemos formar con las joyas que atesora la institución castrense gaditana.

REFERENCIAS.

Boyer, C.B. 1987. Historia de la Matemática. Alianza Universitaria Textos. Madrid.

CITAS MATEMÁTICAS CONTEXTUALIZADAS

LUCÍA MORALES RUFO · Mª DOLORES RODRÍGUEZ SOALLEIRO

LA IDEA

Con motivo del Año Mundial de las Matemáticas un grupo de profesoras de Leganés quisimos organizar algunas actividades que se pudieran hacer a la vez en todos nuestros centros. Diseñamos un tablón con diferentes secciones y cada centro se encargó de preparar alguna. La actividad la llamamos Rincón Matemático 2000.

El primer día de curso del año 2000 los alumnos se encontraron un cartel anunciador del Año Mundial de las Matemáticas y un tablón en el hall que cambiaba cada semana y que hemos mantenido hasta el mes de Junio.

Desde entonces el grupo de trabajo que hemos constituido se reunió una vez al mes para intercambiar los materiales elaborados en cada centro.

EL TABLÓN

Constaba de las siguientes secciones:
1. Problema de la semana.
2. Adivina: ¿quién es?.
3. Curiosidades, adivinanzas, citas, chistes y anécdotas de carácter matemático.
4. Noticias y convocatorias que puedan interesar.
5. Colaboraciones: para que otras personas puedan proponer problemas, adivinanzas, ...

LAS CITAS

Nuestras citas se encontraban por tanto en el apartado 3º en el que incluimos también, adivinanzas, chistes, poesías, curiosidades y todo aquello que, teniendo relación con las matemáticas, pudiera resultar atractivo, comprensible y bello para todas las personas a las que está destinado.

Todas las semanas se expone en el tablón una cita acompañada de una imagen.

Los textos escogidos pretenden resaltar la importancia de las matemáticas y su belleza. Hemos encontrado algunos de estos textos en páginas web donde aparecen recopilaciones de citas matemáticas de diferentes autores: Descartes, Platón, Russell...; otros están sacados de libros como "El Quijote" donde hemos ido a buscar expresamente alusiones a las matemáticas.

Las imágenes de las cuatro citas de cada mes son obras de un mismo autor o tienen algo en común:

En Enero las láminas correspondían a Escher y las citas a diversos autores.

En Febrero eran ilustraciones de Dalí y citas del libro "El Quijote".

En Marzo la imágenes eran fractales que ilustraban citas del libro "Alicia en el país de las maravillas".

En Abril eran imágenes de poliedros con citas diversos autores.

En Mayo eran fotografías matemáticas con citas de diversos autores

Hemos utilizado todo tipo de fuentes de información, libros, periódicos, CDROM, Internet,...A continuación ponemos algunas de ellas.

CAUDET, F.(1991) Frases célebres. Barcelona.Distribuciones Mateos.
CERVANTES, M. El Quijote.
ESCHER, M.C.(1989) The graphic work. Berlín.Taco.
SCHATTSCHNEIDER, D.(1997) Escher Calidociclos. Alemania.Taschen
CD Rom IX JAEM. Concurso de Fotografía Matemática.

www.dali-gallery.com/dali.htm

www.arrakis.es/~mcj
www.artico.com/escher
www.platea.pntic.mec.es/~aperez4
www.pntic.mec.es
www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/Death

Pero si estáis interesados en conocer el material no hace falta que busquéis en estas fuentes pues también hemos elaborado una página web con todos los contenidos del Tablón, la dirección de la misma es:

http://centros5.pntic.mec.es/ies.juan.de.mairena/index.htm

Esperamos que os guste y os resulte útil.

TALLERES

TALLER DE LA CALCULADORA GRÁFICA TI-83.

JUAN ANTONIO PULIDO DEL RÍO
PROYECTO T³ - ESPAÑA

RESUMEN

El objetivo fundamental del presente taller es mostrar las posibilidades didácticas de la calculadora gráfica en el aula de Matemáticas. Para ello, se desarrollarán cinco problemas utilizando la calculadora gráfica TI-83 y especialmente las posibilidades de ésta para hacer tablas, manejar listas de datos y confeccionar gráficas estadísticas y de funciones que, sin duda, permitirán mostrar al alumno un enfoque más global de las Matemáticas y establecer conexiones entre Matemáticas y realidad, distintas partes de las Matemáticas y diferentes representaciones del mismo concepto.

EL PAPEL DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS.

Los avances tecnológicos de nuestra época han puesto en nuestros hogares multitud de objetos -vídeos, equipos de música, teléfonos móviles, lavadoras,...- que están ahí , de los que no puede negarse su existencia y que sin duda contribuyen a mejorar nuestra calidad de vida. De la misma manera aparecen elementos como ordenadores y calculadoras cuya integración en la clase de Matemáticas deben promover cambios en el contenido y la didáctica del curriculum tradicional.
La calculadora gráfica podríamos situarla entre la calculadora científica y el ordenador. Las ventajas sobre aquella se ponen de manifiesto sin más que abrirlas y comparar el tamaño de sus pantallas, y van resultando obvias conforme se va avanzando en su uso. En cuanto a los ordenadores, el precio y tamaño de la calculadora gráfica la convierte en un recurso mucho más fácil de utilizar en el aula que el ordenador.

EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS LA CALCULADORA GRÁFICA ES UN INSTRUMENTO MUY ÚTIL PARA:

- Abordar en Secundaria problemas que serían impensables por métodos analíticos.
- Transformar el ambiente de las clases de Matemáticas en un laboratorio donde se explore, se investigue, se conjeture y se verifiquen hallazgos, haciendo que el alumno se encuentre más motivado hacia la actividad matemática.
- Concentrarse en el proceso de resolución de problemas, sin perderse en los cálculos que ellos implican, sobre todo si se pretende que los problemas planteados respondan a situaciones reales.
- Introducir nuevos conceptos, que pueden visualizarse con facilidad.
- Aplicar conceptos matemáticos aprendidos para conseguir usarla de manera efectiva.
- Establecer conexiones entre:

  Diferentes partes de las Matemáticas; las Matemáticas y otras materias; las Matemáticas y la vida cotidiana de los alumnos; diferentes representaciones de la misma situación de problema o del mismo concepto matemático.

La forma de trabajar con las calculadoras gráficas puede resumirse en los tres puntos siguientes (WAITS y DEMANA):

- *Trabajar algebraicamente (papel y lápiz) y luego confirmar numérica y/o gráficamente (con una calculadora gráfica).*
- *Trabajar numérica y/o gráficamente (con calculadora gráfica) y luego confirmar algebraicamente (papel y lápiz)*
- *Trabajar numérica y/o gráficamente (con calculadora gráfica) porque los demás métodos son poco prácticos o imposibles de utilizar.*
- *Aprovechar las conexiones entre representaciones algebraicas, numéricas y gráficas puede resultar una técnica pedagógica muy fructífera.*

Algunas cuestiones que pueden abordarse en la Educación Secundaria utilizando calculadoras gráficas.

Educación Secundaria Obligatoria.

- **Números y Álgebra.**

  Prioridad de las operaciones. Signos y paréntesis. Sucesiones de números. Progresiones. Utilización de tablas y listas para hacer conjeturas y deducir propiedades. Idea de variable. Expresiones algebraicas. Valor numérico. Significado de la igualdad entre expresiones algebraicas. Detección de errores en operaciones algebraicas. Ecuaciones: comprobación de los resultados y resolución de la ecuación de segundo grado utilizando las fórmulas.

- **Funciones y gráficas.**

  Conexiones entre las distintas formas de venir representada una función. Dominio y recorrido. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Tendencia. Resolución de problemas de optimización sin utilizar la derivada. Relación entre: fórmula y gráfica; tabla de valores y gráfica; tabla de valores y fórmula. Funciones lineales y cuadráticas. Significado de los parámetros. Resolución gráfica de ecuaciones polinómicas. Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

- **Estadística y azar.**

  Análisis de cuestiones estadísticas que requieren manejar gran cantidad de datos. Cálculos estadísticos. Representaciones gráficas de datos estadísticos. Simulación de experimentos aleatorios. Construcción de tablas de dígitos aleatorios.

Bachilleratos.

- **Álgebra lineal.**

  Ecuaciones y sistemas equivalentes. Resolución gráfica de ecuaciones, sistemas e inecuaciones. Resolución de sistemas por el método de Gauss. Matrices y determinantes. Programación Lineal.

  Además de lo indicado para la E.S.O., en las partes de Funciones y Gráficas y Estadística, pueden tratarse los siguientes temas:

- **Análisis Matemático.**

  Ajustes polinómicos, trigonométricos, exponenciales y logísticos. Resolución gráfica de ecuaciones de cualquier tipo. Descomposición de un polinomio en factores primos. Concepto y cálculo de límites de sucesiones y funciones. Asíntotas. Posición de la curva con respecto a las asíntotas. Derivada numérica. Gráfica de la función derivada. Relación entre las gráficas de las derivadas sucesivas de una función. Estudio de la gráfica de una función. Máximos y mínimos. Estudio de la convexidad. Integración numérica. La integral definida. El Teorema fundamental del cálculo.

- **Probabilidad y Estadística.**

  Variables estadísticas bidimensionales. Nube de puntos. Regresión y correlación. Recta de mínimos cuadrados y otros ajustes lineales y no lineales. Variables aleatorias discretas y continuas. Función de probabilidad y de densidad. Función de distribución. Media y varianza. Distribuciones de probabilidad. Aproximación de la binomial mediante una normal. Ajuste de una distribución empírica mediante una teórica. Inferencia estadística. Test de hipótesis.

DESARROLLO DEL TALLER.

Las actividades a desarrollar en el taller serán las siguientes:

Actividad 1. Planetas boca-abajo.
El primero de los problemas propuestos, da una serie de instrucciones a seguir, codificadas en operaciones matemáticas.
Se plantea este problema con la doble finalidad de por un lado, establecer un primer contacto con la calculadora gráfica, aprendiendo a modificar el contraste, utilizar las teclas de edición y las operaciones aritméticas básicas, y por otro trabajar en la prioridad de las operaciones.

Actividad 2. Pruebas de legibilidad.
Se plantea en esta actividad el estudio de una curiosa fórmula, que es utilizada por un procesador de uso tan común como es el WORD, por lo que tiene una clara conexión con la realidad actual del alumno:

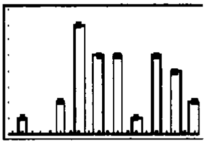
Nivel de facilidad de lectura de Flesch:

206.835 - (1.015 x promedio de palabras/oraciones) - (84.6 × promedio de sílabas/palabras)

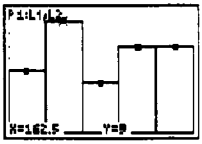
Tras un primer estudio de algunos textos en castellano, parece que la fórmula no es muy fiable, lo que nos lleva a utilizar el Álgebra y tablas de funciones para establecer una discusión sobre su aplicabilidad en nuestra lengua.
Este problema nos inicia en el uso del editor de ecuaciones, representación gráfica de funciones, editor de listas, cálculo de parámetros estadísticos y asignación de variables.

Actividad 3.Envases de leche fresca y cola-cao.
Se trata de diseñar envases con volumen fijo y superficie mínima y con superficie fija y volumen máximo utilizando la calculadora gráfica.
Confeccionar tablas para obtener información sobre el crecimiento y decrecimiento de la función, hace que el alumno entienda cómo se comporta una variable en función de la otra; obtener la gráfica y recorrerla con el cursor establece conexiones entre tablas, fórmulas y gráficas.

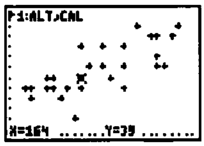
Actividad 4. Altura y número de zapato.
Se plantea realizar un estudio estadístico de la altura y el número de calzado de los alumnos de la clase. En primer lugar se realiza el estudio de cada una de las variables independientemente, comparándolo con el de otro grupo. A continuación se pregunta si existirá alguna relación entre ambas variables, planteando la siguiente cuestión: ¿podríamos comprarnos unos zapatos diciendo en la zapatería nuestra altura en cm?. Una vez establecida la diferencia existente entre relación estadística y funcional se procederá al estudio conjunto de ambas variables, representando la nube de puntos e intentando hacer un ajuste lineal.
Para la resolución del problema con la calculadora utilizaremos distintas opciones de los menús LIST y STAT, y haremos diferentes representaciones gráficas. Las siguientes pantallas pueden servir de ejemplo:



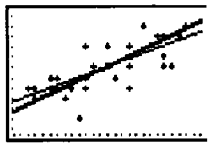
número de zapato.



altura.

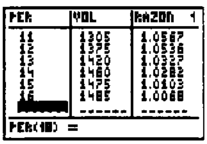


F



Actividad 5. Crecimiento de una parcela de pinos.
El enunciado de este problema, presenta una tabla en la que se muestra el crecimiento en volumen de una parcela de 2 hectáreas de pinus halepensis controlada desde 1910 trienalmente después de la primavera, y se trata de comprobar que hasta un cierto año se puede ajustar una exponencial, y a partir de ahí una curva logística. Tenemos pues una relación funcional experimental y haciendo uso de los datos proporcionados por la tabla, obtendremos un modelo matemático que permitirá conocer la evolución del bosque sin necesidad de la observación directa. Ejemplos de este estilo, en los que hay que modelar una determinada situación física a partir de datos obtenidos mediante la observación empírica, proporcionan la posibilidad de desarrollar y aplicar numerosos conceptos matemáticos, conectar las Matemáticas con la realidad en la que vivimos y reflexionar sobre su utilidad para nuestra sociedad. El obstáculo principal que presenta el planteamiento de tales problemas en Secundaria es el volumen de datos que ha de manejarse y la cantidad de operaciones que son necesarias para llegar a poder sacar conclusiones sobre el fenómeno estudiado. Aquí es donde la calculadora resulta prácticamente imprescindible.
En el ejemplo propuesto se utilizarán listas, operaciones entre ellas, cálculo de parámetros estadísticos, representaciones gráficas, tanto estadísticas como funcionales y tablas de valores.

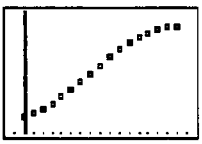
Las pantallas siguientes pueden ilustrar lo expresado anteriormente:



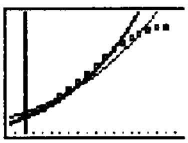
PER	VOL	RAZON
11	1305	1.0567
12	1375	1.0536
13	1420	1.0327
14	1460	1.0282
15	1475	1.0103
16	1485	1.0068
	------	------

PER(10) =

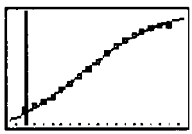
Parte de la tabla correspondiente a datos y cálculos.



Nube de puntos .



Dos ajustes exponenciales.



Ajuste logístico.

CALCULADORAS CON CÁLCULO SIMBÓLICO

Mª DOLORES RODRÍGUEZ SOALLEIRO
PROYECTO T³-ESPAÑA

Centraremos este taller sobre cuatro preguntas:

1. *¿Qué es una calculadora con cálculo simbólico?*
2. *¿En qué se diferencia de una calculadora gráfica?*
3. *¿Qué cosas nuevas podemos hacer con una calculadora de este tipo?*
4. *¿Qué posibilidades supone su utilización?*

¿QUÉ ES UNA CALCULADORA CON CÁLCULO SIMBÓLICO?

Es una calculadora gráfica que lleva incorporados un sistema de álgebra computacional de tal manera que podemos trabajar con ella tanto aritmética exacta como algebra simbólica. Es por tanto capaz de realizar todo tipo de operaciones tanto analíticas como algebraicas, manejando sin problema símbolos literales.

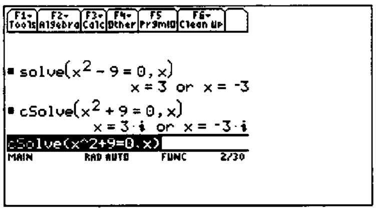
¿EN QUÉ SE DIFERENCIA DE UNA CALCULADORA GRÁFICA?

Es más amplia que una calculadora gráfica; con una calculadora gráfica normal no podemos trabajar con expresiones algebraicas, además los cálculos aritméticos lo hacen de manera aproximada en coma flotante mientras que una calculadora con cálculo simbólico trabaja aritmética exacta.

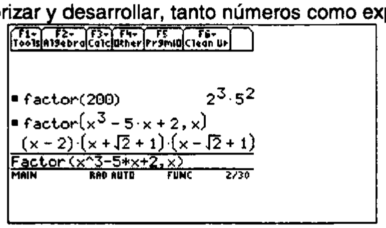
¿QUÉ COSAS NUEVAS PODEMOS HACER CON UNA CALCULADORA DE ESTE TIPO?

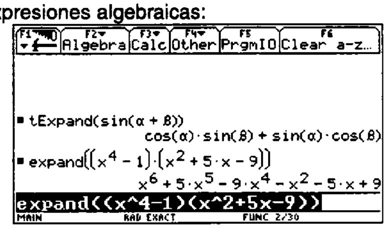
Las posibilidades son muchas, vamos a ver algunos ejemplos de actividades que se pueden realizar a nivel de Secundaria:

1. Resolver ecuaciones, dando las soluciones en el campo real y en el complejo:

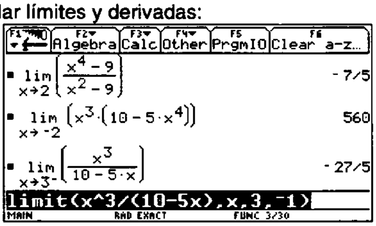


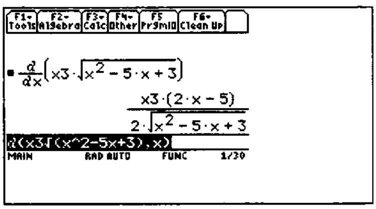
2. Factorizar y desarrollar, tanto números como expresiones algebraicas:



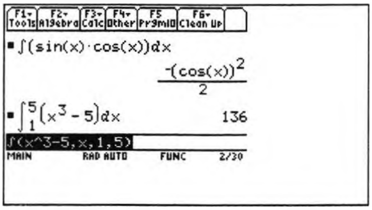


3. Calcular límites y derivadas:

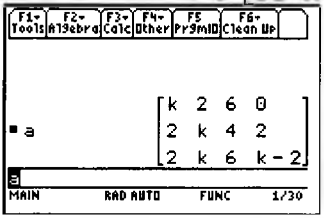


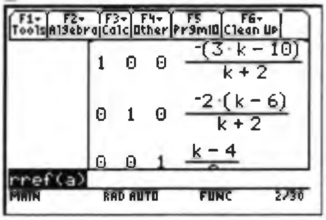


4. Calcular integrales definidas e indefinidas:



5. Resolver sistemas de ecuaciones con parámetros:





¿QUÉ POSIBILIDADES DIDÁCTICAS SUPONE SU UTILIZACIÓN?

Las calculadoras gráficas con cálculo simbólico son un recurso tecnológico más y como tal recurso habrá que aprender a utilizarlos a nivel académico. No cabe duda de que suponen un cambio en la metodología y también en los contenidos a enseñar y es el profesor, en cada caso, quien debe decidir los momentos adecuados en que deben ser utilizadas en el aula. Con este taller aprenderemos a utilizarlas e intentaremos hacer algunas reflexiones metodológicas que nos puedan servir a todos. Para empezar a pensar un poco sobre ello se proponen los siguientes puntos que manifiestan algunos de estos cambios:

- Obviar los cálculos algebraicos repetitivos.
- Profundizar más en los conceptos y en la idea del problema propuesto.
- Incidir en las estrategias para resolver de problemas.
- Hacer investigaciones en el aula.
- Deducir propiedades y relaciones.
- Hallar el resultado de muchos problemas lo que nos permitirá hacer comparaciones y sacar formas de comportamiento.
- Resolver problemas desde diferentes perspectivas: numérica, gráfica, algebraica,...

JUEGOS MATEMÁTICOS ELABORADOS POR ALUMNOS

CARMEN ARESE OLIVA · Mª GUADALUPE BUENDÍA CASTIÑEIRA · PILAR CAZENAVE BERNAL
PILAR ESCUTIA BASART · DOLORES PEREIRA FIGUEROA · ENRIQUE RAMÍREZ GUERRERO
MANUEL SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Se trata de exponer los juegos elaborados por los alumnos y alumnas de 4º de E.S.O. de nuestro Centro en un trabajo de Investigación trimestral. Con algunos de estos juegos se pueden trabajar directamente conceptos matemáticos de geometría, números, etc. Y con otros de ellos, estrategias ganadoras.

A cada grupo (formado por 4 alumnos) se les dio un guión con un juego (todos distintos), sobre ese guión ellos tenían que elaborar el material, reglas, estrategias ganadoras (si las hubiera) y además inventar otro juego distinto que se pudiera jugar utilizando el mismo material o parecido. En total han realizado 35 juegos, algunos de ellos muy bien elaborados.

La idea es exponer algunos de los juegos y usarlos para ver que conceptos se trabajan y que estrategias.

Algunos de los juegos que vamos a presentar son:

- Microcentro.
- Subibaja.
- Brax.
- Quincesuma.
- La Bastilla.
- Nimo.
- Alhambra.
- Cubo diabólico.
- Juego de las eles.
- Escoba fraccionada.

Un juego, como nosotros lo entendemos, además de pensar requiere alguna acción física e implica una competición. Pues de eso se trata, pero además podréis ver que todos estos juegos están más o menos relacionados con las Matemáticas, así que este trimestre vamos a elaborar JUEGOS MATEMÁTICOS.

Cada grupo trabajará sobre el juego asignado por su profesora y sobre ese juego realizará lo siguiente:

a) Elaborar los materiales necesarios para jugar.
b) Redactar, lo más claramente posible, las normas del juego, así como las "estrategias" para ganar el mismo, si las hubiera.
c) En todos los juegos hay explicadas *Posibles variantes*, lo que os ayudará a explicitar otros posibles juegos con el material que presentáis o con algunas modificaciones en el mismo, de estos juegos "inventados" por vosotros tendréis que explicar las reglas.
d) Todos los miembros del grupo sabrán jugar a los juegos que ha elaborado su grupo, así como explicarlos cuando se les pregunte.
e) El tablero del juego (si lo tiene) tendrá un tamaño máximo de 40x45cm.
f) El Departamento de Matemáticas se quedará con los juegos elaborados por los alumnos para utilizarlos en otras actividades.

Fecha de entrega: 30 de mayo de 2000.

Para calificar el trabajo se tendrá en cuenta:

- Presentación y elaboración del material.
- Claridad de las reglas del juego.
- Estrategias utilizadas.
- Originalidad en los juegos inventados.

JUEGO Nº 21

EL JUEGO DE LA BASTILLA

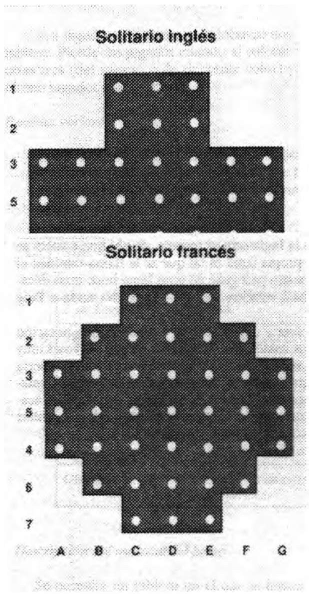
Tipo	Tablero
Material necesario	Tablero y clavijas
Nº de jugadores	Uno (solitario)
Objetivos	Búsqueda de estrategias

Descripción del material necesario

Se juega en un tablero en forma de cruz con 33 agujeros y se necesitan 32 clavijas para insertar en ellos. (Se puede hacer con casillas y fichas)

Reglas del juego

Se colocan las 32 clavijas ocupando todos los agujeros excepto el situado en el centro. Se van comiendo clavijas saltando con una por encima de otra (siempre que el agujero al que se salta esté libre) en horizontal o vertical (no en diagonal). La clavija que ha saltado se coloca en el nuevo y se retira (se come) la otra. El objetivo del juego es quedarse con sólo una clavija, que tiene que acabar colocada en el centro del tablero.



Posibles variantes

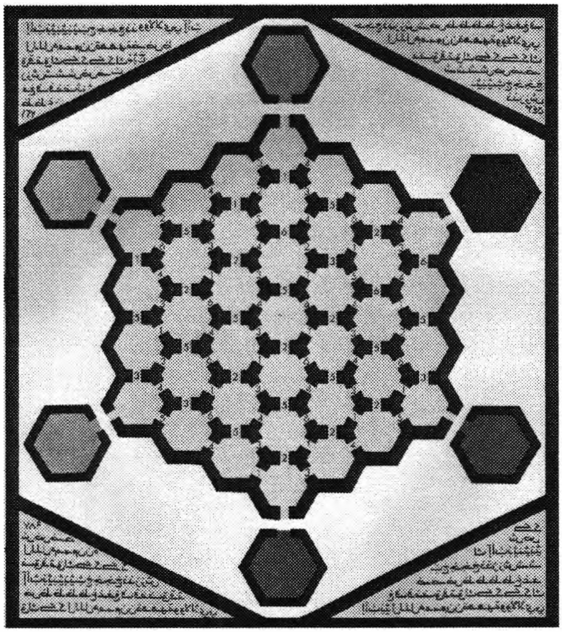
Existe otro solitario, llamado francés, que se juega con las mismas reglas, pero con un tablero algo distinto y los agujeros pasan a ser 37. (36 clavijas)
Con el solitario francés, además de buscar las maneras de resolverlo, se pueden resolver problemas interesantes, como acabar con las fichas colocadas en todos los agujeros de los alrededores y el del centro (el profesor y sus alumnos), o con cinco fichas situadas como la "Cruz de San Andrés"

JUEGO Nº 27

LA ALHAMBRA

Tipo	Juego de tablero
Material necesario	Tablero, fichas y dados.
Nº de jugadores	Dos
Objetivos	Búsqueda de estrategias ganadoras.

Descripción del material necesario



Un tablero como el de la figura, tres fichas del mismo color para cada jugador y dos dados.

Reglas del juego

Juegan dos jugadores, cada uno con tres fichas de un color distintivo.
Las fichas parten de los hexágonos exteriores (cada uno es de un color), cada jugador arranca de uno de ellos(dos opuestos),con sus tres fichas.
Cada jugador intentará llevar sus tres fichas al hexágono opuesto (del que partió el otro). De la siguiente forma:
En su turno, cada jugador tira los dos dados a la vez, uno le dice hacia donde avanzar, el otro cuánto avanzar. Es decir, si por ejemplo saca un 5-3, puede elegir entre coger la puerta 5 (si hay) y avanzar 3 casillas o coger la puerta 3 y avanzar 5.
Cada tirada permite mover una sola ficha.
Cuando está en el hexágono de partida, puede atravesar la puerta de entrada con cualquier número y usar el otro número de la tirada para avanzar.
Si una ficha llega al borde del tablero y aún le quedan avances, sigue avanzando por el borde.
No se puede saltar por encima de una ficha propia o ajena. Si una ficha no puede no se mueve.
Es obligatorio mover cada vez que se pueda. Si hay una posibilidad de mover una ficha, aunque nos perjudique, tenemos que hacerlo. Si no se puede mover, pasa turno.
Si una ficha cae justo en una ficha ocupada por una ficha contraria, la captura, con lo que ésta tiene que volver a la casilla de partida y empezar de nuevo.
Para sacar una ficha del tablero, el jugador no puede tener fichas en su hexágono de partida.
Gana el primero que consiga llevar sus tres fichas al hexágono exterior opuesto. (No es necesario que la tirada sea justa).

Posibles variantes

- Se puede jugar con tres jugadores.

CABRI GÉOMÈTRE PARA WINDOWS
UN RECURSO SENCILLO PARA TRABAJAR LA GEOMETRÍA

AGUSTÍN CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES · INMACULADA LLAMAS CENTENO
PROYECTO T³ ESPAÑA

En un texto de principios de siglo sobre geometría métrica, en las nociones que pueden considerarse como elementales en la geometría encontré la siguiente definición de recta:

> *"Existe una línea llamada recta, cuyos caracteres distintivos son los siguientes: su forma es idéntica a sí misma en todas sus partes, su extensión es ilimitada en sus dos sentidos y es tal que su posición queda fijada, e individualizada en el espacio cuando se fijan dos de sus puntos"*

Para comprender la importancia de la definición anterior, debemos añadir que no se acompaña gráfico o dibujo alguno que facilite la interpretación de las características de una recta.

Evidentemente, los tiempos y por supuesto los métodos han cambiado, difícilmente entenderíamos trabajar en la actualidad sin el apoyo de un material impreso adecuado en el que los gráficos e imágenes jueguen un papel importante.

En esta línea proponemos avanzar un poco más e incorporar, si es que aún no lo hemos hecho, distintos recursos que faciliten tareas como la representación gráfica, la investigación y la deducción de propiedades cambiando los objetos o elementos que intervienen en cualquier planteamiento. Calculadoras y ordenadores a través de distintos programas como son los de geometría dinámica, sin olvidar los programas de cálculo simbólico, ofrecen un amplio espectro de posibilidades que no debemos ignorar.

En las siguientes líneas planteamos la realización de distintas actividades para realizar con Cabri Géomètre en las que además de aprovechar la sencillez y facilidad de aprendizaje, utilizaremos una de sus características como es la actualización de las medidas y relaciones existentes entre los objetos de una construcción cuando cambiamos las condiciones iniciales o movemos cualquier objeto.

Como paso previo a las actividades propuestas, en la sesión de trabajo ofreceremos una visión general del programas y algunos ejemplos para familiarizar al profesorado con la metodología de trabajo de Cabri, pero que por razones evidentes de espacio no incluimos en este resumen.

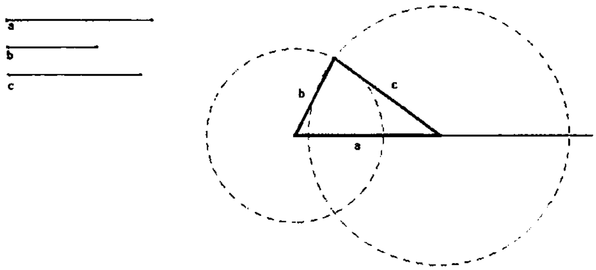
A continuación, relacionamos algunas actividades como ejemplo de distintas tareas y procesos en los que podemos utilizar Cabri Géomètre o cualquier programa similar.

Actividad: Construcción de triángulos.

Los métodos que utilizamos con regla y compás para construir triángulos en cada uno de los casos fácilmente podemos realizarlos a través de las herramientas disponibles en Cabri.

Por ejemplo, para construir un triángulo a partir de los segmentos correspondientes a los tres lados tan sólo utilizaremos las herramientas *compás* y *triángulo*.

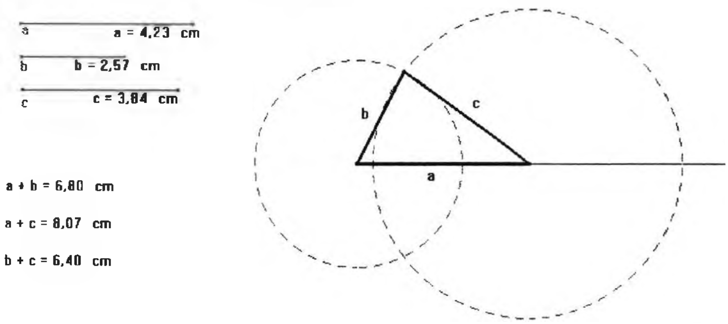
Construcción de un triángulo conocidos los tres lados



Una vez dibujado el triángulo propondremos investigar cuándo existe y cuándo no, comprobando la condición que determina la existencia del triángulo.

El proceso es sencillo, con la herramienta *calcular* obtenemos el valor de la suma de cada dos lados de triángulo y bastará con mover cualquiera de los segmentos para que el alumno compruebe que el triángulo existe cuando cada lado es menor que la suma de los otros dos.

Construcción de un triángulo conocidos los tres lados



Actividad: Posición de circuncentro.

Una vez construida la circunferencia circunscrita a un triángulo, para lo cual necesitamos las herramientas *triángulo*, *mediatriz*, *punto de intersección* y *circunferencia* plantearemos investigar las cuestiones siguientes:

¿Qué condiciones o qué tipo de triángulo hará que el circuncentro sea un punto interior del triángulo?

¿Cuándo será un punto exterior?

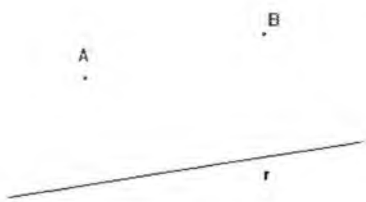
¿Y cuándo el circuncentro será un punto del perímetro del triángulo?

¿Hay algún triángulo en el que el circuncentro coincide con uno de los vértices?

Las características de actualización de medidas y de relaciones facilitan que puedan modificarse las condiciones para cambiar el tipo de triángulo sin más que arrastrar cualquiera de sus vértices.

Procedimientos similares permitirán plantear sencillos (o complicados) problemas de construcciones geométricas en los que aplicar los conocimientos adquiridos, como muestran la siguientes actividades

Actividad: Dibujar una circunferencia que pase por los puntos A y B, sabiendo que su centro está en la recta r.



Actividad: Dado un segmento AB, construir un cuadrado en el que una de sus diagonales sea el segmento AB.

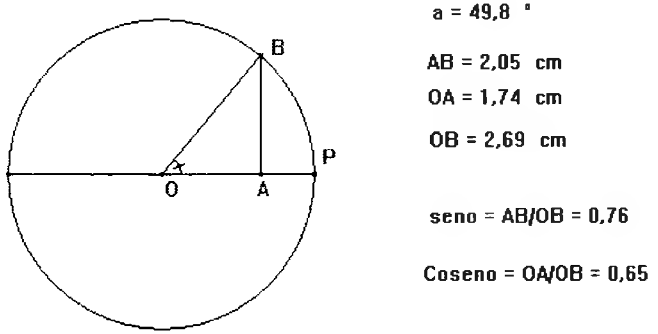
De manera análoga podemos aproximar la demostración de teoremas a partir de un método gráfico.

Actividad: El ortocentro, el baricentro y el circuncentro de un triángulo están alineados. La recta que pasa por estos tres puntos es la recta de Euler.

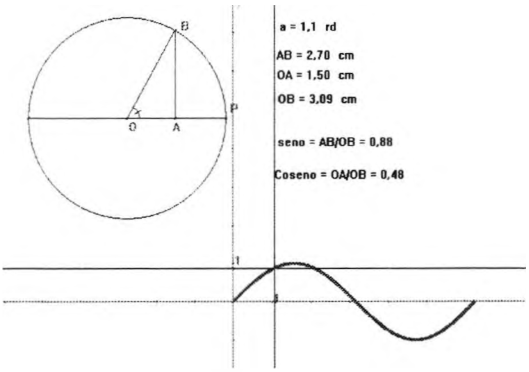
Los pies de las perpendiculares desde un punto P a los lados de un triángulo están alineados (recta de Simsom) si y sólo si el punto P está en la circunferencia circunscrita al triángulo.

Combinando distintos recursos aprovecharemos las propiedades afines y métricas, sin olvidar que también podemos trabajar con coordenadas, para realizar construcciones en las que introducir contenidos, por ejemplo para trabajar con las razones trigonométricas de un ángulo.

Actividad: Dibujamos una circunferencia y marcamos un ángulo, del cual calculamos las razones trigonométricas seno y coseno aplicando la definición.

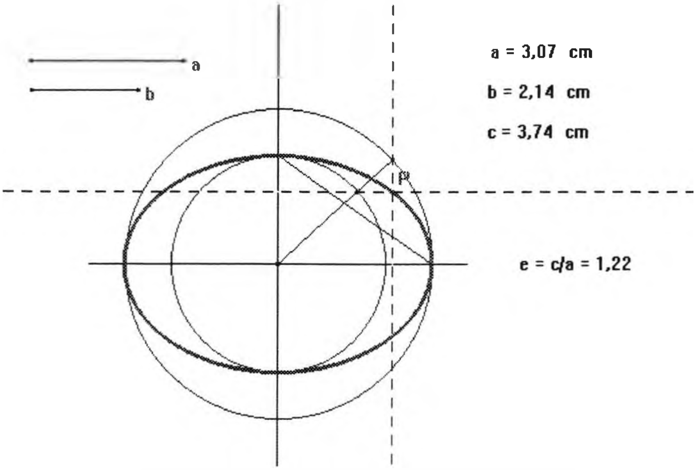


A continuación se podrá construir una tabla de valores e incluso la gráfica de cualquiera de las dos razones.



Otro ejemplo en el que combinar la construcción con la realización de cálculos se muestra en la siguiente

Actividad: Dados los segmentos a y b, construir la elipse de semiejes a y b. Hallar la excentricidad de la elipse.



Cambiando las longitudes de los segmentos propondremos investigar la relación existente entre la excentricidad y la forma de la elipse.

De la construcción anterior es fácil deducir, por lo que podemos proponer en el aula, que si un punto P tiene de coordenadas (x, y), entonces verifica la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Y si es el caso, se podrá avanzar para llegar a las ecuaciones paramétricas de la elipse.

Otra aplicación de Cabri la encontramos en la posibilidad de representar lugares geométricos a partir de la herramienta específica para esta tarea o a través de las opciones *traza* y *animación*, que en algunos casos resultarán más espectaculares y de mayor motivación.

Actividad: Hallar el lugar geométrico de un punto P de un segmento de longitud fija AB cuando el segmento se desliza sobre unos ejes perpendiculares.

¿Qué ocurre cuando el punto P cambia de posición?

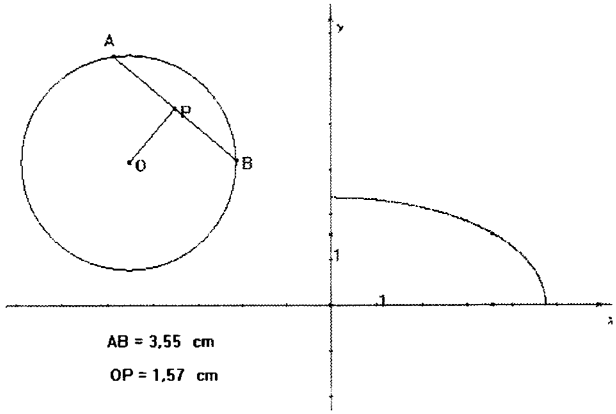
Actividad: Sea c una circunferencia y A un punto. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a c que pasan por el punto A.

¿El lugar geométrico cambiará al variar la posición del punto A?

Además, con un proceso similar al utilizado para definir las razones trigonométricas podemos combinar la construcción geométrica con la representación de una función generada a partir de ella.

Actividad: Sea AB una cuerda de una circunferencia de centro O. La recta perpendicular a la cuerda por el punto O la corta en un punto P, que es el punto medio de la cuerda. Mover uno de los extremos de la cuerda para observar la relación existente entre los segmentos AB y OP.

Representar la función que representa las distancias anteriores.



Continuando con esta actividad, podemos plantear nuevas cuestiones, por ejemplo ¿qué relación existe si en lugar de medir la cuerda AB medimos el arco AB?

Como conclusión animar a la utilización de nuevos recursos que, aunque siempre plantearán dificultades, las ventajas que ofrecen compensarán en la tarea diaria en el aula.

Con esta idea, y para animar hemos plantado estas actividades que pueden servir para tener una ligera referencia de algunas cosas que se pueden realizar con estos programas de geometría que pueden resultar un buen complemento y un mejor apoyo en el área de matemáticas.

LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO Y DE LA NUMERACIÓN EN LA ESCUELA INFANTIL

Luisa Ruiz Higueras · Catalina Baena · Nieves Fernández · Rosario Lorite
Trinidad Ruiz · Isabel Santiago.

1. INTRODUCCIÓN.

Si bien las Matemáticas de la Educación Infantil y ciclo inicial de Primaria son matemáticas que se suelen calificar como "elementales", quisiéramos enfatizar que son ciertamente elementales, pero no en el sentido de *obvias* y *evidentes* sino en el de *primordiales* y *fundacionales*, ya que constituyen los fundamentos de lo que se ha de construir después. No es nada trivial, en efecto, el intentar definir el número natural o bien la actividad de contar o de medir, así como las relaciones entre ellas, por no decir las condiciones necesarias en las que se puedan realizar dichas actividades.

Los fundamentos de las Matemáticas son altamente complejos, dejando de parecer triviales a partir del momento en que nos paramos a analizarlos, a problematizarlos y reconstruirlos - condición necesaria para enseñarlos - . Sirva de apoyo el siguiente pasaje de Russell (1919):

> Lo más fácil y claro en la Matemática no es aquello que aparece lógicamente en sus comienzos; es más bien lo que, desde el punto de vista de la deducción lógica, se presenta más o menos hacia la mitad. Así como los cuerpos que se ven con más facilidad no son los que están ni muy lejos ni muy cerca, ni los muy grandes ni los muy pequeños, así también los conceptos más fáciles de captar no son ni los demasiado complejos ni los excesivamente simples.

En este taller trabajaremos una serie de situaciones de enseñanza del número y la numeración bajo una hipótesis de aprendizaje constructivista por adaptación al medio[1], con objeto de facilitar propuestas didácticas para el desarrollo curricular en estos niveles y de iniciar a los profesores/as en el análisis didáctico de los objetos matemáticos.

Llevaremos a cabo también tareas de análisis de procedimientos de los alumnos/as a través del estudio de sus producciones y de la observación de videos.

2. CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS PARA EL DESARROLLO CURRICULAR DEL NÚMERO Y LA NUMERACIÓN EN LA EDUCACIÓN INFANTIL (Y NIVEL INICIAL DE PRIMARIA).

En la elaboración de una propuesta curricular para la iniciación al conocimiento del número y de la numeración en la escuela Infantil y primeros cursos de la escuela Primaria, convendría tener en cuenta las siguientes consideraciones didácticas:

1º. Reconocer que el número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el medio familiar y social. Es ingenuo no tener esto en cuenta en la enseñanza y hacer como si el niño no conociera absolutamente nada relacionado con el campo numérico al llegar a la escuela.

2º. Para diseñar el proceso de enseñanza, no podemos servirnos únicamente de la definición matemática de número y de las reglas del algoritmo de "contar", tenemos necesidad de determinar el conjunto de situaciones que dan sentido al número y la numeración a esa edad. Para ello será necesario estudiar formalmente las funciones del número y de la numeración.

3º. Si bien, en matemáticas, número y numeración son objetos bien distintos (el número no depende del modo en que se designa), creemos, sin embargo, que esta distinción no es suficiente para considerar las funciones específicas de cada uno de ellos en la enseñanza de modo aislado. No podemos pensar que el número pueda aprenderse en estos niveles independientemente de la numeración.

Varios estudios clásicos de epistemología y didáctica de la Matemática (Guitel, 1975; El Bouazzaoui, 1978) ponen de manifiesto, cómo las nociones de número y numeración están íntimamente ligadas. Los problemas de numeración dependen de la magnitud de los números utilizados, de la frecuencia con que los encontramos, etc. Las relaciones entre números y numeración son dialécticas. La segunda permite hablar de los primeros y deberá hacerlo de una forma cómoda, eficaz y económica.

Así pues, no consideramos adecuado hablar *"a priori"* de funciones de la numeración y del número de forma independiente. Por ello, creemos necesario crear situaciones que permitan describir el funcionamiento adecuado e idóneo del número y de la numeración.

---

[1] Bajo esta concepción se considera que los alumnos/as aprenden mediante un proceso adaptativo a un "medio" constituido por la situación. Son situaciones en las que los conocimientos matemáticos surgen como útiles, como herramientas para resolver problemas. En la elaboración de estas situaciones es fundamental la determinación y control de las variables didácticas, ya que la gestión que el profesor/a haga de ellas, provocará que los alumnos/as desarrollen estrategias de solución, desde la más costosa hasta la más óptima, constituyendo esta última el instrumento mejor adaptado para resolver el problema.

4º. Las situaciones que pueden dar significación al número y la numeración serán aquellas que den respuesta a la pregunta: ¿Para qué tenemos necesidad del número y de su designación?
En esta etapa de escolaridad, para que los alumnos puedan reconocer y utilizar el número, dándole una significación idónea, consideraremos, principalmente, dos de sus funciones:

a. El número como *memoria*, bien sea como *"memoria de la cantidad"* que permite evocar una cantidad sin que esté presente (corresponde al aspecto cardinal), o bien sea como *"memoria de la posición"* que permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada (corresponde al aspecto ordinal).

b. El número para *anticipar resultados* en el caso de situaciones no presentes o incluso no realizadas (es decir, simplemente evocadas), pero sobre las que disponemos de ciertas informaciones.

3. PROBLEMAS DE REFERENCIA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE SITUACIONES.

En el desarrollo del taller analizaremos algunos grandes tipos de problemas que son susceptibles de dar sentido a los procedimientos numéricos y a las designaciones orales o escritas de los números en estos niveles educativos. Teniendo como referencia estos tipos de problemas construiremos diferentes situaciones didácticas para proponerlas a los alumnos. Entre ellos, destacamos los que ponen en juego aspectos tales como:

- Verificar la conservación de una colección.
- Administrar una colección
- Recordar una cantidad.
- Comparar dos colecciones A y B
- Anticipar un resultado (combinar, cambiar, repartir, etc.)

A partir de los problemas anteriores podemos construir numerosas situaciones de enseñanza-aprendizaje en las que se movilicen aspectos básicos del número, tales como:

- medir una colección: asignar un número natural a una colección.
  - producir una colección: construir una colección de cardinal dado. Operación inversa a la anterior[2].
  - ordenar una colección: asignar una determinada posición a los elementos de una colección.

4. PROCEDIMIENTOS QUE PUEDEN EMPLEAR LOS NIÑOS PARA RESOLVER LOS PROBLEMAS.

Nos interesará asimismo, en el trabajo del taller, llevar a cabo un análisis de los *procedimientos* que los niños pueden poner en acción para resolverlos, ya que todo procedimiento siempre es el indicador de la existencia de un conocimiento matemático. Dado que hay procedimientos de diversa categoría, desde los más costosos hasta los más óptimos y económicos, al profesor/a le interesa poder identificarlos "a priori" y, de este modo, determinar los conocimientos matemáticos que ponen en funcionamiento los alumnos en la resolución de sus tareas. Podemos señalar, entre otros, los siguientes:

- Procedimientos que evitan la designación del cardinal de la colección, tales como la correspondencia término a término, la correspondencia "subconjunto a subconjunto", etc.
- Procedimientos que designan el cardinal de la colección, tales como la estimación puramente visual, la "subitización", el conteo, "sobreconteo", "descuento", "recuento", etc.
- Procedimientos mixtos, tales como asignar el cardinal por "bloques" de elementos y utilización de expresiones, bien orales, o escritas de tipo aditivo (por ejemplo, dada una colección de 19 elementos, los niños podrían hacer varios subconjuntos y decir que hay 5 y 3 y 5 y 4 y 2)
- Procedimientos de "cálculo": en los que los niños pueden utilizar algunos conocimientos numéricos memorizados, o bien algunas técnicas de cálculo, descomposiciones, transformaciones, etc.
-

La resolución de problemas permitirá a los niños pasar de los procedimientos más costosos y menos fiables a los más económicos y pertinentes, desarrollando ampliamente la actividad de "cardinación"[3] de colecciones.

Dada la limitación exigida a la extensión de este trabajo, vamos a presentar, por último, muy brevemente, una de las situaciones que trabajaremos en el taller.

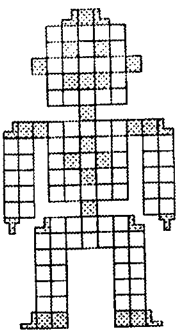
---

2 Conviene distinguir la reproducción de una colección de su producción. La primera se hace en referencia a una colección que sería, de algún modo, el modelo a copiar. La segunda se hace a partir de un número dado.

3 La "cardinación" de un conjunto finito es una operación mental o concreta por la cual se obtiene el cardinal de dicho conjunto, es decir, se determina su número de elementos.

5. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE UNA ACTIVIDAD: "EL ROBOT".

El número para constituir una colección equipotente a otra dada[4].



"El robot" es una situación que sitúa a los niños de la escuela infantil ante una tarea compleja y permite al profesor observar, para cada uno, cómo recurren de modo espontáneo a la "cardinación" y cómo superan las dificultades ligadas a su empleo.

Un "robot", dibujado sobre una cuadrícula, tiene bien diferenciados todas las componentes de su cuerpo: brazos, piernas, cabeza, tronco. Cada parte está constituida por un número diferente de cuadrados. Ciertos cuadrados están recubiertos de papel de diferentes colores (la determinación de su número y posición es una variable didáctica que controla el profesor).

- **Objetivos que permite conseguir a los alumnos.**
  - Tomar consciencia de que los números son instrumentos eficaces para memorizar una cantidad.
  - Emplear eficazmente, en la resolución de problemas, el procedimiento de constituir colecciones equipotentes a una colección dada.
  - Desarrollar procedimientos que permitan la "cardinación" de colecciones
  - Emplear la numeración como una herramienta que permite representar la cantidad.

El objetivo final de esta actividad es que los niños sean capaces de controlar el cardinal de todas las colecciones presentes en el robot y llevar a cabo la tarea en un solo viaje.

- **Material:**
  - Un "robot" según el modelo adjunto
  - Una ficha de gran tamaño con el dibujo "incompleto" del robot para cada grupo de alumnos.
  - Cajas que contienen cuadraditos o gomettes de colores (una caja para cada color).
- **Variables didácticas**[5]
  - El número de cuadrados elegido en función de las competencias que tienen los niños y de su conocimiento de la secuencia numérica.
  - La disposición espacial de los cuadraditos coloreados.
  - Las dimensiones del robot (y, en consecuencia, el tamaño de los números de las colecciones)
  - El número de "viajes" que pueden hacer a la mesa de la profesora.
- **Comportamientos posibles:**
  - Realizar correctamente la "cardinación" (por procedimientos diferentes: subitización, conteo, cálculo, etc.) y llevar a cabo la tarea en un solo "viaje".
  - Realizar la equipotencia en dos o tres viajes mediante sucesivos ajustes, bien sea por porque los niños se equivocan en su "cardinación" (errores en uno o dos elementos, por ejemplo), o por otros motivos.
  - Construir la equipotencia dando tantos viajes como cuadraditos deba completar.
  - Ir a buscar los cuadraditos a las cajas sin haber contado previamente el número de casillas del robot .

- **Primera fase: Consigna dada por el profesor/a:**

  "El otro día os enseñé un robot que habían realizado los niños de otra clase. Hoy vamos a intentar hacerlo nosotros. Voy a poner en vuestra mesa uno que está sin acabar, debéis terminarlo de modo que quede exactamente igual que el que hicieron ellos (que estará sobre una mesa en un extremo de la clase). En mi mesa tenéis cajas que contienen cada una de ellas cuadraditos de colores para completar el robot. ***Debéis tomar solo los que hagan falta para completar cada parte, repito, justo los que sean necesarios, ni más ni menos.*** *Debéis mirar bien. Cada niño de la mesa, siguiendo un turno, pide a la profesorava los cuadraditos que necesite."*

---

[4] En la selección de las actividades se han seguido las propuestas de ERMEL (1990, 1991) *Apprentissages numériques*. Paris: Hatier.

[5] Se denominan *variables didácticas* aquellas variables de la situación que, gestionadas por el maestro, provocan cambios cualitativos en los procedimientos del alumno. Su cambio implica, por tanto, modificaciones en el aprendizaje: *"Actuando sobre ellas podremos provocar convenientemente adaptaciones, regulaciones, y aprendizajes"*. (Brousseau, 1982, p.9). En el caso del número y la numeración es posible variar en las situaciones: el campo numérico (tamaño de la colección, tamaño de los números, etc.); los objetos de las colecciones (manipulables, fijos, representados, listados, etc.); la situación de las colecciones, pueden estar próximas y visibles para el niño, o bien, ausentes; la disposición espacial de los objetos (alineados, agrupados, encasillados, desordenados, ...); las reglas y consignas utilizadas por el maestro, etc.; el tamaño del espacio en donde se desarrolle la situación: microespacio, mesoespacio, macroespacio, etc.

- **Segunda fase. Consigna dada por el profesor/a:**
  "Hoy vamos a hacer un nuevo robot. Cada niño de la mesa va a completar una parte del robot con cuadraditos de colores. Atención, sólo podréis hacer ***un solo*** *viaje a mi mesa para pedirme los cuadraditos necesarios".*

6. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA EMPLEADA EN EL TALLER.

BROUSSEAU, G. (1982) *Les objets de la Didactique des Mathématiques*, 2 éme École d'Étè sur la Didactique des Mathématiques. Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1986) *Théorisation des phénomenes d'enseignement des Mathématiques.* Thése d'État. Bordeaux: Université de Bordeaux I.

BROUSSEAU, G, BRIAND, J., GAIRIN-CALVO, M. (1995) *A nous les nombres.* París: EDUTIL

BROUSSEAU, G. (1987) Les différents rôles du maître. *Actes du XIV^{éme} Colloque INTER-IREM des PEN* (p. 37-70). IREM de Nantes et École Normal d'Angers.

BROUSSEAU, G. (1998) *Théorie de situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

BRIAND, J. (1993) *L'énumeration dans le mesurage des collections. Un dysfonctionement dans la transposition didactique.* Thése de Doctorat. Université de Bordeaux.

BRIAND, J. (1999) Contribution à la réorganisation des savoirs prénumeriques et numeriques. Étude et realisation d'une situation d'enseignement de l'énumeration dans le domine pré-numerique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19.1, 8-41.

EL BOUAZZAOUI, H. . (1978) *La numeration au cours preparatoire.* Thése. Université de Bordeaux.

ERMEL (1991) *Apprentissages numériques.* Institut National de Recherche Pédagogique. París: Hatier Enseignants.

GUITEL, G. (1975) *Histoire comparée des numerations écrites.* París: Flammarion.

RUIZ HIGUERAS, L. (2000) *La construcción del número y la numeración en Educación Infantil (y nivel inicial de Primaria).* Área de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén (pre-print)

RUIZ HIGUERAS, L. (2000) *Ingeniería didáctica en Educación Infantil. Entornos intercativos de aprendizaje con ordenador en el campo prenumérico.* En Actas del III Congreso Mundial de Educación Infantil. Universidad de Málaga. (en prensa).

RUSSELL, B. (1919) *Introduction of mathematics philosophy,* George Allen & Unwin, Londres.

SALIN, M.H., BERTHELOT, R. (1993) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thése de doctorat. Bordeaux: Université de Bordeaux, 1.

TALLER DE MATEMÁTICAS DEL I.E.S. "ARROYO DE LA MIEL". BENALMÁDENA.

JOSE ANTONIO CABRERIZO CABRERIZO · JOSE MANUEL BARRAGÁN BORDALÁ · FRANCISCO REY GARCIA
José Mª Fernández Martínez · Alejandro Escobar García · Antonio Molina Chaves

Aspectos tratados en el "Taller de Matemáticas".
Juegos y pasatiempos (incluye solitarios).
Paradojas y magia matemática.
Construcciones y manipulaciones.
En ellos se comprende, de manera transversal, el asunto de la resolución de problemas.

EL JUEGO

Dios quiso dar a los hombres toda clase de alegrías en la vida para que, disfrutando de ellas, lograsen soportar mejor las penas y trabajos que pudieran sobrevenirles.

Alfonso X el Sabio, en la introducción del "Libro de los juegos", primer libro que trata sobre el tema en la literatura europea.

Los juegos poseen algunas de las características de las obras de arte. Con sus reglas sencillas e inequívocas son como islas de orden en el impreciso y desordenado caos de lo sensible.

Aldoux Huxley.

Siempre he creído que el mejor camino para hacer las Matemáticas interesantes a los alumnos y profanos es acercarse a ellos en son de juego.

M. Gardner.

Es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante. De hecho han sido muchos los intentos de presentar sistemáticamente los principios matemáticos que rigen muchos de los juegos de todas las épocas.

M. de Guzmán.

Los juegos de tablero y fichas tienen un atractivo universal, y habrá poca gente que no se haya visto atraída e interesada, en un momento u otro, por algún juego de este tipo.

R. Bell y M. Comelius.

Como vemos, la consideración del juego como actividad recomendable no es nueva, ni tampoco su interés en conexión con la actividad matemática. No hemos de olvidar que hay toda una parte de las Matemáticas denominada Teoría de Juegos, o de la relación entre el juego y la Inteligencia Artificial. También podemos encontrar interesantes relaciones entre algún aspecto del funcionamiento de nuestro cuerpo y los pasatiempos matemáticos (Enrique Meléndez Hevia. (1993). ALa evolución del metabolismo: hacia la simplicidad@, *Eudema*).

ASPECTOS DIDÁCTICOS

Según Mª. Luz Callejo, los juegos de estrategia favorecen los siguientes aspectos:

- Trabajo en grupo.
- Comunicación de ideas.
- Capacidad de interrogarse nuevas situaciones.
- Contraste de observaciones y conjeturas.
- Registro del proceso de resolución por parte de los jugadores.
- Revisión y reflexión sobre el proceso de resolución.

Como metodología, propone cinco fases:

- Orientación del trabajo.
- Trabajo en grupo.
- Confrontación de ideas.
- Puesta en común..
- Aplicación.

Gómez Chacón propone esta metodología general:

- Familiarizarse con el juego.
- Exploración inicial: buscar varias estrategias de resolución.

- Llevar a cabo la estrategia: selección de posiciones ganadoras, examinar la validez de nuevas conjeturas...
- Reflexionar sobre el proceso seguido.

Luis Ferrero aporta algunas sugerencias didácticas para la práctica de juegos:

- Graduar la dificultad del juego en función de los alumnos a los que va dirigido.
- Sobre un mismo material de juego se pueden idear juegos distintos modificando adecuadamente las normas.
- Cuando dominen un juego hay que animarles a que lo adapten a su gusto variando alguna norma.
- Cuando la estrategia ganadora resulte difícil, es aconsejable que ensayen casos más simples.

Existe bastante literatura sobre resolución de problemas. En función del ámbito más o menos profundo o del nivel de especificación encontraremos esquemas que se centran en pocos criterios señalados de forma general (Polya, Bransford y Stein,...), o que detallan más las diversas estrategias (Fernández, Schoenfeld,...).
Centrándonos en el juego, Mª. Luz Callejo resalta las siguientes capacidades en resolución de problemas, que son estimuladas por los juegos:

- Establecer analogías entre problemas.
- Empezar por el final.
- Resolver primero un problema más sencillo.
- Hacer una representación gráfica.

Fernando Corbalán resalta los siguientes:

- Empezar por el final.
- Experimentar y extraer pautas.
- Sacar partido de la simetría.
- Utilizar modelos adecuados de expresión (verbales, gráficos, algebraicos, numéricos).
- Resolver problemas análogos.
- Empezar por resolver un problema más sencillo.

TRABAJO DESARROLLADO EN EL GRUPO

Además de la búsqueda y construcción de actividades interesantes, tratamos de reflejar el análisis de las estrategias, de los contenidos matemáticos y de la historia de algunos juegos y pasatiempos.

Hemos seleccionado las siguientes actividades para exponerlas en el congreso:

❑ Paradojas:

- El chino que desaparece.
- El enano que desaparece.
- El cuadrado evanescente.
- Figuras imposibles.

❑ Juegos:

- El juego de las isometrías.
- El morris de nueve peones.
- El laberinto sexual.
- Caer al agua.
- El Bridg-it.
- El jam.
- El sim.
- El surakarta.
- El mancala.
- El nim.
- Los zorros y los gansos.
- El golf matemático.

- Construcciones:
  - Construcción de poliedros.
  - El cubo soma.
  - Un litro de madera.
  - Caleidociclos.
  - Números en el plano y en el espacio.
  - La cinta de Möebius.
- Solitarios:
  - Rompecabezas topológicos.
  - Intercambio de caballos.
  - Intercambio de fichas.
  - El gran atasco.
  - El cubo de la cara roja.
  - Las torres de Hanoi.
  - Intercambio de palillos.
  - El tangram.
  - Formación de triángulos.
  - Reflexión de espejos.
  - El solitario inglés.
  - El laberinto decimal.
- Magia
  - El círculo mágico.
  - Juegos de dados.
  - Escapa si puedes.
  - Juegos de calendario.
  - Adivinaciones numéricas.
  - Juegos de cartas.

MATEMÁTICA INTERACTIVA CON POWERPOINT 2000

JUAN ANTONIO REYES DELGADO · RAFAEL BRACHO LÓPEZ

Unas de las aplicaciones informáticas que más se adaptan a nuestras necesidades didácticas son las Aplicaciones Multimedia. Estas son documentos integrados por un conjunto de pantallas por las que el usuario puede moverse en la dirección que desee de forma interactiva, pudiendo utilizar recursos de imagen, vídeo y sonido y cualquier otro software informático.

Hasta ahora este tipo de material no ha sido muy utilizado directamente en nuestras clases, quizá debido sobre todo a la falta de medios de nuestros centros. Sin embargo, actualmente existen muchas alternativas económicas que hacen posible la utilización de la multimedia en el aula, como son las tarjetas de vídeo con salida para TV y los convertidores de señal VGA a PAL, con los que podemos reproducir las imágenes en un monitor de TV de grandes dimensiones, y los proyectores o cañones multimedia cuyo prohibitivo costo de partida se ha visto reducido a la mitad, multiplicándose sin embargo sus características de luminosidad y resolución que hacen que nuestra sala de audiovisuales se convierta en una verdadera sala de proyecciones, con el gran interés que ello conlleva.

El uso más inmediato que cualquier usuario sin apenas formación informática puede hacer de las aplicaciones multimedia puede ser a través de las numerosas producciones comerciales. Sin embargo, resulta mucho más interesante que cada profesor o profesora pueda elaborar su propio material, adaptándolo a las necesidades concretas de sus alumnos/as.

Entre la gran cantidad de software existente para la creación de documentos multimedia, nosotros hemos elegido el Microsoft PowerPoint, ya que siendo un programa del paquete Office, son compatibles las dos últimas versiones (97 y 2000) y éstas se encuentran tan extendidas que casi todos las tenemos instaladas en nuestros equipos particulares y los de nuestros centros y poseen muchos elementos y características comunes de uso con otro programas de la serie como el procesador de textos Word, que muy probablemente conozcas.

Con este taller pretendemos ofrecer una visión rápida sobre las posibilidades que tiene PowerPoint, que comenzó siendo un programa de presentación de diaporamas llegando a incorporar en sus últimas versiones sencillas y prácticas herramientas que permiten la creación de potentes aplicaciones multimedia con características muy indicadas para el diseño de actividades en el área de Matemáticas.

Estamos seguros de que la profundización y destreza en el manejo del programa serán tarea fácil para el profesorado de Matemáticas, habituado a la utilización de las aplicaciones informáticas.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

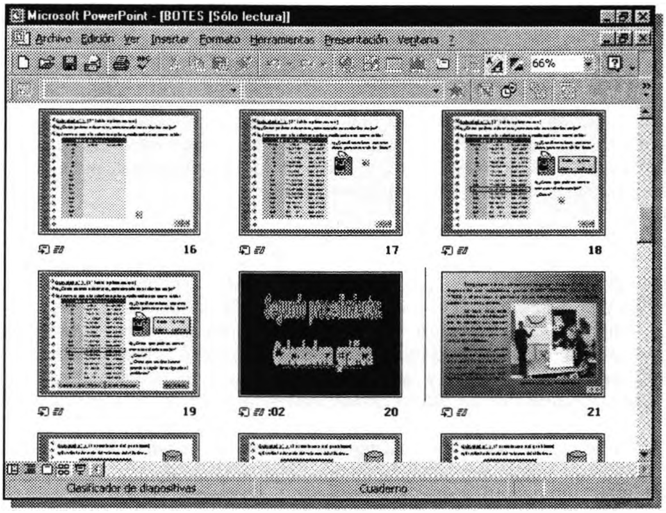
Nuestra propuesta de trabajo consiste en:

1. Trabajo con PowerPoint:

Expondremos de manera esquemática y utilizando un material interactivo propio elaborado para un curso de formación impartido recientemente, los hitos más usuales en la creación de presentaciones con PowerPoint 2000, que pueden ser:

Trabajo con diapositivas:

- Vistas de PowerPoint.



Ventana de trabajo con PowerPoint en modo Clasificador de diapositivas

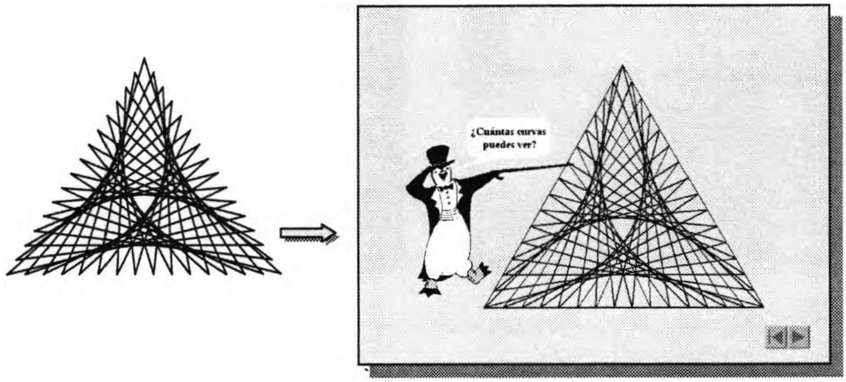
- Inserción, ordenado, copiado y borrado de diapositivas.
- Uso de reglas y guías, etc.

- Trabajo con objetos:
- Creación de fondos.

Fondo

- Edición generalizada de objetos.
- Trabajar con textos normales y de diseño.
- Trabajar con tablas.

- Dibujos e imágenes prediseñadas o no.



- Representaciones gráficas y organigramas,
- Edición de ecuaciones, etc.
- Inserción de sonidos y vídeos.

• Presentación de las diapositivas:

- Animación de elementos.
- Efectos de transición.
- Creación de hipervínculos o hiperenlaces.
- Presentación de las diapositivas.
- Presentaciones portátiles, etc.

• Impresión.

• Creación de presentaciones para Internet.

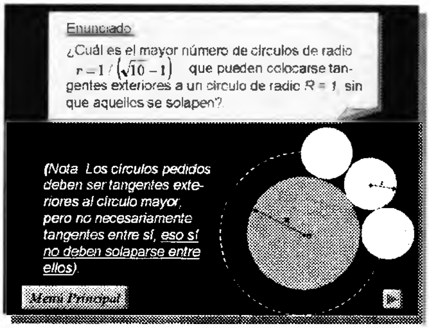
2.Creación completa de una presentación:

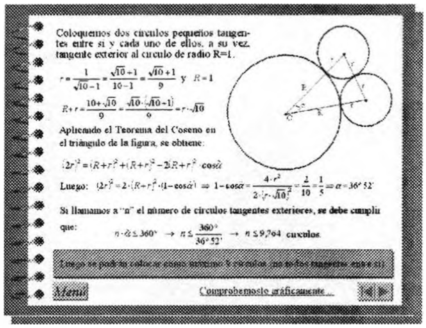
Evidentemente, sería interesante que los asistentes pudieran elaborar una pequeña presentación. Prácticamente con los conceptos que se habrán visto en la fase anterior del taller esto sería posible, pero naturalmente sería necesario disponer de un aula de informática y de más tiempo. Por ello seremos nosotros los que elaboraremos una presentación in situ, con el objeto de transmitir la facilidad de manejo y la operatividad y la potencia que tiene este programa.

3.Ejemplificación con material realizado por nuestro grupo de trabajo:

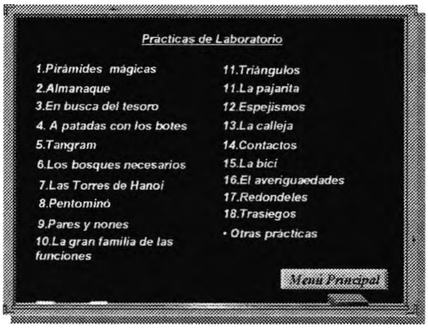
Por último analizaremos el gran potencial que tiene este software para el área de Matemáticas, recorriendo varias producciones de distinta naturaleza elaboradas por nosotros:

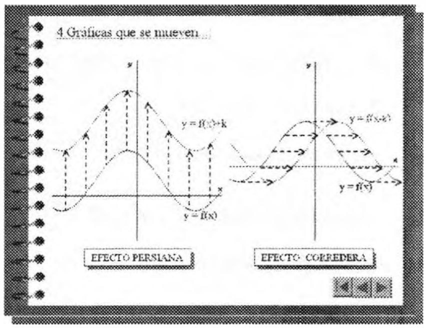
- Resolución de problemas.



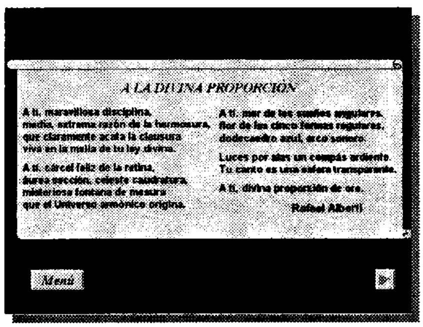


- Prácticas de Laboratorio de Matemáticas.





- Historia, Literatura y Matemáticas.



- Unidades didácticas.
- Divertimentos matemáticos.
- Otras.

MATEMÁTICAS PARA PASAR EL TIEMPO

José Muñoz Santonja · Antonio Fernández-Aliseda Redondo

Vivimos inmersos en una sociedad del ocio. Dedicamos bastante de nuestro tiempo a actividades que no son propiamente profesionales, como se puede ver, por ejemplo, si estudiamos la gran cantidad de horas diarias que los españoles vemos la televisión (por media cerca de cuatro horas, incluso antes de "El Gran Hermano") o si nos fijamos en el elevado número de personas que se desplazan cada vez que entramos en periodos vacacionales.

Una de las actividades a la que solemos dedicar nuestro tiempo libre es la resolución de pasatiempos. No es raro ver a personas que van a viajar (en tren, autobús,...) o a pasar el día de asueto en la playa o piscina, cargarse de crucigramas o sopas de letras para entretener esas horas de ocio. Los pasatiempos son muy atractivos para una gran cantidad de personas; resultan además una actividad agradable y motivadora y, desde luego, totalmente voluntaria. No es raro que cualquier revista posea alguna sección de entretenimiento, incluso las dirigidas a los niños. La variedad de propuestas es sorprendente.

Entre los pasatiempos, existen muchos aprovechables por los que nos dedicamos a la enseñanza de las Matemáticas, bien porque requieran utilizar algún concepto o porque desarrollen alguna destreza incluida en nuestro curriculum. Existe una especial relación entre los procesos que se siguen al resolver estos pasatiempos y los que se emplean en la Resolución de Problemas.

CARACTERÍSTICAS DE LOS PASATIEMPOS MATEMÁTICOS:

- Son motivadores. Suponen un reto.
- Divierten.
- Son un elemento frecuente y aceptado en la vida cotidiana. Si aparecen en los periódicos es porque son interesantes para los lectores, pues si no desaparecerían.
- Constituyen un recurso con gran variedad y cantidad de materiales.
- Se pueden usar dentro del aula y también fuera (Semanas culturales, Gymkhanas, Revistas, Concursos...).
- No se necesitan conocimientos matemáticos muy profundos. Lo que no quiere decir que sean fáciles.
- Desarrollan procedimientos de la Resolución de Problemas.

PASATIEMPOS Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Una de las dificultades de la Resolución de Problemas es su integración entre las actividades cotidianas del aula. Problemas de tiempo (aprender-enseñar a resolver problemas es un proceso lento) y un curriculum bastante extenso hacen que sus apariciones sean esporádicas.

Donde sí aparece con mucha frecuencia la Resolución de Problemas es en actividades lúdicas-recreativas, afortunadamente cada día más frecuentes en nuestros centros, del tipo Logikón, Open Matemático, Concursos,...

Últimamente estas actividades están saliendo del recinto escolar realizándose en entornos de las ciudades. De esta forma la Resolución de Problemas gana un elemento muy importante: el contexto. En Gymkhanas por Jerez, Córdoba o los Concursos de Problemas de Ingenio de Almería compañeros de estas localidades han contextualizado situaciones matemáticas que desde el aula se pueden considerar artificiales. La Resolución de Problemas deja de ser el frío reto ante un enunciado en un folio en blanco y se convierte en un esfuerzo intelectual ante una situación de nuestro entorno.

Este elemento contextualizador y a la vez alejado de la rutina del aula se da en los pasatiempos matemáticos de la prensa. Ante todo son pasatiempos, juegos con intención de pasar un rato agradable, muy frecuentes y reconocidos por todos en periódicos y revistas. Estas dos características hacen que quienes los intentan resolver se acerquen a ellos con una actitud positiva y sin la carga negativa que muchas veces se asocia a situaciones matemáticas. En su resolución se está haciendo matemática, aún sin saberlo.

TÉCNICAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE PASATIEMPOS

Vamos a ver algunas técnicas de las que se utilizan en la Resolución de Problemas y que también se usan al resolver Pasatiempos.

1. Leer y entender bien.


Hoyo final

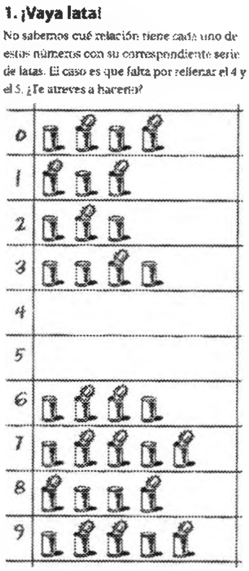
El último hoyo es un poco raro. ¿Cuánta arena hay dentro si es un hoyo con forma de cubo de 3 x 3 x 3 centímetros?

Diario Marca, 31-08-98

Tal y como está formulada la pregunta no puede haber arena pues no sería un agujero.

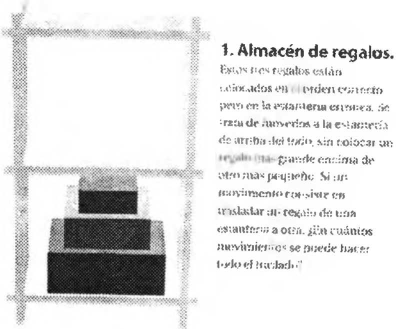
2. Expresar en otros términos.

Revista QUO, Feb. 99


1. ¡Vaya lata!

No sabemos qué relación tiene cada uno de estos números con su correspondiente serie de latas. El caso es que falta por rellenar el 4 y el 5. ¿Te atreves a hacerlo?

Basta escribir el nombre de los números (cero, uno, dos...) para darse cuenta de la forma en que está construida la serie.


1. Almacén de regalos.

Estos tres regalos están colocados en el orden correcto pero en la estantería errónea. Se trata de moverlos a la estantería de arriba del todo, sin colocar un regalo más grande encima de otro más pequeño. Si un movimiento consiste en trasladar un regalo de una estantería a otra, ¿en cuántos movimientos se puede hacer todo el traslado?

3. Experimentar, descomponer el problema, conjeturar, generalizar.

Revista QUO, Feb. 98

Se trata de una adaptación de un juego conocido como "Torres de Hanoi", en este caso para tres elementos.

Se puede ejemplificar con monedas de diferente tamaño. Como el número de regalos es pequeño se llega rápida y fácilmente a la solución; en este ejemplo son necesarios siete movimientos. Si el número de regalos fuera mayor se podría descomponer empezando por casos más sencillos.

Con los datos que se van obteniendo se construye la tabla:

Nº de regalos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**......**	**n**
Nº de movimientos	**1**	**3**	**7**	**15**	**?**	**......**	**?**

Se podría conjeturar lo que ocurre con cinco regalos. Es probable que las primeras hipótesis sean del tipo "ley de recurrencia" tal como "cada número se obtiene multiplicando el anterior por dos y sumando uno". Esta ley es poco operativa para un número grande de regalos por lo que es aconsejable buscar una expresión que dependa únicamente del número de objetos que hay que trasladar (término general), llegándose a $a_n = 2^n - 1$.

4. Tantear, hacer un esquema.

Revista SEMANA

problema de tiempo

Para cocinar un cierto plato hay que ponerlo en el horno 8 minutos. Para ello, además del horno, se dispone de dos relojes de arena: Uno de 7 minutos y el otro de 3. ¿Cómo se las arreglaría para contar exactamente 8 minutos?

El primer paso ha de ser tantear, poner los relojes juntos o separados e ir viendo los tiempos que se pueden obtener.

Como en este caso la simulación real es complicada por no disponerse fácilmente de los relojes requeridos, es fundamental hacer un esquema donde vayan apareciendo los movimientos de los relojes.

1) Comienzan los dos relojes a la vez.
2) Cuando en el reloj pequeño han transcurrido 3 minutos en el grande faltan 4. Se gira el pequeño para empezar a contar de nuevo.
3) Al acabar el pequeño por segunda vez al grande le queda 1 minuto.
4) Se pone en funcionamiento el horno.
5) Cuando acaba el minuto se gira el reloj grande para contar 7 más.
6) Al terminar estos siete minutos se retira el plato pues en total se han contado 8.

5. Orden.

Diario Marca, 29-07-98

Basta escribir las 24 formas de ordenar del uno al cuatro (para ello es muy útil usar un diagrama de árbol) y ver en cuáles va el uno en primer lugar, el dos en segundo, el tres en tercero o el cuatro en cuarto. Son 15.

Apuesta segura

En una carrera hípica compiten 4 caballos: 1, 2, 3 y 4. Sabiendo que si todos acaban la carrera tienen 24 combinaciones posibles de orden de llegada (sin empates), **¿en cuántas carreras coincidiría el número de orden con el dorsal de al menos uno de los caballos?**

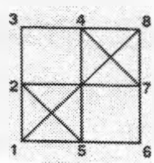
6. Investigaciones matemáticas.

Situaciones que hace un par de siglos sirvieron de impulso a nuevos descul matemáticos aparecen actualmente en pasatiempos, incluso infantiles. Son los levantar el lápiz del papel y colorear mapas.

Revista MUFACE, invierno 1999

Trazos

Haga uso de una línea continua y dibuje el gráfico. No puede volver a pasar por una recta ya trazada.



Euler (1707-1783) resolvió uno de los problemas más conocidos de las Matemáticas, el de los puentes de Königsberg, que se considera punto de partida de la topología, y que es un caso particular del problema de dibujar figura sin levantar el lápiz del papel y sin repetir dos veces una misma línea.

Colorear un mapa con el mínimo número de colores de forma que países con una línea de frontera no tengan el mismo color fue un problema planteado en 1852. No es un problema fácil. A finales del siglo XIX se demostró que cinco colores bastan; en 1950 se sabía que si el mapa tenía menos de 36 países se puede colorear con cuatro colores; y en 1976, con ayuda de ordenadores, se concluyó que bastan cuatro colores.

Revista QUO, Dic. 96

Estos tipos de pasatiempos pueden servir como puente para investigaciones matemáticas: ¿Qué figuras pueden dibujarse sin levantar el lápiz y cuáles no? ¿Existen mapas que pueden colorearse con sólo 1, 2 ó 3 colores?

BIBLIOGRAFÍA:

FERNÁNDEZ CANO, A. Y RICO ROMERO, L. (1992): *Prensa y Matemáticas*. Editorial Síntesis. Madrid.

GARCÍA AZCÁRATE, Ana (1999): *Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Cantoblanco. Madrid.

"VIVIR UNA AVENTURA MATEMÁTICA"

ANA GARCÍA LÓPEZ · MANUEL MARTÍNEZ DÍAZ · MIGUEL MONTEOLIVA SANCHEZ · CARLOS O. SUÁREZ ALEMÁN
GRUPO PAPIRO

RESUMEN: Tras la experiencia de dos años consecutivos de la Gincana Matemática provincial de Cádiz, se plantea presentar a los profesores la experiencia para que la vivan en sus propias carnes.

FINALIDADES DEL TALLER

- Estimular el pensamiento, la creatividad, la habilidad para enfrentarse a nuevas situaciones, a problemas imprevistos.
- Mostrar a los participantes que las matemáticas pueden dar otra visión amena y divertida de una ciudad.
- Divulgar un aspecto lúdico de una disciplina clave en el desarrollo de la sociedad.
- Reconocer la presencia de objetos y conceptos matemáticos que pasan desapercibidos a simple vista.
- Conocer la Ciudad, su cultura, su historia, su arte.

"Acercar las matemáticas a la sociedad de manera lúdica."

DESCRIPCIÓN

- Una aventura pensada en claves matemáticas
- Una ginkana en la que el trasfondo es matemático, envuelta en una historia enigmática, de espías, pistas y enlaces.
- Para realizarla se necesita sentido intuitivo, creativo y práctico de las herramientas básicas matemáticas,

DESARROLLO

- La ginkana es una prueba por equipos.
- La ginkana consistirá en descubrir el enigma planteado en el inicio mediante la resolución una serie de problemas.

La resolución de cada problema llevará al siguiente problema.

Una vez realizado el Taller en una comunicación se expondrá la solución y los resultados de la experiencia realizada con los alumnos de la provincia de Cádiz.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

CONFERENCIAS

COMUNICACIONES

PANELES

TALLERES

ÍNDICE DE AUTORES

REY ROQUE, ANTONIO
REYES DELGADO, JUAN ANTONIO
RIZO VICEDO, JOAN
RODRÍGUEZ AGUILERA, DAVID
RODRÍGUEZ CIELOS, PEDRO
RODRÍGUEZ SOALLEIRO, MARÍA DOLORES
ROMERO MORENO, LUISA MARÍA
ROMERO ROMERO, JUAN LUIS
RONDÓN BUENDÍA, MANUEL
RUIZ , CARMEN
RUIZ , TRINIDAD
RUIZ ABAD, MARÍA CARMEN
RUIZ GARZÓN, GABRIEL
RUIZ HIGUERAS, LUISA
RUIZ JIMÉNEZ, BLAS CARLOS
SÁNCHEZ GÓMEZ, CARMEN
SÁNCHEZ MARÍN, BALTASAR
SÁNCHEZ MERINO, SIXTO
SÁNCHEZ PÉREZ, MONTSERRAT
SÁNCHEZ , V.
SÁNCHEZ VÁZQUEZ, MANUEL
SANTIAGO , ISABEL
SANZ RODRÍGUEZ, ROSA MARÍA
SARRÍA GONZÁLEZ, JULIÁN
SERRADÓ BAYES, ANA
SERRANO ORTA, FLORES
SUÁREZ ALEMÁN, CARLOS O.
TOQUERO , ANTONIO
TOQUERO , MANUEL
TORRES DEL TORO, MIGDALIA
VALDÉS PARDO, GIRALDO
VALLECILLOS JIMÉNEZ, ANGUSTIAS
VICENTE GONZÁLEZ, MARÍA CARMEN

Sociedad Andaluza de
Educación Matemática
"THALES"

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

ISBN: 84-7786-675-9

9 788477 866759