Elementos de la Teoría de Grupoides y Algebroides

Juan Núñez Valdés
Ángel F. Tenorio Villalón
José Antonio Vilches Alarcón

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones

Elementos de la Teoría de Grupoides y Algebroides

Juan Núñez Valdés
Ángel F. Tenorio Villalón
José Antonio Vilches Alarcón

UCA Universidad de Cádiz
Servicio de Publicaciones

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
C/ Dr. Marañon, 3
11002 Cádiz
http://www.uca.es/publicaciones

ISBN-13: 978-84-9828-075-3
ISBN-10: 84-9828-075-3

Depósito Legal: B-55.134-2006
Impreso en Cargraphics

Índice General

Los algebroides de Lie y las pseudoálgebras de Lie son una parte desconocida del folclore de la Geometría Diferencial. Han sido introducidos repetidamente en la Geometría Diferencial desde principios de la década de 1950, y también en Física y Álgebra, bajo una amplia variedad de nombres, sobre todo como invariantes infinitesimales asociados a estructuras algebraicas.

K.C.H. Mackenzie

Prefacio

En estos días, el ángel de la topología y el demonio del álgebra abstracta luchan por el alma de cada dominio de las matemáticas.
Herman Weyl

Esta monografía nace con la idea de servir de referencia básica a todas aquellas personas que necesiten la Teoría de Grupoides y Algebroides, bien para continuar en sus investigaciones sobre estos mismos objetos o bien para servirse de ellos en el estudio de otros diferentes.

Su gestación, que no debe ser tachada de casual o fortuita, obedece a una serie de causas, objetivas en su mayor parte, que creemos suficientes para justificar su existencia. Pasamos a comentarlas a continuación.

Es conocido que una de las principales dificultades con las que a menudo se encuentra el investigador que busca información sobre algún tema de su interés es que, generalmente, no encuentra un texto de referencia que le satisfaga plenamente. Este hecho se acrecienta, aún más, si cabe, cuando el tema objeto de su estudio no es especialmente conocido o cuando ha empezado a ser estudiado no hace mucho tiempo. Este último era precisamente el caso que nos ocupaba cuando comenzamos con la elaboración del presente texto en junio de 2001. En las circunstancias a las que nos enfrentábamos, las dificultades que surgen al iniciar una investigación llegan a ser, en muchas ocasiones, casi infranqueables. A la luz de estas reflexiones, permítasenos narrar parte de nuestra propia experiencia cuando decidimos iniciar una investigación sobre grupoides y algebroides de Lie.

La primera dificultad que se nos presentó fue la imposibilidad de encontrar reunidos en un solo texto todos aquellos conceptos previos que se necesitan para una adecuada comprensión de los grupoides y algebroides. Entre estos conceptos necesarios abundan los relativos a Geometría Algebraica, Geometría Diferencial, Topología, Álgebra y varias otras ramas de las Matemáticas que, obviamente, se encuentran cada uno de ellos en textos específicos, aunque con diferentes enfoques y modos de exposición.

En segundo lugar nos encontramos con que los, relativamente, escasos textos existentes que tratan sobre grupoides y algebroides presentan notabilísimas diferencias entre ellos, no sólamente en los apartados de contenidos y notación, sino que incluso aparecen en ellos conceptos esencialmente distintos y que sin embargo son denominados con el mismo nombre.

Como prueba de lo que decimos, permítasenos comentar al respecto una pequeña anécdota que nos sucedió al principio de nuestras investigaciones en este tema. La transcribimos porque creemos que ilustra suficientemente lo que acabamos de indicar.

Lo sucedido tiene que ver con dos de los autores que más veces se citan en esta monografía, contemporáneos nuestros, y que actualmente están considerados, sobre todo uno de ellos, como verdaderas autoridades ("popes" en el argot matemático) en el estudio de estos temas. Por razones obvias omitiremos sus nombres y nos referiremos a ellos nombrándolos simplemente como Sres. XX e YY.

Pues bien, ocurrió que en un momento dado de nuestra investigación en grupoides y algebroides nos encontramos con un concepto en el texto de XX que, en nuestra opinión, no tenía absolutamente nada que ver, tanto por su definición, como por su significado y por sus aplicaciones, con otro que en el texto de YY aparecía denotado con el mismo nombre.

Extrañados, dedicamos un tiempo considerable de nuestra investigación a intentar probar la equivalencia entre los mismos, para ver si a través de la definición y propiedades de uno cualquiera de ellos podíamos llegar a su "homólogo", pero nuestros intentos fueron infructuosos.

Como disponíamos de las direcciones electrónicas de estos autores, decidimos entonces enviarles un correo electrónico a cada uno de ellos, a fin de rogarles que nos aclarasen en la medida de lo posible aquel hecho. Pues bien, uno de ellos no nos contestó. El otro, casi a vuelta de correo (lo que nos hizo pensar que no le había prestado mucha atención a nuestro requerimiento, si bien tuvo la delicadeza de respondernos) nos envió la siguiente respuesta (traducida): *"No conocía el libro de YY. Creo que lo que él llama AA es lo que habitualmente se conoce en la literatura sobre el tema con el nombre de BB, y es por eso por lo que nosotros usamos este término."*

Como puede verse, estas palabras dan una base firme a las tesis que nosotros anteriormente hemos defendido sobre la necesidad de contar con un texto que permita solventar estas situaciones y otras más, de parecido tipo, que nosotros, desafortunadamente, también hemos padecido.

Continuando con las razones que nos han movido a redactar esta monografía, diremos que el principal objetivo que nos hemos planteado a la hora de escribirla es el de presentar una introducción a los grupoides (en concreto a los topológicos y los diferenciables) y a los algebroides de Lie, que resulte sencilla y útil al mismo tiempo a los investigadores que necesiten de estos temas.

Para cubrir este objetivo general, nos ha parecido oportuno actuar en varios frentes, considerando otros objetivos más particulares, que refuercen y consoliden al anterior.

Así, en primer lugar, hemos recopilado los conceptos y los resultados más importantes y de interés para tal tarea. Hay que indicar al respecto que muchas de las definiciones que aparecen en textos ya publicados no son ni suficientemente clarificadoras ni suficientemente completas. Por lo tanto, el primero de nuestros objetivos particulares ha sido precisamente aclarar los conceptos y dar demostraciones completas de aquellos resultados, que en gran parte de los casos no estaban completamente probados o no estaban bien referenciados (o si lo estaban, dichas referencias eran difíciles de conseguir). De hecho, muchas demostraciones que aparecen en esos textos ya publicados son consideradas triviales o inmediatas por sus autores, cuando realmente no lo son tanto. Ello nos ha obligado en ocasiones a reconstruir muchas de ellas a partir de las pruebas incompletas de que disponíamos e incluso a hacerlas de nuevo a partir de ideas originales nuestras.

Por otra parte, y como segundo objetivo particular, hemos incorporado una cantidad considerable de ejemplos a la teoría, que hemos desarrollado siempre que no conllevasen una introducción excesiva de conceptos que nos hiciese desviarnos del camino trazado. Asimismo, se indica una referencia bibliográfica para aquellos otros ejemplos que no se han tratado de manera profunda en esta monografía.

Tomando como tercer objetivo particular el de unificar las diferentes notaciones que podemos encontrar en los textos ya escritos, hemos optado por seguir en esta monografía la notación más aceptada en el marco teórico en que nos movemos, esto es, grupoides por un lado y fibrados vectoriales y algebroides de Lie por otro. No obstante, también hemos dejado constancia de otras notaciones seguidas en otros textos.

Finalmente, como último objetivo particular, citar la aportación de varios resultados originales que incorporamos a esta teoría, lo que supone la culminación de los propósitos que nos marcamos a la hora de redactar esta monografía.

Introducción

La situación actual es que los grupoides han sido usados en una amplia variedad de áreas de las Matemáticas, desde la Teoría Ergódica y el Análisis Funcional a la Teoría de Homotopía, la Geometría Algebraica, la Geometría Diferencial, la Topología Diferencial y la Teoría de Grupos. Sin embargo, este amplio y considerable uso no es tan bien conocido, incluso para aquellos que usan los grupoides en su especialidad, y esto ha hecho quizás más fácil formar una actitud poco seria.

R Brown.

Una formulación algebraica no sólo proporciona un marco más conciso y elegante, sino que además puede ser la fuente de nuevas revelaciones.

J. A. Vallejo.

Las *categorías* fueron introducidas por Eilenberg y MacLane en 1945 **[20]**, mientras que los *grupoides*, que constituyen una clase concreta de categorías, fueron estudiados por Brandt en 1926 **[5]**. Fue en ese trabajo en el que Brandt, que trataba la composición de formas cuadráticas en cuatro variables, les dio nombre por primera vez a estos objetos matemáticos.

Los grupoides se utilizan actualmente en diferentes áreas matemáticas, tales como la Teoría de Grupos, la Topología Algebraica, la Geometría Diferencial, la Teoría de Homotopía e incluso la Teoría de Galois. Para un conocimiento amplio de los usos que se les dan a estos objetos en Matemáticas puede verse **[6]**.

Las nociones de *grupoide topológico* y de *grupoide diferenciable* fueron introducidas por Ehresmann en una serie de artículos **[16, 17, 18, 19]** en los que añadía estructuras topológicas y diferenciables a los grupoides con el fin de usarlos como herramientas en Topología y en Geometría Diferencial. No obstante, Pradines redefinió el concepto de grupoide diferenciable en **[44]**. Su definición es la que seguiremos en este texto.

Muchas de las construcciones básicas de los grupoides algebraicos, esto es, sin estructura topológica ni diferencial, no se han podido desarrollar para los grupoides topológicos. Un ejemplo de este hecho es el grupoide cociente que trataremos en el capítulo dedicado a los grupoides topológicos y para el que la aplicación de identificación pudiera no ser abierta, por lo que puede carecer de la topología de identificación.

Entre las aplicaciones que tienen estos grupoides citamos las siguientes:

- En Geometría Analítica, Grothendieck los usó ampliamente y mostró cómo podían utilizarse para manejar las relaciones de equivalencias que surgen al construir los espacios de módulos (véase **[22]**). Como el uso de estos espacios está muy extendido en Matemáticas y Física, los grupoides desempeñan un papel muy importante en estas disciplinas.

- En Análisis, Mackey los usa en **[38]** para el tratamiento de las acciones ergódicas de grupos como si se tratasen de grupoides transitivos. Además, los grupoides permitieron la construcción de muchas álgebras no conmutativas de interés (véase **[50]**).

- En Topología Algebraica tenemos el grupoide fundamental de un espacio topológico, cuyo tratamiento principal se ha debido a Brown y Higgins **[7, 8, 23]** en situaciones en las que el grupo fundamental del espacio es muy restrictivo.

El concepto de *grupoide de Lie* ha variado desde sus comienzos. Así en **[31]** se hacía la diferencia entre grupoide diferenciable y grupoide de Lie, indicando que este último era un grupoide diferenciable localmente trivial. No obstante, a partir de **[3]** se ha optado por no distinguir entre grupoides diferenciables y grupoides de Lie, a diferencia de como se venía haciendo hasta ese momento. De este modo, la trivialidad local de un grupoide diferenciable se indicará explícitamente. Mackenzie sigue este convenio desde **[33]**.

Los trabajos sobre grupoides diferenciables se han dedicado desde su introducción en las Matemáticas a las siguientes áreas:

- *La propia teoría de grupoides:* La construcción de Pradines de invariante infinitesimal de primer orden de un grupoide de Lie, el álgebroide de Lie y el anuncio de una teoría de Lie análoga a la existente para grupos y álgebras de Lie. Muchos de los resultados enunciados por Pradines fueron demostrados por Almeida en **[1]**.

- Los grupoides de Lie se han usado como herramienta o lenguaje en diversas áreas. Por ejemplo, en la teoría de ecuaciones de Lie, como puede verse en **[27]**, o en la teoría de conexiones de orden superior, como se ve en **[56]**.

- Teoría general de grupoides topológicos, cuyo principal impulsor ha sido Brown **[6, 7, 8, 10]**.

- Teoría algebraica de grupoides y su aplicación a la teoría de grupos **[23]**.

El concepto de *algebroide de Lie* lo introdujo Pradines en 1966 (véase **[44]**), como una versión infinitesimal del grupoide diferenciable, por lo que este autor lo llamó *grupoide infinitesimal.* De hecho, el algebroide de Lie resulta ser el invariante infinitesimal de dicho grupoide. Para ello, generalizó la construcción del álgebra de Lie de un grupo de Lie.

La construcción anteriormente mencionada permite asociar un algebroide de Lie a cualquier grupoide diferenciable, creando un funtor de Lie análogo al que se construye entre los grupos de Lie y las álgebras de Lie. Este funtor de Lie se debe también a Pradines **[45]** y es detallado por Mackenzie en **[31]** para el caso de algebroides de Lie con una misma base y por Higgins y Mackenzie en **[24]** para el caso de algebroides de Lie con distinta base.

Este concepto de algebroide de Lie ya apareció implícitamente en los trabajos de Ehresmann al estudiar las conexiones de orden superior y las prolongaciones de estructuras de variedades, como puede verse en **[16, 17, 18]**. De hecho, los algebroides de Lie son, por su naturaleza, invariantes de primer orden. Desde 1992, Mackenzie se ha dedicado a estudiar los invariantes de segundo orden a los que llama algebroides de Lie dobles o bialgebroides de Lie (véase **[33, 36, 37]**).

La definición original de *morfismo* de algebroides de Lie también es debida a Pradines, apareciendo por primera vez en **[45]**, aunque carente de la claridad necesaria para su uso. Posteriormente, Almeida y Kumpera en **[2]** la clarificaron dando un concepto más general siguiendo lo dicho en **[45]**. Pero aún poseía muchas dificultades para que se pudiera trabajar apropiadamente con ella de forma algebraica. Se necesitaba una definición cuyo manejo algebraico fuese mayor y eso se consiguió con una observación de Weinstein hecha a Mackenzie sobre el algebroide de Lie de un grupoide acción y que consiste en la Proposición 1.2 de **[32]**. Antes de dicho texto no se habían realizado los cálculos de este ejemplo, cuya importancia radica en haber dado pie a la definición de morfismo de algebroide de Lie aparecida en **[24]**, que es la que seguiremos en este texto. Esta definición equivale a la dada por Almeida y Kumpera en **[2]**.

En **[45, 46, 47]**, Pradines anunció la posibilidad de construir una teoría de Lie completa para los grupoides diferenciables y los algebroides de Lie, lográndose de este modo muchos de los resultados ya obtenidos en geometría diferencial.

La teoría de Lie para grupos y álgebras de Lie debe su utilidad a que el funtor de Lie conserva muchas propiedades algebraicas fundamentales. Para los grupoides diferenciables y los algebroides de Lie, el funtor de Lie que puede construirse no verifica las propiedades del existente entre los grupos y álgebras de Lie. De hecho, existe una teoría de Lie para estas dos clases de objetos, dada por Pradines en **[44, 45, 46, 47]**, mediante una serie de notas seminales en las que se omitían las pruebas de la inmensa mayoría de los resultados principales y en las que observaba a los algebroides de Lie como objetos que surgen de los grupoides mediante un proceso de diferenciación.

Ante esta situación, surgió en **[47]** la siguiente pregunta: ¿es todo algebroide de Lie integrable?, es decir, ¿todo algebroide de Lie es el asociado de un grupoide diferenciable por medio del proceso de diferenciación al que se ha hecho referencia? Durante mucho tiempo se creyó que la respuesta a dicha pregunta era afirmativa, tal como pensaba Pradines en **[47]**. No obstante, Almeida y Molino demostraron en **[3]** que no se cumplía esa suposición y que existían algebroides de Lie no integrables. Este resultado es de gran importancia porque contrasta con el que se tiene para los grupos y las álgebras de Lie, en la que toda álgebra de Lie procede de un grupo de Lie.

En la actualidad, la teoría de Lie está bien estudiada en el caso en que los grupoides de Lie son localmente triviales. Se demostró que el algebroide de Lie de un grupoide de Lie localmente trivial es transitivo y que si la base es conexa se tiene el recíproco, como puede verse en el Corolario 3.16 del Capítulo III de **[31]**. En los restantes casos no se tiene un estudio tan completo.

La integrabilidad ni siquiera se puede asegurar para el caso en que el algebroide de Lie posea la propiedad de transitividad, como demostraron Almeida y Molino también en **[3]**. Es por esto que Mackenzie, en el Teorema 1.2 del Capítulo V de **[31]**, da una caracterización para la integrabilidad de los algebroides de Lie transitivos con base simplemente conexa (véase también **[30]**).

Un problema que aún está sin resolver es el de si la teoría de estructura de las álgebras de Lie de dimensión finita sobre cuerpos de característica 0 se puede extender a los algebroides de Lie; este hecho sería de interés incluso para los algebroides de Lie transitivos.

Mackenzie ha realizado un tratamiento muy profundo de los algebroides de Lie, en concreto del caso transitivo, publicando un trabajo de recopilación de lo hecho tanto por él mismo como por otros autores (véase **[31]**). Posteriormente, este autor ha seguido tratando el tema de los algebroides de Lie desde el punto de vista de la teoría de Lie, tanto sobre construcciones generales para dicha estructura como sobre el problema de integrabilidad, dando una vista de conjunto de lo hecho en **[34]**. De hecho, Mackenzie ha publicado recientemente un nuevo trabajo **[35]** en el que continúa el estudio realizado en **[31]**. Este trabajo puede considerarse, en cierta forma, como el culmen de la investigación realizada sobre estos temas hasta el momento y con su mención damos por finalizada esta serie de notas históricas con las que hemos pretendido reflejar, de forma breve, pero lo más completa posible, los antecedentes y la evolución seguida por estos temas, desde su no muy lejana aparición, allá por los años veinte del pasado siglo, hasta los tiempos actuales.

Al igual que anteriormente se indicaron algunos de los usos que tiene el concepto de grupoide en las ciencias, queremos explicitar que los algebroides de Lie tienen su principal aplicación en la Física Matemática, en concreto, en la Mecánica Clásica, Cuántica y Lagrangiana como puede observarse, por ejemplo, en **[11, 12, 13, 29, 39, 59]**.

Pasamos ahora a comentar el estilo que hemos seguido en la redacción de esta monografía. Para lograr que su lectura sea amena, fácil y sobre todo, comprensible, nos ha parecido oportuno estructurarlo en siete capítulos, cuyo contenido y distribución comentamos seguidamente. En este punto, nos ha parecido también conveniente mencionar aquellos apartados de los distintos capítulos que, por su carácter más específico, pudieran ser omitidos en una primera lectura de la monografía.

En el Capítulo 1 se indican aquellos conceptos y resultados ya conocidos de varias ramas de las Matemáticas que creemos indispensables para una buena comprensión de esta teoría y para asentar la terminología usada en esta monografía. Este capítulo se ha dividido en 5 secciones, dedicadas respectivamente al recordatorio de algunas nociones de Topología, Álgebra, Categorías y Funtores, Geometría Diferencial y de Grupos y Álgebras de Lie. En la sección dedicada a la Geometría Diferencial se hace especial énfasis en comentar la notación que se ha seguido en este texto, debido a que en algunos casos no es la habitual. En la tercera sección de este capítulo hacemos un repaso de la teoría algebraica de Categorías y Funtores. En concreto, una parte de la sección se centra en el concepto de categoría y sus principales propiedades; además se introduce el concepto de grupoide como una clase particular de categorías. La otra parte de la sección se ocupa del concepto de funtor y de isomorfismo entre dos categorías y se da una caracterización para que un funtor sea isomorfismo.

En el Capítulo 2 intentamos recopilar todos los conceptos, resultados y herramientas referentes a los fibrados vectoriales, que serán necesarios para poder definir los algebroides de Lie y asociarlos a un grupoide diferenciable, como se verá en el Capítulo 7. Este capítulo se divide en cuatro secciones. En la primera se introducen los fibrados vectoriales y los morfismos entre dichos objetos y se exponen las propiedades más relevantes sobre dichos objetos para nuestros intereses en el Capítulo 7. La segunda sección se centra en la construción de un fibrado vectorial a partir de las transformaciones coordenadas, técnica bien conocida para estos objetos. En la tercera sección se tratan las construcciones en fibrados vectoriales, en particular, el pullback o fibrado vectorial inducido y la suma de Whitney o producto fibrado de dos fibrados vectoriales. Finalmente, se define el subfibrado vertical y sus propiedades principales en la cuarta y última sección.

En el Capítulo 3 se continúa el estudio de los fibrados vectoriales, comenzado en el capítulo anterior. En la primera sección se estudian las secciones de un fibrado, dotándolas de estructura de módulo en la segunda sección. En la tercera sección se describe, de forma muy breve, el módulo de las secciones globales de un pullback de un fibrado vectorial dado.

El Capítulo 4 está dedicado a los grupoides desde un punto de vista puramente algebraico. Se intenta dar una visión lo más amplia posible, teniendo en cuenta el objetivo de esta monografía relativo a este objeto matemático. También se intentan exponer generalizaciones de resultados que se conocen para grupos y que se han obtenido para grupoides. Así, en la primera sección, se introduce el concepto de grupoide y se dan sus propiedades más elementales. La segunda y tercera secciones están dedicadas, respectivamente, al estudio de los morfismos de grupoides y al cociente de un grupoide por un subgrupoide normal, estudiándose cuándo es posible factorizar un morfismo por el cociente.

En los dos siguientes capítulos se continúa el tratamiento de los grupoides comenzado en el capítulo anterior pero añadiéndole una estructura de espacio topológico, en el Capítulo 5, o una estructura de variedad diferenciable, en el Capítulo 6. En cuanto a los grupoides topológicos se define el grupoide cociente y el concepto análogo de la componente de la identidad y se comprueba que se tienen resultados análogos a los obtenidos para grupos topológicos. Con respecto a los grupoides diferenciables, sólo damos una introducción somera de los mismos, ya que haría falta introducir conceptos y resultados relativos a foliaciones sobre variedades diferenciables, lo que alargaría excesivamente esta monografía.

Por último, en el Capítulo 7 se dan, en su primera sección, las definiciones de algebroide de Lie y de morfismos de algebroides de Lie sobre una misma base y, en la segunda, se hace lo propio con los algebroides de Lie sobre distintas bases. En la tercera sección se construye un algebroide de Lie asociado a un grupoide diferenciable. En las dos últimas secciones de este capítulo se observa que los morfismos de grupoides diferenciables inducen un morfismo sobre los algebroides de Lie asociados y se define el funtor de Lie entre la categoría de los grupoides diferenciales y la de los algebroides de Lie.

Tal como se comentó anteriormente, conviene indicar que en todos estos capítulos se han incluido una gran cantidad de ejemplos, que entendemos son fundamentales para una adecuada comprensión de la teoría.

En la parte final de esta monografía, se ha incorporado una extensa Bibliografía en la que, aparte de las monografías y textos empleados en la elaboración del mismo y directamente referenciados, también se han incluido otras obras que, entendemos, permiten facilitar al lector interesado una lectura y comprensión, tanto global como específica, más profunda de los contenidos teóricos y prácticos desarrollados en la presente obra.

No queremos terminar estas páginas sin manifestar explícitamente nuestro más sincero y cariñoso agradecimiento a nuestras respectivas familias, tanto por su total apoyo hacia nuestra tarea como por el tiempo que por dedicarnos a ella le hemos hurtado a su compañía. A todos ellos va dedicado este trabajo.

Capítulo 1
Preliminares

En este capítulo, se presentan aquellos conceptos y resultados cuyo conocimiento consideramos necesario para una adecuada comprensión del resto de los capítulos. No se presentarán, no obstante, aquellos conceptos que sean suficientemente conocidos y generales, como los de espacio topológico, espacios de Haussdorff o T_1 o las definiciones de campo diferenciable de vectores tangentes de una variedad, a menos que pueda existir algún tipo de confusión entre diferentes definiciones de algunos de ellos, como puede ocurrir, por ejemplo, con la definición de variedad diferenciable.

También se indicarán algunas referencias en las que el lector pueda encontrar las pruebas de los resultados que se citan.

1.1 Topología

Presentamos dos clases de espacios topólogicos de los que se hará uso en el Capítulo 5. Para una visión más general de los mismos, véanse **[15, 42, 53]**.

Definición 1.1.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos y $p : X \longrightarrow Y$ una aplicación de identificación. Se dice que un conjunto A de X es* p-**saturado** *si $A = p^{-1}(p(A))$.*

Definición 1.1.2. *Un espacio topológico X se dice* **semilocalmente simplemente conexo** *si para cada $x \in X$ existe un abierto V en X con $x \in V$ y tal que cualquier camino en V con x como origen y llegada es homotópico al camino constante en x.*

1.2 Álgebra Conmutativa

Se recogen en esta sección las nociones más relevantes del área de Álgebra Conmutativa, que aparecerán en el Capítulo 3 a la hora de tratar las secciones globales de los fibrados vectoriales. Como referencia puede verse, por ejemplo, **[49]**.

En lo que sigue, R denotará un anillo conmutativo unitario. Se recuerda, en primer lugar, el concepto de R-módulo que es la que sigue:

Definición 1.2.1. *Se denomina* R-**módulo** *a una terna $(M, +, \cdot)$, donde M es un conjunto, $+ : M \times M \longrightarrow M$ es una operación interna de M tal que $(M, +)$ es un grupo abeliano y $\cdot : R \times M \longrightarrow M : (f, m) \mapsto f \cdot m$ es una operación externa que verifica las siguientes condiciones:*

1. $f \cdot (n + m) = f \cdot n + f \cdot m$,
2. $(f + g) \cdot m = f \cdot m + g \cdot m$,
3. $(fg) \cdot m = f \cdot (g \cdot m)$,
4. $1_R \cdot m = m$,

donde $f, g \in R$, $m, n \in M$ y 1_R es la unidad de R.

Se continúa con las definiciones de morfismo y de isomorfismo entre módulos:

Definición 1.2.2. *Sean M y N dos R-módulos. Un* **morfismo de R-módulos** *es una aplicación $F : M \longrightarrow N$ que verifica:*

$$F(f \cdot m + g \cdot n) = f \cdot F(m) + g \cdot F(n) \quad \forall f, g \in R, \ \forall m, n \in M.$$

Definición 1.2.3. *Un* **isomorfismo de R-módulos** *es un morfismo de R-módulos biyectivo.*

Los isomorfismos de módulos pueden caracterizarse por medio de la siguiente:

Proposición 1.2.4. *Un morfismo $f : M \longrightarrow N$ de R-módulos es isomorfismo si y sólo si existe un morfismo de R-módulos $g : N \longrightarrow M$ tal que:*

$$g \circ f = id_M \quad y \quad f \circ g = id_N.$$

Damos a continuación la definición de submódulo:

Definición 1.2.5. *Sea M un R-módulo y sea $N \subset M$. Se dice que N es un* **R-submódulo o sub-R-módulo** *de M si N es un R-módulo con la estructura de M.*

El concepto de submódulo generado se obtiene de la siguiente:

Proposición 1.2.6. *Sean M un R-módulo y $\mathrm{L} = \{m_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de elementos de M. El subconjunto de M definido como:*

$$L = \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_{i_k} \cdot m_{i_k} \mid \{m_{i_k}\} \subset \mathrm{L}, \{f_{i_k}\} \subset R \right\}$$

es un R-submódulo de M.

Definición 1.2.7. *Al R-submódulo L de M se le denomina* **submódulo engendrado por** L *y se le denota por $< \mathrm{L} >$. Al conjunto* L *se le denomina* **base** *de L.*

Dados dos submódulos, se define la **suma directa de ambos** según:

Proposición 1.2.8. *Sean M y N dos R-módulos. Entonces el conjunto:*

$$M \oplus N = \{(m, n) \mid m \in M, n \in N\}$$

es un R-módulo con las operaciones:

$$\begin{aligned} + \ :&(M \oplus N) \times (M \oplus N) \longrightarrow (M \oplus N) \\ &((m_1, n_1), (m_2, n_2)) \mapsto (m_1 + m_2, n_1 + n_2), \\ \cdot \ :&R \times (M \oplus N) \longrightarrow (M \oplus N) \\ &(f, (m, n)) \mapsto (f \cdot m, f \cdot n), \end{aligned}$$

donde en la primera y segunda coordenada se utilizan las estructuras de R-módulo de M y N, respectivamente.

De este modo, se pueden dar la siguiente:

Definición 1.2.9. *Se dice que un R-módulo M es:*

1. **libre**, *si posee una base.*
2. **finitamente generado**, *si posee una base finita.*
3. **proyectivo**, *si existe otro R-módulo N tal que $M \oplus N$ es libre.*

1.3 Categorías y funtores

El objetivo de esta sección es reseñar los conceptos relacionados con categorías que se requieren para posteriores capítulos. Para cuestiones relativas a este área con un tratamiento en profundidad, véanse **[41, 52]**; si sólo se desea una somera introducción para poder seguir adecuadamente esta monografía, véase **[7]**.

Definición 1.3.1. *Una* **categoría** C *consiste en:*

1. *Una clase* $\mathrm{Ob}(C)$, *llamada la* **clase de objetos** *de* C.

2. *Un conjunto* C_x^y *llamado el* **conjunto de morfismos en** C **de** x **a** y, *para cada* $x, y \in \mathrm{Ob}(C)$.

3. *Una función, llamada* **composición**, *que a cada* $g \in C_y^z$ *y* $f \in C_x^y$ *le asigna un elemento* $gf \in C_x^z$; *esto es, la composición es una función:*
$$C_y^z \times C_x^y \longrightarrow C_x^z,$$
que debe verificar dos axiomas:

CAT 1 (Asociatividad) Si $h \in C_z^w$, $g \in C_y^z$, $f \in C_x^y$, *entonces* $h(gf)=(hg)f$.

CAT 2 (Existencia de identidad) Para cada x *en* $\mathrm{Ob}(C)$ *existe un elemento* 1_x *en* C_x^x *tal que si* $g \in C_w^x$, $f \in C_x^y$ *entonces:*
$$1_x g = g \qquad y \qquad f1_x = f.$$

Notación 1.3.2. *En los textos sobre Teoría de Categorías, los conjuntos de morfismos* C_x^y *de la Definición 1.3.1 suelen denotarse por* $C(x, y)$. *La notación que se ha adoptado en esta monografía es la utilizada por Mackenzie en sus textos, véanse* **[31, 34]**.

Notación 1.3.3. *Cada* $f \in C_x^y$ *se denota por* $f : x \to y$ *ó* $x \xrightarrow{f} y$. *De este modo, se dice que* x *es el* **dominio** *de* f *y que* y *es su* **rango**. *La notación* $x \to y$ *hace siempre referencia a un elemento de* C_x^y.

Una clase de categorías es la que viene dada por la siguiente:

Definición 1.3.4. *Una categoría* C *se dice* **pequeña** *si la clase* $\mathrm{Ob}(C)$ *es un conjunto.*

Nota 1.3.5. *Obsérvese que, si la categroría $\mathcal{C}$ es pequeña, la unión de los conjuntos de morfismos de la categoría es un conjunto, ya que el índice de la unión es el conjunto* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

La unicidad del elemento identidad para cada objeto de la categoría se deduce de la siguiente:

Proposición 1.3.6. *Para todo $x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, el elemento identidad en $\mathcal{C}_x^x$ es único.*

Se define ahora el concepto de subcategoría.

Definición 1.3.7. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Se dice que $\mathcal{D}$ es una* **subcategoría** *de $\mathcal{C}$ si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Cada objeto de $\mathcal{D}$ lo es también de $\mathcal{C}$; esto es,* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
2. $\mathcal{D}_x^y \subset \mathcal{C}_x^y$ *para todo $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.*
3. *La composición de morfismos en $\mathcal{D}$ es la misma que hay en $\mathcal{C}$.*
4. *La identidad en $\mathcal{D}_x^x$ es la identidad en $\mathcal{C}_x^x$ para cada elemento x en* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

Definición 1.3.8. *Una subcategoría $\mathcal{D}$ de la categoría $\mathcal{C}$ se dice* **llena** *si se verifica $\mathcal{D}_x^y = \mathcal{C}_x^y$ para todo par de objetos x, y de* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. *Se dice que la subcategoría es* **ancha** *si se verifica* $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Mediante la composición existente en el conjunto de morfismos entre dos objetos de una categoría, se obtiene el concepto de inversa de un morfismo, como puede observarse en la:

Definición 1.3.9. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean f, g dos morfismos de $\mathcal{C}$ tales que $fg = 1$. Entonces a f se la llama* **inversa a derecha** *de g ó* **corretracción** *y a g,* **inversa a izquierda** *de f o* **retracción**.

La unicidad de la inversa viene dada por la siguiente:

Proposición 1.3.10. *Si f es un morfismo de $\mathcal{C}$ que tiene inversa tanto a izquierda como a derecha, entonces ambas inversas coinciden y es la única inversa a ambos lados que posee f.*

A partir del concepto de inversa, aparece el concepto de isomorfismo. Su definición viene dada por:

Definición 1.3.11. *Se llamará* **isomorfismo** *o* **morfismo invertible** *de la categoría $\mathcal{C}$ a todo morfismo de $\mathcal{C}$ que posea inversa a ambos lados. Se denotará por f^{-1} a la única inversa de f.*

Así aparece una primera definición de grupoide como un tipo particular de categorías. De hecho, esta definición será equivalente a la que se verá en el Capítulo 4.

Definición 1.3.12. *Se denomina* **grupoide** *a una categoría pequeña en la que todos los morfismos son isomorfismos.*

Finalizamos esta sección con la definición de funtor entre categorías.

Definición 1.3.13. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Se denomina* **funtor (covariante)** *a todo operador $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ que asigna a cada objeto x de $\mathcal{C}$ un objeto Γx de $\mathcal{D}$ y a cada morfismo $f : x \rightarrow y$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $\Gamma f : \Gamma x \rightarrow \Gamma y$ en $\mathcal{D}$. Además, se deben verificar las siguientes condiciones:*

FUN1 (Conservación de la identidad) Si $1 : x \rightarrow x$ es la identidad en $\mathcal{C}_x^x$, entonces $\Gamma 1 : \Gamma x \rightarrow \Gamma x$ es la identidad en $\mathcal{D}_{\Gamma x}^{\Gamma x}$; esto es, $\Gamma 1_x = 1_{\Gamma x}$.

FUN2 (Conservación de la composición) Si $f : x \rightarrow y$, $g : y \rightarrow z$ son morfismos de $\mathcal{C}$, entonces $\Gamma(gf) = \Gamma g \Gamma f$.

Nota 1.3.14. *Si f es un morfismo de $\mathcal{C}$, al morfismo Γf de $\mathcal{D}$ se le suele llamar* **morfismo inducido** *por f.*

Proposición 1.3.15. *Sea $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Si f es una retracción, una corretracción o un isomorfismo, entoces Γf es una retracción, una corretracción o un isomorfismo respectivamente.*

A continuación, se define el concepto de composición de funtores entre categorías como se ve en el siguiente:

Ejemplo 1.3.16. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tres categorías y $T\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ y $S\colon\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ dos funtores. Se define la* **composición** *$ST\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ por las reglas $ST(A) = S(T(A))$ para cada objeto A de $\mathcal{A}$ y $ST(f) = S(T(f))$ para cada morfismo f en $\mathcal{A}$.*

Vemos que, en efecto, ST es un morfismo, puesto que se cumple:

$$ST(1_A) = S(T(1_A)) = S(1_{T(A)}) = 1_{S(T(A))} = 1_{ST(A)},$$

para cada objeto A de $\mathcal{A}$, y además:

$$\begin{aligned} ST(fg) &= S(T(fg)) = S(T(f)T(g)) \\ &= S(T(f))S(T(g)) = ST(f)ST(g), \end{aligned}$$

para todos f, g morfismos en $\mathcal{A}$.

El siguiente ejemplo muestra que una clase especial de funtores se obtiene al considerarlos entre las categorías llamadas grupoides.

Ejemplo 1.3.17. *Sean G y H dos grupoides. Un funtor $\Gamma : G \longrightarrow H$ se llama* **morfismo de grupoides**. *Así se obtiene la categoría $\mathcal{G}rd$ de todos los grupoides y morfismos de grupoides.*

El concepto de isomorfismo y de funtor inverso en la Teoría de Categorías es el siguiente.

Definición 1.3.18. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y sea $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Se dirá que Γ es un* **isomorfismo** *si existe $\Delta : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que $\Gamma\Delta = 1_{\mathcal{D}}$ y $\Delta\Gamma = 1_{\mathcal{C}}$. Al funtor Δ se le llama* **funtor inverso** *de Γ.*

Una caracterización de isomorfismo entre categorías que será de utilidad en el Capítulo 4 es la que se indica a continuación.

Proposición 1.3.19. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y sea $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un funtor. Entonces Γ es un isomorfismo si y sólo si las aplicaciones:*

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D}), \qquad \mathcal{C}_x^y \to \mathcal{D}_{\Gamma x}^{\Gamma y} \qquad \forall x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$$

inducidas por Γ son biyecciones.

La unicidad del funtor inverso se obtiene como consecuencia de la Proposición 1.3.19.

Corolario 1.3.20. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías y $\Gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ un isomorfismo. Si $\Delta_1, \Delta_2 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ son dos funtores inversos de Γ, entonces $\Delta_1 = \Delta_2$. En particular, el funtor inverso de otro funtor, si existe, es único.*

1.4 Geometría Diferencial

En esta sección se enuncian los conceptos de Geometría Diferencial que se usarán en esta monografía y se dejará constancia de las notaciones seguidas para ciertos conceptos bien conocidos en este área de las Matemáticas. Para cualquier consulta de tipo más general véanse **[4, 28, 40, 57]**.

Hay varias definiciones del concepto de variedad diferenciable, como se puede ver en las referencias anteriormente citadas. La que se usará en esta monografía es la que sigue:

Definición 1.4.1. *Se denomina* **variedad diferenciable de dimensión** *n a un espacio topológico M que sea T_2 y $2^o N$, tal que existe una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ que verifique:*

VD1 *La familia* $\{U_i\}_{i\in I}$ *es un recubrimiento por abiertos de* M;

VD2 *Las aplicaciones* $\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i$ *son homeomorfismos de* U_i *en un abierto* V_i *de* $\mathbb{R}^n$;

VD3 *Para cada* $i, j \in I$ *tales que* $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, *la aplicación* $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ *es un difeomorfismo, siendo ésta la definida por el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ {\scriptstyle \varphi_i^{-1}}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \varphi_j} \\ U_i \cap U_j & = & U_i \cap U_j. \end{array} \tag{1.1}$$

Nótese que la condición *VD2* implica que toda variedad diferenciable es un espacio topológico localmente euclídeo. Además, una representación de la propiedad *VD3* aparece en la Figura 1.1.

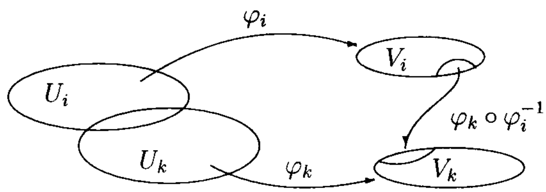

Figura 1.1: Propiedad *VD3* de variedad diferenciable.

Definición 1.4.2. *A la familia* $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ *de la Definición 1.4.1 se le denomina* **atlas** *de la variedad diferenciable* M*; cada uno de sus elementos recibe el nombre de* **carta local** *del atlas.*

Proposición 1.4.3. *Toda variedad diferenciable es paracompacta.*

Tratamos a continuación el concepto de aplicación diferenciable entre variedades diferenciables.

Definición 1.4.4. *Sean M y N dos variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ se dice* **diferenciable** *si para todo par de cartas locales (U, φ) y (V, ψ) de M y N, respectivamente, tales que $f(U) \cap V \neq \varnothing$, la aplicación:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$$

es diferenciable.

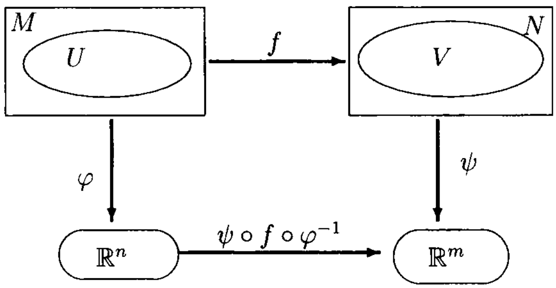

Figura 1.2: Aplicación diferenciable de M en N.

Notación 1.4.5. *Al conjunto de las aplicaciones diferenciables de M en N se suele denotar por $\mathcal{F}(M; N)$.*

Para observar la diferenciabilidad de una aplicación no es necesario mirar cada carta local de cada variedad, sino que es suficiente con que se cumpla en un atlas de M y en otro de N, como puede verse en la siguiente:

Proposición 1.4.6. *Sean M y N dos variedades diferenciables. La aplicación $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable si y sólo si existen sendos atlas, $\mathcal{A}_M$ de M y $\mathcal{A}_N$ de N, tales que para toda carta (U, φ) de $\mathcal{A}_M$ y toda carta (V, ψ) de $\mathcal{A}_N$, con $f(V) \cap V \neq \varnothing$, se verifica que la aplicación:*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \longrightarrow \psi(V)$$

es diferenciable.

La diferenciabilidad es una condición más fuerte que la continuidad como se observa en la:

Proposición 1.4.7. *Toda aplicación diferenciable entre variedades es una aplicación continua.*

Además la aplicación identidad $id_M : M \longrightarrow M$ de una variedad M, definida por $id_M(x) = x$ es una aplicación diferenciable.

El concepto de difeomorfismo es el que sigue a continuación.

Definición 1.4.8. *Sea $f \in \mathcal{F}(M; N)$. Se dice que f es un* **difeomorfismo** *si existe $g \in \mathcal{F}(N; M)$ tal que:*

$$f \circ g = id_N \,, \quad g \circ f = id_M \,.$$

Se tiene la siguiente caracterización de difeomorfismo.

Proposición 1.4.9. *Una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo si y sólo si es biyectiva y su inversa es diferenciable.*

Un caso particular de aplicación diferenciable es el de función diferenciable en una variedad, obtenida al sustituir la variedad N de la Definición 1.4.3 por la recta real $\mathbb{R}$. La formalización de este concepto es la que sigue:

Definición 1.4.10. *Sea M una variedad diferenciable. Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **diferenciable** *si para toda carta local (U, ϕ) de M, la función:*

$$f_{|U} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable.

Notación 1.4.11. *El conjunto de las funciones diferenciables en una variedad diferenciable M se denota por $\mathcal{F}(M)$.*

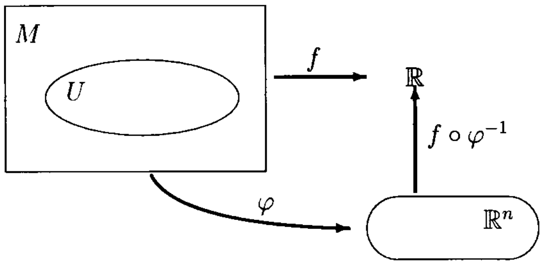

Figura 1.3: Función diferenciable en M.

Como en el caso de las aplicaciones diferenciables, para ver la diferenciabilidad en una función basta ver la condición dada en la Definición 1.4.10 sobre un atlas de la variedad M.

Proposición 1.4.12. *Una función $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable si y sólo si existe un atlas $\mathcal{A}_M$ tal que la aplicación:*

$$(f_{|U}) \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable para cada carta local (U, φ) del atlas $\mathcal{A}_M$.

También puede definirse la diferenciabilidad de forma puntual, según:

Definición 1.4.13. *Sea U un abierto de la variedad M. La función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice* **diferenciable en** *$p \in M$ si existe una carta local (V, φ) de M tal que $p \in V$ y la aplicación:*

$$f_{|V} \circ \varphi^{-1} : \varphi(V \cap U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es diferenciable.

Notación 1.4.14. *Al conjunto de las funciones diferenciables en $p \in M$ se las denota por $\mathcal{F}_p(M)$.*

Se puede demostrar que una función en una variedad es diferenciable si y solamente si es diferenciable en cada punto de dicha variedad.

Para introducir el concepto de particiones de la unidad, es necesaria la siguiente:

Definición 1.4.15. *Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se denomina* **soporte de** f *al conjunto cerrado de M definido como:*

$$\mathrm{sop}(f) = \overline{\{y \in M \mid f(y) \neq 0\}}.$$

Ahora ya pueden definirse las particiones de la unidad como se ve en la siguiente:

Definición 1.4.16. *Sea M una variedad diferenciable. Una familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de funciones diferenciables se dice que es una* **partición de la unidad sobre** M *si:*

1. $\{\mathrm{sop}(f_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es un recubrimiento localmente finito de M;*

2. $\sum_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha(x) = 1$, *para cada $x \in M$.*

Nota 1.4.17. *La suma que aparece en 2 de la Definición 1.4.16 está bien definida ya que 1 de esa misma definición asegura que el número de sumandos es finito para cada $x \in M$.*

Definición 1.4.18. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de una variedad M. Se dice que $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una* **partición de la unidad asociada a dicho recubrimiento** *si es una partición de la unidad verificando* $\mathrm{sop}(f_\alpha) \subset U_\alpha$ *para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Se puede asociar una partición de la unidad a cualquier recubrimiento por abiertos de la variedad.

Proposición 1.4.19. *Todo recubrimiento por abiertos de una variedad diferenciable posee una partición de la unidad asociada a dicho recubrimiento.*

La siguiente proposición permite hallar un refinamiento de un recubrimiento por abiertos, de modo que los elementos del refinamiento son disjuntos dos a dos.

Proposición 1.4.20. *Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimento por abiertos de la variedad diferenciable M. Entonces, existe un refinamiento $\{V_{ij}\}_{i\in I, j\in\mathbb{N}}$ con I un conjunto finito y tal que para cada $i \in I$ se cumple $V_{ij} \cap V_{ik} = \varnothing$ si $j \neq k$.*

Las aplicaciones diferenciables se pueden definir localmente, como se puede ver en la siguiente:

Proposición 1.4.21. *Sean B una variedad diferenciable, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de una variedad diferenciable M y $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de aplicaciones diferenciables definidas como $f_\alpha : U_\alpha \longrightarrow B$ tales que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, $f_\alpha = f_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta$. Entonces existe una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow B$ tal que $f_{|U_\alpha} = f_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Para estudiar ahora los conceptos de vector tangente y espacio tangente a una variedad diferenciable M en un punto p de la misma, se requiere del termino gérmen de función diferenciable en p.

Consideremos la relación de equivalencia definida en $\mathcal{F}(M)$ en la que dos funciones f y g diferenciables en $p \in M$ están relacionadas si y sólo si coinciden en un entorno de p. Entonces se denomina **gérmen de función diferenciable en** $p \in M$ a cada una de las clases de esta relación de equivalencia. Al conjunto de gérmenes en p se le denota por $\mathcal{G}_p(M)$. De este modo, ya se está en condiciones de definir el concepto de vector tangente.

Definición 1.4.22. *Sea M una variedad diferenciable y $p \in M$. Se denomina* **vector tangente a** M **en** p *a toda aplicación $\boldsymbol{v} : \mathcal{G}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique las siguientes condiciones:*

VT1 $v(\alpha f+\beta g) = \alpha v+\beta v$, *para todo* $f, g \in \mathcal{G}_p(M)$ *y todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

VT2 $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$, *para todo* $f, g \in \mathcal{G}_p(M)$.

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denota por T_pM y resulta ser un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y el producto por un escalar habituales en las funciones. Por tanto se tiene la siguiente:

Definición 1.4.23. *Al espacio vectorial* T_pM *se le denomina* **espacio tangente a** M **en** p.

El espacio tangente T_pM posee una base de dimensión igual a la de la variedad M a la que es tangente. Así, si M es una variedad diferenciable de dimensión n y (U, φ) una carta local suya con $p \in U$, se tienen las aplicaciones diferenciables $\varphi_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, n)$ definidas como $\varphi_i = \pi_i \circ \varphi$, con π_i la proyección i-ésima de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de funciones $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ se denomina **sistema local de coordenadas asociado a la carta** (U, φ).

Dicho sistema permite definir la **derivada parcial** i**-ésima** de una función $f \in \mathcal{F}(M)$ en el punto $p \in U$ respecto de la carta (U, φ) como sigue:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_i}\right)_p = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial \pi_i}\right)_{\varphi(p)}$$

Se puede demostrar que una base de T_pM es el conjunto:

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right)_p\right\}_{i=1}^n$$

Definido el espacio tangente a una variedad en un punto suyo, se definirá la aplicación inducida por una aplicación diferenciable

$f\colon M \longrightarrow N$ sobre los espacios tangentes de M y N en los puntos p y $f(p)$, respectivamente. No obstante, se requiere previamente la siguiente:

Definición 1.4.24. *Sean $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y $\boldsymbol{v} \in T_pM$. Se define $f_{*p}\boldsymbol{v}$ como el operador:*

$$f_{*p}\boldsymbol{v} : \mathcal{G}_{f(p)}(N) \longrightarrow \mathbb{R} : g \mapsto \boldsymbol{v}(g \circ f)$$

Nota 1.4.25. *El operador $f_{*p}\boldsymbol{v}$ es un vector de $T_{f(p)}N$.*

De este modo, ya puede definirse una aplicación lineal:

$$f_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N : \boldsymbol{v} \mapsto f_{*p}\boldsymbol{v},$$

entre los respectivos espacios tangentes del dominio y el codominio de la aplicación diferenciable f.

Definición 1.4.26. *Dada una aplicación diferenciable $f\colon M \longrightarrow N$, se denomina* **aplicación derivada o tangente de f en $p \in M$** *a la aplicación $f_{*p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ antes vista.*

Notación 1.4.27. *La aplicación derivada o tangente de una aplicación diferenciable $f \in \mathcal{F}(M; N)$ en $p \in M$ se denota por f_{*p} o por T_pf, siendo esta última la notación que se seguirá en esta monografía.*

Seguidamente se dan las definiciones de inmersión, submersión y subvariedad, indicándose cuando esta última se dice regular.

Definición 1.4.28. *Una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ se denomina* **inmersión** *(resp.* **submersión***) si T_pf es inyectiva (resp. sobreyectiva) para cada $p \in M$.*

Partiendo del concepto de inmersión, puede introducirse el de subvariedad de una variedad dada, como puede verse en la siguiente:

Definición 1.4.29. *Sean N y M dos variedades y $F{:}N \longrightarrow M$ una inmersión inyectiva. Al par (N, F) se le denomina* **subvariedad** *de M.*

Una clase particular de subvariedad es la que aparece en la:

Definición 1.4.30. *Una subvariedad (N, F) de M se dice* **regular** *si la inmersión $F : N \longrightarrow F(N)$ es un homeomorfismo con la topología relativa de $F(N)$ como subespacio de M.*

Se dirá que (N, F) es **cerrada o abierta** *según lo sea $F(N)$ en M.*

Situaciones en las que se obtienen subvariedades regulares pueden observarse en las dos siguientes proposiciones:

Proposición 1.4.31. *Sea M una variedad diferenciable. La diagonal Δ_M de M es una subvariedad regular de $M \times M$.*

Proposición 1.4.32. *Sean N y M_i $(i = 1, 2)$ tres variedades diferenciables y $f_i : M_i \longrightarrow N$ $(i = 1, 2)$ dos submersiones. Entonces $(f_1 \times f_2)^{-1}(\Delta_N)$ es una subvariedad cerrada de $M_1 \times M_2$.*

Por último, damos un resultado que permite extender una aplicación diferenciable en un abierto a toda la variedad.

Proposición 1.4.33. *Sean M una variedad diferenciable, K un cerrado y U un abierto en M con $K \subset U$. Entonces existe una función diferenciable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que se verifican:*

1. $\mathrm{sop}(f) \subset U$;

2. $0 \leq f(x) \leq 1$, *para cada* $x \in M$;

3. $f(x) = 1$ *para cada* $x \in K$.

A continuación, se definen el fibrado tangente TM de una variedad M (aunque se volverá sobre él en el Ejemplo 2.1.12) y posteriormente los campos diferenciables de vectores.

Definición 1.4.34. *Sea M una variedad diferenciable m-dimensional. Se denomina* **fibrado tangente** *de M al conjunto TM constituido por todos los pares de la forma (p, v), con $p \in M$ y $v \in T_pM$, esto es, la unión de los espacios tangentes a la variedad:*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

Se llama **proyección de TM sobre M** *a la aplicación completa:*

$$\pi : TM \longrightarrow M : (p, v) \mapsto p\,.$$

Las dos propiedades básicas del fibrado tangente, que serán necesarias para los proximos capítulos, se recogen en la siguiente:

Proposición 1.4.35. *Con la notación de la Definición 1.4.34, se verifican:*

1. *El fibrado tangente puede dotarse de una estructura de variedad diferenciable $2m$-dimensional.*

2. *Con esta estructura, la proyección es diferenciable.*

El siguiente concepto a tratar es el de campo de vectores de una variedad. Su definición es la que sigue:

Definición 1.4.36. *Sean M una variedad diferenciable y U un abierto de M. Un* **campo de vectores (resp. campo de vectores diferenciable)** *sobre U es toda aplicación (resp. aplicación diferenciable):*

$$X : U \longrightarrow TU : p \mapsto X_p$$

que verifique $\pi \circ X = id_U$.

Notación 1.4.37. *$\chi(M)$ denotará el conjunto de campos de vectores diferenciables de una variedad M.*

Recuérdese que dada una aplicación diferenciable entre dos variedades, existe una aplicación diferenciable entre los respectivos fibrados tangentes inducida por dicha aplicación.

Definición 1.4.38. *Sean M y N dos variedades y $f: M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se denomina* **aplicación derivada o tangente** *de f a la definida como $Tf(p, v) = T_p f(v)$, para cada $(p, v) \in TM$.*

Notación 1.4.39. *A la aplicación tangente de f se la denota por Tf ó f_*, siendo la primera de ellas la que se utilizará en esta mongrafía.*

Dos propiedades de interés para el desarrollo de posteriores capítulos son las dos siguientes proposiciones.

Proposición 1.4.40. *La aplicación tangente de una aplicación diferenciable es también diferenciable.*

Proposición 1.4.41. *La aplicación derivada de una submersión es también una submersión.*

Se tratarán, a continuación, los campos relacionados mediante una aplicación diferenciable.

Definición 1.4.42. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se dice que $X \in \chi(M)$ está* **f-relacionado** *con $Y \in \chi(N)$ si $f_* X = Y \circ f$, y se denota por $X \sim_f Y$.*

Proposición 1.4.43. *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f: M \to N$ una submersión sobreyectiva. Entonces, si $X \in \chi(M)$, existe $Y \in \chi(N)$ tal que $X \sim_f Y$.*

Definición 1.4.44. *En las condiciones de la Proposición 1.4.43, se dirá que Y es* **f-proyectable** *y que X es su* **f-proyección**.

Es bien conocido, por su importancia, el siguiente:

Teorema 1.4.45 (Teorema de la Función Implícita). *Sean M y N dos variedades diferenciables y $f : M \longrightarrow N$ una submersión. Si $p \in N$ es tal que $f^{-1}(\{p\}) \neq \varnothing$, entonces $f^{-1}(\{p\})$ es una subvariedad regular de M de dimensión* $\mathrm{dim}M - \mathrm{dim}N$.

Se concluye esta sección con una aplicación biyectiva que es difeomorfismo local.

Proposición 1.4.46. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación de variedades diferenciables biyectiva que es difeomorfismo local. Entonces f es un difeomorfismo.*

1.5 Grupos y Álgebras de Lie

Se recuerdan en la presente sección los conceptos de grupo de Lie y álgebra de Lie. Además se recogen los resultados correspondientes a dichos conceptos que se reflejarán en grupoides diferenciables y algebroides de Lie. Para consultar las demostraciones de los resultados, véanse **[43, 51, 55]**.

Definición 1.5.1. *Se denomina* **grupo de Lie** *a un grupo topológico G con una estructura de variedad diferenciable compatible con su topología, tal que las aplicaciones:*

$$G \times G \longrightarrow G \; : \; (x, y) \mapsto xy,$$
$$G \longrightarrow G \; : \; x \mapsto x^{-1},$$

son ambas diferenciables.

Definición 1.5.2. *Sean G_1 y G_2 dos grupos de Lie. Se denomina* **morfismo de grupos de Lie** *a una aplicación diferenciable $f: G_1 \longrightarrow G_2$ tal que:*

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \quad y \quad f(1_{G_1}) = 1_{G_2},$$

donde 1_{G_1} y 1_{G_2} son las unidades de G_1 y G_2, respectivamente.

Se dirá que f es un **isomorfismo** *si además es un difeomorfismo.*

A partir de las dos definiciones anteriores, puede introducirse el concepto de subgrupo de Lie.

Definición 1.5.3. *Sea G un grupo de Lie. Un subgrupo H de G se dice* **subgrupo de Lie** *de G si se tiene que:*

1. *H es grupo de Lie.*
2. *H es una subvariedad de G, con la inclusión como inmersión fiel.*

Se tratan, a continuación, las álgebras de Lie y diversas propiedades suyas.

Definición 1.5.4. *Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathfrak{g}$ se denomina* **álgebra de Lie** *sobre $\mathbb{R}$ si existe una aplicación:*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : \ (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

con las siguientes propiedades:

1. *$[\ ,\ ]$ es $\mathbb{R}$-lineal;*
2. *$[X, Y] + [Y, X] = 0$ para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$;*
3. *$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.*

Notación 1.5.5. *A la aplicación* $[\ ,\ ]$ *de la Definición 1.5.4 se le denomina* **corchete de Poisson o corchete de Lie** *de* X *con* Y.

A la condición 3 de dicha definición se la denomina **identidad de Jacobi** *y suele denotarse por* $J(X, Y, Z) = 0$.

Definición 1.5.6. *La* **dimensión** *de un álgebra de Lie es la que tiene como* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial.*

En lo que sigue, las álgebras de Lie se considerarán de dimensión finita.

Definición 1.5.7. *Una* **base** *de un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es una base de* $\mathfrak{g}$ *como espacio vectorial.*

Se prosigue con el concepto de constantes de estructura y la relaciones más inmediatas entre ellas.

Proposición 1.5.8. *Sea* $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ *una base del álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$. *Entonces existen unas únicas constantes bien determinadas* $c_{ij}^p \in \mathbb{R}$ *tales que:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{p=1}^{n} c_{ij}^p X_p \qquad \forall\, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Definición 1.5.9. *Las constantes* c_{ij}^p *se denominan* **constantes de estructura** *de* $\mathfrak{g}$ *respecto de la base* $\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Proposición 1.5.10. *Las constantes de estructura verifican:*

1. $c_{ii}^p = 0$, *para todo* $i, p = 1, \ldots, n$.
2. $c_{ij}^p + c_{ji}^p = 0$, *para todo* $i, j, p = 1, \ldots, n$.
3. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (c_{rs}^p c_{pt}^u + c_{st}^p c_{pr}^u + c_{tr}^p c_{ps}^u) = 0$, *para todo* $r, s, t, u = 1, \ldots, n$.

Se dan ahora algunas otras definiciones de interés acerca de las álgebras de Lie.

Definición 1.5.11. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una* **subálgebra de Lie** $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathfrak{g}$ *tal que el corchete es cerrado sobre* $\mathfrak{h}$ *(esto es,* $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$*).*

Definición 1.5.12. *Sean* $\mathfrak{g}_1$ *y* $\mathfrak{g}_2$ *dos álgebras de Lie. Un* **morfismo de álgebras de Lie** *es una aplicación lineal* $F : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ *que verifica:*

$$F([v_1, v_2]) = [F(v_1), F(v_2)] \quad \forall v_1, v_2 \in \mathfrak{g}\,.$$

Definición 1.5.13. *Un álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *se dice* **abeliana** *o* **conmutativa** *si* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \{0\}$.

Como ejemplo de álgebra de Lie, citamos el conjunto de campos diferenciables de vectores tangentes de una variedad diferenciable dada.

Teorema 1.5.14. *El conjunto* $\chi(M)$ *de campos diferenciables de una variedad diferenciable* M *es un álgebra de Lie con las operaciones:*

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f), \quad X, Y \in \chi(M), \quad f \in \mathcal{F}(B);$$
$$(aX)(f) = aX(f), \quad X \in \chi(M), \quad f \in \mathcal{F}(B), \quad a \in \mathbb{R};$$
$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad X, Y \in \chi(M), \quad f \in \mathcal{F}(B).$$

Definición 1.5.15. *Con la notación anterior, a la función* $X(f)$ *se la denomina* **derivada de Lie** *de* f *con respecto de* X.

Recuérdese que a un grupo de Lie se le puede asociar un álgebra de Lie con el conjunto de las traslaciones a izquierda.

Definición 1.5.16. *Sea* G *un grupo de Lie y* $g \in G$. *Una* **traslación a izquierda** *de* G *es una aplicación diferenciable:*

$$L_g : G \longrightarrow G : \ x \mapsto gx\ .$$

Recordamos ahora el concepto de álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie.

Teorema 1.5.17. *Sea G un grupo de Lie. Entonces el conjunto:*

$$\mathfrak{g} = \{X \in \chi(G) \mid L_{g*}X = X \ \forall g \in G\}$$

es una subálgebra de Lie de $\chi(M)$.

Definición 1.5.18. *Al álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ del Teorema 1.5.17 se la denomina* **álgebra de Lie asociada al grupo de Lie** *G.*

El álgebra de Lie asociada a una variedad diferenciable puede verse como uno de sus espacios tangentes. Este hecho lo demuestra el siguiente:

Teorema 1.5.19. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}$ y $T_{1_G}G$ son isomorfos como espacios vectoriales, donde 1_G es la unidad en G.*

Nota 1.5.20. *Por la proposición anterior, a $T_{1_G}G$ se le puede dotar de la estructura de álgebra de Lie que posee $\mathfrak{g}$.*

Para llegar a la obtención del funtor de Lie se requiere del siguiente:

Teorema 1.5.21. *Si $f : G_1 \longrightarrow G_2$ es un morfismo de grupos de Lie, entonces $f_{*1_G} : T_{1_{G_1}}G_1 \longrightarrow T_{1_{G_2}}G_2$ es un morfismo de álgebras de Lie.*

Así se llega a la existencia de un funtor entre la categoría de los grupos de Lie y la de álgebras de Lie. La primera tiene por objetos a los grupos de Lie y como morfismos a los morfismos entre ellos; la segunda tiene como objetos las álgebras de Lie y como morfismos los morfismos entre ellas. Este funtor se denomina **funtor de Lie**.

Capítulo 2
Fibrados vectoriales

En este capítulo se estudian los objetos matemáticos conocidos como fibrados vectoriales. En él se hará un desarrollo sin considerar más preliminares que los aparecidos en el Capítulo 1, destinado a tales menesteres. Aparte de dar las definiciones de los conceptos elementales relativos a fibrados vectoriales, se tratarán otros conceptos más complejos con el fin de hacer uso de ellos en el Capítulo 7 dedicado a los algebroides de Lie, que, como se verá en él, no son más que fibrados vectoriales dotados de una estructura específica.

Igualmente, aparecerán las demostraciones de los resultados que se enuncian, salvo excepciones en la que se referenciará el texto en el que se pueden encontrar. No obstante, muchas de estas demostraciones han tenido que ser reconstruidas o realizadas de nuevo, al no haber sido encontradas en las referencias de las que dispusimos para la elaboración de esta monografía.

Los conceptos que fundamentalmente se tratarán son: morfismo, isomorfismo y suma de Whitney de fibrados vectoriales y pullback y subfibrado vertical de un fibrado vectorial. Para definir los tres últimos conceptos, será necesario disponer de una técnica para construir un fibrado vectorial a partir de aquello que se quiera que sean las fibras del mismo. Esta construcción es bien conocida y se reseña en la Sección 2.2.

Para dar una mayor comprensión de lo anteriormente mencionado, se acompañarán los resultados de numerosos ejemplos relativos a dichas cuestiones, desarrollando ampliamente los mismos siempre que se haya considerado necesario.

2.1 Nociones básicas

Esta sección tiene como objetivo exponer las definiciones de fibrado vectorial, de subfibrado, de morfismo entre fibrados vectoriales y de morfismo bilineal. Se comenzará definiendo los fibrados vectoriales.

Definición 2.1.1. *Sean M y B dos variedades diferenciables y $p : M \longrightarrow B$ una aplicación diferenciable sobreyectiva. Se llamará* **fibrado vectorial k-dimensional** *a una terna $\xi = (M, p, B)$ que verifica la siguiente condición de trivialidad local:*

TVL Para cada punto $b \in B$, existe un abierto U en B que contiene a b y un difeomorfismo:

$$\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k : x \mapsto (p(x), F_U(x)),$$

tal que para todo $x \in U$ se tiene que:

$$F_U^x = F_{U|p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales reales.

A cada par (U, φ) se lo denomina **trivialización local**.

Se dan a continuación algunas aclaraciones a la definición anterior.

Definición 2.1.2. *La variedad M se denomina* **variedad total** *del fibrado; la variedad B se denomina* **variedad base**; *la aplicación p se denomina* **proyección**; *y se denomina* **fibra** *sobre $x \in B$ a $M_x = p^{-1}(x)$.*

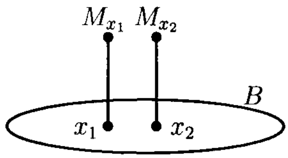

Figura 2.1: Esquema de los fibrados vectoriales.

Al escalar k se lo denominará **rango** *del fibrado vectorial.*

Si (U, φ) es una trivialización local, entonces a U se le denomina **abierto trivializador** *y a φ* **difeomorfismo trivializador**.

A la familia $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ de trivializaciones locales tales que $B = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$ se le denomina **representación coordenada** *o* **estructura del fibrado vectorial**.

Nota 2.1.3. *Obsérvese que el isomorfismo $F_U^x = F_{U|p^{-1}(x)} : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definido en la Definición 2.1.1 dota a las fibras de ξ de estructura de espacio vectorial real.*

Nota 2.1.4. *En un fibrado vectorial, la dimensión de la variedad total es igual a la suma de la dimensión de la variedad base y del rango. Este hecho se obtiene directamente de la condición de trivialidad local.*

Aparecen ahora los abiertos trivializantes y trivializadores que forman pares análogos a los de la trivialización local, siendo su única diferencia que no son necesariamente los que se obtienen por la Definición 2.1.1.

Definición 2.1.5. *Un abierto U en B se denomina* **abierto trivializante** *de ξ si existe un difeomorfismo $\psi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U\times\mathbb{R}^k : x \mapsto (p(x), F_U(x))$ tal que la restricción $\psi_{U\,x} \equiv F_U^x : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in B$. A ψ_U se le denomina* **difeomorfismo trivializante**.

El concepto que sigue es el de las transformaciones coordenadas cuyo interés en esta monografía radica en ser un elemento clave en la construcción de fibrados vectoriales que tendrá lugar en la Sección 2.2.

Definición 2.1.6. *Sea $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}$ una representación coordenada del fibrado ξ. Se definen las aplicaciones:*

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^k),$$

donde $U_{\alpha\beta}$ representa a $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, como:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} \qquad \forall x \in B.$$

A estas aplicaciones se las denominará **transformaciones coordenadas** *de ξ asociadas a $\{(U_\gamma, \varphi_\gamma)\}$.*

Nota 2.1.7. *Las aplicaciones $g_{\alpha\beta}$ anteriores son diferenciables, al ser composiciones de aplicaciones diferenciables.*

Nota 2.1.8. *La variedad $GL(\mathbb{R}^k)$ que aparece en la Definición 2.1.6 es el* **grupo lineal** *de $\mathbb{R}^k$, que es bien conocido y que consiste en el grupo de los endomorfismos invertibles en $\mathbb{R}^k$.*

Se ofrecerán algunas propiedades relativas a la proyección del fibrado vectorial, resultando como consecuencia que las fibras son subvariedades cerradas de la variedad total.

Proposición 2.1.9. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial de rango n. Entonces la proyección p es una submersión completa.*

Demostración. Sea (U, φ) una trivialización local del fibrado vectorial. Entonces se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
U \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "p_1"'] & p^{-1}(U) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

donde p_1 es la proyección natural de $U \times \mathbb{R}^n$ en U.

Por ser p_1 la proyección natural de $U \times \mathbb{R}^n$ en U, la aplicación $T_x(p_1)$ es la proyección natural de $T_x(U \times \mathbb{R}^n) = T_{p_1(x)}U \times \mathbb{R}^n$ en $T_{p_1(x)}U$, para cada $x \in U$. Por lo tanto, $T_x(p_1)$ es sobreyectiva para cada $x \in U \times \mathbb{R}^n$ y, por lo tanto, p_1 es una submersión en $U \times \mathbb{R}^n$.

Ahora al ser φ un difeomorfismo, φ también es una submersión en $p^{-1}(U)$. Al coincidir p con $p_1 \circ \varphi$ en $p^{-1}(U)$, se tiene que p es una submersión en $p^{-1}(U)$. Como esto se puede hacer con cada trivialización local, p es una submersión. □

Corolario 2.1.10. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial de rango n. Para todo $b \in B$, la fibra en b es una subvariedad cerrada regular de M de dimensión* $\dim M - \dim B$.

Demostración. La proyección p es una submersión completa en M, en virtud de la Proposición 2.1.9. Además, la fibra $M_b = p^{-1}(b)$ es no vacía, porque M_b es isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, se está en las hipótesis del Teorema de la Función Implícita y M_b es una subvariedad regular cerrada de M cuya dimensión es la pedida.

Al ser B un espacio T_1, entonces $\{b\}$ es un cerrado de B y, en consecuencia, $p^{-1}(b)$ es un cerrado de M, ya que p es continua. □

Proposición 2.1.11. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial de rango k. Entonces $p : M \longrightarrow B$ es una aplicación abierta.*

Demostración. Considérese el recubrimiento por abiertos $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ de B, formado por los abiertos trivializadores de la estructura de M como fibrado vectorial.

Como p es continua, entonces $p^{-1}(U_\gamma)$ es un abierto en M para todo γ de Γ. En consecuencia, $\{p^{-1}(U_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ es un recubrimiento por abiertos de M. Por lo tanto, todo abierto V de M es de la forma:

$$V = \Big(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p^{-1}(U_\gamma)\Big) \cap V = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (p^{-1}(U_\gamma) \cap V).$$

Por otro lado, se tiene que la aplicación p coincide con $\pi_1 \circ \varphi_\gamma$, donde π_1 denota la proyección definida por:

$$\pi_1 : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow U : (x, v) \mapsto x,$$

que es una aplicación abierta, y φ_γ es el difeomorfismo trivializador asociado al abierto U_γ, que también es una aplicación abierta. Aplicándole p a V, se tiene:

$$p(V) = p(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} p^{-1}(U_\gamma) \cap V) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} p(p^{-1}(U_\gamma) \cap V).$$

La continuidad de p implica que $p^{-1}(U_\gamma) \cap V$ es un abierto en $p^{-1}(U_\gamma)$ y, como p es abierta restringida a cada U_γ, se tiene que $p(p^{-1}(U_\gamma) \cap V)$ es un abierto en U_γ y, por tanto, en B. En consecuencia, $p(V)$ es un abierto en B. □

Se dan, a continuación, algunos ejemplos de fibrados vectoriales.

Ejemplo 2.1.12. *Sea M una variedad n-dimensional y sea el conjunto:*

$$TM = \{(x, v) \mid v \in T_x M, x \in M\}.$$

Se define la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M : (x, v) \mapsto x$, que es trivialmente sobreyectiva. A la terna (TM, π, M) se la denomina **fibrado tangente** *de M.*

Nótese que el fibrado tangente de M es un fibrado vectorial. En efecto, en primer lugar, TM se puede dotar de una estructura de variedad diferenciable $2n$-dimensional y esta estructura hace que la proyección π sea diferenciable (véanse la Definición 1.4.34 y la Proposición 1.4.35).

Además, dado $x \in M$, sea (U, φ) una carta local de M en x y supuesto que $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$, entonces todo elemento v de $T_x M$

puede escribirse de la forma:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x ,$$

con a^i funciones diferenciables de U. De este modo, se obtiene una aplicación biyectiva ψ_U definida por:

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k : (x, v) \mapsto (x, (a^1(x), \ldots, a^n(x))),$$

que es un difeomorfismo (véanse **[28, 57]***).*

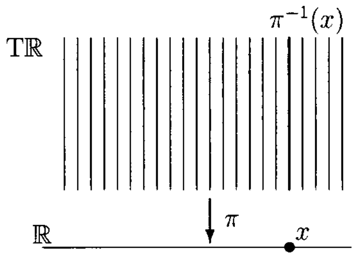

Figura 2.2: Fibrado tangente de $\mathbb{R}$.

A partir de ψ_U se define la aplicación:

$$F_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n : (x, v) \mapsto (a^1(x), \ldots, a^n(x)),$$

que restringida a $\pi^{-1}(x)$ es un isomorfismo lineal.

En consecuencia, (U, ψ) es una trivialización local de (TM, π, M) en $x \in M$. Como esto puede repetirse para cada elemento de M, se tiene que efectivamente se cumple la propiedad TVL y (TM, π, M) es un fibrado vectorial.

Ejemplo 2.1.13. *Análogamente al Ejemplo 2.1.12, se define el* **fibrado cotangente** *de la variedad M como:*

$$T^*M = \{(m, \alpha) \mid \alpha \in T^*_m M, m \in M\}.$$

Defínase la aplicación $\pi : T^*M \longrightarrow M : (m, \alpha) \mapsto m$. *Puede dotarse a* T^*M *de una estructura de variedad diferenciable* $2n$*-dimensional a partir de la estructura de* M *que hace diferenciable a la aplicación* π *(véanse* **[28, 57]***).*

Al igual que con el fibrado tangente, sean m *un elemento de* M *y* (U, φ) *una carta local de* M*, en la que se supone* $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$*. Entonces todo elemento* α *de* $T^*_m M$ *se expresa como:*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(m)(dx_i)_m\,,$$

donde α^i *son funciones diferenciables en* M*. De este modo, se define la aplicación:*

$$\psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : (m, \alpha) \mapsto (m, (\alpha^1(m), \ldots, \alpha^n(m))),$$

que es un difeomorfismo.

A partir de ψ_U *se define la aplicación:*

$$F_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^n : (m, \alpha) \mapsto (\alpha^1(m), \ldots, \alpha^n(m)),$$

que, restringida a $\pi^{-1}(m)$*, es un isomorfismo lineal.*

Por tanto, (U, ψ) *es una trivialización local de* (T^*M, π, M) *en* $m \in M$*. Como esto puede repetirse para cada elemento de* M*, se cumple la propiedad* TVL *y* (T^*M, π, M) *es un fibrado vectorial.*

Ejemplo 2.1.14. *Sea* B *una variedad diferenciable y sea* $M = B \times \mathbb{R}^m$ *con la estructura de variedad diferenciable producto de variedades. Sea la aplicación sobreyectiva:*

$$\pi : M \longrightarrow B : (x, v) \mapsto x,$$

que es diferenciable (véase **[4]***).*

Sea $\psi_B : \pi^{-1}(B) = M \longrightarrow B \times \mathbb{R}^m = M$ *la aplicación identidad* id_M. *Como la aplicación* id_M *es diferenciable, por tener en* $\pi^{-1}(B)$ *la misma estructura de variedad que en* M, *entonces* (B, ψ_B) *es una trivialización local de* (M, π, B). *Al recubrir a toda la variedad* B, *se tiene que* (M, π, B) *es un fibrado vectorial.*

A un fibrado de este tipo se le denomina **fibrado trivial** *sobre* M *de rango* m.

Ejemplo 2.1.15. *Por el Ejemplo 2.1.14, el cilindro* $S^1 \times \mathbb{R}$ *es el fibrado trivial sobre* S^1 *de rango 1.*

Ejemplo 2.1.16. *Sea* $\xi = (M, p, B)$ *un fibrado vectorial de rango* m. *Considérese un abierto* U *en* B. *Entonces* $M_U = p^{-1}(U)$ *es un abierto en* M *y, por tanto,* U *es subvariedad abierta de* B *y* $p^{-1}(U)$ *lo es de* M. *Además la restricción de* p *de* $p^{-1}(U)$ *en su imagen por* p, *esto es,* $p_U = p_{|U} : p^{-1}(U) \longrightarrow U$ *es diferenciable (véase* **[4]***).*

Entonces la terna $\xi_U = (M_U, p_U, U)$ *es un fibrado vectorial de rango* m, *que se denomina* **fibrado vectorial restricción de** ξ. *Además este fibrado vectorial es trivial, según lo visto en el Ejemplo 2.1.14.*

La demostración de este hecho se basa en que dada una trivialización local (U, ψ) *de* ξ, *la restricción* $\psi_{|U} : p^{-1}(U \cap V) \longrightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^m$ *es un difeomorfismo trivializador de* ξ_U.

Se da ahora la definición de subfibrado de un fibrado vectorial dado.

Definición 2.1.17. *Un* **subfibrado** $\xi_1 = (M_1, p_1, B)$ *de un fibrado vectorial* $\xi = (M, p, B)$ *es un fibrado vectorial con la misma base tal que se verifican:*

1. *Cada una de las fibras* ${M_1}_x$ *de* M_1 *es un subespacio vectorial de las fibras* M_x *de* M.

2. *La inclusión* $i : M_1 \longrightarrow M$ *entre las variedades totales inducida por las fibras es diferenciable.*

Con esta definición, volviendo al Ejemplo 2.1.16, puede afirmarse la siguiente:

Nota 2.1.18. *Dado un fibrado vectorial* (M, p, B) *y un abierto* U *de* B, *el correspondiente fibrado vectorial restricción es un subfibrado de* (M, p, B).

A partir de este punto, la presente sección se dedica al tratamiento de los morfismos entre fibrados vectoriales, que se pueden definir como sigue:

Definición 2.1.19. *Sean* $\xi = (M, p, B)$ *y* $\overline{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *dos fibrados vectoriales. Un* **morfismo de fibrados vectoriales** *de* ξ *en* $\overline{\xi}$ *consiste en un par de aplicaciones diferenciables:*

$$f_0 : B \longrightarrow \bar{B} \qquad y \qquad f : M \longrightarrow \bar{M}\,,$$

satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

1. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ B & \xrightarrow[f_0]{} & \bar{B} \end{array} \tag{2.2}$$

2. *La aplicación inducida* $f_x : M_x \longrightarrow \bar{M}_{f(x)}$, *para cada* $x \in B$, *es una aplicación lineal.*

Dicho morfismo se denota por $(f, f_0) : \xi \longrightarrow \overline{\xi}$.

Nota 2.1.20. *Con la notación de la Definición 2.1.19, si la aplicación f_0 es la identidad en B, se dirá que el morfismo de fibrados vectoriales es un* B-**morfismo** *o* **morfismo que conserva** B.

A continuación, se observará lo que ocurre si se restringe un morfismo que conserva la base a los respectivos fibrados vectoriales restricción.

Proposición 2.1.21. *Sea $(f, f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, B)$ un morfismo de fibrados vectoriales que conserva la base. Su restricción $(f, f_0) : (M_U, p_U, U) \longrightarrow (\bar{M}_U, \bar{p}_U, U)$ a los respectivos fibrados vectoriales restricción es un morfismo de fibrados vectoriales.*

Demostración. El diagrama correspondiente a (2.2) se cumple por la definición de dichos fibrados vectoriales restricción. Igualmente se cumple que, para cada $x \in U$, f_x es una aplicación lineal, ya que $M_{U\,x} = M_x$ y $\bar{M}_{U\,x} = \bar{M}_x$. □

Definidos los morfismos entre fibrados vectoriales, parece natural hacer lo propio con el concepto de isomorfismo entre los mismos.

Definición 2.1.22. *Con la notación de la Definición 2.1.19, si $f : M \longrightarrow \bar{M}$ es un difeomorfismo y f_x es un isomorfismo de espacios vectoriales, para todo $x \in B$, se dirá que los dos fibrados vectoriales son* **isomorfos** *y que f es un* **isomorfismo de fibrados vectoriales**.

Notación 2.1.23. *Se denotará por $\xi \cong \bar{\xi}$ a dos fibrados vectoriales ξ y $\bar{\xi}$ que sean isomorfos.*

Nota 2.1.24. *Si $\xi = (M, p, B)$ es un fibrado vectorial, se tiene que $(id_M, id_B) : \xi \longrightarrow \xi$ es un B-isomorfismo de fibrados vectoriales.*

A continuación, se observa el efecto que causa la composición de morfismos de fibrados vectoriales. Se tiene la siguiente:

Proposición 2.1.25. *La composición de dos morfismos de fibrados vectoriales es un morfismo de fibrados vectoriales. Es más, si los dos morfismos conservan B, entonces la composición también conserva B. Igualmente si los dos morfismos son isomorfismos, entonces la composición también lo es.*

Demostración. Considérense dos morfismos arbitrarios de fibrados vectoriales $(f, f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ y $(g, g_0): (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B}) \longrightarrow (\hat{M}, \hat{p}, \hat{B})$. Se verá que su composición $(g \circ f, g_0 \circ f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\hat{M}, \hat{p}, \hat{B})$ es un morfismo de fibrados vectoriales. En efecto:

1. En el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} & \xrightarrow{g} & \hat{M} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle \bar{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{p}} \\ B & \xrightarrow[f_0]{} & \bar{B} & \xrightarrow[g_0]{} & \hat{B} \end{array}$$

   los dos cuadrados son conmutativos, por lo que el cuadrado total es también conmutativo, ya que:

$$\begin{aligned} \hat{p} \circ (g \circ f) &= (\hat{p} \circ g) \circ f = (g_0 \circ \bar{p}) \circ f = g_0 \circ (\bar{p} \circ f) \\ &= g_0 \circ (f_0 \circ p) = (g_0 \circ f_0) \circ p. \end{aligned}$$

2. Para cada $x \in B$, se tiene que $f_x : M_x \longrightarrow \bar{M}_{f_0(x)}$ es lineal. Como $f_0(x)$ pertenece a $\bar{B}$, entonces $g_{f_0(x)} : \bar{M}_{f_0(x)} \longrightarrow \hat{M}_{g_0(f_0(x))}$ es lineal. En consecuencia, la aplicación $g_{f_0(x)} \circ f_x : M_x \longrightarrow \hat{M}_{g_0(f_0(x))}$ es lineal.

   Por otro lado, se tiene que $(g \circ f)_x = g_{f_0(x)} \circ f_x$. En efecto, sean las trivializaciones locales (U, φ) de M en x, (V, ψ) de $\bar{M}$ en $f_0(x)$ y (W, ϕ) de $\hat{M}$ en $g_0(f_0(x))$; entonces se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & V \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi \circ g \circ \psi^{-1}} & W \times \mathbb{R}^p \\ \simeq \uparrow \varphi & & \simeq \uparrow \psi & & \simeq \uparrow \phi \\ p^{-1}(U) & \xrightarrow[f]{} & \bar{p}^{-1}(V) & \xrightarrow[g]{} & \hat{p}^{-1}(W) \end{array} \tag{2.3}$$

Ahora, dado $x \in U$, para cada $(x, v) \in U \times \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (x, v) &\overset{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}}{\longrightarrow} (f_0(x), \psi_{f_0(x)} \circ f_x \circ \varphi_x^{-1}(v)) \\ &\overset{\phi \circ g \circ \psi^{-1}}{\longrightarrow} (g_0(f_0(x)), \phi_{g_0(f_0(x))} \circ g_{f_0(x)} \circ f_x \circ \phi_x^{-1}(v)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se llega a que $(g \circ f)_x$ coincide con $g_{f_0(x)} \circ f_x$.

3. Evidentemente, si (f, f_0) y (g, g_0) conservan B, entonces $f_0 = g_0 = id_B$. Por lo tanto, $g_0 \circ f_0$ coincide con id_B y $(g \circ f, g_0 \circ f_0)$ es un B-morfismo de fibrados vectoriales.

4. Si (f, f_0) y (g, g_0) son dos isomorfismos, entonces $g \circ f$ es un difeomorfismo y $(g \circ f)_x = g_{f_0(x)} \circ f_x$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in B$. □

Puede darse la siguiente caracterización de isomorfismo entre fibrados vectoriales.

Corolario 2.1.26. *Sean ξ y η dos fibrados vectoriales y sea $(f, f_0) : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de fibrados vectoriales. Entonces (f, f_0) es un isomorfismo si y sólo si existe un morfismo $(g, g_0) : \eta \longrightarrow \xi$ tal que $(f \circ g, f_0 \circ g_0)$ y $(g \circ f, g_0 \circ f_0)$ son id_η e id_ξ, respectivamente.*

Demostración. La demostración se basa en que f y g son aplicaciones diferenciables mutuamente inversas, con lo que son difeomorfismos, y en que f_x es inversa de $g_{f_0(x)}$. □

Definidos los fibrados vectoriales y los morfismos entre éstos, se puede hablar de una categoría de fibrados vectoriales por medio del siguiente:

Corolario 2.1.27. *Existe una categoría $\mathcal{VB}$, denominada* **categoría de los fibrados vectoriales**, *cuyos objetos son los fibrados vectoriales y sus morfismos son los morfismos de fibrados vectoriales definidos en la Definición 2.1.19 y cuya composición es la composición de morfismos de fibrados vectoriales.*

Además, dada una variedad diferenciable B, puede definirse la **categoría $\mathcal{VB}_B$ de los fibrados vectoriales sobre B**, *cuyos objetos son los fibrados vectoriales de base B, cuyos morfismos son los B-morfismos de fibrados vectoriales y cuya composición es la composición de B-morfismos de fibrados vectoriales. Se tiene de forma evidente que $\mathcal{VB}_B$ es una subcategoría llena de $\mathcal{VB}$.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la Proposición 2.1.25 y la Nota 2.1.24. □

El siguiente resultado permite afirmar que los morfismos de fibrados vectoriales pueden definirse localmente.

Proposición 2.1.28. *Sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de la variedad B y sean $\xi = (M, p, B)$ y $\overline{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, B)$ dos fibrados vectoriales sobre B. Considérese dada una familia de morfismos de fibrados vectoriales $\{f_i : \xi_{U_i} \longrightarrow \overline{\xi}_{U_i}\}_{i\in I}$ de modo que f_i y f_j coincidan sobre $U_i \cap U_j$ para cada par de índices $i, j \in I$. Entonces existe un único morfismo de fibrados vectoriales $f : \xi \longrightarrow \overline{\xi}$, que coincide con f_i en U_i, para todo i.*

Demostración. Se define el candidato a morfismo de fibrados vectoriales $f : \xi \to \overline{\xi}$ como:

$$f(m) = f_i(m) \qquad \forall m \in p^{-1}(U_i).$$

Como $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento por abiertos, se tiene que $\{p^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es un recubrimiento por abiertos de M y, por lo tanto, f está definido para cada elemento m en M. Además la aplicación está bien definida ya que en $U_i \cap U_j$ las aplicaciones f_i y f_j coinciden.

1. **La aplicación f es diferenciable en M:** La diferenciabilidad en un punto $m \in M$ de aplicaciones entre variedades es una propiedad local (véase la Definición 1.4.10). Si m pertenece a $p^{-1}(U_i)$, como $p^{-1}(U_i)$ es un abierto de M en el que la función f coincide con la aplicación f_i, que es diferenciable en m, entonces f es diferenciable en m. En consecuencia, f lo es en toda la variedad M.

2. **El siguiente diagrama es conmutativo:**

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \bar{M} \arrow[d, "\bar{p}"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

En efecto, restringiéndose a cada U_i del recubrimiento abierto de B, se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "p_{U_i}"'] & \bar{p}^{-1}(U_i) \arrow[d, "\bar{p}_{U_i}"] \\ U_i \arrow[r, equal] & U_i \end{tikzcd}$$

para cada $i \in I$. Como $\{p^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ es recubrimiento por abiertos de M, se tiene la conmutatividad de (2.4), en virtud de la definición de f.

3. **La aplicación $f_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(x)$ es lineal para todo $x \in B$:** Dado $x \in B$, existe $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como f coincide con f_i en U_i y ξ_U es subfibrado de ξ con el mismo rango como fibrados vectoriales, se tiene que f_x coincide con $(f_i)_x$, que es lineal. □

Se pretende mostrar seguidamente la estructura que poseen los morfismos entre fibrados vectoriales triviales.

Ejemplo 2.1.29. *Sean los fibrados vectoriales triviales* $\xi = (B \times \mathbb{R}^k, p, B)$ *y* $\eta = (B \times \mathbb{R}^m, \bar{p}, B)$*. Los* B*-morfismos entre estos fibrados son de la forma:*

$$f : \xi \longrightarrow \eta : (b, v) \mapsto (b, u(b.v)),$$

donde $u : B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *es una aplicación diferenciable tal que:*

$$u_b : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m : v \mapsto u(b, v)$$

es lineal.

En efecto, si u *es tal como se ha dicho, entonces* f *es diferenciable, el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} B \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & B \times \mathbb{R}^m \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ B & = & B \end{array}$$

es conmutativo y f_b *es lineal al coincidir con* u_b.

Para ver el recíproco, sólo se tiene que demostrar que:

$$u : B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

definido como $u(b, v) = f_b(v)$ *es diferenciable si* f *es un* B*-morfismo. En efecto, como* f *es diferenciable y la proyección* π_2 *definida como:*

$$\pi_2 : B \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m : (b, v) \mapsto v,$$

es también diferenciable (por considerarse la estructura de variedad diferenciable producto en $B \times \mathbb{R}^m$*), se tiene que* $\pi_2 \circ f$ *es diferenciable. Pero* u *coincide con* $\pi_2 \circ f$*, con lo que se concluye la prueba.*

En la Definición 2.1.22, aparece el concepto de isomorfismo de fibrados vectoriales. Se dan dos caracterizaciones para dichos isomorfismos en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.1.30. *Un morfismo* $(f, f_0)\colon (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *de fibrados vectoriales es un isomorfismo si y sólo si* f *es un difeomorfismo.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Inmediata por la Definición 2.1.30 de isomorfismo entre fibrados vectoriales.

$\boxed{\Leftarrow}$ Queda por demostrar que la aplicación f_x es isomorfismo lineal para cada $x \in B$. En efecto, f_x es lineal para todo $x \in B$ ya que f es morfismo entre fibrados vectoriales. Además $p^{-1}(x)$ y $\bar{p}^{-1}(x)$ son isomorfos a $\mathbb{R}^n$ y a $\mathbb{R}^m$, respectivamente, via difeomorfismos trivializadores. Luego pueden identificarse $p^{-1}(x)$ y $\bar{p}^{-1}(f_0(x))$ con los conjuntos:

$$\{(x, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\} \quad \text{y} \quad \{(f_0(x), w) \mid w \in \mathbb{R}^m\},$$

respectivamente.

Por un lado, f_x es inyectivo. En efecto, dados v_1, v_2 dos elementos de $p^{-1}(x)$ tales que $f_x(v_1) = f_x(v_2)$, se tiene que:

$$f(x, v_1) = (f_0(x), f_x(v_1)) = (f_0(x), f_x(v_2)) = f(x, v_2);$$

con lo que $(x, v_1) = (x, v_2)$, por la biyectividad de f.

Por otro lado, f_x es sobreyectivo. En efecto, dado w en $\mathbb{R}^m$, existe v en $\mathbb{R}^n$ tal que $f(x, v) = (f_0(x), w)$ para cualquier x de B por medio de la biyectividad de f.

En consecuencia, f_x es biyectivo y, por tanto, un isomorfismo lineal. De ser f_x un isomorfismo se tiene que n y m coinciden.

$\square$

La segunda caracterización de isomorfismo entre fibrados vectoriales es la que se da en la:

Proposición 2.1.31. *Sean $\xi = (M, p, B)$ y $\bar{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ dos fibrados vectoriales. Un morfismo de fibrados vectoriales $(f, f_0) : \xi \longrightarrow \bar{\xi}$ es un isomorfismo si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

1. *$f_0 : B \longrightarrow \bar{B}$ es un difeomorfismo.*

2. *$f_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(f_0(x))$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in B$.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ 1. **La aplicación f_0 es biyección diferenciable:** Puede afirmarse que f_0 es diferenciable por ser (f, f_0) morfismo de fibrados vectoriales. Se verá que la aplicación f_0 es biyectiva:

(a) f_0 es inyectiva. En efecto, si x, y son dos elementos de B tales que $f_0(x) = f_0(y)$, entonces se tiene que $(f_0(x), 0) = (f_0(y), 0)$. Por la definición del morfismo f_z, para $z \in B$, se verifica que:

$$\begin{aligned} f(x,0) &= f_x(0) = (f_0(x), 0) \\ &= (f_0(y), 0) = f_y(0) = f(y, 0). \end{aligned}$$

La inyectividad de f implica que $(x, 0) = (y, 0)$ y, por lo tanto, $x = y$.

(b) f_0 es sobreyectiva. En efecto, si $\bar{x}$ es un elemento de $\bar{B}$, se tiene que $(\bar{x}, 0)$ es un elemento de $\bar{M}$. La sobreyectividad de f implica la existencia de un elemento $(x, 0)$ de M tal que $f(x, 0) = (\bar{x}, 0)$. En consecuencia, se cumple que $f_0(x) = \bar{x}$, con lo que f_0 es sobreyectiva.

2. **La aplicación f_x es isomorfismo lineal para cada x de B:** Se deduce directamente de la Definición 2.1.30.
3. **${f_0}^{-1}$ es diferenciable:** Es lo que resta para demostrar que f_0 es difeomorfsimo. En efecto:

   Dado x arbitrario perteneciente a B, se toma una trivialización (U, φ) de ξ con $x \in U$ y otra trivialización (V, ψ) de $\bar{\xi}$ con $x \in V$. En concreto, si W es el conjunto $U \cap V$, que es abierto de B, se tiene que (W, φ_W) es una trivialización de ξ y (W, ψ_W) es una trivialización de $\bar{\xi}$. Entonces se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "id\times 0"] \arrow[d, "f_0"'] & W \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi^{-1}"] \arrow[d, equal] & p^{-1}(W) \arrow[d, "f"] \\ W & W \times \mathbb{R}^n \arrow[l, "\pi_1"'] & \bar{p}^{-1}(W) \arrow[l, "\varphi"'] \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

   donde π_1 es la proyección:

$$\pi_1 : W \times \mathbb{R}^n \longrightarrow W : (x, v) \mapsto x,$$

   que es diferenciable, e $id \times \{0\}$ es la aplicación:

$$id \times \{0\} : W \longrightarrow W \times \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, 0),$$

   que es diferenciable.

   El diagrama (2.5) asegura que f_0 coincide en W con la composición $\pi_1 \circ \varphi \circ f \circ \psi^{-1} \circ (id \times \{0\})$, que es diferenciable. En consecuencia, f_0 es diferenciable en un elemento arbitrario x de B.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supóngase que se cumplen las condiciones 1 y 2 de la proposición. Entonces:

1. **f es biyectiva:** Sea $\bar{m}$ un elemento de $\bar{M}$, entonces $\bar{p}(\bar{m})$ es igual a un elemento $\bar{x}$ de $\bar{B}$. Por tanto, existe un único $\bar{x}$ en $\bar{B}$ tal que $\bar{m} \in \bar{p}^{-1}(\bar{x})$.

Por otro lado, para dicho $\bar{x} \in \bar{B}$, debido a la biyección de f_0, existe un único $x \in B$ tal que $f_0(x) = \bar{x}$. Y como $\bar{p} \circ f$ coincide con $f_0 \circ p$, se tiene que la contraimagen por f de un elemento de $\bar{p}^{-1}(\bar{x})$, si existe, debe pertenecer a $p^{-1}(x)$.

Al ser $f_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(\bar{x})$ un isomorfismo lineal, se tiene que $p^{-1}(x)$ y $\bar{p}^{-1}(\bar{x})$ están en biyección. Como $\bar{x}$ se eligió de manera arbitraria, f es biyección.

2. **${f^{-1}}_{\bar{x}}$ es isomorfismo lineal:** Al ser f_x un isomorfismo lineal para cada elemento x de B, se tiene que existe ${f_x}^{-1} : \bar{p}^{-1}(f_0(x)) \longrightarrow p^{-1}(x)$ y que es un isomorfismo lineal.

   Por otro lado, se dijo que para cada elemento $\bar{x}$ de $\bar{B}$ existía un único elemento x en B tal que $f_0(x) = \bar{x}$. En consecuencia, ${f_x}^{-1}$ es un isomorfismo lineal de $\bar{p}^{-1}(\bar{x})$ en $p^{-1}(x)$.

   Pero la aplicación ${f^{-1}}_{\bar{x}}$ es la restricción de f^{-1} a $\bar{p}^{-1}(\bar{x})$, por lo que está definida como:

$$
{f^{-1}}_{\bar{x}} : \bar{p}^{-1}(\bar{x}) \longrightarrow p^{-1}(x) : \bar{m} \mapsto m,
$$

   tal que $f_x(m) = \bar{m}$. Por lo tanto, ${f^{-1}}_{\bar{x}}$ coincide con ${f_x}^{-1}$ que es isomorfismo lineal.

3. **La aplicación f^{-1} es diferenciable:** Como f_0 es un difeomorfismo, entonces puede suponerse que los dos fibrados poseen la misma base y que la aplicación entre las bases es la identidad, pues bastaría considerar ${f_0}^{-1} \circ \bar{p}$ como la proyección en $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$.

   Se puede hacer una segunda reducción sin más que tener en cuenta la Proposición 2.1.28 que permite estudiar los morfismos de fibrados vectoriales localmente; por lo que se toma una trivialización local (U, φ) de ξ y otra (V, ψ) de $\bar{\xi}$. Por tanto, puede considerarse $p^{-1}(U)$ en lugar de M y $\bar{p}^{-1}(V)$ en lugar de $\bar{M}$. Pero $p^{-1}(U)$ y $\bar{p}^{-1}(V)$ son difeomorfos a $U \times \mathbb{R}^n$ y a $V \times \mathbb{R}^m$, respectivamente. En consecuencia, basta estudiar el B-morfismo:

$$(f, id_B) : (B \times \mathbb{R}^n, p, B) \longrightarrow (B \times \mathbb{R}^m, \bar{p}, B),$$

obtenido con estas reducciones.

Ahora, según el Ejemplo 2.1.29, el B-morfismo está determinado por la aplicación diferenciable $u : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m : (x, v) \mapsto \pi_2 \circ f_x(v)$. En consecuencia, la aplicación $\Phi : B \longrightarrow Hom(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) : x \mapsto \pi_2 \circ f_x$ es diferenciable.

Por otro lado, la aplicación f^{-1} funciona como:

$$f^{-1}(x, v) = (x, \Phi^{-1}(x)(v)) \quad \forall x \in B \ \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

donde $\Phi^{-1}(x)$ es el inverso del isomorfismo f_x, para cada x de B. Al ser la inversión en $GL(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, una aplicación diferenciable, se tiene que f^{-1} es diferenciable. $\square$

Nota 2.1.32. *Por $GL(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ se denota al grupo de las aplicaciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.*

Vistos los resultados anteriores, el Corolario 2.1.26 puede enunciarse de la siguiente manera:

Proposición 2.1.33. *Si $(f, f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales, entonces $(f^{-1}, f_0^{-1}) : (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B}) \longrightarrow (M, p, B)$ es también un isomorfismo de fibrados vectoriales.*

Demostración. La conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \bar{M} & \xrightarrow{f^{-1}} & M \\ {\scriptstyle \bar{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \bar{B} & \xrightarrow[f_0^{-1}]{} & B \end{array}$$

se debe a la conmutatividad de este otro diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ B & \xrightarrow[f_0]{} & \bar{B} \end{array}$$

Por otro lado, al ser (f, f_0) un isomorfismo de fibrados vectoriales, se tiene que $f_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(f_0(x))$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in B$. Es más, en la Proposición 2.1.31 se demuestra que:

$$(f^{-1})_{f_0(x)} = f_x{}^{-1} \qquad \forall x \in B,$$

con lo que se tiene que $(f^{-1})_{f_0(x)}$ es lineal para cada $x \in B$. □

A continuación, se verán diversos ejemplos de morfismos entre fibrados vectoriales.

Ejemplo 2.1.34. *Sean* $\xi_1 = (M_1, p_1, B_1)$ *y* $\xi_2 = (M_2, p_2, B_2)$ *dos fibrados vectoriales de rangos* r_1 *y* r_2*, respectivamente. Se denomina* **producto cartesiano** *de los fibrados dados a la terna* $\xi_1 \times \xi_2 = (M_1 \times M_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2)$.

Se tiene que $\xi_1 \times \xi_2$ *es un fibrado vectorial de rango* $r_1 + r_2$*. Para ello, considérese la estructura de fibrado vectorial* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *de* ξ_1 *y la estructura* $\{(V_\gamma, \psi_\gamma)\}$ *de* ξ_2 *y se tiene que* $\{(U_\alpha \times V_\gamma, \chi_{\alpha\gamma})\}$ *dada por:*

$$\chi_{\alpha\gamma}^{-1}(x_1, x_2; y_1 \oplus y_2) = (\varphi_\alpha^{-1}(x_1, y_1), \psi_\gamma^{-1}(x_2, y_2)),$$

para $(x_1, y_1) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^{r_1}$ *y* $(x_2, y_2) \in V_\gamma \times \mathbb{R}^{r_2}$, *define una estructura de fibrado vectorial sobre* $\xi_1 \times \xi_2$.

Además, las proyecciones $\rho_1 \colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_1$ *y* $\rho_2 \colon M_1 \times M_2 \longrightarrow M_2$ *son morfismos de fibrados vectoriales de* $\xi_1 \times \xi_2$ *en* ξ_1 *y* ξ_2*, respectivamente.*

Por último, el producto fibrado $\xi_1 \times \xi_2$ *verifica la siguiente propiedad de factorización, que no se demostrará por razones de extensión pero que puede verse en* **[21]**:

"Si $\xi = (M, p, B)$ *es un tercer fibrado vectorial de dimensión* n *y* $p_i : M \longrightarrow M_i$ *es un morfismo de fibrados vectoriales para* $i = 1, 2$*, entonces existe un único morfismo de fibrados vectoriales* $p : M \longrightarrow M_1 \times M_2$ *tal que* $\rho_1 \circ p = p_1$ *y* $\rho_2 \circ p = p_2$*."*

Ejemplo 2.1.35. *Sea* (M', p', B) *un fibrado vectorial de rango* n*. Entonces se dirá que es* **trivializable** *si es isomorfo al fibrado vectorial trivial* $(B \times \mathbb{R}^n, \pi, B)$ *por medio de un* B*-morfismo* (ϕ, id_B)*. Como la aplicación del* B*-morfismo sobre las bases es un difeomorfismo, entonces, por la Proposición 2.1.31, ambos fibrados vectoriales son isomorfos si y sólo si* ϕ_x *es isomorfismo lineal para cada* $x \in B$ *y se cumple* $\pi \circ \phi = p$.

Ejemplo 2.1.36. *Sea* (M, p, B) *un fibrado vectorial. Considérense los fibrados tangentes* (TM, π, M) *y* $(TB, \overline{\pi}, B)$ *sobre* M *y* B*, respectivamente. Sea* $T(p) : TM \longrightarrow TB$ *la aplicación derivada de* p *dada en la Definición 1.4.38. La aplicación* $T(p)$ *es diferenciable, verifica la expresión:*

$$\overline{\pi} \circ T(p) = p \circ \pi$$

e induce una aplicación lineal de $T_m M$ *en* $T_{p(m)} B$ *para cada* $m \in M$*. Por lo tanto,* $T(p)$ *es un morfismo de fibrados vectoriales sobre* p.

Para concluir esta sección, se introducirá el concepto de morfismo bilineal de fibrados vectoriales, que será de utilidad en capítulos posteriores.

Definición 2.1.37. *Sean ξ_1, ξ_2 y ξ tres fibrados vectoriales sobre B de rangos n_1, n_2 y n, respectivamente. Sean M_1, M_2 y M sus respectivos espacios totales. Un* **morfismo bilineal de fibrados vectoriales** $\phi : (\xi_1, \xi_2) \longrightarrow \xi$ *es una colección de aplicaciones bilineales:*

$$\phi_x : M_{1\ x} \times M_{2\ x} \longrightarrow M_x, \qquad x \in B$$

que satisface la siguiente condición de diferenciabilidad:

Si $\{(U_\alpha, \psi_\alpha^1)\}$, $\{(U_\alpha, \psi_\alpha^2)\}$ y $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ son representaciones coordenadas de ξ_1, ξ_2 y ξ, respectivamente, entonces las aplicaciones:

$$\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow Hom(\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}; \mathbb{R}^n) : x \mapsto \psi_{\alpha,x} \circ \phi_x \circ (\psi_{\alpha,x}^1 \times \psi_{\alpha,x}^2)^{-1}$$

son diferenciables.

Nota 2.1.38. *La Definición 2.1.37 no depende de las representaciones coordenadas elegidas en los fibrados vectoriales involucrados.*

Por otro lado, ϕ no puede verse como una aplicación del producto cartesiano de los espacios totales de ξ_1 y ξ_2 sobre B.

Definición 2.1.39. *Con las hipótesis de la Definición 2.1.37, se dirá que el morfismo bilineal ϕ de fibrados vectoriales es* **antisimétrico** *si la aplicación ϕ_x es antisimétrica para cada $x \in B$.*

Ejemplo 2.1.40. *Sea (L, p, B) un fibrado vectorial. Se denominará* **campo de corchetes de Lie en** L *a todo morfismo bilineal antisimétrico $[\ ,\ ] : L \times L \longrightarrow L$ de fibrados vectoriales tal que $[\ ,\ ]_x : L_x \times L_x \longrightarrow L_x$ es un corchete de álgebras de Lie para cada $x \in B$.*

Un ejemplo de estos campos de corchetes de Lie se obtiene como sigue: sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie no abeliana con corchete $[\ ,\ ]$. Considérese entonces el fibrado vectorial trivial $\mathbb{R} \times \mathfrak{g}$ y defínase el campo de corchete como $[\ ,\ ]_t = t[\ ,\ ]$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

2.2 Construcción de fibrados vectoriales

En esta sección se muestra la construcción de un fibrado vectorial sobre una variedad B a partir de las transformaciones coordenadas asociadas a una representación coordenada definidas en la Definición 2.1.6. Se seguirá la técnica dada en **[21]**, donde puede verse la demostración de los resultados que aquí se utilizan.

Sea B una variedad y considérese $\mathbb{R}^n$. Supóngase que cada punto x en B tiene asociado un espacio vectorial isomorfo a $\mathbb{R}^n$, que se denominará M_x.

Considérese la unión disjunta $M = \bigsqcup_{x \in B} M_x$ y la proyección $p: M \longrightarrow B$ dada por $m \in M_x \mapsto x$.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un recubrimiento por abiertos de B y, para cada x en U_α, considérese el isomorfismo lineal $\psi_{\alpha,x} : M_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que se mencionó con anterioridad.

Para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, denomínese $U_{\alpha\beta}$ a la intersección $U_\alpha \cap U_\beta$. Exíjase además que cada $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ dada por:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}$$

sea diferenciable.

Se definen, de este modo, las biyecciones $\psi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ mediante sus inversas, a saber:

$$\psi_\alpha^{-1}(x, v) = \psi_{\alpha,x}^{-1}(v) \quad (x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Por $\psi_{\alpha\beta}$ se denomina a la aplicación $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ de $U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n$ en sí misma. Esta aplicación es diferenciable por la diferenciabilidad de $g_{\alpha\beta}$. Para continuar es necesaria la siguiente:

Proposición 2.2.1 ([21] Proposición X de 1.13). *Sea B una variedad, M un conjunto y $p : M \longrightarrow B$ una sobreyección con las siguientes propiedades:*

1. *Existe un recubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ y una familia de biyecciones:*
$$\{\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n.\}$$
2. *Para cada $x \in U_\alpha$ y $v \in \mathbb{R}^n$, $p \circ \psi_\alpha^{-1}(x, v) = x$.*
3. *Las aplicaciones $\psi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^n$ definidas por:*
$$\psi_{\alpha\beta}(x, v) = (\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})(x, v)$$
son difeomorfismos.

Entonces existe una única estructura de variedad (salvo B-isomorfismo) sobre M para la que (M, p, B) es un fibrado vectorial con representación coordenada dada por $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$. □

En virtud de esta proposición, se tiene la existencia de una única estructura de variedad sobre M que hace que la terna (M, p, B) sea un fibrado vectorial. Obsérvese que la fibra en cada punto de B es isomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Nota 2.2.2. *Lo que se ha visto es que si existe una familia de aplicaciones $\{g_{\alpha\beta}\}$ asociadas a un recubrimiento por abiertos de una variedad $\{U_\alpha\}$, entonces se obtiene un fibrado vectorial con base dicha variedad, con representación coordenada el recubrimiento por abiertos y cuyas trasformaciones coordenadas asociadas son la familia $\{g_{\alpha\beta}\}$. Pero ya se vio en la Definición 2.1.6 y en* *la Nota 2.1.7 que los fibrados vectoriales poseen aplicaciones $g_{\alpha\beta}$ como las indicadas en esta sección. Por lo tanto, los fibrados vectoriales quedan determinados de manera única (salvo B-isomorfismo) por las transformaciones coordenadas asociadas a un recubrimiento abierto de la base.*

2.3 Construcciones en fibrados vectoriales

En esta sección se estudian dos fibrados vectoriales que se construyen a partir de otros fibrados. En concreto, a partir de un fibrado y una aplicación diferenciable se construye el pullback o fibrado vectorial inducido; y a partir de dos fibrados vectoriales sobre la misma base se obtendrá la suma de Whitney o producto fibrado. La referencia a seguir para ver que estos dos conceptos dan fibrados vectoriales será **[21]**. No obstante, para la definición del pullback de un fibrado vectorial también se ha recurrido a **[26]**.

Definición 2.3.1. *Sea $\xi = (M, p, B)$ un fibrado vectorial de rango n. Sea $f : \bar{B} \longrightarrow B$ una aplicación diferenciable. Se denomina* **fibrado inducido por ξ bajo f** *o* **pullback de ξ sobre f** *a la terna $f^*(\xi) = (f^*M, f^*p, \bar{B})$, donde como espacio total se toma:*

$$f^*M = \{(y,m) \in \bar{B} \times M \mid f(y) = p(m)\}$$

y como proyección, la aplicación:

$$f^*p : f^*M \longrightarrow \bar{B} : (y,m) \mapsto y.$$

Nota 2.3.2. *Para cada $y \in \bar{B}$, puede definirse una estructura de espacio vectorial en $f^*p^{-1}(y)$; de hecho, es la inducida por $p^{-1}(f(y))$. En efecto, sea un elemento (y,m) de $f^*(p)^{-1}(y)$, entonces se tiene que $p(m) = f(y)$. Por lo tanto, m pertenece a $p^{-1}(f(y))$ que es un espacio vectorial de dimensión n. Es más, si*

m es un elemento de $p^{-1}(f(y))$, se cumple que (y,m) pertenece a $f^*(M)$, pues $f(y)$ y $p(m)$ son iguales; en concreto, (y,m) pertenece a $f^*p^{-1}(y)$. En consecuencia, $p^{-1}(f(y))$ y $f^*p^{-1}(f(y))$ están en biyección, por lo que se puede trasladar la estructura de espacio vectorial del primero al segundo como sigue:

$$\begin{aligned} (y,m)+(y,m') &= (y,m+m'), \\ \lambda(y,m) &= (y,\lambda m), \qquad m,m' \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nota 2.3.3. *La Definición 2.3.1 es la dada en* **[26]**. *Esta definición no asegura que la terna $(f^*M, f^*p, \bar{B})$ sea un fibrado vectorial. Se considerará una definición equivalente, dada en* **[21]**, *con la que será más fácil ver si es fibrado vectorial, pues permitirá dotar de una estructura de variedad diferenciable (única salvo difeomorfismo) al espacio total. No obstante, a la hora de trabajar con un fibrado inducido resultará más conveniente la Definición 2.3.1, debido a su mayor sencillez.*

La definición equivalente consiste en considerar la terna $(\bar{M},\bar{p},\bar{B})$, donde $\bar{M}$ es la unión disjunta $\bigsqcup_{x\in\bar{B}} M_{f(x)}$ y $\bar{p}$ la aplicación:

$$\bar{p} : \bar{M} \longrightarrow \bar{B} : m \in M_{f(y)} \mapsto y.$$

Lo que se va a ver es que, si alguna de las dos ternas fuera un fibrado vectorial, la otra también lo sería y además serían isomorfos como fibrados vectoriales. Este hecho implica, por la definición de isomorfismo, que f^*M y $\bar{M}$ serían difeomorfos, por lo que las dos definiciones del pullback serían equivalentes. Se verá que f^*M es fibrado vectorial en el Teorema 2.3.4 .

Obsérvese que, como conjunto, f^*M está en biyección con la unión disjunta:

$$\bar{M} = \bigsqcup_{x\in\bar{B}} M_{f(x)}.$$

En efecto, véase la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}(y,m)\in f^*M &\Leftrightarrow (y,m)\in \bar{B}\times M \mid f(y)=p(m)\\ &\Leftrightarrow y\in \bar{B}\wedge m\in p^{-1}(f(y))=M_{f(y)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, ambos conjuntos están en biyección por medio de:

$$\psi : f^*M \longrightarrow \bar{M} : (y,m)\mapsto m.$$

Luego si alguno de los dos conjuntos está dotado de estructura de variedad, entonces el otro también y además con una estructura que hace de ψ un difeomorfismo.

Si se consideran ahora las dos proyecciones de las ternas, se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} f^*M & \xrightarrow{\psi} & \bar{M} \\ {\scriptstyle f^*p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ \bar{B} & = & \bar{B} \end{array} \tag{2.6}$$

por lo que si una de las proyecciones, f^*p ó $\bar{p}$ es diferenciable, con las estructuras de variedad mencionadas en f^*M y $\bar{M}$, la otra proyección también sería diferenciable.

Es más, si una de las ternas $(\bar{M},\bar{p},\bar{B})$ y $(f^*M, f^*p,\bar{B})$ es un fibrado vectorial, entonces la otra también lo es. En efecto, si se cumple la trivialidad local para una de ellas, por ejemplo $\bar{M}$, entonces para cada $y\in\bar{B}$ existe un abierto $\bar{U}$ en $\bar{B}$ con $y\in\bar{U}$ y un difeomorfismo:

$$\varphi : \bar{p}^{-1}(\bar{U}) \longrightarrow \bar{U}\times\mathbb{R}^n : m\mapsto (\bar{p}(m), F_{\bar{U}}(m))$$

tal que, para todo $x\in\bar{U}$, se tiene que las restricciones:

$$F_{\bar{U}|\bar{p}^{-1}(x)} : \bar{p}^{-1}(x)\longrightarrow \mathbb{R}^n$$

son isomorfismos lineales. Pero, tomando el difeomorfismo:

$$\psi_| : f^*p^{-1}(\bar{U}) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(\bar{U})$$

consistente en la restricción de ψ *a* $f^*p^{-1}(\bar{U})$, *la aplicación* $\varphi \circ \psi_|$ *es un difeomorfismo de* $f^*p^{-1}(\bar{U})$ *en* $\bar{U} \times \mathbb{R}^n$ *definida como:*

$$(x, m) \mapsto (\bar{p} \circ \psi(x, m), F_{\bar{U}} \circ \psi(x, m)).$$

Pero por (2.6), *se tiene que* $\bar{p} \circ \psi = f^*p$ *y, para cada* x *en* $\bar{B}$, *la aplicación* $F_{\bar{U}} \circ \psi_x : f^*p^{-1}(\bar{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *coincide con la composición* $F_{U|\bar{p}^{-1}(x)} \circ \psi_x$, *donde la aplicación* $\psi_x : f^*p^{-1}(x) \longrightarrow \bar{p}^{-1}(x)$ *es la definida como* $(y, m) \mapsto m$. *Por lo que* $F_{\bar{U}} \circ \psi_x$ *es un isomorfismo lineal, ya que tanto* ψ_x *como* $F_{U|\bar{p}^{-1}(x)}$ *lo son.*

Por lo tanto, y dado que el mismo razonamiento puede ser aplicado partiendo de que f^*M *sea fibrado vectorial, se sigue que* $(f^*(M), f^*p, \bar{B})$ *y* $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *son dos fibrados vectoriales isomorfos y se podrán utilizar indistintamente.*

A continuación, se enunciará un teorema (véase **[21]**) que afirma que los fibrados inducidos por una aplicación diferenciable son fibrados vectoriales.

Teorema 2.3.4. *El fibrado* $f^*\xi$ *definido en la Definición 2.3.1 es un fibrado vectorial y la aplicación* $(\natural, f) : f^*\xi \longrightarrow \xi$, *con* $\natural : f^*M \longrightarrow M$ *definida como:*

$$\natural(y, m) = m \quad \forall (y, m) \in f^*M,$$

es un morfismo de fibrados vectoriales.

Demostración. Se demostrará que la terna $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ dada en la Nota 2.3.3 es un fibrado vectorial. En la misma nota, se probaba que, al ser $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ un fibrado vectorial, entonces $f^*\xi$ también lo es. Se da paso pues a la demostración.

A cada x en $\bar{B}$ se le asigna como espacio vectorial la fibra $M_{f(x)}$ de $f(x)$ en ξ.

Sea $\{(V_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una representación coordenada de ξ. Como f es diferenciable, la familia $\{U_\alpha\}$, con $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$, es un recubrimiento por abiertos de $\bar{B}$. Para cada $x \in U_\alpha$, se define el isomorfismo lineal:

$$\psi_{\alpha\ x} : M_{f(x)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dado por $\psi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha,f(x)}$. Entonces la aplicación:

$$\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(\mathbb{R}^n) : x \mapsto \psi_{\alpha\ x} \circ \psi_{\beta\ x}^{-1}$$

se puede escribir como:

$$x \mapsto \varphi_{\alpha\ f(x)} \circ \varphi_{\beta\ f(x)}^{-1} = g_{\alpha\beta}(f(x)),$$

donde $g_{\alpha\beta}$ son las transformaciones coordenadas de ξ. En consecuencia, las aplicaciones $\psi_{\alpha\beta}$ son diferenciables por coincidir con $g_{\alpha\beta} \circ f_{|U_\alpha \cap U_\beta}$.

Por tanto, se verifican las hipótesis pedidas en la Sección 2.2, por lo que existe una única estructura de fibrado vectorial $f^*\xi = (f^*M, f^*p, \bar{B})$, con $f^*M = \bigsqcup_{x\in\bar{B}} M_{f(x)}$ y con representación coordenada $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$.

La segunda parte del enunciado de este teorema también se demostrará para el fibrado vectorial $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$. Hecho esto, bastará componer el B-isomorfismo de $f^*\xi$ a $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ dado en la Nota 2.3.3 con el que se obtenga de $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ en ξ.

Las aplicaciones identidad $M_{f(x)} \longrightarrow M_{f(x)}$ definen un morfismo de fibrados vectoriales $(\tau, f) : (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B}) \longrightarrow \xi$, donde τ está definida como $\tau(m) = m$, para cada m en $\bar{M}$. En efecto, la estructura de variedad diferenciable de $\bar{M}$ tiene como atlas a una familia de abiertos que son las contraimágenes de un atlas de ξ (véase la Sección 2.2); por lo tanto, es trivial ver la diferenciabilidad de la aplicación τ. El resto de las propiedades que debe cumplir (τ, f)

para que sea morfismo de fibrados vectoriales se tienen por la propia definición de (τ, f).

Además, las restricciones $\tau_x : \bar{M}_x \longrightarrow M_{f(x)}$ son isomorfismos lineales para cada x en $\bar{B}$ ya que son la identidad de $\bar{M}_x = M_{f(x)}$ en $M_{f(x)}$. □

Para terminar el estudio del pullback del fibrado vectorial ξ sobre f se da la siguiente:

Proposición 2.3.5. *Sea un fibrado vectorial $\eta = (N, p_N, \bar{B})$ de rango m y un morfismo de fibrados vectoriales $(\phi, f) : \eta \longrightarrow \xi$. Entonces existe un único $\bar{B}$-morfismo de fibrados vectoriales $\hat{\phi} : \eta \longrightarrow f^*\xi$ tal que el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\hat{\phi}} & f^*\xi \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\natural} \\ \xi & = & \xi \end{array} \tag{2.7}$$

es conmutativo.

Demostración. El morfismo (ϕ, f) induce las aplicaciones lineales:

$$\begin{array}{rccl} \phi_x : & p_N^{-1}(x) & \longrightarrow & M_{f(x)} = p^{-1}(f(x)), \qquad x \in \bar{B}. \\ & n & \longmapsto & \phi_x(n) \end{array}$$

La aplicación $\natural : f^*M \to M$ definida sobre los espacios totales coincide con la inclusión, si se tiene en cuenta que $f^*M \simeq \bigsqcup_{x\in\bar{B}} M_{f(x)}$.

La conmutatividad de (2.7) implica:

$$\natural(\hat{\phi}(n)) = \phi(n), \qquad \forall n \in N.$$

En consecuencia, se verifica que $\phi = \hat{\phi}$ en N. Luego $\hat{\phi}$ es la restricción de la aplicación ϕ considerando como dominio a N y como codomino a $\natural^{-1}(B) = f^*M$.

La diferenciabilidad de $\hat{\phi}$ se tiene por ser restricción de ϕ, que es diferenciable.

Obsérvese además que la aplicación sobre las bases del morfismo $\hat{\phi}$ es la aplicación identidad en $\bar{B}$.

El diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\hat{\phi}} & f^*M \\ {\scriptstyle p_N}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*p} \\ \bar{B} & = & \bar{B} \end{array}$$

que debe cumplir el par $(\hat{\phi}, id_{\bar{B}})$ para que sea B-morfismo, se cumple por ser (ϕ, f) morfismo de fibrados vectoriales.

El morfismo $\hat{\phi}$ es el único que cumple las condiciones de la proposición, ya que si $\hat{\phi}' : \eta \to f^*M$ es otro $\bar{B}$-morfismo, debe cumplirse igualmente:

$$\hat{\phi}'(n) = \phi(n), \qquad \forall n \in N. \qquad \square$$

Nota 2.3.6. *En la demostración anterior, si cada ϕ_x es un isomorfismo lineal, entonces $\hat{\phi}$ es un isomorfismo de fibrados por la Proposición 2.1.31. Por tanto, η y $f^*\xi$ son isomorfos.*

En segundo lugar, se darán los conceptos de núcleo e imagen de un B-morfismo de rango constante. Para ello se precisa la siguiente:

Definición 2.3.7. *Se dice que $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ es un B-morfismo de* **rango constante** *si la dimensión de la imagen de ϕ_x no depende de $x \in B$.*

Una vez definidos los morfismos de rango constante, ya se está en condiciones de introducir los conceptos de núcleo e imagen de un tal morfismo. Esto es lo que se hace en la:

Proposición 2.3.8. *Sean M y $\bar{M}$ dos fibrados vectoriales sobre B y sea $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ un B-morfismo de rango constante. Entonces, los conjuntos:*

$$\ker\phi = \bigcup_{x \in B} \ker\phi_x \qquad y \qquad \mathrm{im}\phi = \bigcup_{x \in B} \mathrm{im}\phi_x$$

son subfibrados de M y de $\bar{M}$, respectivamente.

Demostración. Al ser el morfismo ϕ de rango constante, los espacios vectoriales $\ker\phi_x$ e $\mathrm{im}\phi_x$ no dependen de $x \in B$. Razonando como en el Teorema 2.3.4, se obtiene que tanto $\ker\phi$ como $\mathrm{im}\phi$ son fibrados vectoriales y por la definición de las fibras se tiene que son subfibrados de los fibrados vectoriales que se mencionan en el enunciado.

Una demostración completa puede verse en **[14]**. □

De este modo, se definen el núcleo y la imagen de un B-morfismo como puede verse en la:

Definición 2.3.9. *Los subfibrados* $\ker\phi$ *e* $\mathrm{im}\phi$ *de la Proposición 2.3.8 se denominan* **núcleo e imagen** *del B-morfismo ϕ, respectivamente.*

A continuación, se pasará a definir (mediante una propiedad universal) el pullback de dos morfismos de fibrados vectoriales que conserven la base.

Definición 2.3.10. *Sean $\phi_1 : A_1 \longrightarrow A_3$ y $\phi_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ dos B-morfismos de fibrados vectoriales. Se dice que un fibrado vectorial M sobre B es un* **pullback** *de dichos morfismos si existen dos B-morfismos $\overline{\phi_1} : M \longrightarrow A_2$ y $\overline{\phi_2} : M \longrightarrow A_1$ formando el* *siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\overline{\phi_1}"] \arrow[d, "\overline{\phi_2}"'] & A_2 \arrow[d, "\phi_2"'] \\ A_1 \arrow[r, "\phi_1"] & A_3 \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

y tal que si existe otro fibrado vectorial $\bar{M}$ *sobre* B *con* B*-morfismos* $\psi_1 : \bar{M} \longrightarrow A_2$ *y* $\psi_2 : \bar{M} \longrightarrow A_1$ *verificando un diagrama conmutativo como el anterior* (2.8)*, entonces existe un único* B*-morfismo* $\psi : \bar{M} \longrightarrow M$ *verificando:*

$$\overline{\phi_2} \circ \psi = \psi_1 \qquad y \qquad \overline{\phi_2} \circ \psi = \psi_2.$$

La unicidad del pullback de dos morfismos dados se demuestra en la siguiente:

Proposición 2.3.11. *El pullback de dos* B*-morfismos, si existe, es único salvo* B*-isomorfismo.*

Demostración. Sean $\phi_1 : A_1 \longrightarrow A_3$ y $\phi_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ dos B-morfismos y sean M y $\bar{M}$ dos pullbacks de ϕ_1 y ϕ_2. Entonces se verifican los diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\overline{\phi_1}"] \arrow[d, "\overline{\phi_2}"'] & A_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\phi_1"] & A_3 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{M} \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & A_2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ A_1 \arrow[r, "\phi_1"] & A_3 \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

ambos conmutativos. Por la Definición 2.3.10, existen unos únicos B-morfismos $\psi : \bar{M} \longrightarrow M$ y $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ tales que:

$$\overline{\phi_1} \circ \psi = \psi_1 \qquad \text{y} \qquad \overline{\phi_2} \circ \psi = \psi_2$$
$$\psi_1 \circ \phi = \phi_1 \qquad \text{y} \qquad \psi_2 \circ \phi = \phi_2.$$

Por lo tanto, se verifican:

$$\psi_1 \circ (\phi \circ \psi) = \psi_1 \quad \text{y} \quad \psi_2 \circ (\phi \circ \psi) = \psi_2$$
$$\phi_1 \circ (\psi \circ \phi) = \phi_1 \quad \text{y} \quad \phi_2 \circ (\psi \circ \phi) = \phi_2.$$

Pero las identidades $id_{\bar{M}}$ e id_M verifican estas condiciones respectivamente; por lo que:

$$\phi \circ \psi = id_{\bar{M}} \quad \text{y} \quad \psi \circ \phi = id_{\bar{M}}. \qquad \square$$

El siguiente paso consistirá en definir la suma de Whitney de dos fibrados vectoriales sobre la misma base, tras lo cual se verán algunas de sus propiedades básicas.

Definición 2.3.12. *Un fibrado vectorial $\xi = (M, p, B)$ se denomina* **suma de Whitney** *de los fibrados vectoriales $\xi^i = (M^i, p^i, B)$ de rango r_i respectivamente ($i = 1, \ldots, n$), si existen B-morfismos:*

$$\iota^i : \xi^i \longrightarrow \xi \quad y \quad \rho^i : \xi \longrightarrow \xi^i$$

tales que:

$$\rho^i \circ \iota^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ id_\xi & i = j \end{cases} \tag{2.10}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \iota^i \circ \rho^i = id_\xi. \tag{2.11}$$

A ξ se le denota por $\xi^1 \oplus \cdots \oplus \xi^n$.

Los siguientes resultados aseguran la unicidad y la existencia de la suma de Whitney de un conjunto finito de fibrados con la misma base dentro de la categoría $\mathcal{VB}$ de los fibrados vectoriales. En primer lugar, se demostrará la unicidad y en una segunda proposición se estudiará la existencia.

Proposición 2.3.13. *La suma de Whitney de la familia finita de fibrados vectoriales* $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ *es única salvo* B*-isomorfismos.*

Demostración. Supóngase que existen B-morfismos $\varphi^i \colon \xi^i \longrightarrow \eta$ sobre un fibrado vectorial η. Entonces se tiene definido un B-morfismo dado por:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \circ \rho^i.$$

Efectivamente, φ es un B-morfismo puesto que la suma de dos B-morfismos lo es también (la idea de la demostración es la misma que la que se usará en la Proposición 3.2.1).

Puede procederse ya a demostrar la unicidad. Supóngase que existe un fibrado vectorial η tal que existen B-morfismos $\overline{\iota}^i \colon \xi^i \longrightarrow \eta$ y $\overline{\rho}^i : \eta \longrightarrow \xi^i$ tales que:

$$\overline{\rho}^i \circ \overline{\iota}^j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ id_\eta & i = j \end{cases}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\iota}^i \circ \overline{\rho}^i = id_\eta.$$

Entonces se consideran los B-morfismos:

$$h = \sum_{i=1}^{n} \overline{\iota}^i \rho^i : \xi \to \eta \qquad \text{y} \qquad \overline{h} = \sum_{i=1}^{n} \iota^i \overline{\rho}^i : \xi \to \eta\,,$$

que verifican:

$$\overline{h} \circ h = id_\xi \qquad \text{y} \qquad h \circ \overline{h} = id_\eta.$$

Se demostrará la primera de las igualdades, viéndose la restante de forma análoga:

$$\begin{aligned} \overline{h} \circ h &= (\sum_j \iota^j \circ \overline{\rho}^j) \circ (\sum_i \overline{\iota}^i \circ \rho^i) = \sum_{i,j} (\iota^j \circ \overline{\rho}^j) \circ (\overline{\iota}^i \circ \rho^i) \\ &= \sum_{i,j} \iota^j \circ (\overline{\rho}^j \circ \overline{\iota}^i) \circ \rho^i = \sum_i \iota^i \circ \rho^i = id_\xi. \end{aligned}$$

Luego h y $\bar{h}$ son B-morfismos inversos mutuamente, por lo que h es un B-isomorfismo por el Corolario 2.1.26. $\square$

Proposición 2.3.14. *La suma de Whitney de la familia finita de fibrados vectoriales* $\{\xi^i\}_{i=1}^n$ *siempre existe.*

Demostración. Basta ver la existencia de la suma de Whitney de dos fibrados vectoriales $\xi^1 = (M^1, p^1, B)$ y $\xi^2 = (M^2, p^2, B)$ de rangos r_1 y r_2, respectivamente. De este modo, a cada x en B se le asigna el espacio vectorial $M_x^1 \oplus M_x^2$ de dimensión $r_1 + r_2$, con lo que es isomorfo a $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{R}^{r_2}$ como espacio vectorial.

Sean $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^1)\}$ y $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha^2)\}$ representaciones coordenadas de ξ^1 y de ξ^2, respectivamente. A cada x en U_α se le asocia el isomorfismo lineal:

$$\psi_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha,x}^1 \oplus \varphi_{\alpha,x}^2 : M_x^1 \oplus M_x^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{R}^{r_2}.$$

Entonces se cumplen las hipótesis para la construcción, dada en la Sección 2.2, de un fibrado vectorial con fibra isomorfa a $\mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{R}^{r_2}$. De este modo, se está en disposición del fibrado vectorial $(\hat{M}, \hat{p}, B)$ de dimensión $r_1 + r_2$, donde $\hat{M}$ es:

$$\bigsqcup_{x \in B} M_x^1 \oplus M_x^2$$

y $\hat{p}$ es la proyección que se definía en dicha sección, tal que a un elemento de $M_x^1 \oplus M_x^2$ le asignaba el elemento x de B.

Las inclusiones $M_x^\nu \longrightarrow M_x^1 \oplus M_x^2$ definen B-morfismos $\iota^\nu : \xi^\nu \longrightarrow \hat{\xi}$ $(\nu = 1, 2)$. Análogamente, las proyecciones $M_x^1 \oplus M_x^2 \longrightarrow M_x^\nu$ definen B-morfismos $\rho^\nu : \hat{\xi} \longrightarrow \xi^\nu$, $(\nu = 1, 2)$.

Estas aplicaciones ρ^ν y ι^ν $(\nu = 1, 2)$ verifican (2.10) y (2.11).

En efecto, dado $x \in B$, se tienen:

$$\rho^\nu \circ \iota^1(m) = \rho^\nu(m \oplus 0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu = 2 \\ m & \text{si} \quad \nu = 1 \end{cases} \qquad \forall m \in M_x^1,$$

$$\rho^\nu \circ \iota^2(m) = \rho^\nu(0 \oplus m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \nu = 1 \\ m & \text{si} \quad \nu = 2 \end{cases} \qquad \forall m \in M_x^2,$$

$$\iota^1 \circ \rho^1(m) + \iota^2 \circ \rho^2(m) = m \quad \forall m \in M_x^1 \oplus M_x^2.$$

Por lo tanto, $\hat{\xi}$ es la suma de Whitney $\xi^1 \oplus \xi^2$. □

Nota 2.3.15. *En particular, la fibra en ξ de x en B es la suma directa de las fibras M_x^i $(i = 1, 2)$.*

Para concluir esta sección, se muestra una proposición que permite determinar el pullback de dos morfismos explícitamente por medio de un subfibrado de la suma de Whitney de los dominios de ambos morfismos.

Proposición 2.3.16. *Sean $\phi_1 : M_2 \longrightarrow M_1$ y $\phi_2 : M_3 \longrightarrow M_1$ dos B-morfismos tales que:*

$$\operatorname{im}(\phi_{1,x}) + \operatorname{im}(\phi_{2,x}) = M_{1,x}, \quad \forall x \in B.$$

Entonces el conjunto:

$$F = \{m_2 \oplus m_3 \in M_2 \oplus M_3 \mid \phi_1(m_2) = \phi_2(m_3)\}$$

es un subfibrado de la suma de Whitney $M_2 \oplus M_3$, las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \pi_2 : F &\longrightarrow M_3 \\ m_2 \oplus m_3 &\longmapsto m_3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \pi_1 : F &\longrightarrow M_2 \\ m_2 \oplus m_3 &\longmapsto m_2 \end{aligned}$$

son B-morfismos y el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\pi_2} & M_3 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ M_2 & \xrightarrow{\phi_1} & M_1 \end{array} \tag{2.12}$$

es un diagrama de pullback en el sentido de la Definición 2.3.10.

Nota 2.3.17. *La suma entre las imágenes de las restricciones del morfismo sobre las fibras es la suma como espacios vectoriales, ya que dichas fibras son subespacios vectoriales de un mismo $\mathbb{R}^n$ (en concreto, el que define el rango del fibrado vectorial).*

Demostración de la Proposición 2.3.16. En primer lugar, vemos que F es un subfibrado de $M_2 \oplus M_3$. En efecto, la aplicación definida como:

$$\phi : M_2 \oplus M_3 \longrightarrow M : m_2 \oplus m_3 \longrightarrow \phi_1(m_2) - \phi_2(m_3)$$

es un B-morfismo. Por la condición sobre las imágenes de ϕ_1 y ϕ_2, se tiene que $\mathrm{im}(\phi_x) = M_x$ para cada $x \in B$, por lo que el rango de ϕ es constante (de hecho, es máximo). Por la Proposición 2.3.8, $\ker\phi$ es un subfibrado de $M_2 \oplus M_3$.

Las aplicaciones π_1 y π_2 son diferenciables por ser proyecciones y por ser F subfibrado de $M_2 \oplus M_3$. Obviamente el diagrama (2.12) es conmutativo.

Sólo resta probar que (2.12) representa al pullback de las aplicaciones ϕ_1 y ϕ_2. En efecto, si existen dos B-morfismos $\psi_1 : \bar{F} \longrightarrow M_3$ y $\psi_2 : \bar{F} \longrightarrow M_2$ que verifican un diagrama análogo al (2.12), entonces puede elegirse el B-morfismo dado por:

$$\psi : \bar{F} \longrightarrow F : m \mapsto (\psi_1(m), \psi_2(m)),$$

que verifica $\pi_1 \circ \psi = \psi_1$ y $\pi_2 \circ \psi = \psi_2$. □

2.4 Subfibrado vertical de un fibrado vectorial

La construcción que se dará a continuación es la recogida en **[21]** para un fibrado diferenciable, que es un objeto más general que un fibrado vectorial, que es el concepto que se trata en la presente monografía.

Sea (M, p, B) un fibrado vectorial de rango r, de modo que la dimensión de B como variedad diferenciable sea n. Considérese la aplicación derivada $T(p)$ de p entre los respectivos fibrados vectoriales TM y TB (aplicación que es un morfismo de fibrados vectoriales sobre p como se vio en el Ejemplo 2.1.36). Se introduce la siguiente:

Definición 2.4.1. *Para cada $x \in M$, se denominará* **subespacio vertical** *de $T_x(M)$ al subespacio vectorial:*

$$V_x(M) = \ker(T_x(p))$$

de $T_x(M)$. A los vectores de $V_x(M)$ se les denomina **vectores verticales**.

Nota 2.4.2. *Obsérvese que $T_x(M)$ es un espacio vectorial para cada $x \in M$, puesto que es la fibra de x en el fibrado tangente TM. Un comentario análogo puede hacerse con respecto a $T_b(B)$ para cada $b \in B$. Además la restrición de $T(p)$ dada por $T_x(p) : T_x(M) \longrightarrow T_{p(m)}(B)$ es una aplicación lineal para cada $m \in M$, por lo que tiene sentido hablar del núcleo de $T_x(p)$ como aplicación lineal.*

Es conocido que, para cada $x \in M$, la aplicación $T_x(p)$ es sobreyectiva, ya que p es una submersión en virtud de la Proposición 2.1.9.

Debido a la igualdad entre las dimensiones de una variedad y su fibrado tangente y a la Nota 2.1.4, la sobreyectividad de $T(p)$ permite afirmar para cada $x \in M$ que:

$$\dim V_x(M) = \dim M - \dim B = \dim \mathbb{R}^r = r.$$

Se verifica, por la Proposición 2.1.10, que para cada $b \in B$ la fibra $M_b = p^{-1}(b)$ es una subvariedad de M. Denótese la inclusión de M_b en M por $j_b : M_b \longrightarrow M$. Entonces se tiene:

Lema 2.4.3. *Para cada $b \in B$ y para cada $x \in M_b$, se tiene:*

$$V_x(M) = \mathrm{im}T_x(j_b).$$

Demostración. Por definición, se tiene que $p \circ j_b : M_b \longrightarrow B$ es la aplicación constante que toma el valor b para todo M_b. En consecuencia, se verifica:

$$T(p) \circ T(j_b) = T(p \circ j_b) = 0.$$

Por tanto, $\mathrm{im}T_x(j_b)$ está contenido en el núcleo de $T_x(p)$; esto es, $\mathrm{im}T_x(j_b) \subset V_x(M)$.

Por otro lado, al ser M_b subvariedad de M, se tiene que $T_x(j_b)$ es inyectiva, por lo que se verifica:

$$\dim \mathrm{im}T_x(j_b) = \dim F = \dim V_x(M).$$

Luego se obtiene la igualdad buscada. □

Visto lo anterior, se tiene la siguiente:

Definición 2.4.4. *El subconjunto $V(M)$ de TM definido como:*

$$V(M) = \bigsqcup_{x \in M} V_x(M)$$

recibe el nombre de **subfibrado vertical**.

La justificación para llamar subfibrado vertical a $V(M)$ reside en la siguiente:

Proposición 2.4.5. *El subfibrado vertical $V(M)$ es un subfibrado del fibrado tangente TM.*

Demostración. Dada una representación coordenada $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ del fibrado vectorial (M, p, B), se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} TU_\alpha \times T\mathbb{R}^r \arrow[d] & Tp^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "T(\varphi_\alpha)"', "\cong"] \arrow[d] \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^r & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\cong"', "\varphi_\alpha"] \end{tikzcd},$$

que, en virtud del Lema 2.4.3, se restringe a un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times T\mathbb{R}^r \arrow[d] & V(M)|_{p^{-1}(U_\alpha)} \arrow[l, "\cong"] \arrow[d] \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^r & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\cong"', "\varphi_\alpha"] \end{tikzcd}$$

donde $V(M)|_{p^{-1}(U_\alpha)}$ es el conjunto:

$$V(M)|_{p^{-1}(U_\alpha)} = \bigsqcup_{x \in p^{-1}(U_\alpha)} V_x(M)$$

y la flecha superior sólo indica una biyección. Entonces, por medio de esta biyección, puede dotarse a $V(M)$ de una estructura de variedad, en virtud de la Proposición 2.2.1, de modo que es una subvariedad de $T(M)$ cuya dimensión es $n+2r$ y posee la estructura de subfibrado inducida por el diagrama anterior. □

Nota 2.4.6. *El enunciado del Lema 2.4.3 equivale a decir que las restricciones $T(j_b) : TM_b \longrightarrow V(M)$ de las aplicaciones $T(j_b) : TM_b \longrightarrow TM$ pueden verse como morfismos de fibrados vectoriales, puesto que inducen isomorfismos lineales sobre las fibras.*

Con la notación y condiciones exigidas a lo largo de esta sección se da finalmente la siguiente:

Proposición 2.4.7. *Sea* $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *un fibrado vectorial de dimensión* s *y sea* $\phi : M \longrightarrow \bar{M}$ *un* B*-morfismo. Entonces la aplicación* $T(\phi)$ *se restringe a un morfismo de fibrados vectoriales* $T(\phi)_V : V(M) \longrightarrow V(\bar{M})$.

Demostración. La demostración de la diferenciabilidad de $T(\phi)_V$ se debe a la de $T(\phi)$ y a que $V(M)$ y $V(\bar{M})$ son subvariedades integrales de TM y $T\bar{M}$. La linealidad sobre las fibras de $T(\phi)_V$ se debe a la propia linealidad sobre las fibras de $T(\phi)$. Por último, la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V(M) & \xrightarrow{T(\phi)_V} & V(\bar{M}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & \bar{M} \end{array}$$

viene dada por la del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T(\phi)} & T\bar{M} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi} & \bar{M} \end{array}$$

□

Capítulo 3

Secciones de fibrados vectoriales

Este capítulo continúa el estudio de los fibrados vectoriales comenzado en el anterior, centrándose en esta ocasión en las secciones globales y locales de un fibrado vectorial. Estos conceptos generalizan otro, bien conocido en Geometría Diferencial, como puede ser el de campo diferenciable de vectores tangentes. De hecho, en el Capítulo 2 se vio que los fibrados tangentes son fibrados vectoriales (véase el Ejemplo 2.1.12) y, en el desarrollo del presente capítulo (en concreto, en el Ejemplo 3.1.3) se comprobará que las secciones globales del fibrado tangente son los campos diferenciables ya mencionados.

La intención de este capítulo es recopilar las nociones y propiedades que se han considerado necesarias acerca de las secciones de un fibrado vectorial con el fin de permitir una mejor comprensión del Capítulo 7, donde se tratan los algebroides de Lie, que son fibrados vectoriales a los que se les ha añadido, entre otras cosas, una estructura de producto corchete sobre el conjunto de sus secciones. Además, las secciones jugarán un papel fundamental al asociar un algebroide de Lie a un grupoide diferenciable dado, como se verá en el citado capítulo.

3.1 Secciones de fibrados vectoriales

En esta sección se muestran los conceptos básicos y las propiedades que se han considerado necesarios para un primer tratamiento de las secciones de un fibrado vectorial.

En él, se verá cómo obtener secciones globales a partir de secciones locales definidas en un recubrimiento por abiertos, cómo se puede obtener una sección (global o local) con un valor determinado en un elemento de la base e incluso cómo asociar secciones de un fibrado a las de otro mediante morfismos de fibrados vectoriales. Comenzamos con el concepto de sección global:

Definición 3.1.1. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial. Se denomina* **sección global** *del fibrado a toda aplicación $\sigma : B \longrightarrow M$ diferenciable que verifica $p \circ \sigma = id_B$.*

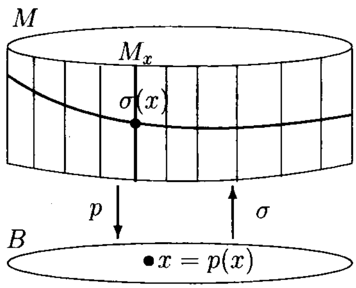

Figura 3.1: Sección global de un fibrado vectorial.

La siguiente caracterización de las secciones de un fibrado vectorial, aunque inmediata, permite facilitar el manejo de las secciones.

Proposición 3.1.2. *Una aplicación diferenciable $\sigma : B \longrightarrow M$ es una sección global del fibrado si y sólo si $\sigma(x) \in M_x$ para todo $x \in B$.*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $x \in B$, entonces se tiene $p \circ \sigma(x) = x$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in B$, entonces $\sigma(x)$ pertenece a $M_x = p^{-1}(x)$. En consecuencia, $p \circ \sigma(x)$ es x para cualquier x de B. □

A continuación, se verá que las secciones del fibrado tangente de una variedad diferenciable son los campos diferenciables de vectores tangentes de dicha variedad.

Ejemplo 3.1.3. *Sea (TM, π, M) el fibrado tangente (véase el Ejemplo 2.1.12). Una sección global $\sigma : M \longrightarrow TM$ de este fibrado da lugar a un vector $\sigma(x) \in T_xM$ tangente a M en x. Por tanto, σ es un campo diferenciable de vectores tangente sobre M. Evidentemente, todo campo diferenciable de vectores tangentes sobre M es una sección global del fibrado. Por lo tanto, se tiene que los campos diferenciables de vectores tangentes sobre M coinciden con las secciones globales del fibrado tangente.*

Se continuará tratando el concepto local de sección considerando secciones sobre un abierto de la base del fibrado vectorial. Para ello, se adapta a esta situación la caracterización obtenida en la Proposición 3.1.2 como puede verse en la:

Definición 3.1.4. *Dado un fibrado vectorial (M, p, B), se denomina* **sección local** *sobre un abierto W de B a una aplicación $\sigma : W \longrightarrow M$ tal que $\sigma(x)$ pertenece a M_x para cada x de W.*

Nota 3.1.5. *A una sección como la definida anteriormente se la denomina también* **sección cruzada** *del fibrado sobre W.*

Se indican ahora algunas consideraciones acerca de las secciones de un fibrado vectorial.

Nota 3.1.6. *Toda sección (global o local) es inyectiva.*

Nota 3.1.7. *Toda sección global σ del fibrado vectorial (M, p, B) puede interpretarse como un B-morfismo del fibrado vectorial trivial (B, B, id_B) en (M, p, B). En efecto, σ es una aplicación diferenciable tal que $p \circ \sigma = id_B$ y la aplicación σ_b: $\{b\} = id_B^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$ lleva b en el vector nulo de $p^{-1}(b)$.*

Nota 3.1.8. *Las secciones globales del fibrado trivial $(B \times \mathbb{R}^n, \pi, B)$ son las aplicaciones de la forma:*

$$\sigma : B \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n : b \mapsto (b, f(b)),$$

donde f es una aplicación diferenciable de B en $\mathbb{R}^n$. Esto se debe a la interpretación de sección global indicada en la Nota 3.1.7 y a la expresión de los morfismos entre fibrados vectoriales triviales visto en el Ejemplo 2.1.29.

Es interesante reseñar que toda sección local de un fibrado vectorial puede verse como una sección global del fibrado vectorial restricción correspondiente al abierto del dominio de dicha sección. Esto es lo que se demuestra en la siguiente:

Proposición 3.1.9. *Sea $\xi = (M, p, B)$ un fibrado vectorial y U un abierto en B. Las secciones globales en el fibrado vectorial restricción ξ_U son las secciones locales de ξ sobre U.*

Demostración. Sea la sección global $\sigma : U \longrightarrow p^{-1}(U)$ de ξ_U. Considérese la inclusión ι de $p^{-1}(U)$ en M, que es diferenciable por ser $p^{-1}(U)$ una subvariedad abierta de M. Entonces $\iota \circ \sigma$ es una sección local de ξ sobre U, ya que es diferenciable y se tiene que:

$$p \circ \iota \circ \sigma = p_U \circ \sigma = id_U.$$

Recíprocamente, sea $\overline{\sigma} : U \longrightarrow M$ una sección local de ξ sobre U. Se tiene que $\overline{\sigma}(U) = p^{-1}(U)$, ya que $p \circ \overline{\sigma} = id_U$. Además la restricción $\overline{\sigma}$ a $\overline{\sigma}_U : U \longrightarrow p^{-1}(U)$ es una aplicación diferenciable. En consecuencia, $\overline{\sigma}_U$ es una sección local de ξ sobre U. $\square$

Dado un morfismo de fibrados vectoriales, cabe plantearse cómo asociarle una sección del fibrado vectorial de llegada a una sección del fibrado de partida. La respuesta a dicha pregunta se encuentra en la:

Proposición 3.1.10. *Sean* (M, p, B) *y* $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *dos fibrados vectoriales y un morfismo* $(f, f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ *de fibrados vectoriales tal que* $f_0 : B \longrightarrow \bar{B}$ *es un difeomorfismo. Si* σ *es una sección en* (M, p, B)*, entonces* $f \circ \sigma \circ {f_0}^{-1}$ *es una sección en* $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$.

Demostración. De la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \bar{M} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{p}} \\ B & \xrightarrow{f_0} & \bar{B} \end{array}$$

se sigue:

$$\begin{aligned} \bar{p} \circ (f \circ \sigma \circ {f_0}^{-1}) &= (\bar{p} \circ f) \circ (\sigma \circ {f_0}^{-1}) = (f_0 \circ p) \circ (\sigma \circ {f_0}^{-1}) \\ &= f_0 \circ (p \circ \sigma) \circ {f_0}^{-1} = f_0 \circ {f_0}^{-1} = id_{\bar{B}} \end{aligned}$$

Además, la aplicación $f \circ \sigma \circ {f_0}^{-1} : \bar{B} \to \bar{M}$ es diferenciable, ya que es composición de tres aplicaciones diferenciables. En consecuencia, la aplicación $f \circ \sigma \circ {f_0}^{-1}$ es una sección del fibrado vectorial $(\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$. □

Definición 3.1.11. *A la sección* $f \circ \sigma \circ {f_0}^{-1}$ *de la proposición anterior se la denomina* **imagen de la sección** σ *mediante el morfismo de fibrados* (f, f_0).

En general, por medio de un morfismo $(f, f_0) : (M, p, B) \longrightarrow (\bar{M}, \bar{p}, \bar{B})$ de fibrados vectoriales, la imagen de una sección no es una sección, ya que f_0 puede no ser inyectiva. No obstante, la situación se simplifica si el fibrado vectorial conserva la base, como se observa en el siguiente:

Corolario 3.1.12. *Sean $\xi = (M, p, B)$ y $\bar{\xi} = (\bar{M}, \bar{p}, B)$ dos fibrados vectoriales, sea f un B-morfismo de ξ en $\bar{\xi}$ y sea $\sigma : B \longrightarrow M$ una sección global en ξ. Entonces $f \circ \sigma : B \longrightarrow \bar{M}$ es una sección de $\bar{\xi}$.*

Demostración. Sólo se considera, en la Proposición 3.1.9, el morfismo de fibrados (f, id_B), que cumple las hipótesis por ser id_B un difeomorfismo. □

Un caso particular de sección, que se utilizará en diversas ocasiones en esta monografía es la que sigue:

Definición 3.1.13. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial. Se denomina* **sección global nula 0** *de ξ a la definida por $0 : B \longrightarrow M : x \mapsto 0_x$, donde 0_x es el vector nulo en $p^{-1}(x)$ para cada $x \in B$.*

A continuación, se estudia el concepto de independencia lineal entre secciones. Este concepto hay que estudiarlo punto a punto cómo se puede ver en la:

Definición 3.1.14. *Sean (M, p, B) un fibrado vectorial de rango n y U un abierto de B. Se dice que las secciones locales $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ del fibrado sobre U son* **linealmente independientes** *si los vectores $\{\sigma_1(x), \ldots, \sigma_r(x)\}$ son linealmente independientes para todo $x \in U$.*

Para conseguir secciones linealmente independientes sobre un entorno de un punto de la base del fibrado vectorial, se tiene la siguiente:

Proposición 3.1.15. *En un fibrado vectorial (M, p, B) de rango n, para cada $b \in B$ existen n secciones linealmente independientes sobre un entorno abierto de dicho punto.*

Demostración. Sea (U, φ) una trivialización local del fibrado vectorial con $b \in U$. Entonces se tiene que $\varphi^{-1}\colon U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ es un difeomorfismo.

Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Considérense las aplicaciones:

$$\sigma_i : U \longrightarrow p^{-1}(U) : x \mapsto \varphi^{-1}(x, e_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

que son diferenciables. Además se cumple que $p \circ \sigma_i = id_U$ para cada $i = 1, \ldots, n$, pues:

$$(p \circ \sigma_i)(x) = p(\varphi^{-1}(x, e_i)) = x.$$

Por último, al ser φ^{-1} un difeomorfismo, $\varphi^{-1}_{\{b\}\times\mathbb{R}^n}$ es un isomorfismo lineal; por lo que $\{\sigma_1(x), \ldots, \sigma_n(x)\}$ es una base, con lo que concluye la demostración. □

Puede construirse una sección local fijando con anterioridad la imagen de un elemento de la base.

Proposición 3.1.16. *Sean (M, p, B) un fibrado vectorial de rango $n, m \in M$ y $x = p(m)$. Entonces existe una sección local σ que verifica $\sigma(x) = m$.*

Demostración. Sea una trivialización local (U, φ) del fibrado con $x \in U$. Basta definir la sección dada por:

$$\sigma : U \longrightarrow p^{-1}(U) : u \mapsto \varphi^{-1}(u, F_x(m)),$$

donde estamos haciendo uso de la notación de φ por (p, F) dada en la Definición 2.1.1. □

Nota 3.1.17. *Obsérvese que la independencia lineal de las secciones locales obtenidas en la Proposición 3.1.15 no depende ni del abierto trivializante ni del difeomorfismo trivializante.*

Estas secciones se denominan **secciones canónicas naturales** *del difeomorfismo trivializante φ.*

Sea $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo trivializante y sean $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ sus secciones canónicas naturales. Para cada elemento $u \in U$, $\{\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u)\}$ es una base de $p^{-1}(u)$; por tanto, si v es un elemento de $p^{-1}(u)$, se verifica que $v = \sum_{i=1}^n v^i \sigma_i(u)$. De este modo, se llega a la siguiente:

Proposición 3.1.18. *Si el difeomorfismo trivializante φ se escribe como (p, F), entonces $F(v) = (v^1, \dots, v^n)$.*

Demostración. Es conocido que $v = \sum_{i=1}^n v^i \sigma_i(p(v))$ y que F es lineal. Por lo tanto, se tiene:

$$F(v) = F\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(p(v))\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i F(\sigma_i(p(v))).$$

Por definición, se verifica que $\sigma_i(p(v)) = \varphi^{-1}(p(v), e_i)$ y que $F = \pi_2 \circ \varphi$, donde π_2 es la proyección natural de $U \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$; por lo que se llega a:

$$F(v) = \sum_{i=1}^{n} v^i \pi_2 \circ \varphi(\varphi^{-1}(p(v), e_i)) = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = (v^1, \dots, v^n). \qquad \square$$

Proposición 3.1.19. *Sean $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ las secciones canónicas naturales del difeomorfismo trivializador $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$. Se tiene:*

1. *Para todo $x \in U$, $F_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ actúa como:*

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(x) \mapsto (v^1, \dots, v^n).$$

2. *La aplicación $\varphi : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ actúa como:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(p(v)) = F_{p(v)}^{-1}(v^1, \dots, v^n) \mapsto (p(v); v^1, \dots, v^n).$$

Demostración.

1. Es sabido que F_x es isomorfismo lineal y que $F_x(\sigma_i(x)) = e_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto,

$$F_x\left(\sum_{i=1}^{n} v^i\sigma_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i F_x(\sigma_i(x)) = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i = (v^1, \ldots, v^n).$$

2. Como, para cada $x \in B$, se tiene que $\sigma_i(x) \in p^{-1}(x)$, entonces $\sum_{i=1}^{n} v^i\sigma_i(x)$ pertenece a $p^{-1}(x)$. En consecuencia, basándose en la Proposición 3.1.18, se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi(\textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i\sigma_i(x)) &= (p(\textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i\sigma_i(x)), F(\textstyle\sum_{i=1}^{n} v^i\sigma_i(x))) \\ &= (x; v^1, \ldots, v^n). \end{aligned}$$ □

Para concluir la presente sección, se muestra una manera de ampliar una sección local a una global.

Proposición 3.1.20. *Sea $\sigma : U \longrightarrow M$ una sección local del fibrado sobre un abierto U en B. Sea f una función en $\mathcal{F}(B)$ tal que* $\mathrm{sop}(f)$ *esté contenido en U. Entonces una sección global $f \cdot \sigma$ de ξ está dada por:*

$$f \cdot \sigma(x) = \begin{cases} f(x)\sigma(x) & x \in U, \\ 0_x & x \in B \setminus \mathrm{sop}(f). \end{cases}$$

Demostración. La aplicación $f \cdot \sigma$ verifica $p \circ (f \cdot \sigma) = id_B$ y es diferenciable por ser diferenciable a trozos en dos abiertos de B coincidiendo en la intersección. □

Como consecuencia, se obtiene una forma de construir una sección global mediante secciones locales en cada elemento de un recubrimiento por abierto.

Proposición 3.1.21. *Sea $\{U_\alpha\}$ un recubrimiento por abiertos localmente finito de B. Sea σ_α una sección definida sobre U_α para cada α y sea $\{f_\alpha\}$ una partición de la unidad subordinada al recubrimiento abierto $\{U_\alpha\}$. Entonces la sección global $\sum_\alpha f_\alpha \cdot \sigma_\alpha$ del fibrado vectorial (M, p, B) está dada por:*

$$\left(\sum_\alpha f_\alpha \cdot \sigma_\alpha\right)(x) = \sum_\alpha f_\alpha(x)\sigma_\alpha(x),$$

para cada x de B.

Demostración. Consecuencia de la Proposición 3.1.20 y de ser Sec(B) un $\mathcal{F}(B)$-módulo, tal como se verá en la Proposición 3.2.1. $\square$

Teniendo en cuenta el resultado anterior, se está en condiciones de ampliar la Proposición 3.1.16, consiguiendo que la sección de dicho resultado sea global como se ve en la:

Proposición 3.1.22. *Sean (M, p, B) un fibrado vectorial, $m \in M$ y $x = p(m)$. Entonces existe una sección global σ que verifica $\sigma(x) = m$.*

Demostración. La Proposición 3.1.16 asegura que existe un abierto U en B y una sección local $\bar{\sigma} : U \longrightarrow M$ tal que $\bar{\sigma}(x) = m$.

Sea f un función en $\mathcal{F}(B)$ tal que $f(x) = 1$ y sop$(f) \subset U$. Entonces, por la Proposición 3.1.20, se tiene que $f \cdot \bar{\sigma}$ es una sección global y verifica $f \cdot \bar{\sigma}(x) = m$. $\square$

3.2 El módulo de las secciones globales

En esta sección se demostrará que se puede dotar al conjunto de las secciones globales de un fibrado vectorial de estructura de módulo sobre las funciones diferenciables. De hecho, se verá que este módulo es finitamente generado e incluso proyectivo (aunque esto último no se probará en esta monografía). Igualmente se verán, al final de la sección, algunos morfismos de módulos entre los módulos de secciones inducidos por los morfismos de fibrados vectoriales.

Proposición 3.2.1. *Sean σ y τ dos secciones globales de un fibrado vectorial $\xi = (M, p, B)$ y sea f perteneciente a $\mathcal{F}(B)$. Entonces existen dos secciones globales $\sigma + \tau$ y $f \cdot \sigma$ definidas según:*

$$(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x), \quad (f \cdot \sigma)(x) = f(x)\sigma(x), \quad \forall x \in B.$$

Las operaciones $+(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$ y $\cdot(f, \sigma) = f \cdot \sigma$ permiten que el conjunto de las secciones globales del fibrado tenga estructura de $\mathcal{F}(B)$-módulo, que se denotará por $\mathrm{Sec}(\xi)$ *o por* $\Gamma\xi$.

Demostración. En primer lugar, la aplicación $\sigma + \tau$ tiene sentido, ya que $\sigma(x)$, $\tau(x) \in p^{-1}(x)$, para cada $x \in B$, y $p^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial, por lo que $\sigma(x) + \tau(x) \in p^{-1}(x)$. Si además f es una función diferenciable en B, entonces $f(x)$ es un escalar, por lo que está definido $f(x)\sigma(x)$ en $p^{-1}(x)$. Del mismo modo, las secciones poseen estructura de $\mathcal{F}(B)$-módulo por ser $p^{-1}(x)$ un espacio vectorial.

En consecuencia, sólo queda ver que tanto $\sigma + \tau$ como $f \cdot \sigma$ son diferenciables. Lo que se hará es ver que estas aplicaciones son diferenciables en cada uno de los elementos de B. En efecto, sea x un elemento de B, entonces es conocido que existe una trivialización local (U, φ) de B tal que $x \in U$. Igualmente, se conoce que φ es expresable como (p, F) (véase la Definición 2.1.1)

Considérese la restricción de $\sigma + \tau$ a U, $\sigma + \tau_{|U}$ y tómese:

$$\varphi \circ (\sigma + \tau_{|U}) : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, F(\sigma(x)) + F(\tau(x))),$$

que es diferenciable en x. Como φ es un difeomorfismo, entonces $\sigma + \tau$ es diferenciable en $x \in B$.

Para ver la diferenciabilidad de $f \cdot \sigma$, se procede de idéntica manera considerando la restricción de $f \cdot \sigma$ a U, $f \cdot \sigma_{|U}$, y la aplicación:

$$\varphi \circ (f \cdot \sigma_{|U}) : U \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n : x \mapsto (x, f(x)F(\sigma(x))),$$

que es diferenciable en $x \in B$. □

Siguen a la proposición algunos ejemplos para clarificar la situación.

Ejemplo 3.2.2. *Considérese el fibrado tangente (TM, π, M) de una variedad diferenciable M. En el Ejemplo 3.1.3 se vio que las secciones globales del fibrado tangente M coinciden con los campos diferenciables de vectores tangentes de M. Por lo tanto, el módulo ΓTB de las secciones globales de TM es igual al módulo $\chi(B)$ de todos los campos diferenciables de vectores tangentes de M.*

Ejemplo 3.2.3. *Sea $\xi = (B \times \mathbb{R}^n, p, B)$ un fibrado vectorial. Como se vio en la Nota 3.1.8, cada sección global σ está determinada biunívocamente por una aplicación diferenciable $\phi_\sigma : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por:*

$$\sigma(x) = (x, \phi_\sigma(x)).$$

Este hecho define el siguiente isomorfismo canónico de $\mathcal{F}(B)$-módulos:

$$\mathrm{Sec}\xi \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(B; \mathbb{R}^n) : \sigma \mapsto \phi_\sigma.$$

Véase que es un morfismo de $\mathcal{F}(B)$-módulos. Sean σ, τ dos secciones globales y $f : B \to \mathbb{R}$, entonces se tiene:

$$\sigma(x) = (x, \phi_\sigma(x)), \quad \tau(x) = (x, \phi_\tau(x)), \quad x \in B.$$

Como $(\sigma + \tau)(x) = \sigma(x) + \tau(x)$ y $(f \cdot \sigma)(x) = f(x)\sigma(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned}(x, \phi_{\sigma+\tau}(x)) &= (\sigma + \tau)(x) \\ &= (x, \phi_\sigma(x)) + (x, \phi_\tau(x)) = (x, \phi_\sigma(x) + \phi_\tau(x))\end{aligned}$$

y

$$(x, \phi_{f\cdot\sigma}(x)) = (f \cdot \sigma)(x) = f(x)(x, \phi_\sigma(x)) = (x, f(x)\phi_\sigma(x)).$$

En particular, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^n$, *las secciones globales* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, *dadas por:*

$$\sigma_i(x) = (x, e_i), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \in B,$$

forman una base de $\mathrm{Sec}(\xi)$; *con lo que* $\mathrm{Sec}(\xi)$ *es un* $\mathcal{F}(B)$*-módulo libre.*

Ejemplo 3.2.4. *Sean* $\xi_1 = (M_1, p_1, B)$ *y* $\xi_2 = (M_2, p_2, B)$ *dos fibrados vectoriales. Considérese la suma de Whitney de ambos,* $\xi_1 \oplus \xi_2$. *Entonces se tiene un isomorfismo de* $\mathcal{F}(B)$*-módulos* $\mathbf{F} : \mathrm{Sec}(\xi_1 \oplus \xi_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sec}(\xi_1) \oplus \mathrm{Sec}(\xi_2)$ *definido por:*

$$\mathrm{Sec}(\xi_1 \oplus \xi_2) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\xi_1) \oplus \mathrm{Sec}(\xi_2) : \sigma \mapsto (\rho^1 \circ \sigma, \rho^2 \circ \sigma),$$

donde ρ^1 *y* ρ^2 *son las proyecciones de la suma de Whitney de la Definición 2.3.12.*

Es evidente que $\mathbf{F}$ *es un morfismo de* $\mathcal{F}(B)$*-módulos y su inversa viene dada por:*

$$\mathrm{Sec}(\xi_1) \oplus \mathrm{Sec}(\xi_2) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\xi_1 \oplus \xi_2) : (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto \iota^1 \circ \sigma_1 + \iota^2 \circ \sigma_2,$$

donde ι^1 *e* ι^2 *son las inclusiones en la suma de Whitney dadas en Definición 2.3.12.*

A continuación, se caraterizarán los fibrados vectoriales trivializables como aquellos que poseen un conjunto linealmente independiente de secciones globales cuyo cardinal es igual al del rango del fibrado.

Teorema 3.2.5. *Sea (M, p, B) un fibrado vectorial de rango n. Son equivalentes:*

1. *(M, p, B) es un fibrado vectorial trivializable.*
2. *Existen n secciones $\sigma_i : B \longrightarrow M$ del fibrado linealmente independientes.*
3. *Existe una aplicación diferenciable $F \colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que F_x es un isomorfismo lineal para todo $x \in B$.*

Demostración.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Las secciones linealmente independientes se obtienen por medio de la Proposición 3.1.15 sin más que tener en cuenta que B es un abierto trivializador del fibrado en cuestión. En particular, las secciones vienen dadas por:

$$\sigma_i(x) = (x, e_i), \quad \text{para cada } x \in B, \text{ y para cada } i = 1, \ldots, n,$$

con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Considérese la aplicación $h : B \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ dada por:

$$(x; v^1, \ldots, v^n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(x).$$

La aplicación h es diferenciable por la Proposición 3.2.1. Además la dimensión de $B \times \mathbb{R}^n$ es igual a la de M, pues si se toma una trivialización local (U, φ) de (M, p, B) se tiene que φ es un difeomorfismo de $p^{-1}(U)$ en $U \times \mathbb{R}^n$, por lo que tienen la misma dimensión como variedades. Al ser $p^{-1}(U)$ y $U \times \mathbb{R}^n$ subvariedades abiertas de M y $B \times \mathbb{R}^n$, respectivamente, se verifica que la dimensión de M coincide con la de $p^{-1}(U)$ y que la de $B \times \mathbb{R}^n$ coincide con la de $U \times \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, las dimensiones de M y $B \times \mathbb{R}^n$ coinciden.

Al ser las secciones $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ linealmente independientes, se tiene que h es sobreyectiva. La aplicación h es además inyectiva, porque dados $(x; v^1, \dots, v^n)$, $(y; w^1, \dots, w^n) \in B \times \mathbb{R}^n$ tales que $h(x; v^1, \dots, v^n) = h(y; w^1, \dots, w^n)$, entonces se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(x) = \sum_{i=1}^{n} w^i \sigma_i(y). \tag{3.1}$$

Pero aplicando p a (3.1) se obtiene que $x = y$; por lo que $(v^1, \dots, v^n) = (w^1, \dots, w^n)$.

También, directamente de la definición de h, se tiene que $p \circ h$ coincide con la proyección natural $\pi : B \times \mathbb{R}^n \to B$ y, para cada $x \in B$, la aplicación $h_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(x)$ dada por:

$$(v^1, \dots, v^n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(x),$$

es lineal de forma evidente. Es más, h_x es biyectiva debido a la biyectividad de h.

Todo lo visto hasta ahora permite afirmar que (h, id_B) es un isomorfismo entre los fibrados vectoriales $(B \times \mathbb{R}^n, \pi, B)$ y (M, p, B) por el Ejemplo 2.1.35 y, por tanto, h es un difeomorfismo.

Defínase, pues, la aplicación F como la composición $\pi_2 \circ h^{-1}$, donde π_2 es la proyección natural de $B \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, que es una aplicación diferenciable. Además se cumple que, para cada $x \in B$, la aplicación $F_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i(x) \mapsto (v^1, \dots, v^n)$$

es un isomorfismo lineal.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Sea la aplicación $\phi : M \longrightarrow B \times \mathbb{R}^n$ dada por $x \mapsto (p(x), F(x))$. Va a verse que $(\phi, id_B) : (M, p, B) \longrightarrow (B \times \mathbb{R}^n, \pi, B)$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales.

i). **Se tiene la igualdad** $\pi \circ \phi = p$**:** En efecto, sea un elemento x en B, entonces:

$$\pi \circ \phi(x) = \pi(p(x), F(x)) = \pi(x).$$

ii). **Para cada** $x \in B$, ϕ_x **es isomorfismo lineal:** En efecto, dado x en B, la aplicación ϕ_x coincide con F_x por definición de ϕ_x; y al ser F_x isomorfismo lineal, también lo es ϕ_x.

En consecuencia, (ϕ, id_B) verifica que $\pi \circ \phi = p$ y que ϕ_x es isomorfismo lineal para todo $x \in B$. Por lo comentado en el Ejemplo 2.1.35, se tiene que (ϕ, id_B) es un isomorfismo de fibrados vectoriales. □

La siguiente proposición demostrará que, si se tiene un número de secciones linealmente independientes igual al rango del fibrado vectorial, éstas bastan para generar el módulo de secciones.

Proposición 3.2.6. *Si (M, p, B) es un fibrado vectorial de rango n en el que existen n secciones globales linealmente independientes, entonces éstas generan el $\mathcal{F}(B)$-módulo de las secciones globales.*

Demostración. Sean $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ las n secciones globales linealmente independientes del fibrado y sea σ una sección global cualquiera del mismo fibrado. Entonces, para cada $x \in B$, $\sigma(x)$ es igual a una combinación lineal de $\{\sigma_i(x)\}_{i=1}^n$, a saber:

$$\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} v_x^i \sigma_i(x),$$

con $v_x^i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \ldots, n$. Se definen así las aplicaciones $v^i : B \longrightarrow \mathbb{R}$ como $v^i(x) = v_x^i$ para cada $x \in B$ e $i = 1, \ldots, n$.

Por el Teorema 3.2.5, existe una aplicación diferenciable $F\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por:

$$\sum_{i=1}^{n} v_x^i \sigma_i(x) \mapsto (v_x^1, \ldots, v_x^n).$$

Pero de la definición de F se sigue que la composición $F \circ \sigma : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ coincide con la aplicación $(v^1, \ldots, v^n) : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$x \mapsto (v^1(x), \ldots, v^n(x)) = (v_x^1, \ldots, v_x^n).$$

Por tanto, $(v^1, \ldots, v^n)$ es diferenciable; lo que equivale a decir que los v^i pertenecen a $\mathcal{F}(B)$ para $i = 1, \ldots, n$.

Con esto se concluye que $\sigma = \sum_{i=1}^{n} v^i \sigma_i$, lo que completa la demostración. □

A continuación, dado un morfismo entre dos fibrados vectoriales, se verán dos morfismos entre los módulos de secciones de dichos fibrados.

Proposición 3.2.7. *Sean $\xi = (M, p, B)$ y $\eta = (M', p', B')$ dos fibrados vectoriales y sea $(\phi, \phi_0) : \xi \longrightarrow \eta$ un morfismo de fibrados vectoriales tal que ϕ_x es un isomorfismo lineal para cada $x \in B$. Entonces se tiene un morfismo de módulos $\phi^\sharp : \mathrm{Sec}(\eta) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\xi)$, dado por:*

$$[\phi^\sharp(\tau)](x) = \phi_x^{-1} \circ \tau \circ \phi_0(x), \quad x \in B, \tau \in \mathrm{Sec}(\eta).$$

Demostración.

1. En primer lugar, la aplicación $\phi^\sharp$ está bien definida, puesto que dada una sección global τ en η, la aplicación $\phi^\sharp(\tau)$ es una

sección global en ξ. En efecto, de la composición de $\phi^\sharp(\tau)$ con p se tiene que $p \circ \phi^\sharp(\tau) = id_B$, ya que, dado $x \in B$, $\phi^\sharp(\tau)(x)$ pertenece a $p^{-1}(x)$. Luego se tiene:

$$p(\phi^\sharp(\tau)(x)) = x.$$

Queda por ver que la aplicación $\phi^\sharp(\tau)$ es diferenciable. Para ello, se estudia la diferenciabilidad en cada $x \in B$. Sea una trivialización local (V, ψ) de η con $\phi_0(x) \in V$.

Para cada $x \in U$, se tiene:

$$\phi_x^{-1}(\tau(\phi_0(x))) = \phi_x^{-1} \circ \psi_{\phi_0(x)}^{-1} \circ \psi(\tau(\phi_0(x))).$$

Por lo tanto, si se demuestra que la aplicación:

$$\Phi : U \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m; p^{-1}(U)) : x \mapsto \psi_{\phi_0(x)} \circ \phi_x$$

es diferenciable, entonces la aplicación $\phi^\sharp(\tau)$ será diferenciable en $x \in U$. Pero para ver que Φ es diferenciable, basta ver que $\psi \circ \phi$ es diferenciable (el argumento usado es el mismo que se considera en el último paso de la demostración de la Proposición 2.1.31); pero esto es cierto, por ser ambas diferenciables.

2. En segundo y último lugar, ha de probarse que $\phi^\sharp$ es un $\mathcal{F}(B)$-módulo.

   Se verá que, dados τ_1, τ_2 $\in$ $\mathrm{Sec}(\xi)$, se satisface $\phi^\sharp(\tau_1 + \tau_2) = \phi^\sharp(\tau_1) + \phi^\sharp(\tau_2)$. En efecto,

$$\begin{aligned}[\phi^\sharp(\tau_1 + \tau_2)](x) &= \phi_x^{-1} \circ (\tau_1 + \tau_2)(\phi_0(x)) \\ &= \phi_x^{-1} \circ \tau_1(\phi_0(x)) + \phi_x^{-1} \circ \tau_2(\phi_0(x)) \\ &= [\phi^\sharp(\tau_1)](x) + [\phi^\sharp(\tau_2)](x).\end{aligned}$$

También, dados $\tau \in \mathrm{Sec}(\xi)$ y $f \in \mathcal{F}(B')$, se verifica que $\phi^\sharp(f \cdot \tau) = (f \circ \phi_0) \cdot \phi^\sharp(\tau)$. En efecto,

$$\begin{aligned}[\phi^\sharp(f \cdot \tau)](x) &= \phi_x^{-1} \circ (f \cdot \tau)(\phi_0(x)) = (f \circ \phi_0)(x) \phi_x^{-1} \circ \tau(\phi_0(x)) \\ &= [(f \circ \phi_0)\phi^\sharp(\tau)](x).\end{aligned}$$

Por lo tanto, se llega a que $\phi^\sharp$ es un isomorfismo de $\mathcal{F}(B)$-módulo. □

Proposición 3.2.8. *Sean $\xi = (M, p, B)$ y $\eta = (\bar{M}, \bar{p}, B)$ dos fibrados vectoriales y sea $\phi : \xi \longrightarrow \eta$ un B-morfismo de fibrados vectoriales. Sea la aplicación:*

$$\phi_* : \mathrm{Sec}(\xi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\eta)$$

dada por:

$$(\phi_* \sigma)(x) = \phi(\sigma(x)) = \phi_x(\sigma(x)), \quad x \in B, \quad \sigma \in \mathrm{Sec}(\xi).$$

Entonces ϕ_* es un morfismo de $\mathcal{F}(B)$-módulos.

Demostración. La aplicación ϕ_* está bien definida, pues dado $\sigma \in \mathrm{Sec}(\xi)$, se tiene que $\phi_* \sigma$ es diferenciable (por coincidir con $\phi \circ \sigma$) y es una sección, ya que:

$$\bar{p} \circ \phi \circ \sigma = p \circ \sigma = id_B.$$

Además, dados $\sigma, \tau \in \mathrm{Sec}(\xi)$ y $f \in \mathcal{F}(B)$, se verifica que:

$$\phi_*(\sigma + \tau) = \phi_* \sigma + \phi_* \tau, \quad \phi_*(f \cdot \sigma) = f \cdot \phi_*(\sigma).$$

En efecto, dado $x \in B$, se tiene que:

$$\phi_*(\sigma + \tau)(x) = \phi_x(\sigma(x) + \tau(x))$$

$$\phi_*(f \cdot \sigma)(x) = \phi_x(f(x)\sigma(x)),$$

que lleva, por la linealidad de ϕ_x, a:

$$\begin{aligned}\phi_*(\sigma+\tau)(x) &= \phi_x(\sigma(x)) + \phi_x(\tau(x))\\ &= \phi_*(\sigma)(x) + \phi_*(\tau)(x) = (\phi_*(\sigma) + \phi_*(\tau))(x)\end{aligned}$$

$$\phi_*(f\cdot\sigma)(x) = f(x)\phi_*(\sigma)(x),$$

con lo que se concluye la demostración. □

El siguiente paso será ver si el módulo de las secciones de un fibrado tiene alguna propiedad sobre el número de secciones que hacen falta para generarlo. Para ello, se requiere del siguiente:

Lema 3.2.9. *Todo fibrado vectorial posee una representación coordenada finita.*

Demostración. Sea $\{(U_k, \psi_k)\}$ una representación coordenada del fibrado vectorial (M, p, B) de rango n. En virtud de la Proposición 1.4.20, se elige un refinamiento $\{V_{ij} \mid i = 1, \ldots, n; j \in \mathbb{N}\}$ de $\{U_i\}$ cuyos elementos son disjuntos dos a dos. Se definen V_i como $\bigcup_j V_{ij}$ y la aplicación $\chi_i : p^{-1}(V_i) \longrightarrow V_i \times \mathbb{R}^n$ como $\chi_i(m) = \psi_{ij}(m)$ si $m \in p^{-1}(V_{ij})$, donde ψ_{ij} es la restricción de algún ψ_k al V_{ij} correspondiente. Obsérvese que χ_i es difeomorfismo por serlos los ψ_{ij} y por las Proposiciones 1.4.21 y 1.4.46. De este modo, $\{(V_i, \chi_i)\}$ es la representación coordenada buscada. □

Probado el lema anterior, se está en disposición de probar que los módulos de secciones son finitamente generados.

Proposición 3.2.10. *Sea $\xi = (M, p, B)$ un fibrado vectorial de rango r. Entonces* $\mathrm{Sec}(\xi)$ *es un $\mathcal{F}(B)$-módulo finitamente generado.*

Demostración. Por el Lema 3.2.9, puede obtenerse una representación coordenada finita $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^p$ del fibrado vectorial. Como las restricciones ξ_α de ξ al abierto U_α de B son fibrados vectoriales triviales, se tiene que los $\mathcal{F}(U_\alpha)$-módulos $\mathrm{Sec}(\xi_\alpha)$ son libres y poseen bases finitas $\{\sigma_{\alpha,i}\}_{i=1}^r$ (véase la Proposición 3.1.15).

Por ser B una variedad, entonces existe una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha=1}^p$ asociada a la familia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha=1}^p$. Usando la Proposición 3.1.20, se definen las siguientes secciones sobre ξ:

$$\tau_{\alpha,i} = f_\alpha \cdot \sigma_{\alpha,i}, \qquad \alpha = 1, \ldots, p; \quad i = 1, \ldots, r.$$

Se probará que el conjunto finito $\{\tau_{\alpha,i}\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Sec}(\xi)$.

Como $\mathrm{sop}(f_\alpha)$ es un cerrado contenido en U_α, por la Proposición 1.4.33, existen funciones diferenciables h_α verificando:

1. $\mathrm{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$ y
2. $h_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in \mathrm{sop}(f_\alpha)$.

En consecuencia, se tiene que $h_\alpha f_\alpha$ coincide con f_α.

Sea ahora ω una sección de ξ y sea ω_α la restricción de ω a U_α. Como $\mathrm{Sec}(\xi_{U_\alpha})$ está generado por $\{\sigma_{\alpha,i}\}_{i=1}^r$, entonces existe una familia de funciones $\{g_{\alpha,i}\}_{i=1}^r$ en $\mathcal{F}(U_\alpha)$ tales que:

$$\omega_\alpha = \sum_{i=1}^{r} g_{\alpha,i} \cdot \sigma_{\alpha,i}. \tag{3.2}$$

Por otro lado, como $\{f_\alpha\}$ es una partición de la unidad asociada a $\{U_\alpha\}$, se tiene que:

$$\omega = \sum_\alpha f_\alpha \cdot \omega_\alpha = \sum_\alpha h_\alpha f_\alpha \cdot \omega_\alpha, \tag{3.3}$$

de la que, junto con (3.2), se deduce:

$$\omega = \sum_{\alpha,i} h_\alpha f_\alpha \cdot (g_{\alpha,i}\sigma_{\alpha,i}).$$

Como h_α se anula fuera de U_α, se puede afirmar que $h_\alpha g_{\alpha,i}$ es una función en $\mathcal{F}(B)$ considerando el producto de ambas en U_α y la aplicación nula en el resto de B. Por todo lo anterior se llega a:

$$\omega = \sum_{\alpha,i} p_{\alpha,i}\tau_{\alpha,i}.$$

□

Nota 3.2.11. *En la Sección 2.23 de* **[21]** *se demuestra además que* $\mathrm{Sec}(\xi)$ *es un* $\mathcal{F}(B)$*-módulo proyectivo.*

Nota 3.2.12. *En* **[54]**, *R.G. Swan demostró que todo módulo finitamente generado y proyectivo es el módulo de las secciones de un fibrado vectorial. Este resultado se conoce con el nombre de* **Teorema de Swan**.

3.3 Secciones de pullbacks de fibrados vectoriales

El objetivo de esta sección es describir el módulo de las secciones globales de un pullback de un fibrado vectorial dado en función de las secciones de dicho fibrado. Como referencia básica se seguirá **[21]**.

Sean pues $\widehat{\xi} = (\hat{M}, \hat{p}, \hat{B})$ y $\xi = (M, p, B)$ dos fibrados vectoriales y un morfismo de fibrados vectoriales definido por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \hat{M} & \xrightarrow{\phi} & M \\ {\scriptstyle \hat{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \hat{B} & \xrightarrow{\phi_0} & B \end{array}$$

tal que las restricciones de ϕ a las fibras son isomorfismos lineales. Según la Proposición 2.3.6, $\widehat{\xi}$ es el pullback $\phi_0^*\xi$ de ξ sobre ϕ_0, por lo que estudiar las secciones del pullback de ξ sobre ϕ_0 equivale a estudiar las secciones de $\widehat{\xi}$. Esto es lo que se hará en la presente sección.

En primer lugar, el conjunto $\mathcal{F}(\hat{B})$ de las funciones diferenciables sobre $\hat{B}$ es un $\mathcal{F}(B)$-módulo considerando el siguiente producto:

$$f \cdot g = (f \circ \phi_0) g, \qquad f \in \mathcal{F}(B), \quad g \in \mathcal{F}(\widehat{B}).$$

Por lo tanto, el producto tensorial $\mathcal{F}(\hat{B}) \otimes_{\mathcal{F}(B)} \mathrm{Sec}(\xi)$ respecto de $\mathcal{F}(B)$ es un $\mathcal{F}(\hat{B})$-módulo si se considera la multiplicación a la izquierda.

El último paso consiste en definir el morfismo de $\mathcal{F}(\hat{B})$-módulos dado por:

$$\Xi_{\phi_0} : \mathcal{F}(\hat{B}) \otimes_{\mathcal{F}(B)} \mathrm{Sec}(\xi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\widehat{\xi}) : g \otimes \sigma \mapsto g\phi_0^\sharp \sigma,$$

donde $\phi_0^\sharp$ se ha definido en la Proposición 3.2.7.

Lo anteriormente visto puede enunciarse por medio de la siguiente proposición, cuya prueba puede consultarse en **[21]**:

Proposición 3.3.1. *Ξ_{ϕ_0} es un isomorfismo de $\mathcal{F}(\hat{B})$-módulos.* □

Capítulo 4
Grupoides

En los próximos tres capítulos, se tratará la teoría de grupoides considerando a éstos como objetos matemáticos en sí mismos y no como una clase especial de categorías. No obstante, no se perderá este hecho de vista, ya que la definición de grupoide desde el punto de vista de las categorías permite usar, en diversas demostraciones, herramientas de las que se está en disposición. Para poner un ejemplo de lo que se está diciendo, piénsese en la caracterización de los funtores isomorfismos dada por la Proposición 1.3.19, que se podrá utilizar con los funtores entre grupoides, que es lo que son en realidad los morfismos de grupoides.

Pero recuérdese que, históricamente, los grupoides fueron introducidos en 1926 por Brandt **[5]**, mientras que las categorías aparecen por primera vez de la mano de Eilenberg y McLane en 1945 **[20]**; esto es, una diferencia de dos décadas entre uno y otro concepto. Por tanto, no debe extrañar el que se pueda llegar a pensar en los grupoides sin pensar en las categorías, aunque como ya se ha dicho es aconsejable no obviar esta propiedad de los grupoides.

La causa por la que se da una definición de grupoide distinta a la que aparece en Teoría de Categorías (pero equivalente como se verá en este capítulo) reside en que esta última no sirve para poder definir los grupoides topológicos y diferenciables (estas clases de grupoides se tratarán en los Capítulos 5 y 6). Esto se debe a que, para definir los conceptos de grupoides topológicos y diferenciables no va a bastar con dotar al grupoide y a la base de las correspondientes estructuras topológicas y diferenciables, como se verá en las definiciones de dichos conceptos en sus respectivos capítulos.

En este capítulo se introducirán las nociones y propiedades básicas de los grupoides, proporcionando ejemplos que clarifiquen las definiciones, siempre que para ello no hagan falta resultados de considerable especialización.

De hecho, se estudiarán en primer lugar las nociones de grupoide y de morfismo entre éstos, demostrándose diversas propiedades de estos entes matemáticos. Se expondrán las analogías y diferencias existentes con teoría de grupos. Por ejemplo, se sabe que la inyectividad de un morfismo de grupos equivale a tener núcleo nulo; en los grupoides, esto no se cumple, salvo que uno se restrinja a una cierta clase de morfismos: los base-biyectivos.

También se estudiará el concepto de grupoide cociente que viene a ser el análogo del de grupo cociente. Ello permitirá la factorización de un morfismo de grupoides por medio del grupoide cociente y se volverá a ver las diferencias existentes entre la Teoría de Grupos y la de Grupoides. De nuevo habrá que volver a considerar morfismos base-biyectivos para tener analogías entre ambas teorías.

4.1 Grupoides

En esta sección se introduce el concepto de grupoide sin considerarlo una categoría, viéndose posteriormente que ambas definiciones coinciden, tanto la dada en la Definición 4.1.1 como la que aparece en la Definición 1.3.12. Tras demostrar algunas propiedades de estos objetos, se mostrarán diversos ejemplos de grupoides, la mayoría de ellos relevantes desde un punto de vista teórico y/o histórico.

Definición 4.1.1. *Se denomina* **grupoide** *a una estructura algebraica constituida por dos conjuntos Ω y B, denominados respectivamente* **grupoide** *y* **base**, *dos aplicaciones $\alpha, \beta : \Omega \longrightarrow B$, denominadas respectivamente* **proyección origen** *y* **proyección destino**, *una aplicación $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega : x \mapsto \widetilde{x}$, denominada* **inclusión de objetos**, *una* **multiplicación parcial** $(\eta, \tau) \mapsto \eta\tau \in \Omega$, *definida en el conjunto producto:*

$$\Omega * \Omega = \{(\eta, \tau) \mid \alpha(\eta) = \beta(\tau)\},$$

y una aplicación $\iota : \Omega \longrightarrow \Omega : \eta \mapsto \eta^{-1}$, denominada **inversión**, *de forma que se verifiquen las siguientes condiciones:*

1. $\alpha(\eta\tau) = \alpha(\tau)$ *y* $\beta(\eta\tau) = \beta(\eta)$, *para todos* $(\eta, \tau) \in \Omega * \Omega$.

2. $\xi(\eta\tau) = (\xi\eta)\tau$, *para todos* $\xi, \eta, \tau \in \Omega$ *tales que* $\alpha(\xi) = \beta(\eta)$ *y* $\alpha(\eta) = \beta(\tau)$.

3. $\alpha(\widetilde{x}) = \beta(\widetilde{x}) = x$ *para todo* $x \in B$.

4. $\tau\widetilde{\alpha(\tau)} = \tau$ *y* $\widetilde{\beta(\tau)}\tau = \tau$, *para todo* $\tau \in \Omega$.

5. *Todo* $\tau \in \Omega$ *admite un inverso (a ambos lados)* τ^{-1} *en* Ω, *tal que:*

$$\alpha(\tau^{-1}) = \beta(\tau) \qquad y \qquad \beta(\tau^{-1}) = \alpha(\tau);$$

$$\tau^{-1}\tau = \widetilde{\alpha(\tau)} \qquad y \qquad \tau\tau^{-1} = \widetilde{\beta(\tau)}.$$

A los elementos de B se les denomina **objetos** *del grupoide Ω y a los de Ω,* **flechas** *o* **morfismos**. *El morfismo $\widetilde{x}$ correspondiente al objeto $x \in B$ es el morfismo* **unidad** *o* **identidad** *correspondiente a x (como se deduce de 4).*

Nota 4.1.2. *La multiplicación que aparece en la Definición 4.1.1 tiene una diferencia fundamental con la multiplicación que aparece en la definición de grupo: es una multiplicación parcial. En un* *grupo, el producto de cualesquiera dos elementos está definido; en cambio, en un grupoide, dos objetos pueden no tener un producto definido. Puede observarse el funcionamiento de la multiplicación parcial en la Figura 4.1.*

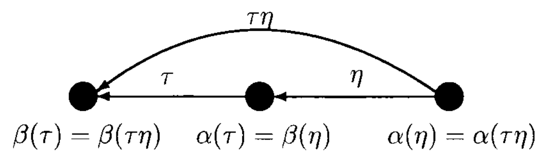

Figura 4.1: Multiplicación parcial en un grupoide.

Nota 4.1.3. *La definición de grupoide dada en la Definición 4.1.1 y la dada en la Definición 1.3.12 son equivalentes.*

En efecto, dado un grupoide, en el sentido de la Definición 4.1.1, se puede considerar el grupoide, en el sentido de la Definición 1.3.12, cuyo conjunto de objetos es la base del grupoide dado y cuyos morfismos son los elementos del propio grupoide. Obsérvese que cada elemento del grupoide de partida posee una proyección origen y una proyección destino que son los conceptos correspondientes a los de dominio y rango en el sentido de la Definición 1.3.12; la multiplicación parcial es el concepto correspondiente a la composición y cumple las propiedades de asociatividad y de existencia del elemento neutro de la composición; y la inversión permite la existencia de un morfismo inverso para cada morfismo.

Recíprocamente, un grupoide en el sentido de la Definición 1.3.12, se puede ver como un grupoide en el sentido de la Definición 4.1.1 sin más que considerar como base al conjunto de objetos del grupoide y como grupoide al conjunto de todos los morfismos del grupoide (véase la Nota 1.3.5). Como proyecciones origen y destino se consideran las aplicaciones que a cada morfismo le *asocia el dominio y el rango, respectivamente; la multiplicación se corresponde con la composición y la inversión se define en virtud de que todo morfismo de un grupoide en el sentido de la Definición 1.3.12 posee un único morfismo inverso.*

Una vez definidos los grupoides y establecida la equivalencia entre las dos definiciones manejadas en esta monografía, se determinan sendas condiciones suficientes para que un objeto del grupoide sea una identidad o un inverso de otro objeto dado, respectivamente. Obsérvese que dichas condiciones son las que existen para ver que un elemento de un grupo es una unidad o el inverso de otro elemento.

Proposición 4.1.4. *Sea Ω un grupoide sobre B y considérese $\tau \in \Omega$ tal que $\alpha(\tau) = x$ y $\beta(\tau) = y$. Entonces, se verifican:*

1. *Si $\eta \in \Omega$ verifica que $\alpha(\eta) = y$ y $\eta\tau = \tau$, entonces $\eta = \widetilde{y}$;*
   Si $\eta \in \Omega$ verifica $\beta(\eta) = x$ y $\tau\eta = \tau$, entonces $\eta = \widetilde{x}$.
2. *Si $\eta \in \Omega$ verifica $\alpha(\eta) = y$ y $\eta\tau = \widetilde{x}$, entonces $\eta = \tau^{-1}$;*
   Si $\eta \in \Omega$ verifica $\beta(\eta) = x$ y $\tau\eta = \widetilde{y}$, entonces $\eta = \tau^{-1}$.

Demostración. Se demostrarán sólo las primeras partes de cada apartado, pues las pruebas de las segundas son análogas. Se comenzará con la demostración del primer apartado. Como $\alpha(\eta) = \beta(\tau) = y$, se tiene que $\widetilde{\alpha(\eta)} = \widetilde{\beta(\tau)} = \widetilde{y}$. Y ya que además $\eta\tau = \tau$, entonces:

$$\widetilde{y} = \widetilde{\beta(\tau)} = \tau\tau^{-1} = (\eta\tau)\tau^{-1} = \eta(\tau\tau^{-1}) = \eta\widetilde{y} = \eta.$$

Con respecto al punto *2* de la proposición, se tiene que $\alpha(\eta) = y = \beta(\tau)$ y que $\beta(\tau^{-1}) = x$. Por lo que se verifica:

$$\eta = \eta\widetilde{\alpha(\eta)} = \eta\widetilde{\beta(\tau)} = \eta(\tau\tau^{-1}) = (\eta\tau)\tau^{-1} = \widetilde{x}\tau^{-1} = \widetilde{\beta(\tau^{-1})}\tau^{-1} = \tau^{-1}$$

ya que $\eta\tau = \widetilde{x}$. □

La siguiente proposición permite conocer cuál es el inverso de un producto de dos objetos cuando dicho producto está definido. De nuevo, se podrá observar la similitud de esta propiedad con la existente para grupos.

Proposición 4.1.5. *Si $\eta, \tau \in \Omega$ verifican que $\alpha(\tau) = \beta(\eta)$, entonces:*

$$(\tau\eta)^{-1} = \eta^{-1}\tau^{-1}.$$

Demostración. Usando el segundo apartado de la Proposición 4.1.4, se tiene que, al cumplirse $(\eta^{-1}\tau^{-1})(\tau\eta) = \widetilde{\alpha(\eta)}$, el enunciado de la proposición es cierto. □

Seguidamente se definirán algunos subconjuntos del grupoide a partir de las contraimágenes, tanto por su proyección origen como por su proyección destino.

Definición 4.1.6. *Sea Ω un grupoide sobre B y sean $x, y \in B$.*

1. *$\Omega_x = \alpha^{-1}(x)$ se denominará* **α-fibra** *sobre x.*
2. *$\Omega^y = \beta^{-1}(y)$ se denominará* **β-fibra** *sobre y.*
3. *$\Omega_x \cap \Omega^y$ se denotará por Ω_x^y. Un elemento $\tau \in \Omega_x^y$ se puede denotar como $\tau : x \mapsto y$.*
4. *Ω_x^x se denominará* **grupo-vértice** *en x.*
5. *Para $U, V \subset B$ se definen $\Omega_U = \alpha^{-1}(U)$, $\Omega^V = \beta^{-1}(V)$, $\Omega_U^V = \Omega_U \cap \Omega^V$.*

Nota 4.1.7. *Obsérvese que los conjuntos Ω_x^y, con $x, y \in B$, de la Definición 4.1.6 coinciden con los conjuntos de morfismos definidos en la Definición 1.3.1 en virtud de la Nota 4.1.3.*

Además, cada uno de los conjuntos Ω_x^x con $x \in B$ es un grupo respecto al producto obtenido al restringir la multiplicación parcial del grupoide Ω a Ω_x^x.

Se concluye esta sección dando algunos ejemplos relevantes de grupoides.

Ejemplo 4.1.8 (Grupoide Base). *Todo conjunto se puede considerar como un grupoide en el que todos sus elementos son unidades. Efectivamente, el propio conjunto B se puede considerar como un grupoide, denominado* **grupoide base**, *considerando $\alpha = \beta = id_B$ y cada elemento una unidad.*

Ejemplo 4.1.9 (Grupoide trivial sobre B con grupo G). *Sea B un conjunto y G un grupo. Se denomina* **grupoide trivial sobre B con grupo G** *al grupoide $B \times G \times B$ con la estructura dada por las aplicaciones $\alpha = \pi_3$, $\beta = \pi_1$, $\varepsilon : B \longrightarrow B \times G \times B : x \mapsto \widetilde{x} = (x, 1, x)$, la multiplicación $(x, h, y)(y, h', z) = (x, hh', z)$ y la inversión $\iota : (x, h, y) \mapsto (y, h^{-1}, x)$.*

En particular, todo grupo puede considerarse un grupoide sobre un conjunto unitario, el formado por su elemento unidad. Igualmente, el conjunto **producto cartesiano** *$B \times B$ es un grupoide sobre B sin más que considerar $B \times B = B \times 1 \times B$.*

Ejemplo 4.1.10 (Grupoide Relación de Equivalencia). *Consecuencia inmediata del Ejemplo 4.1.9 es que toda relación de equivalencia X sobre un conjunto B se puede considerar como un grupoide restringiendo la estructura del Ejemplo 4.1.9 a $X \subset B \times B$. Se identifica naturalmente X_x con la clase de x por la relación X, para todo $x \in B$.*

Ejemplo 4.1.11 (Grupoide Acción). *Toda acción de un grupo sobre un conjunto se puede considerar un grupoide sobre dicho conjunto. Efectivamente, sea $\gamma : G \times B \longrightarrow B$ la acción de un grupo G sobre un conjunto B. Se denomina* **grupoide acción** *de G sobre B al grupoide $G \times B$ con la estructura dada por $\alpha = \pi_2$, $\beta = \gamma$, $\varepsilon : B \longrightarrow G : x \mapsto \widetilde{x} = (1, x)$,* *la multiplicación* $(g_2, g_1x)(g_1, x) = (g_2g_1, x)$ *y la inversión* $\iota : G \times B \to G \times B : (g_1, x) \mapsto (g_1^{-1}, g_1x)$. *Se tienen entonces* $(G{\times}B)_x{=}G{\times}\{x\}$, $(G{\times}B)^y{\equiv}G$, $(G{\times}B)_x^x{=}\{g \in G \mid \gamma(g, x) = x\}$, *que resulta ser el grupo de isotropía de la acción* γ.

Ejemplo 4.1.12 (Grupoide frame). *Sean* M *y* B *dos conjuntos y* $p : M \to B$ *una aplicación sobreyectiva. Se denota* $\Pi(M)$ *al conjunto:*

$$\Pi(M) = \{\tau : M_x \longrightarrow M_y \text{ biyección } / x, y \in B\},$$

donde $M_x = p^{-1}(x)$, *para cada* $x \in B$. *Se tiene que* $\Pi(M)$ *posee la siguiente estructura de grupoide sobre* B*: dado* $\xi : M_x \to M_y$, *las proyecciones origen y destino son* $\alpha(\xi) = x$, $\beta(\xi) = y$, *respectivamente; la aplicación inclusión de objetos es* $\varepsilon(x) = id_x$, *para todo* $x \in B$*; la multipliciación parcial es la composición de aplicaciones; y el inverso de una biyección de* $\Pi(M)$ *es su inversa como aplicación. A* $\Pi(M)$ *con la estrucutura mencionada se le denomina* **grupoide frame**.

El siguiente ejemplo, el **grupoide fundamental**, es importante en Topología Algebraica y pueden verse diversas aplicaciones suyas en **[7]**.

Ejemplo 4.1.13 (Grupoide Fundamental). *Sea* B *un espacio topológico. Entonces el conjunto* $\pi(B)$ *de las clases* $< c >$ *de homotopía relativas a los extremos de los caminos* $c : [0, 1] \to B$ *es un grupoide considerando la siguiente estructura: las proyecciones origen y destino son* $\alpha(< c >) = c(0)$ *y* $\beta(< c >) = c(1)$, *respectivamente; la aplicación inclusión de objetos es* $\varepsilon(x) =< k_x >$, *donde* k_x *es el camino constante en* $x \in B$*; la multiplicación parcial es* $< c_2 > + < c_1 >=< c_2 + c_1 >$, *donde* $c_2 + c_1$ *es la composición* *o suma de c_1 seguido de c_2, a saber:*

$$(c_2 + c_1)(t) = \begin{cases} c_1(2t), & si \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ c_2(2t-1), & si \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

El inverso de $< c >$ es $< -c >$, donde $-c$ es le camino inverso de c, a saber, $(-c)(t) = c(1-t)$. Al conjunto $\pi(B)$ se lo denomina **grupoide fundamental** *de B. Se tiene que sus grupos-vértice son los* **grupos fundamentales** *$\pi_1(B, x)$ para cada $x \in B$, ya que los caminos del grupo-vértice de x son los lazos de x.*

4.2 Morfismos de grupoides

Al igual que cuando se han definido los grupos se definen los (homo)morfismos de grupos, parece natural preguntarse, una vez definido los grupoides, si existe un concepto de morfismo entre éstos.

En esta sección se muestran la definición y un conocimiento básico de los morfismos de grupoides, tratándose el caso en que el morfismo se obtenga al considerar que ambos grupoides posean la misma base y que el morfismo la conserve. Igualmente se introducirán los subgrupoides y, entre ellos, los que se obtienen restringiendo la estructura de grupoide a un abierto de la base.

La primera definición que se dará, será precisamente la de morfismo de grupoides que es la que se ofrece seguidamente.

Definición 4.2.1. *Sean Ω_1 y Ω_2 dos grupoides sobre B_1 y B_2, respectivamente. Se denomina* **morfismo de grupoides** *a todo par de aplicaciones $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ y $\phi_0 : B_1 \longrightarrow B_2$ tales que $\alpha_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \alpha_1$, $\beta_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \beta_1$ y $\phi(\eta\tau) = \phi(\eta)\phi(\tau)$, para todo $(\eta, \tau) \in \Omega_1 * \Omega_1$; esto es, que los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_1 & \xrightarrow{\phi} & \Omega_2 \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\phi_0} & B_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Omega_1 & \xrightarrow{\phi} & \Omega_2 \\ {\scriptstyle \beta_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} \\ B_1 & \xrightarrow{\phi_0} & B_2 \end{array}$$

En el caso particular en que $B_1 = B_2$ y $\phi_0 = id_{B_1}$, se dice que el morfismo **conserva la base** *o que es un* **morfismo sobre** B_1 *o que es un* B_1**-morfismo**.

Las siguientes notas clarifican algunos aspectos de la definición anterior.

Nota 4.2.2. *Las condiciones $\alpha_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \alpha_1$ y $\beta_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \beta_1$ aseguran que $\phi(\eta)\phi(\tau)$ está bien definida siempre que $\eta\tau$ esté definido.*

Nota 4.2.3. *El concepto de morfismo de grupoides que se introdujo en el Ejemplo 1.3.17 es equivalente al introducido en la Definición 4.2.1.*

Nota 4.2.4. *Una primera diferencia entre los morfismos de grupoides y los morfismos de grupos es que los morfismos de grupoides son pares de aplicaciones y los morfimos de grupos son aplicaciones. Pero esta diferencia cabía esperarla ya que recuérdese que los grupoides son pares de conjuntos, el grupoide y la base.*

Pues bien, siguiendo la notación de la Definición 4.2.1, la aplicación ϕ del morfismo de grupoide que actúa sobre los grupoides posee la siguiente analogía con un morfismo de grupos: se conserva el producto de los objetos, esto es, $\phi(\eta\tau) = \phi(\eta)\phi(\tau)$, para todo $(\eta, \tau) \in \Omega_1 * \Omega_1$.

Notación 4.2.5. *En las condiciones de la Definición 4.2.1, el morfismo de grupoides puede denotarse por* $(\phi, \phi_0) : (\Omega_1, B_1) \longrightarrow (\Omega_2, B_2)$. *Este morfismo se suele denominar* ϕ *sobre* ϕ_0.

Se demostrará a continuación que la composición de morfismos de grupoides es una operación cerrada.

Proposición 4.2.6. *La composición de dos morfismos de grupoides es un morfismo de grupoides. Si ambos morfismos conservan la base, la composición conserva la base.*

Demostración. Sean dos morfismos de grupoides $(\phi, \phi_0) : (\Omega_1, B_1) \longrightarrow (\Omega_2, B_2)$ y $(\psi, \psi_0) : (\Omega_2, B_2) \longrightarrow (\Omega_3, B_3)$. Entonces el par de aplicaciones:

$$(\psi \circ \phi, \psi_0 \circ \phi_0) : (\Omega_1, B_1) \longrightarrow (\Omega_3, B_3),$$

es un morfismo de grupoides, ya que se cumple:

$$\alpha_3 \circ \psi \circ \phi = \psi_0 \circ \alpha_2 \circ \phi = \psi_0 \circ \phi_0 \circ \alpha_1,$$
$$\beta_3 \circ \psi \circ \phi = \psi_0 \circ \beta_2 \circ \phi = \psi_0 \circ \phi_0 \circ \beta_1,$$

donde α_k y β_k son, respectivamente, las proyecciones origen y destino de Ω_k, para $k = 1, 2, 3$. □

Consecuencia de esta última proposición es el siguiente corolario en el que se introducen las categorías de los grupoides y de los grupoides sobre una base dada.

Corolario 4.2.7. *Existe la* **categoría** $\mathcal{G}rd$ **de los grupoides,** *que resulta de tomar como objetos a los grupoides, como morfismos a los morfismos de grupoides y como composición a la composición de morfismos de grupoides.*

Igualmente, dada un variedad B, existe la subcategoría llena $\mathcal{G}rd_B$ de $\mathcal{G}rd$ consistente en tomar como objetos a los grupoides con base B. Se la denominará **categoría de los grupoides sobre** B. □

La manera en que un morfismo actúa sobre una unidad y sobre un objeto inverso de un grupoide viene dado por la siguiente:

Proposición 4.2.8. *Sea $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$, $\phi_0 : B_1 \to B_2$ un morfismo de grupoides. Se verifican:*

1. $\phi(\widetilde{x}) = \widetilde{\phi_0(x)}$, *para todo* $x \in B_1$.
2. $\phi(\tau^{-1}) = \phi(\tau)^{-1}$, *para todo* $\tau \in \Omega_1$.

Demostración. Se comenzará demostrando el primer apartado de la proposición. Se tiene que $\phi(\widetilde{x})\phi(\eta) = \phi(\eta)$ con $\eta \in \Omega_1$ tal que $\alpha_1(\eta) = x$, ya que se cumple que $\phi(\widetilde{x})\phi(\eta) = \phi(\widetilde{x}\eta)$ (por ser ϕ un morfismo de grupoides). La Proposición 4.1.4 permite afirmar que $\phi(\widetilde{x}) = \widetilde{\alpha_2(\phi(\eta))}$. Pero $\phi_0(x) = \phi_0(\alpha_1(\eta)) = \alpha_2(\phi(\eta))$, con lo que se tiene lo que se quiere.

Con respecto al segundo apartado de la proposición, en primer lugar se tiene que $\phi(\tau)\phi(\tau^{-1}) = \phi(\tau\tau^{-1}) = \phi(\widetilde{\beta_1(\tau)})$. Como por el primer apartado de la proposición, se tiene que $\phi(\widetilde{\beta_1(\tau)}) = \widetilde{\phi_0(\beta_1(\tau))}$, entonces se verifica $\phi(\tau)\phi(\tau^{-1}) = \widetilde{\phi_0(\beta_1(\tau))}$ y, usando la Proposición 4.1.4, se concluye la prueba. □

Nota 4.2.9. *Las dos propiedades demostradas en la Proposición 4.2.8 equivalen a que los diagramas:*

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "\phi"] & \Omega_2 \\
B_1 \arrow[u, leftarrow, "\varepsilon_1"'] \arrow[r, "\phi_0"] & B_2 \arrow[u, leftarrow, "\varepsilon_2"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Omega_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota_1"'] & \Omega_2 \arrow[d, "\iota_2"] \\
B_1 \arrow[r, "\phi_0"] & B_2
\end{tikzcd}
$$

sean conmutativos, donde ε_1 y ε_2 son las inclusiones de objetos y ι_1 y ι_2 son las inversiones de los grupoide Ω_1 y Ω_2, respectivamente.

Dado un morfismo de grupoides, pueden considerarse las siguientes restricciones a las α-fibras, β-fibras y grupos-vértices.

Nota 4.2.10. *Para cada $x, y \in B_1$, pueden considerarse las restricciones de ϕ que siguen a continuación:*

$$\phi_x : \Omega_{1x} \longrightarrow \Omega_{2\phi_0(x)}, \quad \phi^y : \Omega_1{}^y \longrightarrow \Omega_2{}^{\phi_0(y)} \quad y \quad \phi_x^y : \Omega_{1x}^{\ y} \longrightarrow \Omega_{2\,\phi_0(x)}^{\ \phi_0(y)}.$$

A continuación, como ejemplo de morfismo de grupoides, se tratarán los morfismos entre grupoides triviales, viéndose la forma que éstos poseen.

Ejemplo 4.2.11. *Un morfismo de grupoides triviales (véase el Ejemplo 4.1.9 para la definición de grupoide trivial) $\phi : B \times G \times B \longrightarrow B_1 \times G_1 \times B_1$, con la aplicación $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$ sobre las bases, puede expresarse como:*

$$\phi(y, g, x) = (\phi_0(y), \theta(y)f(g)\theta(x)^{-1}, \phi_0(x)),$$

para un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow G_1$ y una aplicación $\theta : B \longrightarrow G_1$. En efecto, si ϕ es un morfismo de grupoides triviales, entonces $\alpha \circ \phi(y, g, x) = \phi_0(x)$ y $\beta \circ \phi(y, g, x) = \phi_0(y)$ y además $\phi(y, g, x) = (\phi_0(y), \bar{g}, \phi_0(x))$.

De este modo, fijando $b \in B$, se define $f : G \longrightarrow G_1$ por $f(g) = \bar{g}$ con $\phi(x, g, x) = (\phi_0(x), \bar{g}, \phi_0(x))$. Igualmente se define la aplicación $\theta : B \longrightarrow G_1$ por $\theta(x) = x'$ con $\phi(x, 1, b) = (\phi_0(x), x', \phi_0(b))$. Obsérvese que, en concreto, se pide que $\theta(b) = 1_{G_1}$. Hay que demostrar que f es un morfismo de grupos; y esto se cumple debido a que, al ser ϕ morfismo de grupoides, se cumple $\phi(x, 1_G, x) = (\phi_0(x), 1_{G_1}, \phi_0(x))$ y $\phi(x, g_1, x)\phi(x, g_2, x) = \phi(x, g_1g_2, x)$ para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$.

Por otro lado, si se define una aplicación $\phi : B\times G\times B \longrightarrow B_1\times G_1\times B_1$, tal como se hizo al principio de este ejemplo, en función de una aplicación $\theta : B \longrightarrow G_1$ y un morfismo de grupos $f : G \longrightarrow G_1$, entonces ϕ es un morfismo de grupoides. En efecto, se tienen:

1. Se cumple la propiedad correspondiente a la multiplicación:

$$\begin{aligned}
&\phi((x,g_1,y)(y,g_2,z)) = \phi(x,g_1g_2,z)\\
&\quad = (\phi_0(x),\theta(x)f(g_1g_2)\theta(y)^{-1},\phi_0(y))\\
&\quad = (\phi_0(x),\theta(x)f(g_1)f(g_2)\theta(z)^{-1},\phi_0(z))\\
&\quad = (\phi_0(x),\theta(x)f(g_1)\theta(y)^{-1}\theta(y)f(g_2)\theta(z)^{-1},\phi_0(z))\\
&\quad =(\phi_0(x),\theta(x)f(g_1)\theta(y)^{-1},\phi_0(y))(\phi_0(y),\theta(y)f(g_2)\theta(z)^{-1},\phi_0(z))\\
&\quad = \phi(x,g_1,y)\phi(y,g_2,z).
\end{aligned}$$

2. Se cumple que $\alpha'\circ\phi = \phi_0\circ\alpha$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\alpha'\circ\phi(x,g,y) &= \alpha'(\phi_0(x),\theta(x)f(g)\theta(y)^{-1},\phi_0(y))\\
&= \phi_0(y) = \phi_0\circ\alpha(x,g,y).
\end{aligned}$$

3. Se cumple que $\beta_1\circ\phi = \phi_0\circ\beta$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\beta'\circ\phi(x,g,y) &= \beta'(\phi_0(x),\theta(x)f(g)\theta(y)^{-1},\phi_0(y))\\
&= \phi_0(x) = \phi_0\circ\beta(x,g,y).
\end{aligned}$$

La aplicación θ y el morfismo de grupos f no son únicas. De hecho, para cada $b\in B$ pueden definirse aplicaciones θ y f tal que $\theta(b) = 1_{G_1}$ por medio de:

$$\phi(x,1_G,b) = (\phi_0(x),\theta(x),\phi_0(b)) \quad y \quad \phi(b,g,b) = (\phi_0(b),f(g),\phi_0(b)).$$

Seguidamente se introducen los conceptos de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad tanto sobre las bases como sobre las fibras.

Definición 4.2.12. *El morfismo de grupoides* $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *sobre* $\phi_0 : B_1 \longrightarrow B_2$ *se dice* **sobreyectivo a trozos** *(respectivamente* **inyectivo a trozos, biyectivo a trozos***) si* $\phi_x^y : {\Omega_1}_x^y \longrightarrow {\Omega_2}_{\phi_0(x)}^{\phi_0(y)}$ *es sobreyectivo (resp. inyectivo, biyectivo), para todos* $x, y \in B_1$.

Se dice que el morfismo ϕ *es* **base-sobreyectivo** *(respectivamente* **base-inyectivo, base-biyectivo***) si* $\phi_0 : B_1 \longrightarrow B_2$ *es sobreyectivo (resp. inyectivo, biyectivo).*

El morfismo ϕ *se dice* **isomorfismo** *si* $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *es biyectiva.*

Entre los conceptos introducidos en la Definición 4.2.12 y los habituales de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad de la aplicación inducida por un morfismo sobre los grupoides, existen las siguientes relaciones:

Proposición 4.2.13. *Se verifican:*

1. *Todo morfismo sobreyectivo (resp. inyectivo) es base-sobreyectivo (resp. base-inyectivo).*

2. *Un morfismo es inyectivo si y sólo si es inyectivo a trozos y base-inyectivo.*

3. *Todo morfismo sobreyectivo y base-sobreyectivo es un morfismo sobreyectivo a trozos.*

4. *Todo morfismo de grupoides biyectivo es base biyectivo.*

Demostración.

1. Se debe a que los elementos de las bases se pueden ver como elementos de cada grupoide por medio de la aplicación inclusión de objetos correspondiente.

2. Si el morfismo $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ (sobre $\phi_0 : B_1 \longrightarrow B_2$) es inyectivo, entonces también es inyectivo el morfismo ϕ_x^y para cada $x, y \in B_1$, ya que es una restricción de ϕ.

   Para el recíproco, supónganse $\xi, \eta \in \Omega_1$ tales que verifiquen $\phi(\xi) = \phi(\eta)$. Entonces se tiene que $\alpha_2(\phi(\xi)) = \alpha_2(\phi(\eta))$ y $\beta_2(\phi(\xi)) = \beta_2(\phi(\eta))$. Pero, al ser ϕ un morfismo, se verifica que $\alpha_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \alpha_1$ y $\beta_2 \circ \phi = \phi_0 \circ \beta_1$ y, por lo tanto, se cumple $\phi_0 \circ \alpha_1(\xi) = \phi_0 \circ \alpha_1(\eta)$ y $\phi_0 \circ \beta_1(\xi) = \phi_0 \circ \beta_1(\eta)$. Al ser ϕ_0 inyectiva, se tiene que $\xi, \eta \in {\Omega_1}_x^y$ con $x = \alpha_1(\eta) = \alpha_1(\xi)$ e $y = \beta_1(\eta) = \beta_1(\xi)$. Ahora por la inyectividad de ϕ_x^y, se concluye que $\eta = \xi$.

3. Si $\eta \in \Omega_2$, al ser ϕ_0 sobreyectiva, existen $x, y \in B_1$ tales que $\phi_0(x) = \alpha_2(\eta)$ y $\phi_0(y) = \beta_2(\eta)$. Por otro lado, $\phi_x^y : {\Omega_1}_x^y \longrightarrow {\Omega_2}_{\phi_0(x)}^{\phi_0(y)}$ es sobreyectivo, por lo que existe $\xi \in \Omega_1$ tal que $\phi(\xi) = \eta$.

4. Es consecuencia directa de *1* y *2*. □

En este punto, se definirá el concepto de subgrupoide, surgido al considerar un grupoide dentro de otro. También se definen dos clases de subgrupoides: los llenos y los anchos.

Definición 4.2.14. *Sea Ω un grupoide sobre B. Se denomina* **subgrupoide** *de Ω sobre B a un par de subespacios $\Omega_1 \subset \Omega$, $B_1 \subset B$, tales que $\alpha(\Omega_1) \subset B_1$, $\beta(\Omega_1) \subset B_1$, $\widetilde{x} \in \Omega_1$, para todo $x \in B_1$ y Ω_1 es cerrado para la multiplicación parcial y la inversión en Ω.*

Un subgrupoide se dice **ancho** *si $B_1 = B$ y se dice* **lleno** *si ${\Omega_1}_x^y = \Omega_x^y$.*

Teniéndose en cuenta la Definición 4.2.14 y el hecho de que los grupoides son categorías, un subgrupoide es una subcategoría de un grupoide que es a su vez un grupoide.

Se ofrece ahora el ejemplo de subgrupoide que surge cuando se considera la restricción de la estructura del grupoide de partida al tomar como base un abierto de la base del mismo.

Ejemplo 4.2.15. *Sea Ω un grupoide sobre B y sea U un subconjunto de B. Entonces Ω_U^U es un subgrupoide de Ω cuya base es U. El hecho se tiene sin más que restringir las aplicaciones de la estructura de grupoide de Ω al subconjunto Ω_U^U.*

Otras dos clases de subgrupoides son los que aparecen en la siguiente:

Definición 4.2.16. *Se definen:*

1. **Subgrupoide base** *o* **subgrupoide identidad** *de Ω:* $\widetilde{B} = \{\widetilde{x} \mid x \in B\}$.

2. **Subgrupoide interno** *de* $\Omega : G\Omega = \bigcup_{x \in B} \Omega_x^x$.

Nota 4.2.17. *Se tiene directamente por la definición que tanto $\widetilde{B}$ como $G\Omega$ son subgrupoides de Ω.*

El siguiente punto a tratar será el de intentar hallar una factorización lo más parecida posible a la que se tiene en Teoría de Grupos y que se indica en la siguiente:

Nota 4.2.18. *Es conocido que todo morfismo de grupos $F : G \longrightarrow G'$ puede factorizarse en la proyección del grupo dominio en un cociente por el núcleo del morfismo seguido de un isomorfismo más una inclusión, como puede verse en el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{F} & G' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \frac{G}{\mathrm{Ker}F} & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathrm{Im}F \end{array} \tag{4.1}$$

Sin embargo, para grupoides esta situación se complica, dado que:

1. *La imagen de un morfismo de grupoides no tiene por qué ser subgrupoide. Así, puede estar definido $\phi(\eta)\phi(\tau)$ pero no estarlo $\eta\tau$ y, además, no poder encontrarse otro par de elementos η_1, τ_1 con $\phi(\eta_1) = \phi(\eta)$ y $\phi(\tau_1) = \phi(\tau)$ y tal que $\eta_1\tau_1$ esté definido. Esto ocurre hasta con los grupoides triviales: por ejemplo, $B = (0, +\infty)$, $G' = \mathbb{R}^+$ y el morfismo $B \times B \longrightarrow G' : (x, y) \mapsto yx^{-1}$.*

2. *El concepto de núcleo de un morfismo de grupoides no mide bien la inyectividad en el sentido de que, a diferencia de lo que ocurre en grupos, en grupoides el hecho de que el núcleo sea nulo no implica la inyectividad del morfismo. El siguiente objetivo será determinar dónde radica el problema y cuáles serían las factorizaciones posibles, que es lo que se concluirá en las Proposiciones 4.3.13, 4.3.14 y 4.3.16.*

Será de interés, para llegar a la factorización que se está buscando, conocer alguna condición que asegure que la imagen de un morfismo de grupoide es subgrupoide del grupoide que aparece en el codominio del morfismo.

Proposición 4.2.19. *La imagen de un morfismo $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ base-inyectivo es un subgrupoide del grupoide Ω'.*

Demostración. Como $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ es un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$, se verifican los siguientes hechos:

1. $\phi(\Omega) \subset \Omega_1$ y $\phi_0(B) \subset B_1$.

2. $\alpha_1(\phi(\Omega)) = \phi_0(\alpha(\Omega)) \subset \phi_0(B)$.

3. $\beta_1(\phi(\Omega)) = \phi_0(\beta(\Omega)) \subset \phi_0(B)$.

4. Sean $\eta, \tau \in \Omega$ tales que $\alpha_1(\phi(\tau)) = \beta_1(\phi(\eta))$. Como $\alpha_1(\phi(\tau)) = \phi_0(\alpha(\tau))$ y $\beta_1(\phi(\eta)) = \phi_0(\beta(\eta))$, entonces $\phi_0(\alpha(\tau)) = \phi_0(\beta(\eta))$. Pero ϕ_0 es inyectiva, por lo que se tiene que $\alpha(\tau) = \beta(\eta)$ y $\tau\eta$ está definido en Ω. Luego $\phi(\tau\eta)$ pertenece a $\phi(\Omega)$ y es el producto $\phi(\tau)\phi(\eta)$, con lo que el producto es cerrado en $\phi(\Omega)$.

5. Dado $\eta \in \Omega$, el inverso en $\phi(\Omega)$ de $\phi(\eta)$ es $\phi(\eta^{-1})$. En efecto, como $\phi(\eta)\phi(\eta^{-1}) = \phi(\eta\eta^{-1}) = \phi(\widetilde{\beta(\eta)}) = \phi_0(\widetilde{\beta(\eta)})$, se concluye la prueba en virtud de la Proposición 4.1.4. □

Aún son necesarios algunos conceptos más para llegar a la factorización que se busca. A la obtención de tal factorización se dedica la siguiente sección.

4.3 Grupoide cociente

Como se comentó anteriormente en la Nota 4.2.18, los morfismos de grupos pueden factorizarse por un cociente del grupo que aparece en el dominio por el núcleo del morfismo. El objetivo de esta sección será el de ofrecer un concepto de grupoide cociente con el que realizar una factorización análoga a la citada para los grupos.

No obstante, esta factorización no va ser similar a la de grupos, ya que el núcleo del morfismo no va a medir de forma apropiada la inyectividad, como se comentó en la mencionada Nota 4.2.18 y se probará en esta sección.

De hecho, se verá que sólo se obtendrá una factorización análoga cuando se consideren morfismo base-biyectivos. Para factorizar un morfismo, en general, habrá que hacer uso de un morfismo especial que en este caso se tratará de un pullback.

Se comenzará con el concepto de subgrupoide normal, necesario para definir el grupoide cociente.

Definición 4.3.1. *Sea Ω un grupoide sobre B. Se denomina* **subgrupoide normal** *de Ω a todo subgrupoide ancho Φ de Ω tal que $\tau\lambda\tau^{-1} \in \Phi$, para todos $\lambda \in G\Phi$ y $\tau \in \Omega$, con $\alpha\tau = \alpha\lambda = \beta\lambda$.*

Nota 4.3.2. *Obsérvese que para cada $x \in B$, el grupo-vértice Φ_x^x es un subgrupo normal de Ω_x^x, según la definición anterior.*

Se introduce ahora la definición de núcleo de un morfismo de grupoides según:

Definición 4.3.3. *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B'$. Se denomina* **núcleo de ϕ** *al conjunto:*

$$\ker(\phi) = \{\tau \in \Omega \mid \phi(\tau) = \widetilde{x} \text{ para algún } x \in B'\}.$$

Nota 4.3.4. *De la definición de núcleo de ϕ se deduce que $\widetilde{B} \subset \ker(\phi)$, ya que $\phi(\widetilde{x}) = \widetilde{\phi_0(x)}$ para cada $x \in B$.*

Cabría preguntarse si el núcleo de un morfismo es subgrupoide del grupoide que aparece en el dominio. La respuesta a dicha pregunta es afirmativa y viene dada por la siguiente:

Proposición 4.3.5. *El núcleo $\ker(\phi)$ es subgrupoide normal del grupoide Ω sobre B.*

Demostración. Se va a considerar como base de $\ker(\phi)$ al propio conjunto B, lo cual puede hacerse en virtud de la Nota 4.3.4. Restringiendo la estructura de Ω a $\ker(\phi)$, se tiene que $\ker(\phi) \subset \Omega$, $\alpha(\ker(\phi)) \subset \alpha(\Omega) \subset B$ y $\beta(\ker(\phi)) \subset \alpha(\Omega) \subset B$. Además si $\xi, \eta \in \ker(\phi)$ son tales que $\alpha(\xi) = \beta(\eta)$, entonces se verifican los siguientes hechos:

$$\phi(\xi) = \widetilde{y_1}, \quad \phi(\eta) = \widetilde{y_2} \qquad \text{con } y_1, y_2 \in B'$$

$$\alpha'(\phi(\xi)) = \phi_0(\alpha(\xi)) = \phi_0(\beta(\eta)) = \beta'(\phi(\eta)).$$

Debido a esta última igualdad, se tiene que $\alpha'(\widetilde{y_1}) = \beta'(\widetilde{y_2})$ y, por tanto, $y_1 = y_2$. Luego están definidos tanto $\xi\eta$ como $\phi(\xi)\phi(\eta)$ $(= \widetilde{y_1})$, que al ser ϕ morfismo de grupoides coincide con $\phi(\xi\eta)$. Por lo tanto, $\xi\eta \in \ker(\phi)$.

Por otro lado, si $\xi \in \ker(\phi)$ entonces $\xi^{-1} \in \ker(\phi)$. En efecto, si $\phi(\xi) = \widetilde{y_1}$ con $y_1 \in B'$, entonces $\phi(\xi^{-1}) = \widetilde{y_1}$ por la Proposición 4.2.8. Todo lo hecho hasta este momento, prueba que $\ker\phi$ es un subgrupoide de Ω. Sólo queda demostrar que $\ker\phi$ es normal. Para ello, sea $\xi \in \Omega$ tal que $\alpha(\xi) = x$ y sea $\eta \in (\ker\phi)_x^x$, entonces:

$$\phi(\xi\eta\xi^{-1}) = \phi(\xi)\phi(\eta)\phi(\xi^{-1}).$$

Pero $\phi(\eta)$ es una unidad de Ω', por estar η en $\ker\phi$, y $\phi(\xi^{-1}) = \phi(\xi)^{-1}$; luego se llega a que $\phi(\xi\eta\xi^{-1}) = \phi(\xi)\phi(\xi)^{-1} = \widetilde{\beta(\xi)}$, con lo que se concluye la prueba. □

Con los conceptos y propiedades vistos hasta este momento, se está ya en condiciones de introducir el concepto de grupoide cociente, cuya estructura se expone en la siguiente:

Proposición 4.3.6. *Sea Φ un subgrupoide normal del grupoide Ω sobre B. Sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre B, dada por: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ \xi \in \Phi$ tal que $\alpha(\xi) = x, \beta(\xi) = y$. Se denotan las clases de equivalencia por $[x]$, para todo elemento $x \in B$ y por B/Φ al conjunto de estas clases.*

Se define una segunda relación de equivalencia, que se denotará también por $\sim$, sobre Ω de la siguiente manera:

$$\xi \sim \eta \Leftrightarrow \exists\ \zeta_1, \zeta_2 \in \Phi \text{ tal que } \zeta_1\eta\zeta_2 \text{ está definido y es igual a } \xi.$$

Las clases de equivalencia se denotan por $[\xi]$ para todo elemento $\xi \in \Omega$ y por Ω/Φ al conjunto de estas clases.

Entonces se tiene la siguiente estructura de grupoide Ω/Φ con base B/Φ:

i. Las proyecciones origen y destino son $\bar{\alpha}([\xi]) = [\alpha(\xi)]$ y $\bar{\beta}([\xi]) = [\beta(\xi)]$, respectivamente;

ii. La inclusión de objetos viene dada por $\bar{\varepsilon}([x]) = \widetilde{[x]} = [\widetilde{x}]$;

iii. La multiplicación parcial $[\eta][\xi]$, donde $\alpha(\eta) \sim \beta(\xi)$, se define por $[\eta\tau^{-1}\xi]$, donde τ es un elemento de Φ verificando $\alpha(\tau) = \alpha(\eta)$ y $\beta(\tau) = \beta(\xi)$;

iv. El inverso de $[\xi]$ en Ω/Φ es $[\xi^{-1}]$.

Demostración. La demostración se dividirá en cuatro partes:

1. La relación $\sim$ sobre B es de equivalencia. En efecto:

   (a) **Reflexiva:** Sea $x \in B$. Como $\widetilde{x}$ pertenece a Φ y $\alpha(\widetilde{x}) = x = \beta(\widetilde{x})$, entonces $x \sim x$.

   (b) **Simétrica:** Sea $x, y \in B$ con $x \sim y$. Entonces existe $\tau \in \Phi$ tal que $\alpha(\tau) = x$ y $\beta(\tau) = y$. Como τ^{-1} pertenece a Φ y se verifica que $\alpha(\tau^{-1}) = \beta(\tau) = y$ y $\beta(\tau^{-1}) = \alpha(\tau) = x$, se cumple $y \sim x$.

(c) **Transitiva:** Sean $x, y, z \in B$ tales que $x \sim y$ e $y \sim z$. Entonces existen $\eta, \xi \in \Phi$ tales que $\alpha(\eta) = x$, $\beta(\eta) = y = \alpha(\xi)$ y $\beta(\xi) = z$. Como $\xi\eta$ pertenece a Φ y verifica que $\alpha(\xi\eta) = x$ y $\beta(\xi\eta) = z$, entonces $x \sim z$.

2. La relación $\sim$ sobre Ω es de equivalencia. En efecto:

   (a) **Reflexiva:** Sea $\xi \in \Omega$ tal que $\alpha(\xi) = x$ y $\beta(\xi) = y$. Entonces $\xi = \widetilde{y}\xi\widetilde{x}$ y, por la Nota 4.3.4, $\xi \sim \xi$.

   (b) **Simétrica:** Sean $\xi, \eta \in \Omega$ tal que $\xi \sim \eta$. Entonces existen $\zeta_1, \zeta_2 \in \Phi$ tales que $\xi = \zeta_1\eta\zeta_2$. Por lo tanto, $\eta = {\zeta_1}^{-1}\xi{\zeta_2}^{-1}$ sabiendo que ${\zeta_1}^{-1}, {\zeta_2}^{-1}$ pertenecen a Φ. Luego se tiene que $\eta \sim \xi$.

   (c) **Transitiva:** Sean $\tau, \xi, \eta \in \Omega$ tales que $\tau \sim \xi$ y $\xi \sim \eta$. Luego existen $\zeta_1, \zeta_1', \zeta_2, \zeta_2' \in \Phi$ tales que $\tau = \zeta_1\xi\zeta_1'$ y $\xi = \zeta_2\eta\zeta_2'$. Por lo que se tiene $\tau = (\zeta_1\zeta_2)\eta(\zeta_2'\zeta_1')$ con $\zeta_1\zeta_2, \zeta_1'\zeta_2' \in \Phi$. Por lo tanto, se tiene que $\tau \sim \eta$.

3. Las proyecciones origen y destino, la inclusión de objetos, la multiplicación parcial y la inversión de Ω/Φ están bien definidas.

   (a) $\bar{\alpha}$ **está bien definido:** Si $[\xi] = [\xi']$, entonces existen $\zeta, \zeta' \in \Phi$ tal que $\xi = \zeta\xi'\zeta'$. Por tanto, se tiene $\alpha(\xi') = \beta(\zeta')$ y $\alpha(\xi) = \alpha(\zeta')$. De este modo, $[\alpha(\xi)] = [\alpha(\xi')]$ por medio de $\zeta' \in \Phi$.

   (b) $\bar{\beta}$ **está bien definido:** Si $[\xi] = [\xi']$, entonces existen $\zeta, \zeta' \in \Phi$ tales que $\xi = \zeta\xi'\zeta'$. Por tanto, se tiene $\beta(\xi') = \alpha(\zeta)$ y $\beta(\xi) = \beta(\zeta)$. De este modo, $[\beta(\xi)] = [\beta(\xi')]$ por medio de $\zeta \in B$.

(c) $\bar{\varepsilon}$ **está bien definido:** Sea $[x] = [y]$ con $x, y \in B$. Entonces existe $\eta \in \Phi$ tal que $\alpha(\eta) = x$ y $\beta(\eta) = y$. Por lo tanto, se tiene $\widetilde{x} = \eta^{-1}\widetilde{y}\eta$ y $[\widetilde{x}] = [\widetilde{y}]$.

(d) **La multiplicación parcial está bien definida:** Si $[\xi_1] = [\eta_1]$ y $[\xi_2] = [\eta_2]$ en Ω/Φ, entonces existen τ_1, τ_1', τ_2, $\tau_2' \in \Phi$ tales que:

$$\xi_1 = \tau_1\eta_1\tau_1' \quad \text{y} \quad \xi_2 = \tau_2\eta_2\tau_2'. \tag{4.2}$$

La condición que se exige para la existencia de la multiplicación $[\xi_2][\xi_1]$ es que $\alpha(\xi_2) \sim \beta(\xi_1)$ (es decir, que $\alpha(\tau_2') \sim \beta(\tau_1)$ por la definición de Ω/Φ). Esto implica que existe $\zeta \in \Phi$ tal que $\xi_2\zeta^{-1}\xi_1$ esté definido y sea igual a $\tau_2\eta_2(\tau_2'\zeta^{-1}\tau_1)\eta_1\tau_1'$. Luego utilizando (4.2), se llega a:

$$[\xi_2][\xi_1] = [\xi_2\zeta^{-1}\xi_1] = [\eta_2(\tau_2'\zeta^{-1}\tau_1)\eta_1]. \tag{4.3}$$

Pero $\tau_2'\zeta^{-1}\tau_1$ pertenece a Φ, con lo que (4.3) lleva a:

$$[\xi_2][\xi_1] = [\eta_2(\tau_2'\zeta^{-1}\tau_1)\eta_1] = [\eta_2][\eta_1].$$

Además, dados $[\xi_1], [\xi_2]$, el producto de estos no depende del elemento ζ en Φ para el que el producto $\xi_2\zeta^{-1}\xi_1$ esté definido. En efecto, si $\bar{\zeta}$ es un elemento de Φ tal que $\xi_2\bar{\zeta}^{-1}\xi_1$ esté definido, entonces se verifica que $\bar{\zeta}^{-1}\zeta$ está definido (porque sus proyecciones origen y destino coinciden) y pertenece a $G\Phi$. Además, al ser Φ normal con respecto a Ω, se tiene que $\xi_2\bar{\zeta}^{-1}\zeta\xi_2^{-1}$ está en Φ. Por lo tanto, se cumple:

$$\xi_2\bar{\zeta}^{-1}\xi_1 = (\xi_2\bar{\zeta}^{-1}\zeta\xi_2^{-1})(\xi_2\zeta^{-1}\xi_1),$$

con lo que puede afirmarse que $[\xi_2\bar{\zeta}^{-1}\xi_1] = [\xi_2\zeta^{-1}\xi_1]$.

(e) **La inmersión está bien definida:** Si $[\xi_1] = [\xi_2]$ en Ω, entonces existen $\tau_1, \tau_2 \in \Phi$ tales que $\xi_1 = \tau_1 \xi_2 \tau_2$. Por lo tanto, ${\tau_2}^{-1}$, ${\tau_1}^{-1}$ pertenecen a Φ y $[{\xi_1}^{-1}] = [{\xi_2}^{-1}]$.

4. Las aplicaciones tratadas en el apartado anterior verifican las condiciones de la Definición 4.1.1.

(a) La primera y tercera condición se verifican directamente de las definiciones de $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ y $\bar{\varepsilon}$.

(b) La segunda condición se cumple ya que si $[\eta_1]$, $[\eta_2]$, $[\eta_3]$ están en Ω/Φ y verifican $\bar{\beta}[\eta_1] = \bar{\alpha}[\eta_2]$, $\bar{\beta}[\eta_2] = \bar{\alpha}[\eta_3]$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}([\eta_3][\eta_2])[\eta_1] &= [\eta_3\zeta_1^{-1}\eta_2][\eta_1] = [\eta_3\zeta_1^{-1}\eta_2\zeta_2^{-1}\eta_1] \\ &= [\eta_3][\eta_2\zeta_2^{-1}\eta_1] = [\eta_3]([\eta_2][\eta_1]),\end{aligned}$$

para cualesquiera $\zeta_1, \zeta_2 \in \Phi$ tales que los productos estén definidos (la existencia de estos elementos de Φ se debe a la condición impuesta a las proyecciones de los elementos de Ω/Φ).

(c) La cuarta condición se cumple. En efecto, si $[\tau] \in \Omega/\Phi$ entonces se tiene:

$$[\tau]\widetilde{\bar{\alpha}[\tau]} = [\tau]\widetilde{[\alpha(\tau)]} = [\tau][\widetilde{\alpha(\tau)}] = [\tau\widetilde{\alpha(\tau)}] = [\tau];$$

$$\widetilde{\bar{\beta}[\tau]}[\tau] = \widetilde{[\beta(\tau)]}[\tau] = [\widetilde{\beta(\tau)}][\tau] = [\widetilde{\beta(\tau)}\tau] = [\tau];$$

ya que $\widetilde{\alpha(\tau)}$ y $\widetilde{\beta(\tau)}$ pertenecen a Φ.

(d) La quinta condición también se cumple, como se ve a continuación:

$$\bar{\alpha}([\tau]^{-1}) = \bar{\alpha}([\tau^{-1}]) = [\alpha(\tau^{-1})] = [\beta\tau] = \bar{\beta}[\tau];$$

$$\bar{\beta}([\tau]^{-1}) = \bar{\beta}[\tau^{-1}] = [\beta\tau^{-1}] = [\alpha\tau] = \bar{\alpha}[\tau];$$

$$[\tau]^{-1}[\tau] = [\tau^{-1}][\tau] = [\tau^{-1}\widetilde{\beta\tau}\tau] = [\widetilde{\alpha\tau}] = \widetilde{\bar{\alpha}\tau};$$

$$[\tau][\tau]^{-1} = [\tau][\tau^{-1}] = [\tau\widetilde{\alpha\tau}\tau^{-1}] = [\widetilde{\beta\tau}] = \widetilde{\bar{\beta}[\tau]}. \qquad \square$$

La relación existente entre las dos relaciones de equivalencia (una sobre el grupoide Ω y otra sobre la base B) que aparecen en la Proposición 4.3.6 viene dada por el siguiente:

Corolario 4.3.7. *Con la notación de la proposición anterior, se verifica:*

$$x \sim y \Leftrightarrow \widetilde{x} \sim \widetilde{y} \quad \forall x, y \in B \ .$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supóngase que $x \sim y$, entonces existe $\xi \in \Phi$ tal que $\alpha(\xi) = x$ y $\beta(\xi) = y$. Entonces $\widetilde{y} = \xi\widetilde{x}\xi^{-1}$ y, en consecuencia, $\widetilde{y} \sim \widetilde{x}$, que equivale a $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongáse que $\widetilde{x} \sim \widetilde{y}$. Entonces existen $\eta, \xi \in \Phi$ tales que $\alpha(\eta) = x = \beta(\xi)$, $\beta(\eta) = y = \alpha(\xi)$ y, además, $\widetilde{x} = \xi^{-1}\widetilde{y}\eta$. Por consiguiente, $x \sim y$ mediante η. $\square$

Nota 4.3.8. *Obsérvese que la implicación directa ya se demostró en el transcurso de la demostración de la Proposición 4.3.6; más concretamente, en el apartado (c) del punto 3.*

Al grupoide que se obtiene en la Proposición 4.3.6, se le asocia un morfismo de grupoides a partir de las proyecciones del grupoide y de su base en los respectivos conjuntos de clases de equivalencias.

Proposición 4.3.9. *Con la notación de la Proposición 4.3.6, las proyecciones $\natural : \Omega \longrightarrow \Omega/\Phi : \xi \mapsto [\xi]$ y $\natural_0 : B \longrightarrow B/\Phi : x \mapsto [x]$ constituyen un morfismo de grupoides $\natural$ sobre $\natural_0$. Además, se tiene que el núcleo de $\natural$ es el subgrupoide Φ.*

Demostración. En primer lugar, se verá que $\natural$ es un morfismo sobre $\natural_0$. Para ello, según la Definición 4.2.1, hay que demostrar que $\bar{\alpha} \circ \natural = \natural_0 \circ \alpha$, que $\bar{\beta} \circ \natural = \natural_0 \circ \beta$ y que $\natural(\eta\xi) = \natural(\eta)\natural(\xi)$, para todo $(\eta, \xi) \in \Omega * \Omega$. En efecto, sea $\xi \in \Omega$, entonces:

$$\bar{\alpha} \circ \natural(\xi) = \bar{\alpha}[\xi] = [\alpha(\xi)] = \natural_0 \circ \alpha(\xi);$$
$$\bar{\beta} \circ \natural(\xi) = \bar{\beta}[\xi] = [\beta(\xi)] = \natural_0 \circ \beta(\xi).$$

Además, si (η, ξ) pertenece a $\Omega * \Omega$ entonces se tiene que:

$$\natural(\eta\xi) = [\eta\xi] = [\eta\widetilde{\alpha(\eta)}\xi] = [\eta][\xi] = \natural(\eta)\natural(\xi).$$

En segundo lugar, se verá que $\ker \natural$ es igual a Φ. Recuérdese que se tiene $\ker \natural = \{\xi \in \Omega \mid [\xi] = [\widetilde{x}] \text{ para algún } x \in B\}$ y se verá la igualdad que se busca por doble contención:

$\boxed{\subseteq}$ Supóngase que $[\xi] = [\widetilde{x}]$ para algún x en B. Entonces existen ζ y ζ' en Φ tales que $\xi = \zeta\widetilde{x}\zeta' = \zeta\zeta'$. Por lo que, al ser $\zeta\zeta'$ un elemento de Φ, se tiene que ξ pertenece a Φ.

$\boxed{\supseteq}$ Sea ξ un elemento de Φ tal que $\alpha(\xi) = x$. Como $\widetilde{x}$ pertenece a Φ, se verifica que $\xi\widetilde{x}\widetilde{x} = \xi$. Por lo tanto, se tiene que $[\xi] = [\widetilde{x}]$. □

Recuérdese que la Proposición 4.3.5 afirmaba que todo núcleo de un morfismo de grupoides es un subgrupoide normal del grupoide que aparece en el dominio. Ahora, en la Proposición 4.3.9, se ha demostrado que todo subgrupoide normal es núcleo de un morfismo de grupoides cuyo dominio es el grupoide de partida. En consecuencia, se ha probado el siguiente:

Corolario 4.3.10. *Un subgrupoide Ω' de un grupoide Ω es normal si y sólo si es el núcleo de un morfismo de grupoides. Además el dominio de dicho morfismo es el grupoide Ω.* □

Las Proposiciones 4.3.6 y 4.3.9 permiten definir el concepto de grupoide cociente que se indica a continuación.

Definición 4.3.11. *Ω/Φ se denominará el* **grupoide cociente** *de Ω sobre el grupoide normal Φ. Al morfismo de grupoides $\natural$, se le denominará la* **proyección natural**.

El próximo ejemplo pretende obtener dos grupoides cocientes a partir de un grupoide, determinando tanto su conjunto de objetos como su conjunto base.

Ejemplo 4.3.12. *Se verán, a continuación, los grupoides cocientes del grupoide Ω sobre $\widetilde{B}$ y sobre Ω, donde $\widetilde{B}$ es el subgrupoide identidad definido en la Definición 4.2.16.*

1. **Se tiene que $\Omega/\widetilde{B}$ es isomorfo a Ω por medio de $\natural$.** *Por lo tanto, puede identificarse $\Omega/\widetilde{B}$ con Ω.*

   En primer lugar, los elementos de $B/\widetilde{B}$ están en biyección con los de B. En efecto, si $x, y \in B$ se tiene que:

   $$[x] \sim [y] \Leftrightarrow \exists \widetilde{z} \in \widetilde{B} \text{ tal que } \alpha(\widetilde{z}) = x \text{ y } \beta(\widetilde{z}) = y \Leftrightarrow x = y.$$

   Los elementos de $\Omega/\widetilde{B}$ están en biyección con los elementos de Ω. En efecto, si $\eta, \xi \in \Omega$ se tiene que:

   $$[\xi] = [\eta] \Leftrightarrow \exists x, y \in B \text{ tales que } \widetilde{x}\xi\widetilde{y} = \eta \Leftrightarrow \xi = \eta.$$

   Además, estas biyecciones son las dadas por $\natural$, por lo que por la Proposición 1.3.19, $\natural$ es un isomorfismo de grupoides.

   Sólo falta comprobar que $\widetilde{B}$ es un subgrupoide normal de Ω. En efecto, $\widetilde{B}$ es ancho, ya que los objetos de $\widetilde{B}$ son lo objetos de Ω, es decir el conjunto B. Además, para cualquier $\lambda \in G\widetilde{B}$ y cualquier $\xi \in \Omega$ con $\alpha(\xi) = \alpha(\lambda) = \beta(\lambda)$, se cumple que $\xi\lambda\xi^{-1} \in \widetilde{B}$. Esto es así ya que $\lambda = \widetilde{x}$ para algún $x \in B$ y, por tanto, $\xi\lambda\xi^{-1} = \widetilde{\beta(\xi)}$, que pertenece a $G\widetilde{B}$.

2. **Se tiene que Ω/Ω es un grupoide base (no necesariamente unitario)**. *Obviamente, Ω es un subgrupoide normal de Ω, por lo que sólo hay de ver que Ω/Ω es grupoide base.*

   En primer lugar, si $x, y \in B$, entonces:

   $$[x] = [y] \Longleftrightarrow \exists \tau \in \Omega \text{ tal que } \alpha(\tau) = x, \beta(\tau) = y.$$

De aquí se tiene que $[x] \in B/\Omega$ es equivalente a $[x] = \{y \in B \mid \exists \tau \in \Omega_x^y\}$. Por lo tanto, en Ω/Ω no existen elementos cuyas proyecciones origen y destino sean distintas. Por lo tanto, todo elemento de Ω/Ω está en un grupo-vértice.

Sea, pues, un elemento $[x] \in B/\Omega$ y estúdiese su grupo-vértice $(\Omega/\Omega)_{[x]}^{[x]}$. Así, si $[\xi]$ pertenece a $(\Omega/\Omega)_{[x]}^{[x]}$, entonces se tiene que ξ pertenece a Ω tal que $[\alpha(\xi)] = [x] = [\beta(\xi)]$, con lo que existen $\tau \in \Omega_x^{\alpha(\xi)}$ y $\eta \in \Omega_{\beta(\xi)}^x$. Por lo tanto, se verifica que $\eta\xi\tau \in \Omega_x^x$ y que ξ está relacionado con un elemento de Ω_x^x. Por otro lado, todo elemento de Ω_x^x está relacionado con $\widetilde{x}$, ya que si ζ pertenece a Ω_x^x entonces $\zeta = \zeta\widetilde{x}\widetilde{x}$.

Por consiguiente, se concluye que Ω/Ω sólo tiene unidades como elementos. Es decir, Ω/Ω es grupoide base.

Se ha comentado en diversas ocasiones que la inyectividad en los morfismos de grupoides no queda determinada por el núcleo del morfismo como pasa con los grupos. Este hecho es lo que se establece en la siguiente:

Proposición 4.3.13. *Se verifican:*

1. *Si $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es un morfismo de grupoides inyectivo, entonces $\ker\phi$ es el subgrupoide base de Ω.*

2. *Si $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es un morfismo de grupoides y $\ker\phi$ es el subgrupoide base de Ω, entonces ϕ es inyectivo a trozos.*

Demostración.

1. Lo que ha de demostrarse es que $\ker\phi = \widetilde{B}$, suponiendo que ϕ es morfismo sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B'$. Para ello, se utilizará la doble inclusión, teniendo en cuenta que $\widetilde{B} \subset \ker\phi$ en virtud de la Nota 4.3.4.

Luego bastará probar la otra contención. Sea pues $\xi \in \ker \phi$, entonces $\phi(\xi) = \widetilde{x}$ para algún $x \in B'$. Ahora $\alpha' \circ \phi(\xi) = \alpha(\widetilde{x}) = x$ y, como $\alpha' \circ \phi = \phi_0 \circ \alpha$, se verifica que $\phi_0(\alpha(\xi)) = x$. Por tanto, $\phi(\widetilde{\alpha(\xi)}) = \widetilde{x}$ y $\phi(\xi) = \phi(\widetilde{\alpha(\xi)})$. La inyectividad de ϕ asegura que $\xi = \widetilde{\alpha(\xi)}$ y ξ pertenece a $\widetilde{B}$.

2. Supóngase ahora que $\ker \phi = \widetilde{B}$. Se probará que, entonces, ϕ es inyectiva a trozos (véase la Definición 4.2.12).

   Sean ξ, η dos elementos de Ω_x^y tales que $\phi(\xi) = \phi(\eta)$. Se tiene que $\phi(\xi\eta^{-1}) = \widetilde{\phi_0(y)}$ debido a que se cumplen:

$$\phi(\widetilde{y}) = \phi(\xi)\phi(\eta)^{-1}; \quad \phi(\xi\eta^{-1}) = \phi(\xi)\phi(\eta)^{-1} \;\text{ y }\; \phi(\widetilde{y}) = \widetilde{\phi_0(y)}.$$

   Por lo tanto, se tiene que $\xi\eta^{-1}$ pertenece a $\ker \phi = \widetilde{B}$. Luego $\xi\eta^{-1} = \widetilde{y}$ y $\xi = \eta$. □

Como puede verse, la inyectividad implica que el núcleo sea el subgrupoide base del grupoide que aparece en el dominio del morfismo. Sin embargo, este hecho no garantiza que el morfismo sea inyectivo; sólo puede afirmarse, en realidad, que es inyectivo a trozos.

También se comentó con anterioridad, en concreto en la Nota 4.2.18, la factorización de un morfismo de grupos mediante el grupo cociente del grupo en el dominio por el núcleo del morfismo. Además, si dicho morfismo es sobreyectivo, puede factorizarse en su proyección seguido de un isomorfismo (véase (4.1) con $\mathrm{Im}F = G'$).

Considerando el grupoide cociente como el concepto análogo al de grupo cociente, se tiene que esta factorización no es válida para grupoides (véase el Ejemplo 2.8 del Capítulo I de **[31]**), ya que los morfismos sobreyectivos de grupoides no están determinados por sus núcleos; esto es, existen distintos morfismos sobreyectivos con el mismo núcleo.

No obstante, si se consideran morfismos de grupoides que sean base-sobreyectivos y sobreyectivos a trozos, entonces puede realizarse la factorización antes mencionada. Todo ello, se observa en la siguiente:

Proposición 4.3.14. *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$, con núcleo Φ. Se verifican:*

1. *Si ϕ es base-sobreyectivo y sobreyectivo a trozos, entonces el morfismo de grupoides $\bar{\phi} : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega_1 : [\xi] \mapsto \phi(\xi)$ es isomorfismo de grupoides y se tiene $\phi = \bar{\phi} \circ \natural$.*

2. *Si existe un isomorfismo de grupoides $\psi : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega_1$ tal que $\phi = \psi \circ \natural$, entonces ϕ es sobreyectivo a trozos y base-sobreyectivo.*

Demostración.

1. En primer lugar, se verá que $\bar{\phi}$ está bien definido. En efecto, si $[\xi] = [\eta]$ entonces existen $\tau_1, \tau_2 \in \Phi$ tales que $\xi = \tau_1\eta\tau_2$. Por lo tanto, al tener $\ker\phi = \Phi$, tanto $\phi(\tau_1)$ como $\phi(\tau_2)$ son unidades de Ω_1, por lo que:

   $$\phi(\xi) = \phi(\tau_1\xi\tau_2) = \phi(\tau_1)\phi(\eta)\phi(\tau_2) = \phi(\eta).$$

   La sobreyectividad de $\bar{\phi}$ viene dada por la de ϕ, que es sobreyectivo por la condición de *3* de la Proposición 4.2.13.

   La inyectividad de $\bar{\phi}$ se tiene como sigue: sean $[\xi]$, $[\eta] \in \Omega/\Phi$ tales que $\bar{\phi}([\xi]) = \bar{\phi}([\eta])$, entonces se tiene que $\phi(\xi) = \phi(\eta)$. Como ϕ es morfismo de grupoides, entonces:

   $$\beta_1 \circ \phi(\xi) = \phi_0 \circ \beta(\xi) \quad \text{y} \quad \beta_1 \circ \phi(\eta) = \phi_0 \circ \beta(\eta).$$

   Por tanto, $\beta(\xi)$ y $\beta(\eta)$ tienen la misma imagen por ϕ_0, que se denotará por z.

Pero $\phi_{\beta(\xi)}^{\beta(\eta)} : \Omega_{\beta(\xi)}^{\beta(\eta)} \longrightarrow {\Omega_1}_z^z$ es sobreyectiva, por lo que existe $\zeta_1 \in \Omega_{\beta(\xi)}^{\beta(\eta)}$ tal que $\phi(\zeta_1) = \tilde{z}$. De hecho, ζ_1 pertenece a $\Phi_{\beta(\xi)}^{\beta(\eta)}$, ya que su imagen por ϕ es una unidad de Ω_1. De forma análoga y trabajando con α, se obtiene un elemento ζ_2 perteneciente a $\Phi_{\alpha(\xi)}^{\alpha(\eta)}$.

Se define así el elemento $\zeta_1^{-1}\eta\zeta_2\xi^{-1}$ de $\Omega_{\beta(\xi)}^{\beta(\xi)}$ cuya imagen por ϕ es $\tilde{z}$ y que, por tanto, es un elemento de $\Phi_{\beta(\xi)}^{\beta(\xi)}$. Denótese por λ a dicho elemento y multiplíquese a su izquierda por λ^{-1} y a su derecha por ξ, obteniéndose de este modo:

$$\xi = \lambda^{-1}\zeta_1^{-1}\eta\zeta_2 = (\zeta_1\lambda)^{-1}\eta\zeta_2,$$

con $\zeta_1\lambda \in \Phi$ y $\zeta_2 \in \Phi$. Luego se tiene que $[\xi] = [\eta]$. Por lo tanto, $\bar{\phi}$ es inyectivo.

Una vez demostrada la biyectividad de $\bar{\phi}$, se verá que $\bar{\phi}$ es un morfismo de grupoides. En efecto, si $[\xi]$ es un elemento de Ω/Φ, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \circ \bar{\phi}[\xi] = \alpha_1 \circ \phi(\xi) = \phi_0 \circ \alpha(\xi) = \bar{\phi}_0[\alpha(\xi)] = \bar{\phi}_0 \circ \bar{\alpha}[\xi]; \\ \beta_1 \circ \bar{\phi}[\xi] = \beta_1 \circ \phi(\xi) = \phi_0 \circ \beta(\xi) = \bar{\phi}_0[\beta(\xi)] = \bar{\phi}_0 \circ \bar{\beta}[\xi]. \end{aligned}$$

Por lo que se verifica que $\alpha_1 \circ \bar{\phi} = \bar{\phi}_0 \circ \bar{\alpha}$ y $\beta_1 \circ \bar{\phi} = \bar{\phi}_0 \circ \bar{\beta}$. Además, si $[\eta]$ es otro elemento de Ω/Φ tal que el producto $[\xi][\eta]$ está definido, entonces existe $\tau \in \Phi$ tal que se tiene $[\xi][\eta] = [\xi\tau^{-1}\eta]$. Entonces, como ϕ es morfismo de grupoides y $\phi(\tau^{-1})$ es una unidad en Ω_1, se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}([\xi][\eta]) &= \bar{\phi}([\xi\tau^{-1}\eta]) = \phi(\xi\tau^{-1}\eta) \\ &= \phi(\xi)\phi(\tau^{-1})\phi(\eta) = \phi(\xi)\phi(\eta) = \bar{\phi}[\xi]\bar{\phi}[\eta]. \end{aligned}$$

2. Como $\natural$ es base-sobreyectiva por construcción y ψ es base-sobreyectiva por ser sobreyectiva (véase la Proposición 4.2.13), entonces ϕ es base-sobreyectivo por ser la composición de $\natural$ y ψ.

Ahora, ψ es un morfismo de grupoides y, por lo tanto, es un funtor entre grupoides, vistos éstos como categorías. De este modo, en virtud de la Proposición 1.3.19, se tiene que ψ es biyectivo a trozos por ser ψ biyectivo.

A continuación, se demostrará que $\natural$ es sobreyectivo a trozos. Sean, pues, $x, y \in B$ arbitrarios y véase que $\natural_x^y : \Omega_x^y \longrightarrow (\Omega/\Phi)_{[x]}^{[y]}$ es sobreyectiva. En efecto, sea $[\xi]$ un elemento de Ω/Φ verificando $\bar{\beta}[\xi] = [y]$ y $\bar{\alpha}[\xi] = [x]$. Entonces se verifica que $\beta(\xi) \sim y$ y $\alpha(\xi) \sim x$, por lo que existen τ_1, τ_2 pertenecientes a Φ tales que $\tau_1 \in \Phi_y^{\beta(\xi)}$ y $\tau_2 \in \Phi_x^{\alpha(\xi)}$. Por lo tanto, $\tau_1^{-1}\xi\tau_2 \sim \xi$ y además $\tau_1^{-1}\xi\tau_2 \in \Omega_x^y$, siendo así una contraimagen de $[\xi]$ por $\natural$. Por tanto, $\natural_x^y$ es sobreyectiva.

Debido a que ψ y $\natural$ son sobreyectivas a trozos, se tiene que ϕ es sobreyectivo a trozos, ya que es la composición de $\natural$ y ψ. $\square$

Nota 4.3.15. *Obsérvese que si en el apartado 1. de la Proposición 4.3.13 no se impone la base-sobreyectividad y la sobreyectividad a trozos del morfismo de grupoides $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$, se tiene que $\bar{\phi} : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega_1$ sigue siendo un morfismo de grupoides (ya no sería isomorfismo) y que verifica $\phi = \bar{\phi} \circ \natural$, ya que las hipótesis suprimidas no intervienen en la demostración de tales hechos.*

En muchas ocasiones se trabaja con morfismos de grupoides $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ en los que la base es la misma, que se denotará por B, y la aplicación ϕ_0 es la identidad en B. En concreto, ϕ_0 es una biyección. Para estos casos se tiene la siguiente:

Proposición 4.3.16. *Si un morfismo es base-biyectivo, entonces es sobreyectivo si y sólo si es sobreyectivo a trozos.*

Demostración. Como ϕ_0 es biyectivo, entonces los elementos de ${\Omega_1}_{z_1}^{z_2}$ tienen su contraimagen, si ésta existe, en $\Omega_{\phi_0^{-1}(z_1)}^{\phi_0^{-1}(z_2)}$. Por lo tanto, estudiar la sobreyectividad de ϕ equivale a estudiar la sobreyectividad de la restricción $\phi_{\phi_0^{-1}(z_1)}^{\phi_0^{-1}(z_2)}$. $\square$

Nótese que las Proposiciones 4.3.14 y 4.3.16 aseguran que al tratar con morfismos base-biyectivos que sean sobreyectivos, puede obtenerse una factorización de los mismos análoga a la existente para morfismos de grupos sobreyectivos; esto es, una proyección natural seguida de un isomorfismo. Si el morfismo base-biyectivo no fuese sobreyectivo, entonces el isomorfismo de la factorización sería simplemente un morfismo.

En esta situación en la que se trabaja con morfismos base-biyectivos, pueden realizarse las simplificaciones que se observan en el siguiente:

Teorema 4.3.17. *Se verifican:*

1. *El núcleo de morfismos base-biyectivos (de hecho, basta que sean base-inyectivos) es la unión de sus grupos-vértice. Por tanto, al hacer cociente por el núcleo en un grupoide, la base permanece invariante.*

2. *Al hacer cociente en un grupoide sobre un subgrupoide normal Φ, que sea la unión de sus grupos-vértice, la relación de equivalencia entre los elementos puede cambiarse por:*

$$\eta \sim \tau \Leftrightarrow \exists \lambda \in \Phi \text{ tal que } \eta\lambda \text{ está definido y es igual a } \tau.$$

Demostración.

1. En primer lugar, es cierto que el núcleo de un morfismo base-inyectivo es la unión de sus grupos-vértice, ya que la imagen de un elemento del núcleo posee proyecciones origen y destino idénticas. Pero éstas son las imágenes por el morfismo base

de las proyecciones origen y destino de dicho elemento, respectivamente. Por lo tanto, ese elemento del núcleo está en un grupo-vértice.

Con respecto al hecho de no variar la base al realizar el cociente por dicho núcleo, esto se tiene debido a que $x, y \in B$ verifican que $x \sim y$ si y sólo si existe un elemento del núcleo cuya proyección origen sea x y cuya proyección destino sea y. Pero el núcleo está formado por los grupos-vértices, por lo que no existen elementos como el que se busca a menos que se tenga $x = y$. Por lo tanto, se tiene que:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y.$$

2. A continuación, se demuestra que la definición de la relación de equivalencia dada en este teorema es equivalente a la dada en la Definición 4.3.6.

   Sean τ, η dos elementos de Ω. Por la definición original, $\tau \sim \eta$ si y sólo si existen $\xi_1, \xi_2 \in \Phi$ tales que $\xi_1\eta\xi_2$ está definido y es igual a τ. Como Φ es la unión de sus grupos-vértices, entonces ξ_2 pertenece a Φ_x^x, con $x \in B$. Luego está definido $\xi_2\eta^{-1}$. De este modo, se tiene que:

   $$\xi_1\eta\xi_2\eta^{-1} = \tau\eta^{-1}.$$

   Pero, por ser Φ un subgrupoide normal de Ω, se verifica que $\eta\xi_2\eta^{-1}$ pertenece a Φ y, por consiguiente, también pertenece a Φ el elemento $\tau\eta^{-1}$. Por lo tanto, $\tau\eta^{-1}$ es igual a un elemento λ de Ω, teniendo lo que se buscaba. □

Se vio en la Proposición 4.3.14 que el núcleo de un morfismo de grupoides no mide bien la inyectividad de dicho morfismo. Pero si se consideran los morfismos base-biyectivos, entonces el núcleo sí mide la inyectividad de forma apropiada. Esto queda establecido por la siguiente:

Proposición 4.3.18. *Un morfismo de grupoides base-biyectivo* $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ *sobre* $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$ *es inyectivo si y sólo si su núcleo es el subgrupoide base* $\widetilde{B}$.

Demostración. Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$ con ϕ_0 biyectiva. Supóngase, en primer lugar, que ϕ es inyectivo. Entonces, dado $\xi \in \ker \phi$, se cumple que $\phi(\xi) = \widetilde{x}$ para algún $x \in B_1$. La biyectividad de ϕ_0 asegura que existe $y \in B$ tal que $\phi_0(y) = x$. Por lo tanto, $\phi(\widetilde{y}) = \widetilde{\phi_0(y)} = \widetilde{x}$ y $\phi(\widetilde{y}) = \phi(\xi)$. Pero, al ser ϕ inyectivo, entonces $\widetilde{y} = \xi$, por lo que $\xi \in \widetilde{B}$.

En segundo lugar, supóngase que $\ker \phi = \widetilde{B}$. Dados $\xi, \eta \in \Omega$ tales que:

$$\phi(\xi) = \phi(\eta). \tag{4.4}$$

En consecuencia, se tiene que $\phi_0(\alpha(\eta)) = \phi_0(\alpha(\xi))$ y $\phi_0(\beta(\xi)) = \phi_0(\beta(\eta))$. Al ser ϕ_0 biyectivo, se tiene que $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$ y $\beta(\xi) = \beta(\eta)$ y, por lo tanto, $\xi\eta^{-1}$ está definido. Por (4.4), se verifica que $\widetilde{x} = \phi(\xi)\phi(\eta)^{-1} = \phi(\xi\eta^{-1})$, con $x \in B_1$. Por lo tanto, $\xi\eta^{-1}$ es un elemento de $\widetilde{B}$ y, en consecuencia, se tiene $\xi = \eta$. □

La factorización se tiene también para morfismos base-inyectivos (véanse **[23]** ó 8.3.2 en **[7]**).

Por otra parte, hay dos formas de factorizar un morfismo arbitrario por un morfismo que conserve la base, con el fin de que pueda aplicarse la factorización de la Nota 4.3.17, y un segundo morfismo de un tipo específico: **pullbacks** y morfismos **universales**. En lo que sigue no se tratarán estos morfismos universales por razones de extensión.

Se introducirán, por tanto, los morfismos pullbacks de grupoides y el grupoide imagen inversa para poder, de este modo, observar la factorización de un morfismo de grupoide general.

Definición 4.3.19. *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ un morfismo de grupoides sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$. El grupoide Φ se dice* **pullback** *si cada morfismo de grupoides $\psi : \Phi \longrightarrow \Omega_1$, también sobre ϕ_0, puede factorizarse únicamente como $\Phi \xrightarrow{\bar{\psi}} \Omega \xrightarrow{\phi} \Omega_1$, con $\bar{\psi}$ morfismo de grupoides sobre B; esto es, se tiene el diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Phi \arrow[r, "\bar{\psi}"] \arrow[d, "\psi"'] & \Omega \arrow[d, "\phi"] \\ \Omega_1 \arrow[r, equal] & \Omega_1 \end{tikzcd}$$

Definición 4.3.20. *Sean Ω un grupoide sobre B y $f{:}B_1 \longrightarrow B$ una aplicación. Se denomina* **grupoide imagen inversa** *de Ω sobre f al conjunto:*

$$f^*\Omega = \{(y', \xi, x') \in B_1 \times \Omega \times B_1 \mid f(y') = \beta(\xi), f(x') = \alpha(\xi)\}, \tag{4.5}$$

dotado de la estructura de grupoide dada por las proyecciones $\bar{\alpha} = \pi_3$ y $\bar{\beta} = \pi_1$, la inclusión de objetos $\bar{\varepsilon} : x' \mapsto \widetilde{x'} = (x', \widetilde{f(x')}, x')$ y la multiplicación parcial $(z', \eta, y')(y', \tau, x') = (z', \eta\tau, x')$. La inversión está dada por $(y', \tau, x')^{-1} = (x', \tau^{-1}, y')$.

Asimismo, se denomina **morfismo imagen inversa** *al morfismo de grupoides $\widetilde{f}{:}\, f^*\Omega \longrightarrow \Omega$ definido como: $\widetilde{f}(y', \xi, x') = \xi$.*

Seguidamente se comentarán algunos aspectos del morfismo imagen inversa.

Nota 4.3.21. *$\widetilde{f}$ es efectivamente un morfismo de grupoides. Sean (y', ξ, x'), (x', η, z') dos elementos de $f^*\Omega$. Entonces se tiene:*

$$\widetilde{f}((y', \xi, x')(x', \eta, z')) = \widetilde{f}(y', \xi\eta, z') = \xi\eta = \widetilde{f}(y', \xi, x')\widetilde{f}(x', \eta, z').$$

Por otro lado, se verifica:

$$\alpha \circ \widetilde{f}(y', \xi, x') = \alpha(\xi) = f(x') \quad y \quad \beta \circ \widetilde{f}(y', \xi, x') = \beta(\xi) = f(y'),$$

por la definición de $f^*\Omega$. *Por lo tanto,* $f \circ \bar{\alpha}(y', \xi, x') = f(x')$ *y* $f \circ \bar{\beta}(y', \xi, x') = f(y')$. *Luego* $f \circ \bar{\alpha} = \alpha \circ \widetilde{f}$ *y* $f \circ \bar{\beta} = \beta \circ \widetilde{f}$. *Luego* $\widetilde{f}$ *es realmente un morfismo de grupoides.*

Nota 4.3.22. *Nótese que* $\widetilde{f}$ *es biyectiva a trozos y sobreyectiva, dado que si* $x, y \in B$ *y* $\xi \in \Omega_{f(x)}^{f(y)}$ *entonces* (y, ξ, x) *pertenece a* $(f^*\Omega)_x^y$ *y se tiene* $\widetilde{f}(y, \xi, x) = \xi$.

Se continúa con una caracterización para que un morfismo de grupoides sea un pullback. Se demostrará que ser pullback equivale a ser biyectivo a trozos.

Proposición 4.3.23. *Un morfismo de grupoides es pullback si y sólo si es biyectivo a trozos.*

Demostración.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ un morfismo biyectivo a trozos y $\psi : \Phi \longrightarrow \Omega_1$ otro morfismo de grupoides verificando $\psi_0 = \phi_0 : B \longrightarrow B_1$. Se definirá un morfismo de grupoides $\bar{\psi}$ sobre los elementos de Φ. Para ello, sean $x, y \in B$, y defínase $\bar{\psi}_x^y : \Phi_x^y \longrightarrow \Omega_x^y$ según $\bar{\psi}_x^y = (\phi_x^y)^{-1} \circ \psi_x^y$, la cual tiene sentido gracias a que ϕ es biyectiva a trozos.

Falta demostrar que $\bar{\psi}$ es un morfismo de grupoides. Sean $\xi \in \Phi_x^y$ y $\eta \in \Phi_y^z$, con $x, y, z \in B$. Hay que probar que $\bar{\psi}(\eta\xi) = \bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi)$.

En efecto, por un lado se verifica que:

$$\bar{\psi}(\eta\xi) = \bar{\psi}_x^z(\eta\xi) = (\phi_x^z)^{-1} \circ \psi_x^z(\eta\xi),$$

por lo que:

$$\phi_x^z \circ \bar{\psi}(\eta\xi) = \psi_x^z(\eta\xi) = \psi(\eta\xi) = \psi(\eta)\psi(\xi).$$

Por otro lado, se verifica:

$$\bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi) = \bar{\psi}^z_y(\eta)\bar{\psi}^y_x(\xi) = ((\phi^z_y)^{-1} \circ \psi^z_y(\eta))((\phi^y_x)^{-1} \circ \psi^y_x(\xi)).$$

Por consiguiente, se cumple:

$$\begin{aligned}\phi^z_x(\bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi)) &= \phi(\bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi)) = \phi(\bar{\psi}(\eta))\phi(\bar{\psi}(\xi)) \\ &= \phi((\phi^x_y)^{-1} \circ \psi^z_y(\eta))\phi((\phi^y_x)^{-1} \circ \psi^y_x(\xi)) \\ &= (\phi^z_y \circ (\phi^z_y)^{-1} \circ \psi^z_y(\eta))(\phi^y_x \circ (\phi^y_x)^{-1} \circ \psi^y_x(\xi)) \\ &= \psi^z_y(\eta)\psi^y_x(\xi) = \psi(\eta)\psi(\xi),\end{aligned}$$

ya que al aplicar ϕ y ψ sobre un elemento de su dominio, se está aplicando su restricción al conjunto Ω^y_x en el que esté el elemento citado.

En consecuencia, se tiene $\phi^z_x(\bar{\psi}(\eta\xi)) = \phi^z_x(\bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi))$, por lo que, debido a la biyectividad de ϕ^z_x, se verifica que $\bar{\psi}(\eta\xi) = \bar{\psi}(\eta)\bar{\psi}(\xi)$.

Suponiendo que α y $\bar{\alpha}$ son las proyecciones origen de Ω y Φ, respectivamente, y que β y $\bar{\beta}$ son las proyecciones destinos de Ω y Φ, respectivamente, queda demostrar que $\alpha \circ \bar{\psi} = \bar{\alpha}$ y $\beta \circ \bar{\psi} = \bar{\beta}$. Pero esto es cierto ya que se ha definido $\bar{\psi}$ a trozos; esto es, un elemento de Φ^y_x, para $x, y \in B$, da un elemento de Ω^y_x.

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ un pullback. Como $\widetilde{\phi_0} : \phi_0^*\Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$ es biyectivo a trozos, debido a la Nota 4.3.22, $\widetilde{\phi_0}$ es un pullback. Por tanto, existe un morfismo $\psi_1 : \Omega \longrightarrow \phi_0^*\Omega_1$ sobre B, tal que $\phi = \widetilde{\phi_0} \circ \psi_1$.

Como ϕ es un pullback, existe un morfismo $\psi_2 : \phi_0^*\Omega_1 \longrightarrow \Omega$ sobre B, tal que $\widetilde{\phi_0} = \phi \circ \psi_2$. Así se tiene que $\phi = \phi \circ \psi_2 \circ \psi_1$ y $\widetilde{\phi_0} = \widetilde{\phi_0} \circ \psi_1 \circ \psi_2$. En virtud de la unicidad exigida en la Definición 4.3.19, se verifica que $\psi_2 \circ \psi_1$ y $\psi_1 \circ \psi_2$ son morfismos identidad de grupoides. Por lo tanto, ψ_1 es un isomorfismo y, en consecuencia, es biyectivo a trozos, en virtud de la Proposición 1.3.19. Como $\widetilde{\phi_0}$ es biyectivo a trozos, entonces ϕ es biyectivo a trozos por ser la composición de ψ_1 y $\widetilde{\phi_0}$. $\square$

La caracterización anterior de pullback permite considerar una propiedad de los morfismos imagen inversa que es de interés para la factorización de un morfismo que se está buscando en esta sección.

Corolario 4.3.24. *El morfismo de grupoides $\widetilde{f}$ definido en la Definición 4.3.20 es un pullback.*

Demostración. Sigue de la Nota 4.3.22 y la Proposición 4.3.23. □

En este punto, se está ya en condiciones de factorizar un morfismo arbitrario de grupoides por medio del grupoide cociente del grupoide que aparece en el dominio sobre el núcleo del morfismo de partida. Este hecho queda establecido en la siguiente:

Proposición 4.3.25. *Si $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ es un morfismo de grupoides, entonces se puede factorizar por el morfismo imagen inversa $\widetilde{\phi_0} : \phi_0^*\Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$ y un morfismo $\hat{\phi} : \Omega \longrightarrow \phi_0^*\Omega_1$ que conserva la base B. De hecho, $\widetilde{\phi_0}$ es un pullback.*

Demostración. Se sigue del Corolario 4.3.24. □

Obsérvese que la Proposición 4.3.25 concluye la búsqueda de la factorización de un morfismo de grupoides. En efecto, el morfismo $\hat{\phi}$ de grupoides es base-biyectivo por conservar la base y, en virtud de la Proposición 4.3.14 o de la Nota 4.3.15, se tiene la factorización buscada según sea el morfismo ϕ sobreyectivo o no, respectivamente.

A continuación, se dan algunos ejemplos de lo visto en esta sección.

Ejemplo 4.3.26. *Si B es un conjunto y X es una relación de equivalencia sobre B, entonces X es un subgrupoide normal del grupoide producto cartesiano $B \times B$. En efecto, se tiene por el*

Ejemplo 4.1.10 que X es un grupoide; de hecho, es un subgrupoide de $B \times B$, ya que la estructura de X es la restricción de la estructura de grupoide de $B \times B$.

Además, X es subgrupoide normal de $B \times B$. En efecto, X es ancho por la propiedad reflexiva de las relaciones de equivalencia; y la propiedad a cumplir por los elementos de GX se tiene trivialmente porque $X_x^x = \{(x, x)\}$, para cada $x \in B$.

Como X es subgrupoide normal de $B \times B$, se puede definir el grupoide cociente $\frac{B \times B}{X}$. En este caso, se puede identificar el grupoide cociente $\frac{B \times B}{X}$ con el grupoide $\frac{B}{X} \times \frac{B}{X}$, donde $\frac{B}{X}$ es el conjunto de las clases de equivalencia de B por la relación X. La identificación viene dada por $\phi : \frac{B \times B}{X} \longrightarrow \frac{B}{X} \times \frac{B}{X} : [(y, x)] \mapsto ([y], [x])$, que es un $\frac{B}{X}$-morfismo de grupoides.

Se pasa a demostrar que la afirmación anterior es cierta. La base tanto de $\frac{B \times B}{X}$ como de $\frac{B}{X} \times \frac{B}{X}$ es $\frac{B}{X}$: en el caso de $\frac{B}{X} \times \frac{B}{X}$ se tiene que esa es la base por como se definió este grupoide; en el otro grupoide, la causa radica en que:

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists\ \xi \in X_x^y,$$

lo que equivale a afirmar que $[x] = [y]$. Por lo tanto, sólo resta probar que ϕ es un morfismo biyectivo.

La biyectividad de ϕ se debe a que $(y, x) \sim (y', x')$ si y sólo si existen $\xi \in X_{y'}^y$ y $\xi' \in X_x^{x'}$ tales que $(y, x) = \xi(y', x')\xi'$. Pero esto es equivalente a que $[x] = [x']$ e $[y] = [y']$. Por lo tanto, $[(y, x)] = [(y', x')]$ equivale a $([y], [x]) = ([y'], [x'])$.

Además, ϕ es morfismo de grupoides, ya que dados (y, x), $(x', z) \in B \times B$ tales que $(x, x') \in X$, entonces:

$$\begin{aligned} \phi([(y,x)][(x',z)]) &= \phi([(y,x)(x,x')(x',z)]) = \phi([(y,z)])) \\ &= ([y],[z]) = ([y],[x])([x],[z]) \\ &= ([y],[x])([x'],[z]) = \phi([(y,x)])\phi([(x',z)]), \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que $[x] = [x']$. *Además, si* α *y* β *son las proyecciones origen y destino de* $B \times B$, *respectivamente, y si* α' *y* β' *son las de* $\frac{B}{X} \times \frac{B}{X}$, *entonces se tiene, haciendo uso de la notación de la Proposición 4.3.6, que:*

$$\alpha' \circ \phi([(x,y)]) = \alpha'([x],[y]) = [y] = [\alpha(x,y)] = \bar{\alpha}[(x,y)],$$
$$\beta' \circ \phi([(x,y)]) = \beta'([x],[y]) = [x] = [\beta(x,y)] = \bar{\beta}[(x,y)].$$

Ejemplo 4.3.27. *Sea* G *un grupo. La* **aplicación división** δ *definida como:*

$$\delta : G \times G \longrightarrow G : (g_2, g_1) \mapsto g_2 g_1^{-1},$$

es un morfismo de grupoides sobre $\delta_0 : G \longrightarrow \{1_G\}$, *donde el dominio de* δ *es el grupoide producto cartesiano* $G \times G$ *sobre* G *(véase el Ejemplo 4.1.9) y el rango es el grupo* G *con la estructura de grupoide dado en el Ejemplo 4.1.9.*

Para demostrar que δ *es un morfismo de grupoides, se supondrá que* α *y* α' *son las proyecciones origen de* G *y de* $G \times G$, *respectivamente, y que* β *y* β' *son las proyecciones destinos de* G *y de* $G \times G$, *respectivamente. Por tanto, se tiene que:*

$$\begin{aligned} \delta((g_2,g_1)(g_1,g_0)) &= \delta(g_2,g_0) = g_2 g_0^{-1} \\ &= (g_2 g_1^{-1})(g_1 g_0^{-1}) = \delta(g_2,g_1)\delta(g_1,g_0). \end{aligned}$$

Además, se cumplen también las condiciones pertinentes sobre las proyecciones origen y destino con respecto de δ. *De este modo, se tiene:*

$$\alpha \circ \delta(g_2,g_1) = \alpha(g_2 g_1^{-1}) = 1_G = \delta_0 \circ \alpha'(g_2,g_1),$$
$$\beta \circ \delta(g_2,g_1) = \beta(g_2 g_1^{-1}) = 1_G = \delta_0 \circ \beta'(g_2,g_1).$$

Más generalmente, dado un grupoide Ω *sobre* B *se define el conjunto* $\Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega$ *como:*

$$\Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega = \{(\eta,\xi) \in \Omega \times \Omega \mid \alpha(\eta) = \alpha(\xi)\}.$$

Se tiene que $\Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega$ *es una relación de equivalencia sobre* Ω *y, por el Ejemplo 4.3.26, un subgrupoide del grupoide producto cartesiano* $\Omega \times \Omega$ *sobre* Ω.

De este modo, se define $\delta : \Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega \longrightarrow \Omega : (\eta, \xi) \mapsto \eta\xi^{-1}$. *Queda demostrar que* δ *es un morfismo de grupoides sobre* $\beta : \Omega \longrightarrow B$. *En efecto, se cumplen las tres siguientes propiedades:*

1. $\delta((\eta,\xi)(\xi,\zeta)) = \delta(\eta,\zeta) = \eta\zeta^{-1} = \eta\xi^{-1}\xi\zeta^{-1} = \delta(\eta,\xi)\delta(\eta,\xi)$,
2. $\alpha \circ \delta(\eta,\xi) = \alpha(\eta\xi^{-1}) = \alpha(\xi^{-1}) = \beta(\xi) = \beta \circ \alpha'(\eta,\xi)$,
3. $\beta \circ \delta(\eta,\xi) = \beta(\eta\xi^{-1}) = \beta(\eta) = \beta \circ \beta'(\eta,\xi)$,

donde α' *y* β' *son las proyecciones origen y destino de* $\Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega$, *respectivamente.*

Ejemplo 4.3.28. *Sea* Ω *un grupoide con base* B. *La aplicación* **anclaje** *de* Ω, *dada por:*

$$[\beta, \alpha] : \Omega \longrightarrow B \times B : \xi \mapsto (\beta(\xi), \alpha(\xi)),$$

es un B*-morfismo de grupoides. Además el núcleo de este morfismo es* $G\Omega$.

Se probará que $[\beta, \alpha]$ *es un morfismo de grupoides, suponiendo que* α' *y* β' *son las proyecciones origen y destino de* $B \times B$. *En primer lugar, dados* $\xi, \eta \in \Omega$ *tales que* $\beta(\xi) = \alpha(\eta)$, *se tiene que:*

$$\begin{aligned} [\beta,\alpha](\eta\xi) &= (\beta(\eta), \alpha(\xi)) \\ &= (\beta(\eta), \alpha(\eta))(\beta(\xi), \alpha(\xi)) = [\beta,\alpha](\eta)[\beta,\alpha](\xi). \end{aligned}$$

En segundo lugar, se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha' \circ [\beta,\alpha](\eta) &= \alpha'(\beta(\eta), \alpha(\eta)) = \alpha(\eta), \\ \beta' \circ [\beta,\alpha](\eta) &= \beta'(\beta(\eta), \alpha(\eta)) = \beta(\eta), \end{aligned}$$

y por lo tanto $\alpha' \circ [\beta, \alpha] = \alpha$ *y* $\beta' \circ [\beta, \alpha] = \beta$ *que son las condiciones buscadas, ya que* $[\beta, \alpha]$ *conserva la base* B.

Por último, se verá que el núcleo es $G\Omega$. En efecto:

$$\begin{aligned} \eta \in \ker[\beta,\alpha] &\Longleftrightarrow [\beta,\alpha](\eta) = \widetilde{x} = (x,x) \textit{ para algún } x \in B \\ &\Longleftrightarrow \beta(\eta) = \alpha(\eta) \Longleftrightarrow \eta \in G\Omega. \end{aligned}$$

Capítulo 5
Grupoides topológicos

En Teoría de Grupos, una vez estudiados los grupos, resulta interesante superponer una segunda estructura sobre los mismos. Dos ejemplos de esta situación bien conocidos son los grupos topológicos y los grupos diferenciables. Recuérdese que un grupo es topológico (resp. diferenciable) si posee una estructura de espacio topológico (resp. de variedad diferenciable) tal que las aplicaciones producto e inversión de la estructura de grupo son continuas (resp. diferenciables).

En lo que ocupa a esta monografía, el presente capítulo tiene por objetivo estudiar el concepto análogo para grupoides al de grupo topológico. Dicho concepto recibe el nombre de grupoide topológico y consistirá en dotar de una estructura de espacio topológico tanto al grupoide como a la base, de modo que las aplicaciones que intervienen en la definición de la estructura de grupoide sean continuas.

A partir de los morfismos de grupoides se dará una definición de morfismo continuo o de grupoides topológicos sin más que exigir continuidad a las dos aplicaciones que definen a dicho morfismo. Como consecuencia, los grupoides topológicos van a formar una subcategoría de la categoría de los grupoides.

En los grupoides topológicos van a poderse definir de nuevo los conceptos de grupoide cociente topológico y de morfismo pullback como ocurrió con los grupoides en general. Pero va a tenerse un aspecto negativo: el grupoide cociente topológico no tiene por qué coincidir con el grupoide cociente. No obstante, se verá un caso en el que sí coincide.

Otros conceptos que se tratarán en el presente capítulo serán los grupoides topológicos localmente triviales, las componentes de la identidad (el análogo en grupoides a la componente conexa de la unidad de un grupo) y las secciones admisibles de grupoides topológicos.

5.1 Grupoides topológicos

El concepto de grupoide topológico es el que se puede esperar al superponer una estructura de espacio topológico tanto al grupoide como a la base, teniendo en cuenta que se quiere trasladar la definición de grupo toplógico al caso de los grupoides. Por tanto, se tiene la siguiente:

Definición 5.1.1. *Se denomina* **grupoide topológico** *a un grupoide Ω sobre B, junto con topologías definidas sobre Ω y B, tal que las cinco aplicaciones que definen la estructura de grupoide son continuas, a saber: las proyecciones origen y destino $\alpha, \beta : \Omega \longrightarrow B$, la inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega : x \mapsto \widetilde{x}$, la inversión $\iota : \Omega \longrightarrow \Omega : \xi \mapsto \xi^{-1}$ y la multiplicación parcial $\Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$, donde $\Omega * \Omega$ se considera como subespacio topológico de $\Omega \times \Omega$.*

Para comprobar que un grupoide tiene estructura de grupoide topológico no es necesario probar la continuidad de ambas proyecciones, origen y destino; es suficiente probar que la inversión y una de las dos proyecciones lo es. Esto es lo que se demuestra en la siguiente:

Proposición 5.1.2. *En un grupoide si una de las proyecciones (la de origen o la de destino) y la inversión son continuas, entonces la otra proyección también es continua.*

Demostración. Sea Ω un grupoide sobre B y supóngase que la proyección origen α: $\Omega \longrightarrow B$ es continua al igual que la inversión $\iota : \Omega \longrightarrow \Omega : \xi \mapsto \xi^{-1}$. Entonces $\beta = \alpha \circ \iota$ es continua por composición de aplicaciones continuas. La condición *5* de la Definición 4.1.1 es la que permite afirmar que $\beta = \alpha \circ \iota$. □

Continuando con la inversión y las proyecciones origen y destino, estas aplicaciones cumplen propiedades más fuertes que las de ser continuas solamente. De hecho, la inversión es un homeomorfismo y las dos proyecciones son aplicaciones de identificación, tal como se observa en la siguiente:

Proposición 5.1.3. *En un grupoide topológico, la inversión es homeomorfismo y las proyecciones origen y destino son aplicaciones de identificación.*

Demostración. La inversión es un homeomorfismo debido a que es continua y su función inversa (que coincide con ella misma) también lo es.

A continuación, se demostrará que las proyecciones son aplicaciones de identificación. En primer lugar, ambas son sobreyectivas, por lo que sólo queda probar que tanto la topología final de α como la de β coinciden con la topología del espacio base B del grupoide.

Con respecto a la proyección origen $\alpha : \Omega \longrightarrow B$, es conocido que si U es un abierto de B, entonces $\alpha^{-1}(U)$ es un abierto de Ω. Por lo que, si dado $\alpha^{-1}(U)$ abierto en Ω, se prueba que U es abierto en B, entonces se habrá demostrado lo que se quiere.

En efecto, es conocido que $\alpha \circ \varepsilon = id_B$, con $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$ la inclusión de objetos. Por lo tanto, si $\alpha^{-1}(U)$ es un abierto de Ω entonces $\varepsilon^{-1}(\alpha^{-1}(U))$ es un abierto de B, por la continuidad de ε. Como $(\alpha \circ \varepsilon)^{-1}(A) = \varepsilon^{-1}(\alpha^{-1}(A))$, para cualquier subconjunto A de B, se tiene:

$$\varepsilon^{-1}(\alpha^{-1}(U)) = (\alpha \circ \varepsilon)^{-1}(U) = id_B(U) = U.$$

Por tanto, U es un abierto de B.

De manera análoga se demuestra que β es una aplicación de identificación, puesto que también se tiene que $\beta \circ \varepsilon = id_B$. $\square$

Seguidamente se probará que los subgrupoides base e interno son grupoides topológicos con las topologías relativas del grupoide topológico del que son subgrupoides.

Proposición 5.1.4. *Dado un grupoide topológico Ω sobre B, los subgrupoides $\widetilde{B}$ y $G\Omega$ son grupoides topológicos sobre B, siendo la topología considerada en $\widetilde{B}$ y $G\Omega$ la topología relativa de Ω.*

Demostración. La inversión $\iota : \Omega \longrightarrow \Omega : \xi \mapsto \xi^{-1}$ es continua. Se va a demostrar que $\iota_{|\widetilde{B}} : \widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{B}$ es continua y análogamente se haría para $\iota_{|G\Omega} : G\Omega \longrightarrow G\Omega$.

Sea, por tanto, un abierto U de $\widetilde{B}$. Entonces existe un abierto $\bar{U}$ de Ω tal que $U = \bar{U} \cap \widetilde{B}$. Hallando la contraimagen de U por $\iota_{|\widetilde{B}}$, se tiene que $(\iota|_{\widetilde{B}})^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B}) = \iota^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B})$, ya que ι es cerrada para $\widetilde{B}$. Por lo tanto, se llega a que:

$$\iota^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B}) = \iota^{-1}(\bar{U}) \cap \iota^{-1}(\widetilde{B}) = \iota^{-1}(\bar{U}) \cap \widetilde{B}.$$

Como ι es continua, $\iota^{-1}(\bar{U})$ es un abierto de Ω y $\iota^{-1}(\bar{U}) \cap \widetilde{B}$ es un abierto de $\widetilde{B}$.

Las proyecciones origen y destino de Ω son aplicaciones continuas de Ω en B. Por lo tanto, dichas proyecciones restringidas a $\widetilde{B}$ y a

$G\Omega$ son continuas, ya que para cada abierto U de B la contraimagen de U por la restricción de α (resp. de β) sería la contraimagen de U por α (resp. por β) intersecado por $\widetilde{B}$ y $G\Omega$, respectivamente. Pero estas intersecciones son abiertos de $\widetilde{B}$ y de $G\Omega$, respectivamente.

La inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$ es continua y obsérvese que las inclusiones de objetos $\varepsilon_1 : B \longrightarrow \widetilde{B}$ y $\varepsilon_2 : B \longrightarrow G\Omega$ de $\widetilde{B}$ y $G\Omega$, respectivamente, actúan como ε pues los elementos unidad de los tres grupoides son los mismos. Partiendo de aquí, se llegará a probar la continuidad de ε_1 (la continuidad de ε_2 se demuestra de forma análoga).

Sea un abierto U de $\widetilde{B}$. Entonces existe un abierto $\bar{U}$ de Ω tal que $U = \bar{U} \cap \widetilde{B}$. Por lo tanto:

$$\varepsilon_1{}^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B}) = \varepsilon^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B}) = \varepsilon^{-1}(\bar{U}) \cap \varepsilon^{-1}(\widetilde{B}).$$

Como ε es continua, entonces $\varepsilon^{-1}(\bar{U})$ es un abierto de Ω, y como, por definición, $\varepsilon^{-1}(\widetilde{B}) = B$, se tiene que $\varepsilon_1^{-1}(U)$ es un abierto de $\widetilde{B}$.

En último lugar, debido a la continuidad de la multiplicación parcial $\rho : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ se concluirá que las multiplicaciones parciales $\rho_1 : \widetilde{B} * \widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{B}$ y $\rho_2 : G\Omega * G\Omega \longrightarrow G\Omega$ son continuas. Como en demostraciones anteriores, sólo se probará la continuidad de ρ_1, pues la de ρ_2 es completamente análoga.

Así, sea U un abierto de $\widetilde{B}$. Existe $\bar{U}$ abierto de Ω tal que $U = \bar{U} \cap \widetilde{B}$. Como ρ_1 es la restricción de ρ a $\widetilde{B} * \widetilde{B}$ y $\rho_1{}^{-1}(U) = \rho^{-1}(U) \cap (\widetilde{B} * \widetilde{B})$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_1{}^{-1}(U) &= \rho^{-1}(\bar{U} \cap \widetilde{B}) \cap (\widetilde{B} * \widetilde{B}) \\ &= \rho^{-1}(\bar{U}) \cap \rho^{-1}(\widetilde{B}) \cap (\widetilde{B} * \widetilde{B}) = \rho^{-1}(\bar{U}) \cap (\widetilde{B} * \widetilde{B}), \end{aligned}$$

que es abierto de $\widetilde{B} * \widetilde{B}$, ya que $\rho^{-1}(\bar{U})$ es abierto de $\Omega * \Omega$ por la continuidad de ρ. $\square$

Se concluye la sección viéndose que la inclusión de objetos es un homeomorfismo del grupoide topológico en su subgrupoide base, como se observa en la siguiente:

Proposición 5.1.5. *Si Ω es un grupoide topológico sobre B, la aplicación inclusión de objetos es un homeomorfismo de la base B en el subgrupoide base $\widetilde{B}$ de Ω.*

Demostración. La inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$ verifica que $\varepsilon(B) = \widetilde{B}$. Luego puede estudiarse si su restricción sobre la imagen, $\varepsilon_1 : B \longrightarrow \widetilde{B}$, es un homeomorfismo. Obsérvese que ε_1 es la inclusión de objetos de $\widetilde{B}$ y que evidentemente es un aplicación biyectiva, pues para cada elemento de $\widetilde{B}$ existe un único elemento de B que es su contraimagen. Además, en la demostración de la Proposición 5.1.3 se demostró que la proyección origen del subgrupoide $\widetilde{B}$, denotada por $\alpha_1 : \widetilde{B} \longrightarrow B$, es inversa a izquierda de ε_1. De hecho, en el caso que se está tratando, también es inversa a derecha, ya que:

$$\varepsilon_1 \circ \alpha_1(\widetilde{x}) = \varepsilon_1(x) = \widetilde{x}.$$

Por otro lado, según la Proposición 5.1.4, α_1 es continua, por lo que ε_1 es continua y posee inversa continua; en consecuencia, es un homeomorfismo de B en $\widetilde{B}$. $\square$

5.2 Morfismos continuos

Esta sección estudia, en primer lugar, el concepto de morfismo continuo o de grupoides topológicos. Además se demostrará que los grupoides topológicos con los morfismo continuos constituyen una subcategoría de la categoría $\mathcal{G}rd$ de los grupoides.

Introducida la estructura de grupoide topológico, conviene definir los morfismos continuos a partir de la definición general de morfismo de grupoides. Considerando la definición de morfismo de grupos continuos, parece natural dar la siguiente:

Definición 5.2.1. *Se denomina* **morfismo de grupoides topológicos** *o* **morfismo continuo** *a todo morfismo de grupoides* $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ *sobre* $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$ *tal que* ϕ *y* ϕ_0 *sean continuas.*

En la Definición 5.2.1 de morfismo continuo se exige la continuidad tanto a la aplicación que actúa sobre los grupoides como a la que actúa sobre las bases. Se probará, a continuación, que sólo tiene que mirarse la continuidad en la aplicación sobre los grupoides.

Proposición 5.2.2. *No es necesario exigir la continuidad de* ϕ_0 *en la definición de morfismo continuo.*

Demostración. Se demuestra que si ε es la inclusión de objetos de Ω y α_1 es la proyección origen de Ω_1, entonces $\phi_0 = \alpha_1 \circ \phi \circ \varepsilon$.

En efecto, sea $x \in B$, entonces $\alpha_1 \circ \phi \circ \varepsilon(x) = \alpha_1 \circ \phi(\widetilde{x})$. Por ser ϕ un morfismo de grupoides, entonces $\phi(\widetilde{x})$ es igual a $\widetilde{\phi_0(x)}$, por lo que $\alpha_1 \circ \phi(\widetilde{x}) = \phi_0(x)$. Por consiguiente, ϕ_0 es composición de aplicaciones continuas siendo ésta, de este modo, continua también. □

Como en el caso de los grupoides, la composición de morfismos de grupoides volvía a ser un morfismo, cabría preguntarse si esa propiedad se cumple también para los morfismos continuos. La respuesta afirmativa a dicha pregunta viene dada por la siguiente:

Proposición 5.2.3. *La composición de dos morfismos continuos es un morfismo continuo. Es más, si los dos conservan la base, entonces la composición también la conserva.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.6, la composición de morfismos de grupoides es un morfismo de grupoides. Pero además la composición de aplicaciones continuas es continua. □

Como consecuencia de la proposición anterior, se pueden definir dos categorías a partir de los grupoides topológicos.

Corolario 5.2.4. *Existe la* **categoría** $\mathcal{TG}rd$ **de los grupoides topológicos** *en la que los objetos son los grupoides topológicos, los morfismos son los morfismos continuos y la composición es la composición de morfismos continuos.*

Igualmente, dado un espacio topológico B, existe la subcategoría llena $\mathcal{TG}rd_B$ de $\mathcal{TG}rd$ consistente en considerar como objetos a los grupoides topológicos con base B. Se la denominará **categoría de los grupoides topológicos sobre** B. □

Tratados los morfismos continuos, se pasan a definir los isomorfismos de grupoides topológicos en la siguiente:

Definición 5.2.5. *Se denomina* **isomorfismo** *de grupoides topológicos a todo morfismo de grupoides topológicos que sea además homeomorfismo.*

Nota 5.2.6. *La composición de isomorfismos de grupoides topológicos es nuevamente un isomorfismo.*

Se ofrece una caracterización de isomorfismo de grupoides topológicos por medio de la aplicación que dicho isomorfismo define sobre las bases de los grupoides.

Proposición 5.2.7. *Si $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ es un isomorfismo de grupoides topológicos, entonces la aplicación sobre las bases $\phi_0 : B \longrightarrow B'$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Recuérdese que un isomorfismo de grupoides es un morfismo de grupoides que posee un morfismo inverso $\psi : \Omega' \longrightarrow \Omega$. Por lo tanto, ϕ_0 y ψ_0 son dos aplicaciones continuas inversas entre sí. Luego ϕ_0 es un homeomorfismo. □

A continuación, se introducen los conceptos de traslación, tanto a izquierda como a derecha, y de automorfismo interno, que son el resultado de trasladar a la teoría de grupoides los conceptos que llevan ese mismo nombre en la teoría de grupos.

Definición 5.2.8. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B, y sea τ un elemento de Ω tal que $\alpha(\tau) = x$ y $\beta(\tau) = y$. Se definen:*

1. **La traslación a izquierda (resp. a derecha)** *correspondiente a τ es la aplicación $L_\tau : \Omega^x \longrightarrow \Omega^y$ tal que $\eta \mapsto \tau\eta$ (resp. $R_\tau : \Omega_y \longrightarrow \Omega_x$ tal que $\eta \mapsto \eta\tau$).*

2. *El* **automorfismo interno** *correspondiente a τ es la aplicación $I_\tau : \Omega_x^x \to \Omega_y^y$ tal que $\lambda \mapsto \tau\lambda\tau^{-1}$.*

Nótese que son aplicaciones que no actúan sobre todo el grupoide topológico, sino sobre los conjuntos de flechas o morfismos del grupoide de partida (para el concepto de flecha o morfismo de un grupoide, véase la Definición 4.1.1).

Las traslaciones y los automorfismos internos, tal como se han definido en la Definición 5.2.8, poseen la propiedad de ser homeomorfismos como se demuestra en la siguiente:

Proposición 5.2.9. *Con la notación dada en la Definición 5.2.8, las aplicaciones L_τ, R_τ e I_τ son biyectivas y bicontinuas, esto es, son homeomorfismos.*

Demostración. Dado $\tau \in \Omega$, existe su elemento inverso τ^{-1} que verifica:

$$\tau\tau^{-1} = \widetilde{y} \qquad \text{y} \qquad \tau^{-1}\tau = \widetilde{x}.$$

Entonces L_τ, R_τ e I_τ tienen como inversas a $L_{\tau^{-1}}$, $R_{\tau^{-1}}$ e $I_{\tau^{-1}}$, respectivamente. Por lo tanto, las tres aplicaciones tratadas, L_τ, R_τ e I_τ, son biyectivas.

Queda por probar la continuidad de estas tres aplicaciones. Supuesta probada la continuidad de R_τ y L_τ, se tiene la de I_τ, ya que es la composición de $L_\tau : \Omega_x^x \longrightarrow \Omega_x^y$ con $R_{\tau^{-1}} : \Omega_x^y \longrightarrow \Omega_y^y$, que son ambas continuas por ser restricciones de aplicaciones continuas.

Partiendo de este hecho, se probará sólo la continuidad de R_τ, puesto que la de L_τ se demuestra de forma completamente análoga. Primero, obsérvese que la traslación a derecha $R_\tau : \Omega_y \longrightarrow \Omega_x$ puede descomponerse como:

$$\begin{array}{ccccc} \alpha^{-1}(\{y\}) & \xrightarrow{\varphi} & \Omega * \Omega & \to & \Omega \\ \xi & \mapsto & (\xi, \eta) & \mapsto & \xi\eta\,, \end{array} \tag{5.1}$$

donde la aplicación $\Omega*\Omega \to \Omega$ es la multiplicación, que es continua.

En segundo lugar, se va a demostrar que la aplicación $\varphi : \Omega_y \longrightarrow \Omega * \Omega : \eta \mapsto (\eta, \tau)$ es continua. Para ello, hay que tener en cuenta que $\Omega * \Omega$ es subespacio de $\Omega \times \Omega$ y que la aplicación φ actúa como la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} (id_{\Omega_y}, \tau): & \Omega_y & \longrightarrow & \Omega \times \Omega \\ & \eta & \mapsto & (\eta, \tau). \end{array}$$

Por tanto, demostrada la continuidad de (id_{Ω_y}, τ), se obtiene la continuidad de φ sin más que restringir el codominio de (id_{Ω_y}, τ) a $\Omega * \Omega$. En efecto, si U es un abierto de $\Omega * \Omega$, existe un abierto $\bar{U}$ de $\Omega \times \Omega$ tal que $U = \bar{U} \cap (\Omega * \Omega)$. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(U) &= (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(\bar{U} \cap (\Omega * \Omega)) \\ &= (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(\bar{U}) \cap (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(\Omega * \Omega) \\ &= (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(\bar{U}) \cap \Omega_y = (id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(\bar{U}), \end{aligned}$$

que es un abierto de Ω_y, una vez que se demuestre que (id_{Ω_y}, τ) es continua.

Queda, pues, por demostrar la continuidad de (id_{Ω_y}, τ), que es el último punto de esta prueba. Recuérdese que una base de abiertos de $\Omega \times \Omega$ viene dada por la familia de conjuntos:

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times U_2 / U_1 \text{ y } U_2 \text{ son abiertos de } \Omega\}$$

Sea $U_1 \times U_2$ un abierto básico de $\Omega \times \Omega$. Entonces, se verifica que:

$$(id_{\Omega_y}, \tau)^{-1}(U_1 \times U_2) = \begin{cases} U_1 \cap \Omega_y, & \text{si } \tau \in U_2, \\ \varnothing, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En ambos casos se ha obtenido un abierto de Ω_y, ya que Ω_y es subespacio de Ω. Por lo tanto, (id_{Ω_y}, τ) es continua y se concluye la prueba. □

Una vez demostrado que tanto las traslaciones como los automorfismos internos son homeomorfismos, se demostrará que las α-fibras de dos elementos de la base de un grupoide son homeomorfas si existe un objeto del grupoide que los tenga por proyección origen y destino, respectivamente.

Corolario 5.2.10. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Entonces las α-fibras (respectivamente, las β-fibras) de Ω correspondientes a dos puntos $x, y \in B$ tales que existe un elemento en Ω_x^y son homeomorfas mediante traslaciones a derecha (respectivamente, a izquierda).*

Demostración. Como existe $\xi \in \Omega_x^y$, entonces se tiene la traslación a derecha $R_\xi : \Omega_y \longrightarrow \Omega_x$ (respectivamente, la traslación a izquierda $L_\xi : \Omega^x \longrightarrow \Omega^y$), que es un homeomorfismo según se vio en la Proposición 5.2.9. Pero los conjuntos Ω_x y Ω^x son, respectivamente, las α-fibras y las β-fibras, con lo que queda demostrada la proposición. □

Otra propiedad que también tienen los automorfismos internos de un grupoide topológico es que son isomorfismos de grupo entre los grupos-vértice del grupoide topológico dado.

Corolario 5.2.11. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Entonces sus automorfismos internos son isomorfismos de grupos.*

Demostración. El automorfismo interno $I_\xi : \Omega_x^x \longrightarrow \Omega_y^y$ es biyectivo, en virtud de la Proposición 5.2.9. Por lo tanto, sólo queda probar que cumple los axiomas de morfismo de grupos. De este modo, dados ζ, η dos elementos de Ω_x^x se tiene que:

$$I_\xi(\zeta\eta) = \xi(\zeta\eta)\xi^{-1} = (\xi\zeta\xi^{-1})(\xi\eta\xi^{-1}) = I_\xi(\zeta)I_\xi(\eta),$$

y también que:

$$I_\xi(\widetilde{x}) = \xi\widetilde{x}\xi^{-1} = \widetilde{x}.$$ □

En el Corolario 5.2.10 se establecían homeomorfismos entre dos α-fibras por un lado y entre dos β-fibras por el otro. La siguiente proposición permite relacionar las α-fibras con las β-fibras estableciendo homeomorfismos entre las unas y las otras.

Proposición 5.2.12. *En un grupoide topológico cada α-fibra es homeomorfa a la β-fibra correspondiente por medio de la inversión.*

Demostración. En virtud de la Proposición 5.1.3, la inversión $\iota : \Omega \longrightarrow \Omega$ es un homeomorfismo. Como ι lleva biyectivamente a Ω_x en Ω^x, restringiendo la inversión a $\iota : \Omega_x \longrightarrow \Omega^x$ se obtiene el homeomorfismo que se buscaba. □

Cuando la base del grupoide es un espacio T_1 o Haussdorff, se puede probar la siguiente propiedad de las α y β-fibras:

Proposición 5.2.13. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Si la base B es un espacio T_1, entonces las α-fibras y las β-fibras de Ω son subespacios cerrados de Ω.*

Demostración. Si B es T_1 entonces los subconjuntos unitarios de B son cerrados de B. Como las proyecciones origen y destino son continuas, entonces $\alpha^{-1}(\{x\})$ y $\beta^{-1}(\{y\})$ son cerrados en Ω. Pero estos conjuntos son las α-fibras y las β-fibras, respectivamente. □

A continuación, se estudiarán los subgrupoides de un grupoide topológico y se verá que estos subgrupoides son también grupoides topológicos si se considera la topología relativa del grupoide del que es subgrupoide.

Proposición 5.2.14. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Si Ω_1 es un subgrupoide de Ω sobre una base B_1, entonces Ω_1 es grupoide topológico sobre B_1 con esa misma estructura y considerando la topologías relativas de Ω y B sobre Ω_1 y B_1, respectivamente.*

Demostración. Recuérdese que la estructura del subgrupoide es la del grupoide restringida al subgrupoide. Por lo tanto las cinco aplicaciones que definen al subgrupoide como grupoide son las restricciones de las del grupoide de partida, a saber: la proyección origen α, la proyección destino β, la inclusión de objetos ε, la inversión ι y la multiplicación ρ. Se sabe que estas aplicaciones son continuas por la definición de grupoide topológico. En consecuencia, hay que probar que las restricciones son también continuas.

En primer lugar, se verá la continuidad de la proyección $\alpha_{|\Omega_1} : \Omega_1 \longrightarrow B_1$. Sea U un abierto de B_1, entonces $U = \bar{U} \cap B_1$ con $\bar{U}$ un abierto de B. Se va a ver que ${\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(U)$ es un abierto. Para ello, obsérvese que se verifica:

$$ {\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = \alpha^{-1}(\bar{U}) \cap \Omega_1. $$

En efecto, por un lado, se tiene que:

$$ {\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = {\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(\bar{U} \cap B_1) = {\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(\bar{U}) \cap {\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(B_1), $$

y, por el otro, que ${\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(\bar{U}) = \alpha^{-1}(\bar{U}) \cap \Omega_1$ y que ${\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(B_1) = \Omega_1$. Como α es continua, $\alpha^{-1}(\bar{U})$ es un abierto de Ω y, por tanto, ${\alpha_{|\Omega_1}}^{-1}(U)$ es un abierto de Ω_1. En consecuencia, $\alpha_{|\Omega_1}$ es continua.

En segundo lugar, se estudiará la continuidad de $\iota_{|\Omega_1} : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$. Sea U un abierto de Ω_1, entonces $U = \bar{U} \cap \Omega_1$ con $\bar{U}$ un abierto de

Ω. Se tiene entonces que ${\iota_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = \iota^{-1}(U)$ puesto que la inversión ι es biyectiva y cerrada para Ω_1 por ser subgrupoide. Además, se tiene que:

$$\iota^{-1}(U) = \iota^{-1}(\bar{U}) \cap \iota^{-1}(\Omega_1) = \iota^{-1}(\bar{U}) \cap \Omega_1.$$

Por lo tanto, ${\iota_{|\Omega_1}}^{-1}(U)$ es un abierto de Ω_1 y la aplicación $\iota_{|\Omega_1}$ es continua.

La continuidad de $\beta_{|\Omega_1}$ se obtiene de la continuidad de $\alpha_{|\Omega_1}$ y de $\iota_{|\Omega_1}$ mediante la Proposición 5.1.2.

A continuación, se demostrará la continuidad de $\varepsilon_{|\Omega_1} : B_1 \longrightarrow \Omega_1$. Sea U un abierto de Ω_1, entonces $U = \bar{U} \cap \Omega_1$, con $\bar{U}$ un abierto de Ω. Por la definición de ε y de su restricción $\varepsilon_{|\Omega_1}$, se puede afirmar que ${\varepsilon_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = \varepsilon^{-1}(U)$, ya que las unidades de un grupoide están en biyección con su base mediante la aplicación ε inclusión de objetos, en virtud de la Proposición 5.1.5. Por lo tanto, se tiene:

$${\varepsilon_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = \varepsilon^{-1}(\bar{U} \cap \Omega_1) = \varepsilon^{-1}(\bar{U}) \cap \varepsilon^{-1}(\Omega_1) = \varepsilon^{-1}(\bar{U}) \cap B_1,$$

que es un abierto de B_1, ya que $\varepsilon^{-1}(\bar{U})$ es un abierto de B. Por lo tanto, $\varepsilon_{|\Omega_1}$ es continua.

En último lugar, se verá la continuidad de $\rho_{|\Omega_1} : \Omega_1 * \Omega_1 \longrightarrow \Omega_1$. Sea U un abierto de Ω_1, entonces existe $\bar{U}$ abierto de Ω tal que $U = \bar{U} \cap \Omega$. Además, se tiene que ${\rho_{|\Omega_1}}^{-1}(U) = \rho^{-1}(\bar{U}) \cap (\Omega_1 * \Omega_1)$, ya que tanto ρ como $\rho_{|\Omega_1}$ actúan de igual manera sobre $\Omega_1 * \Omega_1$ y se cumple la siguiente cadena lógica:

$$\begin{aligned}(\eta, \xi) \in {\rho_{|\Omega_1}}^{-1}(U) &\Leftrightarrow (\eta, \xi) \in \Omega_1 * \Omega_1 \ \wedge \ \rho_{|\Omega_1}(\eta, \xi) = \rho(\eta, \xi) \in \bar{U} \\ &\Leftrightarrow (\eta, \xi) \in \rho^{-1}(\bar{U}) \cap (\Omega_1 * \Omega_1).\end{aligned}$$

Como ρ es continua, entonces $\rho^{-1}(\bar{U})$ es un abierto de $\Omega * \Omega$ y, por tanto, ${\rho_{|\Omega_1}}^{-1}(U)$ es un abierto de $\Omega_1 * \Omega_1$. En consecuencia, $\rho_{|\Omega_1}$ es continua. $\square$

Debido a esta proposición, en la que se ha demostrado que todo subgrupoide de un grupoide topológico resulta ser también un grupoide topológico, tiene sentido dar la siguiente definición de subgrupoide topológico.

Definición 5.2.15. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Se denomina* **subgrupoide topológico** *de Ω a un subgrupoide Ω' sobre B' de Ω tal que Ω' está dotado con la topología relativa como subespacio de Ω y B' con la topología relativa como subespacio de B.*

Nota 5.2.16. *Por la Proposición 5.2.14, se tiene que todo subgrupoide de un grupoide topológico es un subgrupoide topológico de dicho grupoide.*

Para finalizar esta sección, se indica un ejemplo de subgrupoide topológico a partir de considerar como base del subgrupoide un subconjunto de la base del grupoide de partida.

Ejemplo 5.2.17. *Si Ω es un grupoide topológico sobre B y U es un subconjunto de B, entonces Ω_U^U es subgrupoide topológico de Ω con base U. La estructura de subgrupoide es la vista en el Ejemplo 4.2.15. Un caso particular se tiene cuando U es un abierto de B.*

5.3 Pullback y grupoide topológico cociente

En la Sección 4.3 del Capítulo 4, se introdujo el concepto de grupoide cociente para factorizar los morfismos de grupoides de forma análoga a la factorización que se tiene para morfismos de grupos. Cuando el morfismo de grupoides era base-biyectivo se obtenía una factorización al estilo de la que se buscaba; pero cuando el morfismo no era base-biyectivo, entonces se tuvo que introducir el concepto auxiliar de morfismo pullback para obtener una factorización.

En el caso de los grupoides topológicos, la factorización mediante el morfismo universal dada para los grupoides sigue siendo válida, como puede verse en **[10]**. En esta monografía estudiaremos la factorización mediante los morfismos pullbacks como ya se hizo en la Sección 4.3. No obstante, al tratar de factorizar morfismos continuos aparecen mayores complicaciones a la hora de dar validez a los resultados 4.3.14 a 4.3.19, tal como se observará en esta sección.

Definición 5.3.1. *Sea $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ un morfismo de grupoides topológicos. Se dice que ϕ es un* **pullback** *si para todo morfismo $\psi : \Phi \longrightarrow \Omega'$ de grupoides topológicos, tal que $\psi_0 = \phi_0 : B \longrightarrow B'$, existe un único morfismo de grupoides topológicos $\overline{\psi} : \Phi \longrightarrow \Omega$ sobre B, tal que $\psi = \phi \circ \overline{\psi}$; esto es, el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{\psi} & \Omega' \\ {\scriptstyle\bar{\psi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ \Omega & = & \Omega \end{array}$$

es conmutativo.

Nota 5.3.2. *Obsérvese que la Definición 5.3.1 viene dada por medio de una propiedad universal.*

La siguiente proposición sirve para, dados un grupoide topológico Ω sobre B y una aplicación continua $f : \bar{B} \longrightarrow B$, dotar a la **imagen inversa** del grupoide por esta aplicación de una estructura de grupoide topológico.

Proposición 5.3.3. *Si Ω es un grupoide topológico sobre B y $f: \bar{B} \longrightarrow B$ es una aplicación continua, entonces $f^*\Omega$ con la topología relativa como subespacio de $\bar{B} \times \Omega \times \bar{B}$ es grupoide topológico sobre $\bar{B}$ y $\widetilde{f} : f^*\Omega \longrightarrow \Omega$ es un morfismo de grupoides y un pullback.*

Demostración.

1. **En primer lugar se debe demostrar que $f^*\Omega$ es un grupoide topológico.** De hecho, en virtud de la Definición 4.3.20, sólo queda probar que las cinco aplicaciones que definen la estructura de grupoide son continuas. Con la notación de la Definición 4.3.20, la proyección origen es continua porque si U es un abierto de $\bar{B}$, entonces $\alpha_1^{-1}(U) = (\bar{B} \times \Omega \times U) \cap f^*\Omega$, que es un abierto de $f^*\Omega$ por ser $\bar{B} \times \Omega \times U$ un abierto de $\bar{B} \times \Omega \times \bar{B}$.

   Para ver la continuidad de la inclusión de objetos $\varepsilon' : \bar{B} \longrightarrow f^*\Omega$, se ha de considerar en $\bar{B} \times \Omega \times \bar{B}$ la base de abiertos formada por:

   $$\mathcal{A} = \{B_1 \times \Omega_1 \times B_2 \mid B_1, B_2 \text{ son abiertos en } \bar{B} \\ \wedge\ \Omega_1 \text{ es un abierto en } \Omega\}.$$

   De este modo, se tiene la siguiente base de abiertos en $f^*\Omega$:

   $$\mathcal{B} = \{f^*\Omega \cap \bar{U} \mid \bar{U} \in \mathcal{A}\},$$

   y la continuidad de $\bar{\varepsilon}$ se reduce a estudiar si es abierto en $\bar{B}$ la contraimagen de cualquier abierto perteneciente a $\mathcal{B}$.

   Sea pues $U = (B_1 \times \Omega_1 \times B_2) \cap f^*\Omega$ un elemento de $\mathcal{B}$. Si ε es la inclusión de objetos de Ω, puede afirmarse que:

   $$\bar{\varepsilon}^{-1}(U) = B_1 \cap B_2 \cap f^{-1}(\varepsilon^{-1}(\Omega_1)),$$

   puesto que los elementos de $f^*\Omega$ con contraimagen por $\bar{\varepsilon}$ son las unidades del grupoide y por la relación entre las proyecciones origen y destino de $f^*\Omega$ con las de Ω, respectivamente (véase la Definición 4.3.20). Por ser f y g aplicaciones continuas, se tiene que $f^{-1}(\varepsilon^{-1}(\Omega_1))$ es un abierto en $\bar{B}$ y, en consecuencia, $\bar{\varepsilon}^{-1}(U)$ es un abierto en $\bar{B}$.

A continuación, se verá que la inversión $\bar{\iota}$ en $f^*\Omega$ es continua. En efecto, si $U = f^*\Omega \cap (B_1 \times \Omega_1 \times B_2)$ es un abierto perteneciente a $\mathcal{B}$, entonces se tiene:

$$\bar{\iota}^{-1}(U) = f^*\Omega \cap (B_2 \times \iota^{-1}(\Omega_1) \times B_1),$$

donde ι es la inversión en Ω. Esto se debe a que la definición de la inversión en $f^*\Omega$ es la dada por $(x', \iota(\xi), y')$ para cualquier (y', ξ, x'). Al ser ι continua, se tiene que $B_2 \times \iota^{-1}(\Omega_1) \times B_1$ es un abierto de $\bar{B} \times \Omega \times \bar{B}$ y, en consecuencia, $\bar{\iota}^{-1}(U)$ es abierto de $f^*\Omega$.

Por la continuidad de $\bar{\alpha}$ y de $\bar{\iota}$, se tiene asegurada la de la proyección destino $\bar{\beta}$, en virtud de la Proposición 5.1.2.

Para terminar de demostrar que $f^*\Omega$ es un grupoide topológico, ha de verse la continuidad de la multiplicación $\bar{\rho}$ en $f^*\Omega$. Para ello, considérese el conjunto:

$$\Lambda = \{(y', (\eta, \xi), x') \in \bar{B} \times \Omega * \Omega \times \bar{B} \mid \alpha(\xi) = x', \beta(\eta) = y'\}.$$

También se considerarán las aplicaciones auxiliares:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{F}: & f^*\Omega * f^*\Omega & \longrightarrow & \Lambda \\ & ((z', \eta, y'), (y', \xi, x')) & \longmapsto & (z', (\eta, \xi), x'), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} id_{\bar{B}} \times \rho \times id_{\bar{B}}: & \Lambda & \longrightarrow & f^*\Omega \\ & (z', (\eta, \xi), x') & \mapsto & (z', \eta\xi, x'). \end{array}$$

Ambas aplicaciones son continuas como se verá a continuación.

La prueba de la continuidad de F es la que sigue. Sea $U = B_1 \times \bar{U} \times B_2$ un abierto de la base natural de la topología producto en $\bar{B} \times \Omega * \Omega \times \bar{B}$. Entonces se tiene que $\bar{U} = (U_1 \times U_2) \cap \Omega * \Omega$ y que:

$$\mathrm{F}^{-1}(U) = (B_1 \times U_1 \times \bar{B} \times U_2 \times B_2) \cap f^*\Omega * f^*\Omega.$$

Obviamente, $\mathrm{F}^{-1}(U)$ es un abierto en $f^*\Omega * f^*\Omega$, con lo que F es continua.

La continuidad de $id_{\bar{B}} \times \rho \times id_{\bar{B}}$ se tiene por ser el producto de tres aplicaciones continuas con respecto a las topologías consideradas en la proposición.

En consecuencia, la aplicación $(id_{\bar{B}} \times \rho \times id_{\bar{B}}) \circ \mathrm{F} : f^*\Omega * f^*\Omega \longrightarrow f^*\Omega$ es continua. Pero esta aplicación coincide con la multiplicación $\bar{\rho}$ en $f^*\Omega$, pues dados $(z', \eta, y'), (y', \xi, x') \in f^*\Omega$ se verifica:

$$\begin{aligned}(id_{\bar{B}} \times \rho \times id_{\bar{B}}) \circ \mathrm{F}((z', \eta, y'), (y', \xi, x')) \\ = (id_{\bar{B}} \times \rho \times id_{\bar{B}})(z', (\eta, \xi), x') = (z', \eta\xi, x').\end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene que la multiplicación en $f^*\Omega$ es continua y que $f^*\Omega$ es un grupoide topológico.

2. **Hay que demostrar que $\widetilde{f}$ es un morfismo de grupoides topológicos.** Ya se vio, en la Proposición 4.3.20, que $\widetilde{f}$ es un morfismo de grupoides, por lo que sólo resta probar que $\widetilde{f} : f^*\Omega \longrightarrow \Omega$ es continua. Así, si U es un abierto de Ω, se tiene que:
$$\widetilde{f}^{-1}(U) = f^*\Omega \cap (\bar{B} \times U \times \bar{B}),$$
por lo que $\widetilde{f}^{-1}(U)$ es un abierto de $f^*\Omega$.

3. **Hay que demostrar que $\widetilde{f}$ es un pullback.** En virtud del Corolario 4.3.24, se tiene que $\widetilde{f}$ es un pullback en la categoría $\mathcal{G}rd$ de los grupoides. Por lo tanto, dado $\psi : \Phi \longrightarrow \Omega$ un morfismo continuo, existe un único $\bar{\psi} : \Phi \longrightarrow f^*\Omega$ tal que $\psi = \widetilde{f} \circ \bar{\psi}$. Pero si es un pulback con respecto a los morfismos continuos, la factorización debe de ser la misma puesto que los morfismos continuos son también morfismos de grupoides. En

consecuencia, debe probarse que el morfismo $\bar{\psi}$ es continuo. Recuérdese que la construcción de este morfismo se realizó en la Proposición 4.3.23 y que consistía en lo que se indica en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi \longrightarrow & \Omega & \longrightarrow & f^*\Omega \\ \xi \mapsto & \psi_{\bar{\alpha}(\xi)}^{\bar{\beta}(\xi)}(\xi) = \psi(\xi) & \mapsto & (f(\beta(\psi(\xi))), \psi(\xi), f(\alpha(\psi(\xi)))). \end{array}$$

En consecuencia, se tiene que $\bar{\psi}$ funciona como la aplicación definida como $\xi \mapsto (f \circ \beta \circ \psi, \psi, f \circ \alpha \circ \psi)(\xi)$, que es una aplicación continua. □

Una vez demostrada la proposición anterior, se está en condiciones de introducir el concepto de grupoide imagen inversa para los grupoides topológicos, tal como se muestra en la siguiente:

Definición 5.3.4. *Con la notación de la proposición anterior, el grupoide $f^*\Omega$ se denomina* **grupoide imagen inversa de Ω por** *f y al morfismo de grupoides $\widetilde{f}$ se lo denomina* **morfismo imagen inversa**.

Recuérdese que, en el caso de un grupoide, se verificaba que el morfismo imagen inversa era biyectivo a trozos. Para grupoides topológicos se tiene un resultado análogo. En concreto, el morfismo imagen inversa va a ser homeomorfismo a trozos como se afirma en la siguiente:

Proposición 5.3.5. *El morfismo imagen inversa $\widetilde{f}: f^*\Omega \longrightarrow \Omega$ es un homeomorfismo a trozos.*

Demostración. Dado $f : \bar{B} \longrightarrow B$, se probará que $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo a trozos. En efecto, se tiene que $\widetilde{f}$ es biyectivo a trozos y continuo a trozos (pues es continua de forma global).

Por lo tanto, si se demuestra que $\widetilde{f}$ es abierta a trozos quedará probada la proposición.

Sea, pues, un abierto U en $(f^*\Omega)^y_x$. Entonces $U=\{y\}\times\bar{U}^y_x\times\{x\}$ con $\bar{U}$ un abierto en Ω y $\bar{U}^y_x = \bar{U}\cap\Omega^{f(y)}_{f(x)}$, que es abierto en $\Omega^{f(y)}_{f(x)}$. Por lo tanto, $\widetilde{f}(U) = \bar{U}^y_x$, que es abierto en $\Omega^{f(y)}_{f(x)}$. En conclusión $\widetilde{f}$ es abierta a trozos. □

Se demostró en la Proposición 4.3.23 que un morfismo de grupoides era un pullback si y sólo si era una biyección a trozos. Para morfismos continuos sólo se tiene la condición necesaria análoga para que un morfismo continuo sea un pullback:

Proposición 5.3.6. *Si un morfismo continuo es un pullback, entonces es un homeomorfismo a trozos.*

Demostración. Si ϕ es un pullback, la aplicación continua ϕ_0 (la aplicación sobre las bases de los grupoides relacionados por ϕ), induce el pullback $\widetilde{\phi_0}$ que es homeomorfismo a trozos en virtud de la Proposición 5.3.5. Haciendo uso del razonamiento aplicado en la demostración de la Proposición 4.3.23, se obtiene la existencia de morfismos continuos $\psi_1 : \Omega \longrightarrow \phi_0^*\bar{\Omega}$ y $\psi_2 : \phi_0^*\bar{\Omega} \longrightarrow \Omega$ tales que $\phi = \widetilde{\phi_0}\circ\psi_1$ y $\widetilde{\phi_0} = \phi\circ\psi_2$. Por lo tanto, $\psi_1\circ\psi_2$ y $\psi_2\circ\psi_1$ son identidades y ψ_1 es un homeomorfismo entre Ω y $\phi_0^*\bar{\Omega}$; en particular, ψ_1 es un homeomorfismo a trozos. Como $\widetilde{\phi_0}$ es homeomorfismo a trozos, entonces ϕ es homeomorfismo a trozos, por composición. □

Nota 5.3.7. *Al contrario que en la Proposición 4.3.23, no se ha demostrado aún que todo homeomorfismo a trozos es un pullback, ni se ha conseguido un contraejemplo de esta situación.*

En este punto, sólo quedaría factorizar morfismos continuos que conserven la base (aunque esta factorización no sirva para generalizar resultados de morfismos continuos que conserven bases al caso de morfismos continuos en general). Para llegar a tal factorización, se definen los grupoides cociente topológicos.

Definición 5.3.8. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B y Φ un subgrupoide normal. Un grupoide topológico Ψ y un morfismo continuo $\nu : \Omega \longrightarrow \Psi$ se dicen* **grupoide cociente topológico** *Ω/Φ y* **proyección natural** *$\natural : \Omega \longrightarrow \Omega/\Phi$ si para cada morfismo de grupoides topológicos $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ sobre $\phi_0 : B \longrightarrow B_1$ tal que $\phi(\Phi) \subseteq \widetilde{B_1}$, existe un único morfismo de grupoides topológicos $\bar{\phi} : \Psi \longrightarrow \Omega_1$ tal que $\bar{\phi} \circ \nu = \phi$; esto es, el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\phi"'] & \Psi \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\ \Omega' \arrow[r, equal] & \Omega' \end{tikzcd}$$

Nótese que un grupoide cociente topológico no necesariamente coincide con el grupoide cociente algebraico, definido en la Proposición 4.3.6. Este hecho difiere de lo conocido para teoría de grupos topológicos. De hecho, si G es un grupo topológico y H un subgrupo normal suyo, se tiene que G/H, con la topología de identificación, es el grupo topológico cociente, ya que la proyección natural $G \longrightarrow G/H$ es abierta. Es precisamente en este punto donde reside el problema principal para la teoría de grupoides topológicos: el morfismo $\natural$ no tiene que ser abierto con respecto a la topología de identificación de Ω/Φ (como puede verse en el Ejemplo 5.3.11). Además, tampoco se ha conseguido probar que, supuesto abierto el morfismo $\natural$, el grupoide Ω/Φ, con la topología de identificación, sea necesariamente el grupoide cociente. No obstante, se tiene la siguiente:

Proposición 5.3.9. *Sean Ω un grupoide topológico sobre B y Φ un subgrupoide normal suyo tal que $\natural : \Omega \longrightarrow \Omega/\Phi$ sea abierta con* *respecto a la topología de identificación de Ω/Φ y tal que el anclaje $[\beta', \alpha'] : \Phi \longrightarrow Im[\beta', \alpha']$ sea abierta en su imagen. Entonces, el grupoide cociente topológico coincide con el grupoide cociente algebraico, en el que se considera la topología de identificación.*

Demostración. Se dejará para el final demostrar que Ω/Φ es un grupoide topológico. No obstante, se supondrá demostrado para probar la propiedad de factorización del grupoide cociente. También debe recordarse que la aplicación $\natural$ es un morfismo de grupoides (véase la Proposición 4.3.9) y que además es continuo ya que la topología de identificación es la menor topología que hace continua a una aplicación.

Se pasa, pues, a probar la propiedad de factorización de un morfismo $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega_1$ con respecto a $\natural$ tal como se indica en la Definición 5.3.8. En la demostración de 1 en la Proposición 4.3.14, se definía el morfismo de grupoides:

$$\bar{\phi} : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega_1 : [\xi] \mapsto \phi(\xi).$$

Este morfismo de grupoides estaba bien definido, pues para ello sólo se requería la condición $\phi(\Phi) \subset \widetilde{B_1}$. La continuidad de $\bar{\phi}$ se demuestra a continuación.

Sea U un abierto en Ω_1, entonces se tiene que $\natural^{-1}(\bar{\phi}^{-1}(U)) = \phi^{-1}(U)$. En efecto,

$$\xi \in \natural^{-1}(\bar{\phi}^{-1}(U)) \Leftrightarrow \bar{\phi} \circ \natural(\xi) = \bar{\phi}([\xi]) = \phi(\xi) \in U \Leftrightarrow \xi \in \phi^{-1}(U).$$

Al ser ϕ un morfismo continuo, se obtiene que $\phi^{-1}(U)$ es un abierto en Ω y, por tanto, $\natural^{-1}(\bar{\phi}^{-1}(U))$ es abierto en Ω. Puesto que Ω/Φ está dotado de la topología de identificación, el conjunto $\bar{\phi}^{-1}(U)$ es un abierto en Ω/Φ. En consecuencia, $\bar{\phi}$ es un morfismo continuo.

Queda probar la unicidad de $\bar{\phi}$. Ésta se debe a que si existe otro morfismo $\psi : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega_1$, éste debe verificar que $\phi = \psi \circ \natural$. Como

$\natural$ es sobreyectiva, cualquier elemento $[\xi] \in \Omega/\Phi$ está definido por un elemento $\xi \in \Omega$ por medio de $\natural$. Por lo tanto, se tiene:

$$\psi[\xi] = \psi \circ \natural(\xi) = \phi(\xi) = \bar{\phi}[\xi],$$

con lo que $\psi = \bar{\phi}$.

Se pasa pues a demostrar que Ω/Φ es un grupoide topológico sobre B/Φ, con lo que habrá concluido la prueba. Para ello, ha de probarse la continuidad de las cinco aplicaciones que definen la estructura de grupoide:

1. Sea $\bar{\alpha} : \Omega/\Phi \longrightarrow B/\Phi$ la proyección origen de Ω/Φ y α la proyección origen en Ω. Sea U un abierto en B/Φ, entonces ${\natural_0}^{-1}(U)$ es un abierto en B por la continuidad de $\natural$. Además, se tiene que $\natural^{-1}(\bar{\alpha}^{-1}(U)) = \alpha^{-1}({\natural_0}^{-1}(U))$, ya que:

$$\begin{aligned}\xi \in \natural^{-1}(\bar{\alpha}^{-1}(U)) \Leftrightarrow \bar{\alpha}(\natural(\xi)) \in U \Leftrightarrow \bar{\alpha}(\natural(\xi)) = \bar{\alpha}([\xi]) = [\alpha(\xi)] \in U \\ \Leftrightarrow \natural_0(\alpha(\xi)) \in U \Leftrightarrow \xi \in \alpha^{-1}({\natural_0}^{-1}(U)).\end{aligned}$$

   Como α y $\natural_0$ son aplicaciones continuas, se tiene que $\alpha^{-1}({\natural_0}^{-1}(U))$ y, por tanto, $\natural^{-1}(\bar{\alpha}^{-1}(U))$ son abiertos en Ω. En consecuencia, $\bar{\alpha}^{-1}(U)$ es un abierto en Ω/Φ, por tener en Ω/Φ la topología de identificación. Por lo tanto, $\bar{\alpha}$ es continua.

2. Se probará que la inversión $\bar{\iota} : \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega/\Phi$ es continua. Sea ι la inversión en Ω, que se sabe continua. Sea U un abierto en Ω/Φ, entonces se tiene $\natural^{-1}(\bar{\iota}^{-1}(U)) = \iota^{-1}(\natural^{-1}(U))$, ya que se verifica:

$$\begin{aligned}\xi \in \natural^{-1}(\bar{\iota}^{-1}(U)) \Leftrightarrow \bar{\iota}(\natural(\xi)) = [\xi]^{-1} = [\xi^{-1}] = \natural(\xi^{-1}) = \natural(\iota(\xi)) \in U \\ \Leftrightarrow \xi \in \iota^{-1}(\natural^{-1}(U)).\end{aligned}$$

   La continuidad de $\natural$ y de ι demuestra que $\iota^{-1}(\natural^{-1}(U))$ y, por tanto, $\natural^{-1}(\bar{\iota}^{-1}(U))$ son abiertos en Ω. Dada la topología de identificación sobre Ω/Φ, se tiene que $\bar{\iota}^{-1}(U)$ es abierto en Ω/Φ. Esto concluye la continuidad de $\bar{\iota}$.

3. La proyección destino $\bar{\beta}$ en Ω/Φ es continua en virtud de la Proposición 5.1.2.

4. Se estudia ahora la continuidad de la inclusión de objetos $\bar{\varepsilon} : B/\Phi \longrightarrow \Omega/\Phi$. Para ello, considérese la inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$ y un abierto U en Ω/Φ. Se tiene que ${\natural_0}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{-1}(U)) = \varepsilon^{-1}(\natural^{-1}(U))$, puesto que:

$$x \in {\natural_0}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{-1}(U)) \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}(\natural_0(x)) = \bar{\varepsilon}[x] = \widetilde{[x]} = [\widetilde{x}] = \natural(\varepsilon(x)) \in U \\ \Leftrightarrow x \in \varepsilon^{-1}(\natural^{-1}(U)).$$

La continuidad de $\natural$ y ε implica que ${\natural_0}^{-1}(\bar{\varepsilon}^{-1}(U)) = \varepsilon^{-1}(\natural^{-1}(U))$ es un abierto en B y que, por tanto, $\bar{\varepsilon}^{-1}(U)$ es un abierto en B/Φ con la topología de identificación de $\natural_0$. En consecuencia, $\bar{\varepsilon}$ es continua.

5. Queda probar la continuidad de la multiplicación $\bar{p} : \Omega/\Phi * \Omega/\Phi \longrightarrow \Omega/\Phi$ en Ω/Φ. Se tomará como base las indicaciones dadas en la prueba del Teorema 1.6 del Capítulo III de **[31]**. En primer lugar, sea D el conjunto:

$$(\natural \times \natural)^{-1}(\Omega/\Phi * \Omega/\Phi) = \{(\eta, \xi) \in \Omega \times \Omega \mid \exists \zeta \in \Phi \text{ tal que } \\ \eta\zeta^{-1}\xi \text{ está definido}\}.$$

En segundo lugar, se probará que la aplicación $\natural \times \natural_{|D} : D \longrightarrow \Omega/\Phi * \Omega/\Phi$ es abierta. En efecto, como la aplicación $\natural$ es abierta por hipótesis, la aplicación $\natural \times \natural : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega/\Phi \times \Omega/\Phi$ es abierta. Obsérvese que $\natural \times \natural(D)$ coincide con $\Omega/\Phi * \Omega/\Phi$ por la propia definición de D. Entonces $\natural \times \natural_{|D}$ es la restricción de $\natural \times \natural$ a D y su imagen. Sea, por tanto, U un abierto en D, se tiene que $U = \bar{U} \cap D$ con $\bar{U}$ un abierto en $\Omega \times \Omega$. Además, se verifica:

$$\natural \times \natural_{|D}(U) = \natural \times \natural(U) = \natural \times \natural(\bar{U} \cap D).$$

Y se va a probar que:

$$\natural \times \natural(\bar{U} \cap D) = \natural \times \natural(\bar{U}) \cap \natural \times \natural(D).$$

En efecto, como la inclusión a la derecha ya se tiene, queda por demostrar la inclusión a la izquierda. Sea $[\xi] \in \natural \times \natural(\bar{U}) \cap \natural \times \natural(D)$, entonces se tiene que $[\xi]$ es un elemento de $\Omega/\Phi * \Omega/\Phi$ y existe un elemento (η, ζ) de $\bar{U}$ tal que $\natural \times \natural(\eta, \zeta) = [\xi]$. Por lo tanto, al ser D saturado para $\natural \times \natural$ se tiene:

$$D = (\natural \times \natural)^{-1}(\natural \times \natural)(D) = (\natural \times \natural)^{-1}(\Omega/\Phi * \Omega/\Phi),$$

por lo que (η, ζ) pertenece a $D \cap \bar{U}$ y $[\xi]$ pertenece a $\natural \times \natural(\bar{U} \cap D)$. En consecuencia, $\natural \times \natural_{|D}(U)$ es un abierto en $\Omega/\Phi \times \Omega/\Phi$, por ser $\natural \times \natural(\bar{U})$ un abierto en $\Omega \times \Omega$.

En tercer lugar, sea M' el conjunto $\mathrm{im}[\beta', \alpha']$, que es un subconjunto de $B \times B$. Se tiene que D coincide con $(\alpha \times \beta)^{-1}(M') \subset \Omega \times \Omega$, ya que:

$$\begin{aligned}
(\eta, \xi) \in D &\Leftrightarrow \exists \zeta \in \Phi \text{ tal que } \eta\zeta\xi \text{ está definido} \\
&\Leftrightarrow \exists \zeta \in \Phi \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{c} \beta'(\zeta) = \beta(\zeta) = \alpha(\eta) \\ \alpha'(\zeta) = \alpha'(\zeta) = \beta(\xi) \end{array} \right\} \\
&\Leftrightarrow \exists \zeta \in \Phi \text{ tal que } (\eta, \xi) \in (\alpha \times \beta)^{-1}(\beta'\zeta, \alpha'\zeta) \\
&\Leftrightarrow (\eta, \xi) \in (\alpha \times \beta)^{-1}(M').
\end{aligned}$$

Sea $\bar{D}$ el conjunto $\{(\eta, \zeta, \xi) \in \Omega \times \Phi \times \Omega \mid \eta\zeta\xi \text{ está definido}\}$. Entonces se tiene que $\bar{D}$ es el pullback dado por el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bar{D} \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[d, "\alpha \times \beta_{|D}"] \\
\Phi \arrow[r, "{[\beta', \alpha']}"] & M'
\end{tikzcd}$$

En efecto, el pullback de estas dos aplicaciones es el conjunto:

$$D_1 = \{(\zeta, (\eta, \xi)) \in \Phi \times D \mid [\alpha', \beta'](\zeta) = (\alpha \times \beta)(\eta, \xi)\}$$

(véase **[41]**). Como decir que $[\beta', \alpha'](\zeta) = (\alpha, \beta)(\eta, \xi)$ equivale a que $\eta\zeta\xi$ esté definido, entonces $\bar{D}$ es homeomorfo a D_1 de forma natural, ya que D coincide con $(\alpha \times \beta)^{-1}(M')$.

Se verá ahora que, al ser $[\beta', \alpha'] : \Phi \longrightarrow M'$ abierta, la aplicación del pullback $p : \bar{D} \longrightarrow D : (\eta, \zeta, \xi) \mapsto (\eta, \xi)$ es abierta. En efecto, sea A un abierto de $\bar{D}$, entonces A es de la forma $(A_1 \times A_2) \cap \bar{D}$, con A_1 un abierto en Φ y A_2 un abierto de D. Entonces $q(A)$ coincide con $\{\xi \in A_1 \mid [\beta', \alpha'](\xi) \in A_2\}$, donde $q : \bar{D} \longrightarrow \Phi$ es la otra aplicación del pullback. Por lo tanto, $q(A)$ coincide con $A_1 \cap [\beta', \alpha']^{-1}(A_2)$ que es un abierto de Φ. Como $[\beta', \alpha']$ es abierto, entonces $[\beta', \alpha'](q(A))$ es un abierto en M' y la continuidad de $\alpha \times \beta_{|D}$ asegura que $(\alpha \times \beta_{|D})^{-1}([\beta', \alpha'](q(A)))$ es un abierto en D. Por lo tanto p es abierta.

Considérese ahora la aplicación:

$$\theta : \bar{D} \longrightarrow \Omega : (\eta, \zeta, \xi) \mapsto \eta\zeta\xi,$$

que es precisamente la restricción de $\rho \circ (\rho \times id_\Omega) : (\Omega \times \Omega) \times \Omega \longrightarrow \Omega$ al dominio $\bar{D}$, que posee la topología de subespacio topológico de $\Omega \times \Omega \times \Omega$. En consecuencia, θ es continua.

Si se tiene en cuenta el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\bar{D} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & & \Omega \arrow[dd, "\natural"] \\
D \arrow[d, "\natural \times \natural_{|D}"'] & & \\
\Omega/\Phi * \Omega/\Phi \arrow[rr, "\bar{\rho}"] & & \Omega/\Phi
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

al ser $\natural$ y θ continuas, dado un abierto U en Ω/Φ, entonces $\theta^{-1}(\natural^{-1}(U))$ es un abierto en $\bar{D}$. Por la conmutatividad del diagrama (5.2), se verifica:

$$\theta^{-1}(\natural^{-1}(U)) = p^{-1}(\natural \times \natural_{|D}^{-1}(\bar{\rho}^{-1}(U))).$$

De aquí se obtiene:

$$\bar{\rho}^{-1}(U) = (\natural \times \natural_{|D}) \circ p(\theta^{-1}(\natural^{-1}(U))),$$

que es un abierto en $\Omega/\Phi * \Omega/\Phi$, ya que se ha visto que tanto p como $\natural \times \natural_{|D}$ son aplicaciones abiertas. En consecuencia, la multiplicación en Ω/Φ es continua. □

Nota 5.3.10. *Brown y Hardy en* **[10]** *demuestran que los grupoides topológicos cociente siempre existen, aunque la topología de Ω/Φ no tiene que ser la de identificación dada por el morfismo $\natural$. El ejemplo que utilizan es el de los morfismos de grupoides triviales que aparece en el Ejemplo 5.3.11, aunque en esta monografía no se probará este hecho.*

La presente sección concluye con una serie de ejemplos en los que aparecen los conceptos considerados hasta este momento.

Ejemplo 5.3.11. *Si G es un grupo topológico y B es un espacio topológico, entonces el* **grupoide trivial** *sobre B con grupo G, es decir, $B \times G \times B$, es un grupoide topológico con la topología producto. La descripción de los morfismos de grupoides triviales dada en el Ejemplo 4.2.11 sigue siendo cierta si el morfismo de grupos f y la aplicación θ son continuas.*

Ejemplo 5.3.12. *Sea X una relación de equivalencia sobre un espacio topológico B. En el Ejemplo 4.3.26 se veía que X es un subgrupoide normal de $B \times B$ y que se podía identificar el grupoide (algebraico) $\frac{B\times B}{X}$ con el grupoide producto $\frac{B}{X} \times \frac{B}{X}$ e igualmente la* *proyección natural* $\natural : B\times B \longrightarrow \frac{B\times B}{X}$ *con* $p\times p : B\times B \longrightarrow \frac{B}{X}\times\frac{B}{X}$, *siendo* $p : B \longrightarrow \frac{B}{X}$ *la proyección pertinente.*

Mackenzie en **[31]** *prueba que* $\frac{B}{X}\times\frac{B}{X}$, *con la topología producto, donde* $\frac{B}{X}$ *posee la topología de identificación de* p, *es el grupoide cociente topológico, aunque* $p\times p$ *no es necesariamente una aplicación de identificación.*

En efecto, sea $\phi : B\times B \longrightarrow \Omega'$ *un morfismo continuo sobre* $\phi_0 : B \longrightarrow B'$ *tal que* $\phi(X) \subset \widetilde{B'}$. *Elíjase* $b \in B$ *y defínase la aplicación* $\sigma : B \longrightarrow \Omega'$ *como* $\sigma(x) = \phi(x,b)$, *para cada* $x \in B$. *Entonces se tiene* $\phi(y,x) = \sigma(y)\sigma(x)^{-1}$, *para cada* $x, y \in B$. *Por lo tanto, si* $(y,x) \in X$, *entonces* $\phi(y,x) \in \widetilde{B}$; *con lo que* $\sigma(x) = \sigma(y)$. *De este modo, puede definirse:*

$$\bar{\sigma} : \frac{B}{X} \longrightarrow \Omega' : [x] \mapsto \sigma(x).$$

Ahora probamos que $\bar{\sigma}$ *es continua. Al ser* σ *continua y* $\bar{\sigma}\circ p = \sigma$, *se tiene que* $p^{-1}(\bar{\sigma}^{-1}(U))$ *es un abierto de* B, *para cada abierto* U *en* Ω'. *Por tanto,* $\bar{\sigma}^{-1}(U)$ *es un abierto de* $\frac{B}{X}$ *para cada abierto* U *en* Ω'.

La continuidad de $\bar{\sigma}$ *permite definir la aplicación:*

$$\bar{\phi} : \frac{B}{X}\times\frac{B}{X} \longrightarrow \Omega' : ([y],[x]) \mapsto \phi(x,y) = \bar{\sigma}([y])\bar{\sigma}([x])^{-1},$$

que es continua directamente. Por lo tanto, $\frac{B}{X}\times\frac{B}{X}$ *es grupoide cociente topológico.*

Ejemplo 5.3.13. *Sea* $\gamma : G\times B \longrightarrow B$ *una acción continua del grupo topológico* G *sobre el espacio topológico* B. *Entonces el grupoide acción* $G\times B$, *con la topología producto, es un grupoide topológico sobre* B. *Siguiendo la notación del Ejemplo 4.1.11, las proyecciones origen y destino,* α *y* β, *son continuas de forma inmediata.*

La aplicación inclusión de objetos, ε, es continua. En efecto, sea 1 el elemento neutro del grupo G y sea $U_1 \times U_2$ un abierto básico de $G \times B$, entonces $\varepsilon^{-1}(U_1 \times U_2)$ es un abierto de B, ya que:

$$\varepsilon^{-1}(U_1 \times U_2) = \begin{cases} U_2, & \text{si } 1 \in U_1, \\ \varnothing, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La inversión $\iota : G \times B \longrightarrow G \times B$ es continua. Si $U_1 \times U_2$ es un abierto básico de $G \times B$ entonces se verifica:

$$\iota^{-1}(U_1 \times U_2) = \overline{U}_1 \times U_2,$$

donde $\overline{U}_1$ es el conjunto definido como:

$$\overline{U}_1 = \{g^{-1} \mid g \in U_1\},$$

que es un abierto por ser la acción γ continua.

Por último, la multiplicación $p : (G \times B) * (G \times B) \longrightarrow G \times B$ del grupoide es continua. En efecto, dado que la aplicación producto $\bar{p}$ del grupo topológico G y la aplicación identidad id_B en B son continuas, entonces se verifica que la aplicación $\bar{p} \times id_B : (G \times G) \times B \longrightarrow (G \times G) \times B$ es continua y se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} (G \times B) * (G \times B) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & (G \times G) \times B \arrow[d, "\bar{p} \times id_B"] \\ G \times B \arrow[r, equal] & G \times B \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

donde la aplicación θ está definida como:

$$\theta((g_2, g_1x), (g_1, x)) = (g_2, g_1, x),$$

para cada $g_2, g_1 \in G$ y para cada $x \in B$. Se tiene que θ es continua, ya que si $U = U_1 \times U_2 \times B_1$ es un abierto básico de $(G \times G) \times B$, entonces:

$$\theta^{-1}(U) = [(U_2 \times \gamma(U_1, B_1)) \times (U_1 \times B_1)] \cap [(G * B) \cap (G * B)].$$

Pero este conjunto es abierto en $(G \times B) * (G \times B)$, *ya que* $(U_2 \times \gamma(U_1, B_1)) \times (U_1 \times B_1)$ *es abierto en* $(G \times B) \times (G \times B)$. *Todo lo anterior lleva a que la aplicación* p *es continua.*

Ejemplo 5.3.14 (Grupoide fundamental). *En el Ejemplo 4.1.13 se definía el grupoide fundamental* πB *de un espacio topológico* B. *Si se supone que* B *es arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, el grupoide fundamental es un grupoide topológico al considerarlo con la topología de identificación del espacio de los caminos continuos* $C(I; B)$ *en* B *con la topología compacto-abierta, via la proyección natural:*

$$p : C(I; B) \longrightarrow \pi B.$$

Este ejemplo se debe a Brown y Danesh-Naruie, los cuales lo estudiaron en **[8]**. *Mackenzie lo indica de nuevo en el Ejemplo 1.14 del Capítulo III de* **[31]**.

5.4 Grupoides localmente triviales

A continuación, se va a tratar sin excesiva profundidad, por razones de extensión, un tipo de grupoides topológicos que permite hacer una aclaración sobre la primera definición de grupoides de Lie, considerada por Pradines en **[44]**. Los grupoides a los que se hacen referencia son los denominados grupoides localmente triviales, cuya definición es debida a Ehresmann **[19]** y que han sido profusamente estudiados a lo largo de los años en los que ha florecido la teoría de los grupoides topológicos. El lector interesado puede tomar como referencias **[9, 19, 31]**.

Se comenzará con el concepto de grupoide topológico localmente trivial, acompañándolo de algunas nociones relacionadas con él.

Definición 5.4.1.

1. *Un grupoide topológico* Ω *sobre* B *se dice* **localmente trivial** *si existen* $b \in B$*, un recubrimiento por abiertos* $\{U_i\}$ *de* B *y aplicaciones continuas* $\sigma_i : U_i \longrightarrow \Omega_b$ *tales que* $\beta_b \circ \sigma_i = id_{U_i}$*, para todo* i*.*

2. *Las aplicaciones locales* σ_i *se denominan* **secciones locales** *de* Ω *o* **secciones descomponedoras locales**.

3. *Al conjunto de las secciones locales de* Ω*, es decir, al conjunto* $\{\sigma_i : U_i \longrightarrow \Omega_B\}$ *se le denomina* **sección-atlas** *de* Ω*.*

4. *El grupoide* Ω *se dice* **trivializable o globalmente trivial** *si existe una sección global* $\sigma : B \longrightarrow \Omega_b$ *de* Ω*.*

La introducción de grupoides topológicos localmente triviales es de interés debido a que, en ellos, cualquier problema puede reducirse a un problema local relativo a grupoides triviales, cuya resolución puede posteriormente globalizarse al grupoide de partida. El problema es que esta técnica no es extensible a grupoides topológicos en general.

El siguiente resultado consiste en una caracterización por la cual se sabe cuándo es trivial un subgrupoide de los que aparecen en el Ejemplo 5.2.17.

Proposición 5.4.2. *Sean* Ω *un grupoide topológico sobre* B *y* U *un abierto en* B*. Si una aplicación continua* $\sigma : U \longrightarrow \Omega_b$ *es una inversa a derecha de* β_b*, para algún* $b \in B$*, entonces el subgrupoide topológico* Ω_U^U *es isomorfo al grupoide trivial* $U \times \Omega_b^b \times U$ *mediante la aplicación continua:*

$$\Sigma : U \times \Omega_b^b \times U \longrightarrow \Omega_U^U : (y, \lambda, x) = \sigma(y)\lambda\sigma(x)^{-1}.$$

Recíprocamente, si G *es un grupo topológico y* $\Sigma : U \times G \times U \longrightarrow \Omega_U^U$ *es isomorfismo de grupoides topológicos* *sobre U, entonces la aplicación $\sigma : U \longrightarrow \Omega_b$ definida como $x \mapsto \sigma(x, 1, b)$ es inversa a derecha de β_b, para cualquier $b \in U$.*

Demostración. Hay que probar que Σ es una biyección tanto en los grupoides como en las bases en virtud de la Proposición 1.3.19. Si se tiene $\Sigma(y_1, \lambda_1, x_1) = \Sigma(y_2, \lambda_2, x_2)$, entonces se va a ver que $(y_1, \lambda_1, x_1) = (y_2, \lambda_2, x_2)$.

En efecto, se verifica que:

$$\beta(\Sigma(y_i, \lambda_i, x_i)) = \beta(\sigma(y_i)) = y_i, \qquad i = 1, 2,$$

puesto que σ es inversa a derecha de β_b; por lo tanto, $y_1 = y_2$. Análogamente, considerando $(x_i, \lambda_i^{-1}, y_i)$ para $i = 1, 2$, se tiene que $x_1 = x_2$. De la expresión de la aplicación Σ se llega a que $\lambda_1 = \lambda_2$.

En consecuencia, Σ induce biyecciones tanto sobre los grupoides como sobre las bases. Por lo tanto, el morfismo de grupoides es isomorfismo. Lo que queda por probar es que la inversa de Σ es continua. Pero esto es cierto, puesto que la aplicación inversa es la dada por:

$$\Sigma^{-1} : \Omega_U^U \longrightarrow U \times \Omega_b^b \times U : \xi \mapsto (\beta(\xi), \sigma(y)^{-1}\xi\sigma(x), \alpha(\xi)),$$

que es continua por serlo cada una de sus componentes.

El recíproco se demuestra directamente. □

Por último, se enumerarán algunos ejemplos de grupoides topológicos localmente triviales, muchos de los cuales ya han aparecido en secciones anteriores de esta monografía.

Ejemplo 5.4.3. *Los grupoides triviales son localmente triviales.*

El grupoide frame visto en el Ejemplo 4.1.12 es un grupoide localmente trivial. Para una demostración, véase el Ejemplo 1.13 del Capítulo II de **[31]**.

El grupoide fundamental, visto en el Ejemplo 5.3.14, es un grupoide localmente trivial. Para una demostración, se indica la lectura de **[8]** *o del Ejemplo 1.14 del Capítulo II de* **[31]**.

Igualmente, el grupoide imagen inversa de un grupoide localmente trivial es también un grupoide localmente trivial debido a la definición del grupoide imagen inversa.

5.5 Componente identidad

A continuación, se expondrá la generalización dada en **[31]**, para grupoides topológicos, de dos resultados existentes para grupos topológicos: la componente de la unidad de un grupo topológico es un subgrupo suyo y dicha componente está generada por cualquier entorno de la unidad. De este modo, se enuncia la siguiente:

Proposición 5.5.1. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B y sea Ψ_x la componente conexa de $\widetilde{x}$ en Ω_x, con $x \in B$. Entonces, $\Psi = \bigcup_{x \in B} \Psi_x$ es un subgrupoide ancho de Ω, que se denomina* **subgrupoide α-componente de la identidad** *de Ω.*

Demostración. Para cada $x \in B$, se verifica que $\widetilde{x} \in \Psi$. Por lo tanto, Ψ será un subgrupoide ancho una vez se demuestre que es un subgrupoide de Ω. Se probará esta última afirmación.

En primer lugar, dados $\xi \in \Psi_x^y$ y $\eta \in \Psi_y^z$, se tiene $\eta\xi = R_\xi(\eta)$. Por la Proposición 5.2.9, R_ξ es un homeomorfismo de Ω_y en Ω_x, por lo que la imagen por R_ξ de una componente conexa es una componente conexa. Como se cumple que $\Psi_x \cap R_\xi(\Psi_y) \neq \varnothing$, entonces se tiene $\Psi_x = R_\xi(\Psi_y)$, con lo que $\eta\xi \in \Psi_x$ y Ψ es cerrada para la multiplicación.

En segundo lugar, dado $\xi \in \Psi_x^y$, se verifica que:

$$\widetilde{y} = \xi\xi^{-1} = R_{\xi^{-1}}(\xi),$$

con lo que se tiene que $\widetilde{y} \in R_{\xi^{-1}}(\Psi_x)$. Como además $R_{\xi^{-1}}$ es un homeomorfismo, se verifica que $R_{\xi^{-1}}(\Psi_x) = \Psi_y$.

Al cumplirse la siguiente igualdad:

$$\xi^{-1} = \widetilde{x}\xi^{-1} = R_{\xi^{-1}}(\widetilde{x})$$

y ser $\widetilde{x}$ un elemento de Ψ_x, se tiene que $\xi^{-1} \in \Psi_y$. En consecuencia, Ψ es cerrado para la inversión.

Lo anterior demuestra que Ψ es subgrupoide de Ω (de hecho, es subgrupoide topológico según la Nota 5.2.16). □

Nota 5.5.2. *En general el subgrupoide Ψ definido en la Proposición 5.5.1 no es subgrupoide normal de Ω. Para ello, véase el Ejemplo 3.7 del Capítulo II de* **[31]**.

Nota 5.5.3. *De forma análoga a lo hecho en la Proposición 5.5.1, se demuestra que la β-fibra Ψ^y de Ψ es la componente conexa de $\widetilde{y}$ de la β-fibra Ω^y de Ω, para cada $y \in B$. Por lo tanto, se puede definir un subgrupoide ancho de Ω como $\bar{\Psi} = \bigcup_{y \in B} \Psi^y$, que recibe el nombre de* **subgrupoide β-componente de la identidad de Ω**.

Además, en dicha proposición, se demuestra implícitamente que la componente conexa de Ω_x que contiene a $\xi \in \Omega_x^y$ es precisamente $R_\xi(\Psi_y)$. Igualmente la componente conexa de Ω^y que contiene a dicho ξ es $L_\xi(\Psi^x)$.

Para poder llegar a un concepto en Teoría de Grupoides análogo al de *entorno de la unidad* que se conoce en Teoría de Grupos, hace falta demostrar la siguiente:

Proposición 5.5.4. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B y sea U un subconjunto de Ω que sea simétrico (es decir, $\widetilde{B} \subset U$ y $U^{-1} = U$) y tal que cada U_x es abierto en Ω_x. Entonces el subgrupoide ancho Φ generado por U verifica que Φ_x es abierto en Ω_x, para cada $x \in B$.*

Demostración. El subgrupoide Φ generado por U es el definido como:

$$\{\xi_n \cdots \xi_1 \mid \xi_i \in U,\ i = 1, \ldots, n; n \in \mathbb{N}\},$$

es decir, el conjunto formado por todos los productos finitos obtenidos con los elementos de U. Φ es un grupoide puesto que U es simétrico y, por tanto, los inversos y las unidades están en U. El hecho de que Φ es ancho se debe a $\widetilde{B} \subset U$.

Por otro lado, dado $x \in B$ y $n \in \mathbb{N}$, cada uno de los productos $\xi_n \cdots \xi_1$ de n elementos de U tal que $\alpha(\xi_1) = x$ puede escribirse como un producto de un elemento de U con un producto ζ de $n-1$ elementos de U, y viceversa. Formalmente, se puede denotar como:

$$\{\xi_n \cdots \xi_1 \mid \xi_i \in U\} = \bigcup \{R_\zeta(U_{\beta(\zeta)}) \mid \zeta \text{ es un } n-1 \text{ producto de } U\}.$$

Como $U_{\beta(\zeta)}$ es un abierto de Ω_x por hipótesis y R_ζ es un homeomorfismo para cada ζ, el conjunto de los productos de n elementos de U con proyección origen x es un abierto en Ω_x. En consecuencia, Φ_x es un abierto en Ω_x por ser unión numerable de abiertos. $\square$

De este modo, puede introducirse el concepto de α-entorno simétrico del subgrupoide identidad.

Definición 5.5.5. *Un conjunto U verificando las condiciones de la Proposición 5.5.4 se dice* α-**entorno simétrico** *de $\widetilde{B}$ en Ω.*

Esta sección se concluye probando que los α-entornos simétricos del subgrupoide identidad, definidos en la Definición 5.5.5, pueden generar a la α-componente de la identidad del grupoide topológico dado de partida. Para llegar a dicho resultado es necesaria la siguiente:

Proposición 5.5.6. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B, sea Φ un subgrupoide ancho de Ω tal que Φ_x es un abierto en Ω_x, para todo $x \in B$. Entonces Φ_x es cerrado en Ω_x, para todo $x \in B$.*

Demostración. La diferencia conjuntista $\Omega_x \setminus \Phi_x$ coincide con la unión de los conjuntos $R_\xi(\Phi_{\beta(\xi)}) = \Phi_{\beta(\xi)}\xi$, con ξ recorriendo $\Omega_x \setminus \Phi_x$. Como $\Phi_{\beta(\xi)}$ es abierto en $\Omega_{\beta(\xi)}$ y R_ξ es homeomorfismo, entonces $R_\xi(\Phi_{\beta(\xi)})$ es abierto en Ω_x. Por lo tanto, se llega a que $\Omega \setminus \Phi_x$ es unión de abiertos en Ω_x, lo que concluye la demostración. □

De este modo, se está en disposición de afirmar que cualquier α-entorno simétrico del subgrupoide identidad genera a la α-componente de la identidad como se demuestra en el siguiente:

Teorema 5.5.7. *Bajo las hipótesis de las Proposiciones 5.5.4 y 5.5.5, U genera al subgrupoide α-componente de la identidad Ψ de Ω.*

Demostración. Para cada $x \in B$, se tiene que Φ_x y Ψ_x son abiertos en Ω_x. Como tanto Ψ y Φ son subgrupoides anchos de Ω, entonces Φ_x y Ψ_x son también cerrados de Ω_x por la Proposición 5.5.6. Por lo tanto, $\Phi_x \cap \Psi_x$ es un abierto y cerrado de Φ_x, para cada $x \in B$.

Por otro lado, Ψ_x es conexo para cada $x \in B$ por ser componente conexa de Ω_x. Además, para cada $x \in B$, se tiene $\Phi_x \cap \Psi_x \neq \varnothing$, por lo que $\Phi_x \cap \Psi_x = \Phi_x$ ya que es un abierto y cerrado de Φ_x. En consecuencia, Φ y Ψ coinciden, lo que concluye la demostración. □

5.6 Secciones admisibles

Para finalizar este capítulo, se van a tratar las secciones admisibles de un grupoide topológico para poder estudiar con un poco más de profundidad las traslaciones a izquierda de un grupoide topológico. Éstas, como se verá en esta sección, se podrán identificar con las secciones admisibles mediante un isomorfismo de grupos. Se comenzará definiendo ambos conceptos, tanto el de traslación a izquierda como el de sección admisible.

Definición 5.6.1. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Se definen:*

1. **Traslación a izquierda** *sobre Ω es todo par de homeomorfismos $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega$, $\phi_0 : B \longrightarrow B$, tales que $\beta \circ \phi = \phi_0 \circ \beta$, $\alpha \circ \phi = \alpha$ y tal que, para todo $x \in B$, $\phi^x : \Omega^x \longrightarrow \Omega^{\phi_0(x)}$ es L_ξ, para algún $\xi \in \Omega_x^{\phi_0(x)}$.*

2. **Sección admisible** *de Ω es toda aplicación $\sigma : B \longrightarrow \Omega$ continua, que sea inversa a derecha de $\alpha : \Omega \longrightarrow B$ y tal que $\beta \circ \sigma : B \longrightarrow B$ es homeomorfismo. El conjunto de secciones admisibles de Ω se denota por $\Gamma\Omega$.*

Nota 5.6.2. *Dada $\sigma \in \Gamma\Omega$, se define $L_\sigma : \Omega \longrightarrow \Omega$ como $\xi \mapsto \sigma(\beta(\xi))\xi$. Esta definición es consistente puesto que $\alpha \circ \sigma(\beta(\xi)) = \beta(\xi)$. De este modo, se obtiene una traslación a izquierda sobre Ω dada por L_σ y $\beta \circ \sigma$.*

Obsérvese que la inversa de L_σ es la aplicación definida como:

$$\eta \mapsto \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(\beta(\eta)))^{-1}\eta, \quad \forall \eta \in \Omega,$$

que es continua por composición de aplicaciones continuas.

Nota 5.6.3. *Existe el recíproco de la nota anterior. Sean ϕ y ϕ_0 una traslación a izquierda de Ω. Dado $x \in B$, se elige $\xi \in \Omega^x$ y se define $\sigma(x) = \phi(\xi)\xi^{-1}$. Se pasa a demostrar que σ está bien definido.*

Como ϕ es traslación a izquierda, ϕ^x coincide con L_θ para algún $\theta \in \Omega_x^{\phi_0(x)}$; luego, $\phi(\xi) = \theta\xi$. Ahora sea η otro elemento de Ω^x distinto de ξ, entonces por el mismo motivo se verifica que $\phi(\eta) = \theta\eta$ y, por lo tanto, que:

$$\phi(\xi)\xi^{-1} = \theta = \phi(\eta)\eta^{-1},$$

con lo que σ está bien definido.

Además la aplicación σ es continua por ser la proyección destino β una identificación (como se vió en la Proposición 5.1.3) y por cumplirse $\phi_0 = \beta \circ \sigma$. En consecuencia, σ es una sección admisible y se tiene que $\phi = L_\sigma$.

En función de lo visto en las Notas 5.6.2 y 5.6.3, se obtiene la siguiente:

Definición 5.6.4. *Dada una sección admisible σ de un grupoide topológico Ω, se denomina* **traslación a izquierda correspondiente a** σ *a L_σ junto a $\beta \circ \sigma$.*

A continuación, se probará que las traslaciones a izquierda forman grupo respecto de la composición. Esta estructura de grupo servirá posteriormente para definir una nueva estructura de grupo en las secciones admisibles.

Lema 5.6.5. *El conjunto de traslaciones a izquierda de un grupoide topológico es un grupo bajo la composición.*

Demostración. Sean ϕ y $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega$ junto a ϕ_0 y $\psi_0 : B \longrightarrow B$, respectivamente, dos traslaciones a izquierda de Ω. Entonces $\psi \circ \phi : \Omega \longrightarrow \Omega$ junto a $\psi_0 \circ \phi_0 : B \longrightarrow B$ es una traslación a izquierda de Ω. En efecto:

1. Tanto $\psi \circ \phi$ como $\psi_0 \circ \phi_0$ son homeomorfismos por composición de homeomorfismos.

2. $\beta \circ (\psi \circ \phi) = (\psi_0 \circ \phi_0) \circ \beta \quad$ y $\quad \alpha \circ (\psi \circ \phi) = \alpha$.

3. Dado $x \in B$, se sabe que ϕ^x coincide con L_ξ para algún $\xi \in \Omega_x^{\phi_0(x)}$ y que $\psi^{\phi_0(x)}$ coincide con L_η para algún $\eta \in \Omega_{\phi_0(x)}^{\psi_0 \circ \phi_0(x)}$. En consecuencia, se tiene:

$$(\psi \circ \phi)^x = \psi^{\phi_0(x)} \circ \phi^x = L_\eta \circ L_\xi = L_{\eta\xi}.$$

Además, el elemento unidad de este grupo consiste en la traslación a izquierda definida por la identidad en Ω, id_Ω, junto con la identidad en B, id_B, ya que ambos son homeomorfismos, cumplen las propiedades con respecto a las proyecciones origen y destino del grupoide topológico Ω y, para cada elemento $x \in B$, se verifica que ${id_\Omega}^x$ coincide con $L_{\tilde{x}}$.

Por último, el elemento inverso de la traslación a izquierda dada por ϕ y ϕ_0 es el par de homeomorfismos ϕ^{-1} y ${\phi_0}^{-1}$. Este par de homeomorfismo es una traslación a izquierda sin más que considerar que si para $x \in B$ la aplicación ϕ^x coincide con L_ξ, entonces ${\phi^{-1}}^x$ coincide con $L_{\xi^{-1}}$. □

Se transferirá la estructura de grupo existente en el conjunto de las traslaciones a izquierda al conjunto $\Gamma\Omega$ de secciones admisibles de Ω.

Proposición 5.6.6. *Sea Ω un grupoide topológico sobre B. Entonces $\Gamma\Omega$ puede ser dotado de estructura de grupo, respecto a la multiplicación $*$, definida como:*

$$(\sigma * \tau)(x) = \sigma((\beta \circ \tau)(x))\tau(x) \qquad x \in B,$$

donde la aplicación inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow B$ es el elemento unidad del grupo y la inversa viene dada por:

$$\sigma^{-1}(x) = \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1} \qquad x \in B.$$

Además, la aplicación definida como $\sigma \mapsto L_\sigma$ es un isomorfismo de grupos, es decir, $L_{\sigma * \tau} = L_\sigma \circ L_\tau$.

Demostración.

1. En primer lugar, se tiene, por la Nota 5.6.2, que:

$$L_\sigma \circ L_\tau(\xi) = L_\sigma(\tau(\beta(\xi))\xi) = \sigma \circ \beta(\tau(\beta(\xi))\xi)\tau(\beta(\xi))\xi.$$

Pero la sección admisible $\overline{\sigma}$ asociada a la traslación a izquierda $L_\sigma \circ L_\tau$ viene definida, según la Nota 5.6.3, como sigue: sea $x \in B$ y sea $\xi \in \Omega^x$, entonces:

$$\overline{\sigma}(x) = L_\sigma \circ L_\tau(\xi)\xi^{-1} = \sigma \circ \beta(\tau(\beta(\xi))\xi)\tau(\beta(\xi)) = \sigma \circ \beta(\tau(x))\tau(x).$$

Por lo tanto, la multiplicación $*$ que se ha definido sobre $\Gamma\Omega$ es la operación inducida por la composición en las traslaciones a izquierda.

2. En segundo lugar, la inclusión de objetos ε es el elemento unidad de la operación $*$. En efecto, dada una sección admisible σ en Ω, se tiene:

$$\varepsilon * \sigma(x) = \varepsilon((\beta \circ \sigma)(x))\sigma(x) = \widetilde{(\beta \circ \sigma)}(x)\sigma(x) = \sigma(x)$$

para cada $x \in B$. Análogamente, se demuestra que $\sigma * \varepsilon = \sigma$.

3. En tercer lugar, se va a probar que, dada una sección admisible σ en Ω, la aplicación $\sigma^{-1} : B \longrightarrow \Omega$ definida como $\sigma^{-1}(x) = \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}$, para cada $x \in B$, es una sección admisible.

En efecto, la aplicación σ^{-1} es continua por ser la composición de la inversa del homeomorfismo $\beta \circ \sigma$ seguida de la sección σ, seguida después de la inversión en el grupoide.

Además σ^{-1} es inversa a derecha de α ya que:

$$\alpha \circ \sigma^{-1}(x) = \alpha(\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}) = \beta \circ \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x)) = x,$$

para todo $x \in B$.

También se cumple que $\beta \circ \sigma^{-1}$ es un homeomorfismo. Para ello, hay que ver como actúa $\beta \circ \sigma^{-1}$. Sea $x \in B$, entonces se tiene:

$$\beta \circ \sigma^{-1}(x) = \beta(\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}) = \alpha \circ \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x)). \quad (5.4)$$

Pero al ser $\alpha \circ \sigma$ la aplicación identidad en B, de (5.4) se obtiene que:

$$\beta \circ \sigma^{-1}(x) = (\beta \circ \sigma)^{-1}(x);$$

por lo que la aplicación recíproca de $\beta \circ \sigma^{-1}$ es la aplicación $\beta \circ \sigma$, la cual se sabe que es un homeomorfismo. Por lo tanto, $\beta \circ \sigma^{-1}$ también es homeomorfismo y la aplicación σ^{-1} es sección admisible en Ω.

4. La sección admisible σ^{-1} que se ha definido es el elemento inverso de σ respecto a la operación $*$.

   Para ello, se verá que $\sigma * \sigma^{-1}$ es idéntica a la aplicación ε, que es el elemento unidad. En efecto, sea $x \in B$, entonces se verifica:

$$\begin{aligned}
\sigma * \sigma^{-1}(x) &= \sigma(\beta \circ \sigma^{-1}(x))\sigma^{-1}(x) \\
&= \sigma(\beta(\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1}))\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1} \\
&= \sigma(\alpha \circ \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x)))\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1} \\
&= \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))\sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))^{-1} \\
&= \widetilde{\beta \circ \sigma((\beta \circ \sigma)^{-1}(x))} = \widetilde{x} = \varepsilon(x).
\end{aligned}$$

   Análogamente se demuestra que $\sigma^{-1} * \sigma$ coincide con ε.

5. Por último, se tiene que $L_\sigma \circ L_\tau$ y $L_{\sigma * \tau}$ coinciden, ya que se ha definido $\sigma * \tau$ como la sección admisible asociada a $L_\sigma \circ L_\tau$ como se vio en las Notas 5.6.2 y 5.6.3. □

Se continuará estableciendo un morfismo de grupos entre el grupo de las secciones admisibles de un grupoide y el de los homeomorfismo de su base. Este hecho es el que se demuestra en la siguiente:

Proposición 5.6.7. *Si Ω es un grupoide topológico sobre B, la aplicación $\beta^* : \Gamma\Omega \longrightarrow \mathrm{Hom}(B)$ del grupo de las secciones admisibles de Ω en el grupo de los homeomorfismos de B en sí mismo, definida como $\beta^*(\sigma) = \beta \circ \sigma$, es morfismo de grupos.*

Demostración. En primer lugar, se verá que el elemento unidad ε de $\Gamma\Omega$ va en la aplicación identidad de B. En efecto, sea $x \in B$, entonces:

$$\beta \circ \varepsilon(x) = \beta(\widetilde{x}) = x = id_B(x).$$

En segundo lugar, dadas las secciones admisibles σ y τ, se ha de demostrar que $\beta \circ (\sigma * \tau)$ y $(\beta \circ \sigma) \circ (\beta \circ \tau)$ coinciden. En efecto, sea $x \in B$, entonces se tiene:

$$\beta \circ (\sigma * \tau)(x) = \beta \circ \sigma(\beta \circ \tau(x)). \qquad \square$$

A continuación, se darán algunos ejemplos de secciones admisibles. En primer lugar, se estudiarán cuáles son las secciones admisibles de un grupoide topológico trivial.

Ejemplo 5.6.8. *Sea $B \times G \times B$ el grupoide topológico trivial de B sobre el grupo topológico G. Entonces, el grupo $\Gamma(B \times G \times B)$ de las secciones admisibles está formado por las aplicaciones de la forma:*

$$(\phi, \theta, id_B) : B \longrightarrow B \times G \times B$$
$$x \longmapsto (\phi(x), \theta(x), x),$$

donde $\phi : B \longrightarrow B$ es un homeomorfismo y $\theta : B \longrightarrow G$ es una aplicación continua.

En efecto, por su definición, las aplicaciones de la forma (ϕ, θ, id_B) antes indicadas son secciones admisibles. Ahora bien, si $\sigma : B \longrightarrow B \times G \times B$ es una sección admisible, entonces al ser σ continua, cada proyección de la aplicación σ en cada una de sus componentes es una aplicación continua. Además $\beta \circ \sigma$, que es la tercera proyección, es un homeomorfismo y $\alpha \circ \sigma$, que es la primera proyección, es la aplicación identidad en B. Por lo tanto, se tiene la siguiente igualdad:

$$\Gamma(B \times G \times B) = \{(\phi, \theta, id_B) \mid \phi \in \mathrm{Hom}(B), \theta \in \mathcal{F}(B; G)\}.$$

Debido a la expresión de sus elementos, $\Gamma(B \times G \times B)$ *se puede identificar con el conjunto definido como* $\{(\phi, \theta) \mid \phi \in \mathrm{Hom}(B), \theta \in \mathcal{F}(B; G)\}$*, asociando a* (ϕ, θ) *la sección admisible* (ϕ, θ, id_B)*. La operación* $*$ *definida sobre* $\Gamma(B \times G \times B)$ *resulta, mediante la identificación:*

$$(\phi_2, \theta_2) * (\phi_1, \theta_1) = (\phi_2 \circ \phi_1, (\theta_2 \circ \phi_1)\theta_1),$$

y la inversa resulta:

$$(\phi, \theta)^{-1} = (\phi^{-1}, \iota \circ \theta \circ \phi^{-1}),$$

con $\iota : G \longrightarrow G : g \mapsto g^{-1}$ *la inversión del grupo* G*, que es continua por ser grupo topológico.*

En segundo lugar, se estudiarán las secciones admisibles del grupoide frame de un fibrado vectorial y se probará que están en biyección con los isomorfismos del fibrado vectorial dado en sí mismo.

Ejemplo 5.6.9. *Sea* (E, p, B) *un fibrado vectorial. Sea* $\Pi(E)$ *el grupoide frame de* E *(véase la Definición 4.1.12). Dada una sección admisible* $\sigma \in \Gamma\Pi(E)$*, puede definirse un morfismo de fibrados vectoriales, que se denotará igualmente por* σ*, sobre* $\beta \circ \sigma$*, como:*

$$\sigma : E \longrightarrow E : u \mapsto \sigma(p(u))(u),$$

que está bien definido, puesto que la sección admisible σ *lleva a un elemento de* B *en un elemento de* $\Gamma\Pi(E)$*.*

Entonces se tiene que la operación $*$ *en* $\Gamma\Pi(E)$ *está definida como* $\sigma * \tau = \sigma \circ \tau$ *y que su elemento unidad es* id_E*, la aplicación identidad en* E*. De este modo, cada* $(\sigma, \beta \circ \sigma)$ *es un* B*-isomorfismo de fibrados vectoriales.*

Recíprocamente, dado un isomorfismo de fibrados vectoriales $\phi\colon E \longrightarrow E$ *sobre* $\phi_0\colon B \longrightarrow B$*, la aplicación* $\sigma\colon B \longrightarrow \Pi(E)$ *definida* *como* $x \mapsto \phi_x \in \Pi(E)_x^{\phi_0(x)}$ *es una sección admisible de* $\Pi(E)$ *y el morfismo de fibrados vectoriales inducido por* σ *es* ϕ.

La continuidad de la sección admisible se obtiene usando la trivialidad local.

Para finalizar la sección se dan las definiciones locales de sección admisible y de traslación a izquierda.

Definición 5.6.10. *Sea* Ω *un grupoide topológico sobre* B *y sea* U *un abierto en* Ω. *Se denomina* **sección local admisible** *de* Ω *sobre* U *a toda aplicación* $\sigma : U \longrightarrow \Omega$ *continua que sea inversa a derecha de la proyección* α *de* Ω *y tal que* $\beta \circ \sigma : U \longrightarrow (\beta \circ \sigma)(U)$ *es un homeomorfismo.*

Al conjunto de secciones locales admisibles en U *se le denota por* $\Gamma_U \Omega$.

Definición 5.6.11. *Dada* $\sigma \in \Gamma_U \Omega$, *si se denota por* V *a* $(\beta \circ \sigma)(U)$, *se define la* **traslación local a izquierda inducida por** σ *como la aplicación* $L_\sigma : \Omega^U \longrightarrow \Omega^V$, *definida según* $\xi \mapsto \sigma(\beta(\xi))\xi$.

Capítulo 6
Grupoides diferenciables

En el Capítulo 4 se estudiaron los grupoides desde un punto de vista general y se trasladaron a dichos objetos los conceptos y propiedades existentes en Teoría de Grupos. Posteriormente, en el Capítulo 5, se hizo lo propio con los grupoides a los que se les superpone una estructura topológica, esto es, los grupoides topológicos.

El lector debe tener en cuenta que el concepto de grupoide y de grupoide topológico son una generalización del de grupo y grupo topológico, respectivamente. Por tanto, si en Teoría de Grupos se tiene, que tras estudiar los grupos y los grupos topológicos, suelen estudiarse los grupos diferenciables, que son aquellos que poseen una estructura diferenciable compatible con la operación de grupo, parece lógico pensar que el siguiente paso será definir el concepto análogo al de grupo diferenciable en Teoría de Grupoides. Este concepto es el de grupoide diferenciable y se tratará sin profundizar demasiado debido a que requeriría de herramientas de mayor calibre que las ya utilizadas hasta el momento en esta monografía. Si el lector tiene interés en este tema puede tomar como referencias **[19, 31, 35, 58]**.

No obstante, el concepto de grupoide diferenciable se tratará con la profundidad necesaria para que se pueda construir, en el Capítulo 7, el algebroide de Lie asociado a un grupoide diferenciable y un funtor de Lie entre los grupoides diferenciables y los algebroides de Lie.

6.1 Grupoides diferenciables

Los grupoides diferenciables constituyen, como se dijo anteriormente, la generalización de los grupos diferenciables en el caso de grupoides. Pero la definición que se ha ofrecido de grupoide diferenciable, desde que Ehresmann la introdujo en una serie de artículos **[16, 17, 18, 19]** en la década de 1950, ha variado dependiendo de los autores que la han tratado. Esta monografía seguirá la definición de grupoide diferenciable dada por Pradines **[44]**, pero en la versión de Mackenzie **[31]**. No obstante, en la Nota 6.1.10 se comentan algunas de estas otras definiciones existentes del concepto de grupoide diferenciable.

En esta sección se verán algunas propiedades de las aplicaciones que definen la estructura de grupoide cuándo éste es diferenciable y se tratarán las traslaciones a izquierda y a derecha de un grupo; estas últimas son de gran interés porque serán una pieza clave en el Capítulo 7 para la construcción del algebroide de Lie asociado a dicho grupoide diferenciable.

En primer lugar, se definirá el concepto de grupoide diferenciable como sigue.

Definición 6.1.1. *Un* **grupoide diferenciable** *es un grupoide de Ω sobre B con estructura de variedad diferenciable tanto sobre Ω como sobre B verificándose que las proyecciones origen y destino $\alpha, \beta : \Omega \longrightarrow B$ son submersiones sobreyectivas y la inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$ y la multiplicación $\rho : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ son diferenciables.*

Nota 6.1.2. *Obsérvese que* $\Omega * \Omega$ *es una subvariedad regular de* $\Omega \times \Omega$*, debido a la Proposición 1.4.32, ya que tanto* α *como* β *son submersiones y se tiene* $\Omega * \Omega = (\alpha \times \beta)^{-1}(\Delta_B)$*, donde* Δ_B *es la diagonal de* B *y* $\alpha \times \beta$ *es la aplicación:*

$$\alpha \times \beta : \Omega \times \Omega \longrightarrow B \times B : (\xi, \eta) \mapsto (\alpha(\xi), \beta(\eta)).$$

El fibrado tangente de $\Omega * \Omega$ *es el definido como:*

$$T(\Omega * \Omega) = T\Omega * T\Omega = \{Y \oplus X \in T(\Omega \times \Omega) \mid T(\alpha)(Y) = T(\beta)(X)\}.$$

Cuando un grupoide es diferenciable, las fibras, tanto por la proyección origen como por la destino, son subvariedades del grupoide, como se demuestra en la siguiente:

Proposición 6.1.3. *Las* α*-fibras y las* β*-fibras de un grupoide diferenciable* Ω *sobre* B *son subvariedades regulares de* Ω *cuya dimensión es igual a* $\dim(\Omega) - \dim(B)$.

Demostración. Basta aplicar el Teorema de la función implícita, al ser α y β submersiones completas. □

Como ocurría con los grupoides topológicos, se puede dar una definición similar de traslación a derecha y de traslación a izquierda para el caso de los grupoides diferenciables sin más que sustituir continuidad por diferenciabilidad en la Definición 5.2.8. A continuación, se establecerá que las traslaciones son difeomorfismos.

Proposición 6.1.4. *Las traslaciones a derecha y a izquierda son difeomorfismos.*

Demostración. Se tiene de forma inmediata del hecho de ser restricciones del producto del grupoide a $\Omega_x \times \{\xi\}$ y a $\{\xi\} \times \Omega^x$, respectivamente. □

Para la aplicación tangente de la multiplicación del grupoide diferenciable se tiene el siguiente:

Lema 6.1.5. *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B y sea $\rho : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ la multiplicación. Entonces, para todo $Y \in T_\eta(\Omega_{\alpha(\eta)})$, $X \in T_\xi(\Omega^{\beta(\xi)})$, se verifica:*

$$T(\rho)(Y \oplus X) = T_\eta(R_\xi)(Y) + T_\xi(L_\eta)(X).$$

Demostración. Sea f una función diferenciable en Ω.

Por una parte se cumple:

$$T_{(\eta,\xi)}(\rho)(Y \oplus X)(f) = (Y \oplus X)(f \circ \rho) = Y(f \circ \rho) + X(f \circ \rho).$$

Además, se tienen:

$$Y(f \circ \rho) = Y(f \circ R_\xi) \qquad \text{y} \qquad X(f \circ \rho) = X(f \circ L_\eta),$$

puesto que se está derivando respecto de los campos provenientes de la primera y de la segunda componente de $T\Omega \times T\Omega$, respectivamente. Por lo tanto:

$$T_{(\eta,\xi)}(\rho)(Y \oplus X)(f) = T_\eta(R_\xi)(Y)(f) + T_\xi(L_\eta). \qquad \square$$

En la Definición 6.1.1 de grupoide diferenciable, no se pide la diferenciabilidad de la aplicación inversión que aparece en la Definición 4.1.1 de grupoide. Esto se debe a que dicha diferenciabilidad se obtiene como consecuencia de las propiedades que se les exigen al resto de aplicaciones. Este hecho se demuestra en la siguiente:

Proposición 6.1.6. *La inversión de un grupoide diferenciable Ω sobre B es una aplicación diferenciable.*

Demostración. Considérese la aplicación:

$$\theta : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega \underset{B}{\times} \Omega : (\eta, \xi) \mapsto (\eta, \eta\xi),$$

donde la definición de $\Omega \underset{B}{\times} \Omega$ es la dada en el Ejemplo 4.3.27. Es evidente que θ es un biyección. Se prueba, a continuación, que θ es una inmersión.

Sea $Y \oplus X \in T_{(\eta,\xi)}(\Omega * \Omega)$ y supóngase que $T(\theta)(Y \oplus X) = 0 \oplus 0$. Si $\pi_1 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ es la primera proyección, al cumplirse $\pi_1 \circ \theta = \pi_1$, se verifica que $T(\pi_1)\circ T(\theta) = T(\pi_1)$ y, por tanto, $Y = 0$. Obsérvese que, por otro lado, se tiene que si $\pi_2 : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega$ es la segunda proyección, entonces $\pi_2 \circ \theta = \rho$, y, por el Lema 6.1.5, se obtiene que $0 = T_\xi(L_\eta)(X)$. Por tanto $X = 0$, ya que L_η es inyectiva.

Como α y β son submersiones y como:

$$\Omega * \Omega = (\alpha \times \beta)^{-1}(\Delta_B) \qquad \text{y} \qquad \Omega \underset{B}{\times} \Omega = (\beta \times \beta)^{-1}(\Delta_B),$$

se concluye que tanto $\Omega * \Omega$ como $\Omega \underset{B}{\times} \Omega$ tienen la misma dimensión como variedades, por la Proposición 1.4.32.

De este modo, θ es biyectiva y $T\theta$ es inyectiva. En consecuencia, $T\theta$ es biyectiva y, por el Teorema de la Función Implícita, θ es un difeomorfismo local. Pero θ es inyectiva, por lo que θ es difeomorfismo ya que la diferenciabilidad es una propiedad local.

Considérese la aplicación:

$$\gamma : \Omega \longrightarrow \Omega \underset{B}{\times} \Omega : \eta \mapsto (\eta, \widetilde{\beta(\eta)}),$$

que es diferenciable por serlo cada una de sus coordenadas. Sea la composición $\pi_2 \circ \theta^{-1} \circ \gamma$, que se sabe es diferenciable. Dicha composición es la inversión del grupoide diferenciable puesto que:

$$\pi_2 \circ \theta^{-1} \circ \gamma(\eta) = \pi_2 \circ \theta^{-1}(\eta, \widetilde{\beta(\eta)}) = \pi_2(\eta, \eta^{-1}) = \eta^{-1}.$$

En consecuencia, la inversión es una aplicación diferenciable. □

Se acaba de demostrar que la inversión es diferenciable. Pero además es inversa de sí misma y se tiene, por tanto, el siguiente:

Corolario 6.1.7. *La inversión de un grupoide diferenciable es un difeomorfismo.* □

Una vez tratada la inversión de un grupoide diferenciable, se estudiará la inclusión de objetos. En la Definición 6.1.1 se exige que sea diferenciable, pero se probará en seguida que en realidad es una inmersión inyectiva.

Proposición 6.1.8. *La inclusión de objetos de un grupoide diferenciable Ω sobre B es una inmersión inyectiva.*

Demostración. La prueba se basa en la Proposición 5.1.5 y en el hecho de que, tal como ocurría en la demostración de la Proposición 5.1.3, se tiene que tanto α como β son inversas a izquierda de ε. □

Consecuencia inmediata es el:

Corolario 6.1.9. *El espacio $\widetilde{B}$ es una subvariedad cerrada de Ω.* □

Nota 6.1.10. *Como se comentó al principio de esta sección, la Definición 6.1.1 de grupoide diferenciable es una versión de Mackenzie* **[31]** *de la que dio Pradines en* **[44]**. *No obstante, existen otras definiciones de grupoide diferenciable, entre las que citamos las debidas a los siguientes autores:*

i. *Ehresmann* **[19]** *exige estructura de variedad diferenciable para Ω verificando que las aplicaciones:*

$$\Omega \longrightarrow \Omega : \xi \mapsto \widetilde{\alpha\xi} \qquad y \qquad \Omega \longrightarrow \Omega : \xi \mapsto \widetilde{\beta\xi}$$

sean submersiones y que la multiplicación sea diferenciable.

ii. *Kumpera y Spencer* **[27]** *y ver Eecke* **[56]** *exigen la estructura de variedad diferenciable sobre Ω y sobre B tales que las proyecciones α y β, la inclusión de objetos y la multiplicación sean diferenciables, además de que $\Omega * \Omega$ sea subvariedad regular de $\Omega \times \Omega$.*

iii. *Weinstein* **[58]** *sólo exige la diferenciabilidad de los espacios total y base y de las proyecciones origen y destino y de la multiplicación.*

Este último autor refiere en **[58]** *que la condición pedida en la Definición 6.1.1 acerca de que las proyecciones origen y destino sean submersiones tiene como objetivo asegurar que el dominio de la multiplicación sea una subvariedad diferenciable de* $\Omega \times \Omega$.

La sección se concluye con algunos ejemplos de grupoides topológicos.

Ejemplo 6.1.11. *Si* Ω *es un grupoide trivial sobre* B *tal que tanto* Ω *como* B *son variedades diferenciables, entonces* Ω *es un grupoide diferenciable sobre* B.

En particular, si Ω *es un grupo diferenciable y* B *es un conjunto unitario el grupoide trivial con grupo* Ω *sobre* B *es el propio grupo diferenciable.*

Del mismo modo, si B *es una variedad diferenciable y el grupoide diferenciable considerado es* $\{1\}$, *formado sólo por el elemento unidad, se tiene definido el grupoide diferenciable producto cartesiano* $B \times B$ *sobre* B.

Ejemplo 6.1.12. *Sea* $\gamma : G \times B \longrightarrow B$ *una acción diferenciable de un grupo de Lie* G *sobre una variedad* B *Entonces el grupoide acción* $G \times B$ *es un grupoide diferenciable sobre* B.

Ejemplo 6.1.13. *Sea* B *una variedad arcoconexa, localmente conexa y semilocalmente simplemente conexa. Mackenzie, en el Ejemplo 1.14 del Capítulo III de* **[31]**, *afirma que el grupoide fundamental* $\pi(B)$ *es un grupoide diferenciable sobre* B *de modo que su anclaje es una aplicación diferenciable. Además la estructura diferenciable del grupoide fundamental es la única para la que el anclaje es diferenciable*

Ejemplo 6.1.14. *Sea* Ω *un grupoide diferenciable sobre* B *y sea* $\rho : \Omega * \Omega \longrightarrow \Omega$ *su multiplicación. Entonces el fibrado tangente* $T\Omega$ *de* Ω *es un grupoide diferenciable sobre el fibrado tangente* TB

de B, cuyas proyecciones origen y destino son las aplicaciones tangentes $T(\alpha)$ y $T(\beta)$, respectivamente, la inclusión de objetos es la aplicación tangente $T(\varepsilon)$ y la multiplicación es la aplicación tangente $T(\rho)$.

En efecto, los fibrados tangentes son variedades diferenciables. Además, la aplicación tangente de una aplicación diferenciable es diferenciable y la de una submersión es submersión (véase la Proposición 1.4.41).

6.2 Morfismos diferenciables

En esta sección se definirán los morfismos diferenciables o de grupoides diferenciables a partir del concepto de morfismo de grupoides que se estableció en la Definición 4.2.1. También se dará la definición clásica de grupoide de Lie y de subgrupoide diferenciable y de Lie. Se comenzará la sección definiendo los morfismos de grupoides diferenciables:

Definición 6.2.1. *Sean Ω y Ω' dos grupoides diferenciables sobre B y B', respectivamente. Un* **morfismo de grupoides diferenciables** *o* **morfismo diferenciable** *es un morfismo de grupoides $(\phi, \phi_0) : (\Omega, B) \longrightarrow (\Omega', B')$ verificando que ϕ y ϕ_0 son aplicaciones diferenciables.*

Nota 6.2.2. *Obsérvese que no es necesario exigir que ϕ_0 sea diferenciable en la Definición 6.2.1, por un razonamiento análogo al usado en la Nota 5.2.2.*

Como pasaba con los morfismos de grupoides y de grupoides topológicos, la composición es cerrada para los morfismos diferenciables.

Proposición 6.2.3. *La composición de dos morfismos de grupoides diferenciables es un morfismo de grupoides diferenciables.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.6, la composición es un morfismo de grupoides. Además la composición de aplicaciones diferenciables es diferenciable, lo que completa la prueba. □

Como consecuencia de la proposición anterior, se tiene el siguiente:

Corolario 6.2.4. *Existe la* **categoría** $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd$ **de los grupoides diferenciables** *en la que los objetos son los grupoides diferenciables, los morfismos son los morfismos diferenciables y la composición la propia composición de morfismos.*

Igualmente, dada una variedad B, existe la subcategoría llena $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd_B$ de $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd$ obtenida al considerar como objetos los grupoides diferenciables sobre B. Se la denominará **categoría de los grupoides diferenciables sobre** *B.* □

A continuación, se dará la definición clásica de grupoide de Lie, pero puede resultarle interesante al lector una aclaración histórica previa de dicho concepto.

Históricamente, se definían, por un lado, los grupoides diferenciables y, por el otro, los grupoides de Lie. Estos últimos se diferenciaban de los grupoides diferenciables en que eran localmente triviales. La distinción entre estos dos conceptos la estableció Pradines en **[45]**, en donde llamaba **grupoides infinitesimales** (en francés, "groupoïdes infinitésimaux") a los grupoides de Lie, ya que los consideraba una versión infinitesimal de los grupoides diferenciables. No obstante, Almeida y Kumpera en **[3]** deciden llamar a ambos objetos por el mismo nombre indicando que son localmente triviales cuando sea preciso. Mackenzie en **[33]** opta también por esa terminología. En consecuencia, grupoide diferenciable y grupoide de Lie se podrían considerar sinónimos si no fuese por el valor histórico de dicha distinción.

Ahora sí puede darse la definición de grupoide de Lie, que es la que sigue:

Definición 6.2.5. *Un* **grupoide de Lie** *es un grupoide diferenciable localmente trivial.*

Nota 6.2.6. *Obsérvese que la Proposición 6.2.3 también asegura la existencia de la* **categoría $\mathcal{L}\mathcal{G}rd$ de los grupoides de Lie,** *que es la subcategoría llena de $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd$ que tiene por objetos a los grupoides de Lie.*

En un grupoide topológico pueden existir varias estructuras de grupoide diferenciable no difeomorfas. Además un morfismo continuo de grupoides diferenciables no tiene por qué ser diferenciable. Esto ocurre incluso si es un morfismo de grupoides diferenciables triviales que conserve la base, como puede verse en:

$$B \times B \longrightarrow B \times G \times B : (y, x) \mapsto (y, \theta(y)\theta(x)^{-1}, x),$$

para varias aplicaciones diferenciables $\theta : B \longrightarrow G$.

El siguiente concepto a definir son los subgrupoides diferenciables y, como caso particular suyo, los subgrupoides de Lie.

Definición 6.2.7. *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B. Un* **subgrupoide diferenciable** *de Ω es un grupoide diferenciable Ω' sobre B' junto con un morfismo de grupoides diferenciables $(\phi, \phi_0) : (\Omega', B') \longrightarrow (\Omega, B)$ cumpliendo que ϕ es una inmersión inyectiva.*

Un subgrupoide diferenciable (Ω', ϕ) de Ω es un **subgrupoide diferenciable regular** *si la aplicación $\phi : \Omega' \longrightarrow \phi(\Omega)$ es un homeomorfismo.*

Un subgrupoide diferenciable (Ω', ϕ) de Ω se dice **ancho** *si B=B' y $\phi_0 = id_B$.*

Si Ω es un grupoide de Lie sobre B, un subgrupoide diferenciable ancho (Ω', ϕ) de Ω con Ω' localmente trivial es una **reducción** *o* **subgrupoide de Lie** *de Ω.*

Nota 6.2.8. *Obsérvese que en el caso de grupoides y grupoides topológicos, para definir los conceptos de subgrupoide y de subgrupoide topológico no se precisaban de los conceptos de morfismo de grupoide y de morfismo continuo, respectivamente. Cuando se trata de definir un grupoide diferenciable sí será necesario hacer uso del concepto de morfismo diferenciable. Esto se debe a que a los subgrupoides diferenciables se les pide que sean subvariedad del grupoide diferenciable de partida y en la Definición 1.4.29 de subvariedad se observa que interviene una inmersión inyectiva. Por eso se le pide al morfismo diferenciable que sea inmersión inyectiva.*

A continuación, se dará un ejemplo de subgrupoide diferenciable para un grupoide diferenciable arbitrario. Este ejemplo es la Proposición 1.17 del Capítulo III de **[31]** al que puede recurrir el lector para su demostración.

Ejemplo 6.2.9. *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B. Entonces el subgrupoide interno $G\Omega$ de Ω es una subvariedad cerrada de Ω y es un subgrupoide diferenciable de Ω.*

Para cerrar esta sección, se indican los enunciados de dos proposiciones interesantes sobre grupoides diferenciables cuya demostración requiere de foliaciones sobre variedades, por lo que las obviamos, dando sin embargo una referencia. La primera es el Teorema 1.4 del Capítulo III de **[31]**, que le fue comunicado a Mackenzie por Pradines en 1979. Su enunciado es el siguiente:

Proposición 6.2.10. *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B. Entonces para cada $x \in B$, la aplicación $\beta_x : \Omega_x \longrightarrow B$ es una submersión.* $\square$

La segunda de las proposiciones corresponde al Corolario 1.5 del mismo capítulo referido antes y su enunciado es:

Proposición 6.2.11. *Sea Ω un grupoide diferenciable sobre B. Entonces para cada $x, y \in B$, se tiene que Ω_x^y es una subvariedad regular cerrada de Ω_x, de Ω^y y de Ω. En concreto, cada grupo-vértice Ω_x^x es un grupo de Lie.* $\square$

El siguiente gráfico puede aclarar las distintas relaciones e interconexiones existentes entre las diversas categorías de grupoides que se han definido en estos tres últimos capítulos:

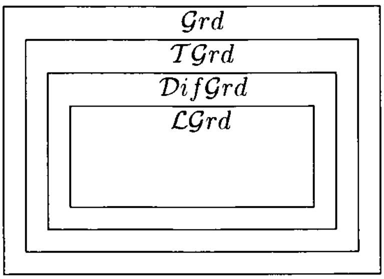

Figura 6.1: Interconexiones entre las distintas categorías de grupoides.

Capítulo 7
Algebroides de Lie

En este capítulo se tratarán de exponer los conceptos y resultados que se han considerado relevantes y necesarios para un primer acercamiento a los objetos matemáticos conocidos como algebroides de Lie. Para ello, se darán tanto los conceptos de algebroide de Lie como de los morfismos entre dichos algebroides y el funtor de Lie que se puede construir entre la categoría de los grupoides diferenciables, vista en el Corolario 6.2.4, y las categorías de algebroides de Lie que se verán en el presente capítulo. Siempre que se trabaje con morfismos entre algebroides de Lie, habrá que tener en cuenta si dichos algebroides son sobre distintas bases o sobre una misma. Esto es debido a que la generalización de la definición de morfismo de algebroides de Lie sobre una misma base al caso en que éstas son distintas no es inmediata y conlleva la introducción del concepto de descomposición de una sección de un fibrado vectorial.

Una vez se tiene el concepto de morfismo, se pueden definir dos categorías. La primera tomando como objetos los algebroides de Lie sobre una base determinada y con los morfismos entre ellos como morfismos de la categoría. La segunda consiste en no dejar fija la base y considerar los morfismos entre algebroides de Lie sobre distintas base. Dichas categorías permiten crear sendos funtores de Lie entre la categoría de los grupoides diferenciables (véase Capítulo 6) y las anteriormente mencionadas. Estos funtores de Lie se construyen análogamente al que se tiene entre los grupos de Lie y las álgebras de Lie. De hecho, estos funtores se basarán en la construcción del algebroide de Lie asociado a un grupoide diferenciable que se observará en el presente capítulo y que sigue los pasos realizados para construir el álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie, teneiendo siempre presente las diferencias que conllevan los objetos que se están tratando.

Además de todo lo comentado hasta el momento, se incluyen también ejemplos acerca de estos objetos, todos ellos con importancia histórica en las cuestiones que atañen al estudio de los algebroides de Lie.

7.1 Algebroides de Lie sobre una misma base

En la presente sección se dan las definiciones de algebroide de Lie y de morfismo entre los mismos, siempre que ambos posean la misma base. En la siguiente sección se estudiarán los morfimos entre algebroides de Lie sobre distinta base. Esta diferenciación se realiza por interés histórico y manipulativo. Esto se debe a que los morfismos entre algebroides de Lie sobre una misma base se remontan a los comienzos de esta teoría en 1967, debida a Pradines (véase **[45]**); mientras que para el caso en que los algebroides de Lie tenían distinta base tal definición no era suficientemente clarificadora. Por ello, en 1981, Almeida y Kumpera aclararon dicha definición en **[2]** aunque aún resultaba poco manipulativa. Esto se solventa con la definición equivalente dada en 1990 por Higgins y Mackenzie en **[24]**.

La definición de algebroide de Lie pretende asociar a un fibrado vectorial de rango finito una estructura lo más parecida posible a la de álgebra de Lie. De este modo, se define:

Definición 7.1.1. *Sea B una variedad diferenciable y TB su fibrado tangente. Un* **algebroide de Lie** *sobre B, o con base B, es un fibrado vectorial $\mathcal{A}=(A,p,B)$ junto con un B-morfismo de fibrados vectoriales $q : A \longrightarrow TB$, denominado el* **ancla** *del algebroide de Lie, y un corchete $[\ ,\ ] : \Gamma A \times \Gamma A \longrightarrow \Gamma A$, siendo ΓA el $\mathcal{F}(B)$-módulo de las secciones globales de $\mathcal{A}$, verificando:*

1. *$[\ ,\ ]$ es $\mathbb{R}$-bilineal, alternado y satisface la identidad de Jacobi.*
2. *$q([X,Y]) = [q(X), q(Y)], \quad \forall X, Y \in \Gamma A.$*
3. *$[X, uY] = u \cdot [X,Y] + (q(X))(u)Y, \quad \forall X, Y \in \Gamma A, \quad \forall u \in \mathcal{F}(B).$*

Nota 7.1.2. *A menos que sea absolutamente necesario, por ejemplo, cuando pueda existir posible confusión con la proyección o con la base, suele decirse "A un algebroide de Lie sobre B" en lugar de "un algebroide de Lie (A,p,B)".*

Hay que hacer algunas aclaraciones sobre los conceptos y objetos que aparecen en la Definición 7.1.1.

Nota 7.1.3. *El conjunto de las secciones de un algebroide de Lie sobre una variedad B es un $\mathcal{F}(B)$-módulo finitamente generado y proyectivo, como se demuestra en las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.10 y en la Nota 3.2.11.*

Además, todo $\mathcal{F}(B)$-módulo finitamente generado y proyectivo es el módulo de las secciones de un algebroide de Lie, gracias a que el fibrado vectorial obtenido por el Teorema de Swan (véase la Nota 3.2.12) puede dotarse de estructura de algebroide de Lie.

Nota 7.1.4. *La condición 1 de la Definición 7.1.1 viene a decir que ΓA es un álgebra de Lie respecto al corchete $[\ ,\ ]$ definido, pues al ser un $\mathcal{F}(B)$-módulo, ΓA es un espacio vectorial real.*

Nota 7.1.5. *El ancla q es un B-morfismo del fibrado vectorial $\mathcal{A}$ en el fibrado vectorial (TB, π, B), que se mencionó en el Ejemplo 2.1.12. Decir que q es un B-morfismo significa que q es diferenciable, que $\pi \circ q = p$ y que es una aplicación lineal en cada fibra de A. También se tiene que q induce un morfismo de $\mathcal{F}(B)$-módulos $q_* : \Gamma A \longrightarrow \Gamma TB$ definido como $q_*(X) = q \circ X$ como se puede ver en la Proposición 3.2.8. No obstante, la mayoría de los autores suelen identificar q con q_*, denotando $q_*(X)$ por $q(X)$ para cualquier X en ΓA (véanse para ello* **[29, 31]***). Dicho esto, en esta monografía también se hará uso de esta identificación, teniendo sentido, por lo tanto, la condición 2 de la Definición 7.1.1; dicha condición permite asegurar que q es un morfismo de álgebras de Lie de ΓA en ΓTB, que como se ve en el Ejemplo 3.1.3 coincide con $\chi(B)$, que es un álgebra de Lie con respecto al corchete de Poisson, definido como:*

$$[\ ,\ ] : \chi(B) \times \chi(B) \longrightarrow \chi(B) : (X_1, X_2) \mapsto X_1X_2 - X_2X_1,$$

como se observa en el Teorema 1.5.14.

Nota 7.1.6. *En 3 de la Definición 7.1.1, el término $q(X)(u)$ es la* **derivada de Lie** *de u con respecto al campo $q(X)$ de vectores tangentes. Para la definición de derivada de Lie respecto de un campo, véase la Definición 1.5.15. Suele ser conveniente, en ocasiones, denotar $q(X)(u)$ por $[X, u]$, con lo que se obtiene una acción $[\ ,\ ] : \Gamma A \times \mathcal{F}(B) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$. Utilizando esta notación, las condición 3 puede escribirse como una regla de Leibniz:*

$$[X, uY] = u[X, Y] + [X, u]Y$$

y la condición 2 se convierte en una especie de identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], u] = [X, [Y, u]] - [Y, [X, u]].$$

En efecto, por definición, se tiene:

$$
\begin{aligned}
[[X,Y],u] &= q([X,Y])(u),\\
[X,[Y,u]] = [X,q(Y)(u)] &= q(X)(q(Y)(u)) \quad y\\
[Y,[X,u]] = [Y,q(X)(u)] &= q(Y)(q(X)(u)).
\end{aligned}
$$

Por lo que dicha identidad de Jacobi, al desarrollarla, equivale a la condición 2.

Dos de las clases más tratadas y usadas de algebroides de Lie son las que siguen:

Definición 7.1.7. *Con la notación de la Definición 7.1.1, un algebroide de Lie se dice:*

- **transitivo**, *si su ancla q es una submersión inyectiva;*
- **totalmente intrasitivo**, *si q es idénticamente nulo.*

Tomando como punto de partida los morfismos de fibrados vectoriales, se da comienzo al tratamiento de los morfismos entre algebroides de Lie sobre la misma base con la siguiente:

Definición 7.1.8. *Sean $\mathcal{A}$=(A,p,B) y $\mathcal{A}'$=(A',p',B) dos algebroides de Lie sobre la misma base B. Entonces un* **morfismo de algebroides de Lie sobre B (o que conserva la base B)** *es un B-morfismo de fibrados vectoriales $\phi : A \longrightarrow A'$ cumpliendo:*

1. $q' \circ \phi = q$,
2. $\phi([X,Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X,Y \in \Gamma A.$

Nota 7.1.9. *La condición* 1 *de la Definición 7.1.8 equivale a afirmar que el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$
\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\phi} & A' \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\
B & = & B
\end{array}
\tag{7.1}
$$

Proposición 7.1.10. *La composición de morfismos de algebroides de Lie sobre B es un morfismo de algebroides de Lie sobre B.*

Demostración. Sean $\phi_1 : A_1 \longrightarrow A_2$ y $\phi_2 : A_2 \longrightarrow A_3$ dos morfismos de algebroides de Lie sobre B y sean q_1, q_2 y q_3 las respectivas anclas de A_1, A_2 y A_3.

La composición de B-morfismos de fibrados vectoriales es de nuevo un B-morfismo por la Proposición 2.1.25.

Como ϕ_1 y ϕ_2 son morfismos de algebroides de Lie, entonces:

$$\begin{gathered} q_2 \circ \phi_1 = q_1 \qquad q_3 \circ \phi_2 = q_2, \\ \phi_1[X,Y] = [\phi_1(X), \phi_1(Y)], \quad \forall X, Y \in \Gamma A_1, \\ \phi_2[X',Y'] = [\phi_2(X'), \phi_2(Y')], \quad \forall X', Y' \in \Gamma A_2, \end{gathered}$$

de donde se tiene que:

$$\begin{gathered} q_3 \circ (\phi_2 \circ \phi_1) = (q_3 \circ \phi_2) \circ \phi_1 = q_2 \circ \phi_1 = q_1, \\ (\phi_2 \circ \phi_1)[X,Y] = \phi_2[\phi_1(X), \phi_1(Y)] = [(\phi_2 \circ \phi_1)(X), (\phi_2 \circ \phi_1)(Y)], \end{gathered}$$

para cualesquiera $X, Y \in \Gamma A_1$. □

Corolario 7.1.11. *Dada una variedad B, la* **categoría $\mathcal{LA}_B$ de los algebroides de Lie sobre** B *es la que tiene por objetos a los algebroides de Lie sobre B, como morfismo los morfismos de algebroides de Lie sobre B y como composición la composición de dichos morfismos.* □

Se verán, a continuación, los ejemplos más sencillos de algebroides de Lie, que son las álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$, los fibrados tangentes y los haces de álgebras de Lie.

Ejemplo 7.1.12. *Los algebroides de Lie sobre una base formada por un espacio unitario son las álgebras de Lie.*

En efecto, sea A un algebroide de Lie sobre una base B formada por un único punto x_0. Entonces, las secciones de A están en correspondencia biyectiva con los elementos de A, pues toda sección σ está determinada por $\sigma(x_0) \in A$ y cada elemento $a \in A$ determina la sección $\sigma : B \longrightarrow A$ definida como $\sigma(x_0) = a$. En consecuencia, las condiciones de la Definición 7.1.1 aseguran que los algebroides de Lie sobre una base formada por un espacio unitario son las álgebras de Lie.

Obsérvese que el ancla de este fibrado debe ser el morfismo nulo definido como $q : A \longrightarrow TB : a \mapsto 0$, puesto que el fibrado tangente TB de la variedad B es $\{0\}$ por ser una variedad formada por un único punto.

Ejemplo 7.1.13. *Sea B una variedad. El fibrado tangente TB de la variedad B es un fibrado vectorial. Si se considera como corchete el corchete de Poisson definido como:*

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \Gamma TB,$$

(véase el Teorema 1.5.14) y como ancla, el morfismo identidad $q = id_{TB} : TB \to TB$ del fibrado vectorial TB, resulta evidente que se cumplen las propiedades de algebroide de Lie.

Ejemplo 7.1.14 (Haz de álgebras de Lie o LAB). *Se denomina* **haz de álgebras de Lie** *a un fibrado vectorial (L, p, B) junto con un campo de corchetes $[\ ,\ ] : \Gamma L \times \Gamma L \longrightarrow \Gamma L$ (que se da en el Ejemplo 2.1.40) y la aplicación nula como ancla, de modo que dicho fibrado vectorial admita una representación coordenada $\{(U_i, \psi_i)\}$ con $\psi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathfrak{g}$, donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y se verifica que $\psi_{i,x}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie, para cada $x \in B$.*

Por otro lado, sean (L_1, p_1, B_1) y (L_2, p_2, B_2) dos haces de álgebras de Lie. Entonces un morfismo de haces de álgebras de Lie

$(\phi, \phi_0) : (L_1, p_1, B_1) \longrightarrow (L_2, p_2, B_2)$ es un morfismo de fibrados vectoriales tales que cada $\phi_x : p_1^{-1}(x) \longrightarrow p_2^{-1}(\phi_0(x))$ es un morfismo de álgebras de Lie. Obsérvese que si los dos haces de álgebras de Lie poseen la misma base, los morfismos de dichos haces de álgebra de Lie entran en los definidos en la Definición 7.1.8, puesto que la condición $q_2 \circ \phi = q_1$ se verifica trivialmente.

Obsérvese que todo haz de álgebras de Lie es un algebroide de Lie totalmente intransitivo, puesto que su ancla es idénticamente nula. No obstante, un algebroide de Lie totalmente intransitivo no tiene que ser necesariamente un haz de álgebras de Lie. De hecho, dicho algebroide de Lie consistiría en un fibrado vectorial con un campo de corchetes de álgebras de Lie, pero todas las fibras no tienen que ser necesariamente álgebras de Lie isomorfas entre sí, ni siquiera dentro de una misma componente conexa de la base del algebroide de Lie.

Se da, a continuación, un resultado en el que se indica el modo en que actúa el corchete de un algebroide de Lie sobre el módulo finitamente generado de las secciones del fibrado (véase la Nota 7.1.3).

Proposición 7.1.15. *Sea A un algebroide de Lie sobre B con corchete $[\ ,\ ]$ y sea $\{X_i\}_{k=1}^{s}$ una base de ΓA. Entonces se tiene:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{s} c_{ij}^k X_k \,,$$

con c_{ij}^k funciones diferenciables de B.

Demostración. Se deduce de forma inmediata de ser ΓA un $\mathcal{F}(B)$-módulo finitamente generado. □

Nota 7.1.16. *Obsérvese que los c_{ij}^k de la Proposición 7.1.15 desempeñan el papel de las constantes de estructura de un álgebra de Lie.*

Recuérdese que, dado un fibrado vectorial, se puede construir un subfibrado suyo a partir de un abierto de su base (véase la Proposición 2.1.18). De forma análoga, dado un algebroide de Lie, se va a obtener otro a partir de un abierto de su base. No obstante, se necesita previamente un corchete para el mismo; éste es el objetivo del lema y de la proposición siguientes. Ambos resultados han sido probados por Mackenzie en la Proposición 2.2 del Capítulo III de **[31]**. Nosotros damos aquí estas mismas pruebas ligeramente ampliadas, a efectos de una mejor comprensión.

Lema 7.1.17. *Sea (A, p, B) un algebroide de Lie y sea U un abierto en B. Entonces, si se denota a $p^{-1}(U)$ por A_U, el corchete $[\ ,\ ] : \Gamma A \times \Gamma A \longrightarrow \Gamma A$ induce un corchete $[\ ,\ ]_U : \Gamma A_U \times \Gamma A_U \longrightarrow \Gamma A_U$.*

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma A$ con Y anulándose sobre el abierto U de B, entonces $[X, Y]$ se anula sobre U. En efecto, sea x_0 un elemento de U, es conocido que existe $u \colon B \longrightarrow B$ diferenciable tal que $u(x_0) = 0$ y $u(B \setminus U) = \{1\}$ ya que $\{x_0\}$ es un compacto de B contenido en U. Entonces:

$$[X, Y](x_0) = [X, uY](x_0) = u(x_0)[X, Y](x_0) + q(X)(u)(x_0)Y(x_0) = 0.$$

□

Proposición 7.1.18. *En las condiciones del Lema 7.1.17, el fibrado vectorial (A_U, p_U, U) es un algebroide de Lie con el corchete definido en dicho lema y el ancla definido por:*

$$q_U : U \longrightarrow TU,$$

consistente en la restricción del ancla q del algebroide de Lie dado.

Demostración. El B-morfismo dado por el ancla q induce un U-morfismo de fibrados vectoriales q_U, en virtud de la Proposición 2.1.21. Además, verifica, junto con $[\ ,\ ]$, las condiciones 2 y 3 de la definición de algebroide de Lie. □

Se ofrecen seguidamente algunos ejemplos de algebroides de Lie que se consideran de relativa trascendencia en el estudio histórico de los objetos tratados.

Ejemplo 7.1.19. *Se denomina* **algebroide de Lie trivial** *a un fibrado vectorial trivial con una estructura de algebroide de Lie.*

Dado un algebroide de Lie A sobre B de rango r y un abierto trivializador U de A, se tiene que el algebroide de Lie A_U sobre U es trivial y de rango r, en virtud de la Proposición 2.1.16 y la Proposición 7.1.18.

Por la Teorema 3.2.5, se tiene que el módulo de las secciones ΓA_U está generado por una base $\{X_i\}_{i=1}^r$.

Ejemplo 7.1.20. *Sea un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y una variedad B. Considérese el fibrado tangente (TB, π, B) y el fibrado trivial $(B \times \mathfrak{g}, p, B)$. Se tiene entonces la suma de Whitney $TB \oplus (B \times \mathfrak{g})$ sobre la variedad B. En dicha suma se define un ancla $q : TB \oplus (B \times \mathfrak{g}) \longrightarrow TB$ dado por la proyección primera de la suma directa, y un corchete definido como:*

$$[X \oplus V, Y \oplus W] = [X, Y] \oplus \{X(W) - Y(V) + [V, W]\},$$

donde el corchete sobre TB es el corchete de Poisson y el corchete sobre $B \times \mathfrak{g}$ está definido por el corchete del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ como sigue:

$$[V, W](x) = [V(x), W(x)], \quad \forall x \in B.$$

Obsérvese que para poder afirmar que el fibrado vectorial $TB \oplus (B \times \mathfrak{g})$ sobre B es un algebroide de Lie sólo ha de demostrarse que el corchete verifica la identidad de Jacobi y que se cumple la condición 3 de algebroide de Lie.

Sean $X \oplus V_1$, $Y \oplus V_2$ y $Z \oplus V_3$ tres secciones de la suma de Whitney. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
&[X \oplus V_1, [Y \oplus V_2, Z \oplus V_3]] + [Y \oplus V_2, [Z \oplus V_3, X \oplus V_1]] \\
&\qquad + [Z \oplus V_3, [X \oplus V_1, Y \oplus V_2]] \\
&\qquad = [X, [Y, Z]] \oplus \{X(Y(V_3) - Z(V_2) + [V_2, V_3]) - [Y, Z](V_1) \\
&\qquad + [V_1, [V_2, V_3]] + [V_1, Y(V_3)] - [V_1, Z(V_2)]\} + [Y, [Z, X]] \\
&\qquad \oplus \{Y(Z(V_1) - X(V_3) + [V_3, V_1]) - [Z, X](V_2) \\
&\qquad + [V_3, [V_2, V_1]] + [V_2, Z(V_1)] - [V_2, X(V_3)]\} + [Z, [X, Y]] \\
&\qquad \oplus \{Z(X(V_2) - Y(V_1) + [V_1, V_2]) - [X, Y](V_3) \\
&\qquad + [V_3, [V_2, V_1]] + [V_3, X(V_2)] - [V_3, Y(V_1)]\} \\
&\qquad = 0 \oplus \{[X, Y](V_3) + [Y, Z](V_1) + [Z, X](V_2) - [Y, Z](V_1) \\
&\qquad - [Z, X](V_2) - [X, Y](V_3) + X([V_2, V_3]) + Y([V_3, V_1]) \\
&\qquad + Z([V_1, V_2]) - [V_2, X(V_3)] - [X(V_2), V_3] - [Y(V_3), V_1] \\
&\qquad - [Y(V_1), V_3] - [Z(V_1), V_2] - [V_1, Z(V_2)]\} = 0 \oplus 0,
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la definición del corchete de Poisson en TB *y donde* $X(V)$ *es la derivada de Lie de* V *respecto de* X.

Sean $X \oplus V_1$ *y* $Y \oplus V_2 \in \Gamma(TB \oplus (B \times \mathfrak{g}))$ *y* $u \in \mathcal{F}(B)$, *se va a ver que se cumple 3:*

$$\begin{aligned}
[X \oplus V_1, u(Y \oplus V_2)] &= [X, uY] \oplus \{X(uV_2) - uY(V_1) + [V_1, uV_2]\} \\
&= [X, uY] \oplus \{X(uV_2) - uY(V_1) + [V_1, uV_2]\} \\
&= \{u[X, Y] + X(u)Y\} \oplus \\
&\quad \{X(u)V_2 + uX(V_2) - uY(V_1) + [V_1, uV_2]\} \\
&= u[X \oplus V_1, Y \oplus V_2] + q(X \oplus V_1)(u)(Y \oplus V_2).
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.1.21. *Sea* $B = \mathbb{R}$ *y considérese el corchete* $[\ ,\ ]'$ *definido sobre el fibrado tangente* TB *como:*

$$\left[\xi \frac{d}{dt}, \eta \frac{d}{dt}\right]' = t(\xi \dot{\eta} - \dot{\xi} \eta) \frac{d}{dt},$$

con $\xi, \eta \in \mathcal{F}(B)$*, y el ancla definida como:*

$$q : TB \longrightarrow TB : \xi\frac{d}{dt} \mapsto t\xi\frac{d}{dt}.$$

Entonces TB *es un algebroide de Lie sobre* B *con la estructura dotada por el corchete y el ancla así definidos.*

En efecto, la aplicación q *es diferenciable de manera trivial y el corchete es* $\mathbb{R}$*-bilineal y alternado por definición. Por lo tanto, resta probar las condiciones 2 y 3, además de la identidad de Jacobi del corchete. Se verá en primer lugar la condición 2:*

$$\begin{aligned}
q\left[\xi\frac{d}{dt}, \eta\frac{d}{dt}\right]' &= q(t(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\frac{d}{dt}) = t^2(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\frac{d}{dt} \\
&= t^2(\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\frac{d}{dt} + (t\xi\eta - t\xi\eta)\frac{d}{dt} \\
&= t\xi(\eta + t\dot{\eta})\frac{d}{dt} - t\eta(\xi + t\dot{\xi})\frac{d}{dt} \\
&= t\xi\frac{d}{dt}(t\eta)\frac{d}{dt} - t\eta\frac{d}{dt}(t\xi)\frac{d}{dt} \\
&= \left[t\xi\frac{d}{dt}, t\eta\frac{d}{dt}\right] = \left[q(\xi\frac{d}{dt}), q(\eta\frac{d}{dt})\right];
\end{aligned}$$

A continuación, se verá la condición 3:

$$\begin{aligned}
[\xi\tfrac{d}{dt}, f\eta\tfrac{d}{dt}]' &= t((\dot{f\eta})\xi - f\eta\dot{\xi})\tfrac{d}{dt} \\
&= t(f\dot{\eta}\xi - t\eta\dot{\xi} + t\dot{f}\xi\eta)\tfrac{d}{dt} = f[\xi, \eta]' + q(\eta)(f)\xi;
\end{aligned}$$

Por último, se verá la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
&[[\xi\frac{d}{dt}, \eta\frac{d}{dt}]', \zeta\frac{d}{dt}]' + [[\eta\frac{d}{dt}, \zeta\frac{d}{dt}]', \xi\frac{d}{dt}]' + [[\zeta\frac{d}{dt}, \xi\frac{d}{dt}]', \eta\frac{d}{dt}]' \\
&\quad = t\dot{\zeta}(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})\frac{d}{dt} - t\zeta(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} + t\xi\ \ddot{\eta}\ -t\ \ddot{\xi}\ \eta)\frac{d}{dt} \\
&\qquad + t\dot{\xi}(\eta\dot{\zeta} - \dot{\xi}\zeta)\frac{d}{dt} - t\xi(\eta\dot{\zeta} - \dot{\eta}\zeta + t\eta\ \ddot{\zeta}\ -t\ \ddot{\eta}\ \zeta)\frac{d}{dt} \\
&\qquad + t\dot{\eta}(\zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta})\frac{d}{dt} - t\eta(\zeta\dot{\xi} - \dot{\zeta}\xi + t\zeta\ \ddot{\xi}\ -t\ \ddot{\zeta}\ \eta)\frac{d}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

El siguiente ejemplo se debe a A. Weinstein y apareció por primera vez en **[31]**.

Ejemplo 7.1.22 (Algebroide Acción de Lie). *Sean B una variedad y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Defínase una acción:*

$$\boldsymbol{H} : \mathfrak{g} \longrightarrow TB : X \mapsto X^{\dagger},$$

como una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal que conserve los corchetes, esto es:

$$[X, Y]^{\dagger} = [X^{\dagger}, Y^{\dagger}] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Extiéndase la notación † a las aplicaciones $V : B \longrightarrow \mathfrak{g}$ del modo siguiente: se denotará por $V^{\dagger}$ al campo vectorial sobre B definido como:

$$V^{\dagger}(b) = V(b)^{\dagger}(b), \quad \forall b \in B.$$

Entonces el fibrado vectorial trivial $B \times \mathfrak{g}$ sobre B adquiere estructura de algebroide de Lie considerando el ancla $q : B \times \mathfrak{g} \longrightarrow TB$ definido como:

$$q(b, X) = X^{\dagger}(b), \qquad \forall (b, X) \in B \times \mathfrak{g}$$

y el corchete dado por:

$$[V, W] = V^{\dagger}(W) - W^{\dagger}(V) + [V, W]^{\bullet},$$

donde $V^{\dagger}(W)$ denota la derivada de Lie con respecto de $V^{\dagger}$ de la función W que toma valores en $\mathfrak{g}$ y el corchete $[\ ,\ ]^{\bullet}$ es el corchete definido por:

$$[V, W]^{\bullet}(x) = [V(x), W(x)], \quad \forall x \in B,$$

para las aplicaciones V y W de M en $\mathfrak{g}$. Para más detalles véanse **[24, 31]**.

El algebroide de Lie así obtenido se suele denotar por $B \rtimes \mathfrak{g}$ *y recibe el nombre de* **algebroide acción de Lie** *o* **algebroide transformación de Lie** *correspondiente a la acción infinitesimal* $\boldsymbol{H} : \mathfrak{g} \longrightarrow TB$.

El concepto de algebroide de Lie abeliano existe y es el que sigue:

Definición 7.1.23. *Un algebroide de Lie A sobre B se dice* **abeliano o conmutativo** *si:*

$$[X, Y] = 0, \qquad \forall X, Y \in \Gamma A,$$

donde 0 es la sección nula de ΓA de la Definición 3.1.13.

Se definirá, a continuación, la suma directa de algebroides de Lie, aprovechando la suma de Whitney definida en los fibrados vectoriales. Para ello, se demuestra la siguiente:

Proposición 7.1.24. *Sean A y A' dos algebroides de Lie sobre B tal que A es transitivo con anclas q y q' en A y en A', respectivamente. Entonces el fibrado vectorial $A \underset{TB}{\oplus} A'$ sobre B, definido por el diagrama conmutativo de B-módulos:*

$$\begin{array}{ccc} A \underset{TB}{\oplus} A' & \longrightarrow & A' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q'} \\ A & \xrightarrow{q} & TB \end{array} \tag{7.2}$$

es un algebroide de Lie sobre B, con ancla:

$$\bar{q} : A \underset{TB}{\oplus} A' \longrightarrow TB : a \oplus a' \mapsto q(a) = q'(a'),$$

donde q y q' son las anclas de A y A', respectivamente, y con:

$$\overline{[X \oplus X', Y \oplus Y']} = [X, Y] \oplus [X', Y']',$$

como corchete sobre $\Gamma(A \underset{TB}{\oplus} A')$, donde $[\ ,\ ]$ y $[\ ,\ ]'$ son los corchetes en A y A', respectivamente.

Demostración. Como q es submersión sobreyectiva, se tiene que $\operatorname{im}(q_x) = T_xB$ para cada $x \in B$. Entonces, por la Proposición 2.3.16, existe el fibrado vectorial $A \underset{TB}{\oplus} A'$, que es subfibrado de la suma de Whitney $A \oplus A'$.

La aplicación $\bar{q}$ es un B-morfismo de fibrados vectoriales, ya que es la composición diagonal del diagrama del pullback. Está bien definido gracias a la conmutatividad del pullback de (7.2).

El ancla $\bar{q}$ y el corchete $\overline{[\ ,\ ]}$ verifican las condiciones 1, 2 y 3 de la definición de algebroide de Lie, ya que tanto q y $[\ ,\ ]$ como q' y $[\ ,\ ]'$ verifican dichas condiciones y también por la definición de $A \underset{TB}{\oplus} A'$ como subfibrado de la suma de Whitney $A \oplus A'$. En consecuencia, $A \underset{TB}{\oplus} A'$ es un algebroide de Lie. □

Definición 7.1.25. *Al algebroide de Lie $A \underset{TB}{\oplus} A'$ sobre B definido en la Proposición 7.1.24 se le denomina* **suma directa de los algebroides de Lie** *A y A' sobre B.*

Tras definir la suma directa de algebroides de Lie, se ofrece una caracterización para la transitividad de dicha suma directa.

Proposición 7.1.26. *En las condiciones de la Proposición 7.1.24 y suponiendo que $A \underset{TB}{\oplus} A'$ es el pullback de las anclas, son entonces equivalentes:*

1. *$A \underset{TB}{\oplus} A'$ es transitivo.*
2. *A' ó A es transitivo.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.16, las aplicaciones:

$$A \underset{TB}{\oplus} A' \longrightarrow A \qquad \text{y} \qquad A \underset{TB}{\oplus} A' \longrightarrow A',$$

de (7.2) son submersiones. Llámense a dichas aplicaciones π_A y $\pi_{A'}$, respectivamente.

Por un lado, se tiene que para todo $a \oplus a' \in A \underset{TB}{\oplus} A'$ se verifica:

$$\bar{q}(a \oplus a') = q(a').$$

Por lo tanto, $\bar{q}$ es sobreyectiva si y sólo si q' es sobreyectiva.

Por otro lado, $\bar{q}$ es la composición de $\pi_{A'}$ con q'. Por lo tanto, las respectivas aplicaciones tangentes verifican:

$$T_x(\bar{q}) = T_x(q') \circ T_x(\pi_{A'}), \quad \forall x \in A \underset{TB}{\oplus} A'.$$

Al ser $T_x(\pi_{A'})$ sobreyectiva, por ser $\pi_{A'}$ submersión, se verifica que $T_x(\bar{q})$ es sobreyectiva si y sólo si $T_x(q')$ lo es también. En consecuencia, $\bar{q}$ es submersión si y sólo si A' es transitivo. De forma análoga puede hacerse con A. □

A continuación, se tratará el concepto de subalgebroide de Lie de un algebroide de Lie dado, dando como ejemplo el que se obtiene a partir de un abierto de la base de dicho algebroide de Lie.

Definición 7.1.27. *Sea A un algebroide de Lie sobre B. Se denomina* **subalgebroide de Lie de** *A a un algebroide de Lie A_1 sobre B y una inmersión inyectiva $f : A_1 \longrightarrow A$ tal que defina un morfismo de algebroides de Lie.*

Proposición 7.1.28. *Sea A un algebroide de Lie sobre B y sea U un abierto de B, entonces el algebroide de Lie A_U sobre B de la Proposición 7.1.18 es un subalgebroide de Lie de A, que se llamará* **subalgebroide de Lie restricción**.

En particular, los abiertos trivializadores del algebroide de Lie también cumplen esta propiedad.

Demostración. Es evidente, teniendo en cuenta que U es una subvariedad abierta con la inclusión de U en B como inmersión inyectiva. □

Para concluir esta sección, se ofrecerá una expresión de los corchetes y del ancla en función de los generadores del módulo de secciones en un subalgebroide de Lie restricción.

Proposición 7.1.29. *Sea (U, ϕ) una trivialización local del algebroide de Lie (A, p, B) de rango r y sea (A_U, p_U, U) su subalgebroide de Lie restricción. Si $\{X_i\}_{k=1}^{r}$ es la base de ΓA_U, ϕ tiene por coordenadas $(x_1, \ldots, x_r)$ y q es el ancla de A, se tienen:*

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, r, \tag{7.3}$$

$$q(X_i) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, r, \quad j_1, \cdots, n, \tag{7.4}$$

donde c_{ij}^k , a_{ij} son funciones diferenciables en U y n es la dimensión de B.

Demostración. El módulo ΓA_U de las secciones del algebroide de Lie (A_U, p_U, U) es finitamente generado por r secciones en virtud del Ejemplo 7.1.19. Además, los campos de vectores tangentes de la variedad U son generados por $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}_{j=1}^{n}$. Por lo tanto, haciendo uso de la Proposición 7.1.15 se tiene la expresión (7.3). La expresión (7.4) se debe al hecho de que $q(X_i)$ es un campo de vectores tangentes de U. □

7.2 Algebroides de Lie sobre distintas bases

En la Definición 7.1.8, se definieron los morfismos de algebroides de Lie que conservan la base; ahora el próximo objetivo es dar una definición de morfismo de Lie para algebroides de Lie con distintas bases. Para estar en las condiciones apropiadas en las que definir dichos morfismos, deben hacerse algunas aclaraciones.

En primer lugar, dados dos fibrados vectoriales ξ y η sobre la base B, todo B-morfismo $\phi : \xi \longrightarrow \eta$ induce, por la Proposición 3.2.8, un morfismo $\mathrm{Sec}\xi \longrightarrow \mathrm{Sec}\eta$ de $\mathcal{F}(B)$-módulos definido por $X \mapsto \phi \circ X$. Esto mismo no puede hacerse cuando los dos fibrados vectoriales estan definidos sobre distintas bases. En ese caso, la forma de actuar es la que aparece en **[24, 34]** y que se expone a continuación.

Según la Proposición 2.3.5, dado el morfismo $(\phi, f) : (M', p', B') \longrightarrow (M, p, B)$ de fibrados vectoriales, existe un B'-morfismo $f^*(\phi) : M' \longrightarrow f^*M$. Por lo tanto, se puede definir, en virtud de la Proposición 3.2.8, un morfismo $\phi^* : \Gamma M' \longrightarrow \Gamma f^*M$ de $\mathcal{F}(B')$-módulos.

Por otro lado, según la Proposición 3.3.1, se tiene que Γf^*M es isomorfo a $\mathcal{F}(B') \otimes_{\mathcal{F}(B)} \Gamma M$ como $\mathcal{F}(B')$-módulos. De hecho, el isomorfismo asocia a cada $u' \otimes X \in \mathcal{F}(B') \otimes_{\mathcal{F}(B)} \Gamma M$ el elemento $\bar{X} \in \Gamma f^*M$ definido como $\bar{X}(x') = (x', X(f(x')))$, para cada $x' \in B'$. De este modo, para cada $X' \in \Gamma M'$ se puede expresar $\phi^*(X')$ como:

$$\phi^*(X') = \sum u'_i \otimes X_i, \tag{7.5}$$

para ciertos $u'_i \in \mathcal{F}(B')$ y $X_i \in \Gamma M$, ya que ΓM está finitamente generado.

Por otro lado, se define el conjunto $\Gamma_f M$ como:

$$\Gamma_f M = \{Z \in \mathcal{F}(B'; M) \mid p \circ Z = f\}, \tag{7.6}$$

y se tiene que es un $\mathcal{F}(B')$-módulo. En efecto:

1. Si $Z_1, Z_2 \in \Gamma_f M$, entonces $Z_1 + Z_2$ está definido y pertenece a $\Gamma_f M$.

   En efecto, $p \circ Z_i = f \quad (i = 1, 2)$ equivale a que $Z_1(x)$ y $Z_2(x)$ estén en la fibra de $f(x)$ en M para cada $x \in B'$. Por ello la suma $Z_1(x) + Z_2(x)$ está en dicha fibra, para cada $x \in M$ y $Z_1 + Z_2$ está definido y pertenece a $\Gamma_f M$.

2. Si $Z \in \Gamma_f M$ y $u' \in \mathcal{F}(B')$, entonces se define el producto $u'Z$ como el producto $u'(x)Z(x)$ que se tiene definido en M por ser fibrado vectorial. Obviamente, $u'Z$ está en $\Gamma_f M$ y verifica los axiomas de módulo.

Pero además se tiene que $\Gamma_f M$ es isomorfo a $\Gamma f^* M$ como $\mathcal{F}(B')$-módulos, puesto que las aplicaciones diferenciables $Z: B' \longrightarrow M$ tales que $p \circ Z = f$ están en correspondencia biunívoca con las secciones de $\Gamma f^* M$ sin más que asociar a Z la sección $\bar{Z} : B' \longrightarrow f^* M$ definida como:

$$\bar{Z}(x) = (x, Z(x)), \qquad x \in B'.$$

En consecuencia, la expresión (7.5) puede escribirse como:

$$\phi \circ X' = \sum u'_i (X_i \circ f); \tag{7.7}$$

con lo que se llega a la siguiente:

Definición 7.2.1. *En las condiciones anteriores, dada una sección $X' \in \Gamma M'$, se denomina* **ϕ-descomposición** *de X' a cualquier expresión de la forma* (7.5) *o, equivalentemente,* (7.7).

Nota 7.2.2. *Basándose en la equivalencia de* (7.5) *y de* (7.7), *se puede afirmar que X' está ϕ-relacionado con X si y sólo si:*

$$\phi^*(X') = 1 \otimes X,$$

para cualesquiera $X' \in \Gamma M'$ y $X \in \Gamma M$.

Se puede dar así una noción de morfismo de algebroides de Lie con bases distintas, que es la que sigue:

Definición 7.2.3. *Sean* (A,p,B) *y* (A',p',B') *dos algebroides de Lie con anclas* q *y* q'*, respectivamente. Entonces un* **morfismo de algebroides de Lie** $(\phi, f) : (A',p',B') \longrightarrow (A,p,B)$ *es un morfismo de fibrados vectoriales que cumple:*

$$q \circ \phi = T(f) \circ q', \tag{7.8}$$

y, para cada $X', Y' \in \Gamma A'$ *con* ϕ*-descomposiciones:*

$$\phi \circ X' = \sum u_i'(X_i \circ f) \qquad y \qquad \phi \circ Y' = \sum v_j'(Y_j \circ f),$$

se tiene:

$$\begin{aligned}\phi\circ[X', Y'] =& \sum u_i'v_j'([X_i, Y_j] \circ f) + \sum [X', v_j'](Y_j \circ f) \\ &- \sum [Y', u_i'](X_i \circ f).\end{aligned} \tag{7.9}$$

Nota 7.2.4. *La condición* (7.8) *en la Definición 7.2.3 equivale a que se verifique el siguiente diagrama conmutativo de morfismos de fibrados vectoriales:*

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\phi} & A \\ {\scriptstyle q'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q} \\ B' & \xrightarrow{T(f)} & B \end{array}$$

Nota 7.2.5. *La condición* (7.9) *en la Definición 7.2.3 es equivalente, según lo visto en la Proposición 3.3.1, a lo siguiente:*

$$\begin{aligned}\phi^*[X', Y'] =& \sum u_i'v_j' \otimes_{\mathcal{F}(B)} [X_i, Y_j] + \sum [X', v_j'] \otimes_{\mathcal{F}(B)} Y_j \\ &- \sum [Y', u_i'] \otimes_{\mathcal{F}(B)} X_i,\end{aligned} \tag{7.10}$$

para unas ϕ*-descomposiciones:*

$$\phi^*(X') = \sum u_i' \otimes_{\mathcal{F}(B)} X_i \qquad y \qquad \phi^*(Y') = \sum v_j' \otimes_{\mathcal{F}(B)} Y_j.$$

Para ver que la Definición 7.2.3 es consistente se considera en **[24]** el siguiente:

Lema 7.2.6. *El segundo miembro de la ecuación* (7.9) *no depende de la elección de las ϕ-descomposiciones de los elementos* $X', Y' \in \Gamma A'$.

Demostración. Considérese la ϕ-descomposición de X' dada por:

$$\phi \circ X' = \sum u_i'(X_i \circ f),$$

o, equivalentemente, según lo visto en la Nota 7.2.5:

$$\phi^*(X') = \sum u_i'(X_i \circ f).$$

Defínase una aplicación $F : \mathcal{F}(B') \times \Gamma A \longrightarrow \mathcal{F}(B') \otimes \Gamma A$ como sigue: dados $v' \in \mathcal{F}(B')$ e $Y \in \Gamma A$, se considera el elemento $F(v', Y)$ en $\mathcal{F}(B') \otimes \Gamma A$ definido como:

$$F(v', Y) = \sum (u_i'v' \otimes [X_i, Y]) + [X', v'] \otimes Y.$$

Entonces, la aplicación F es $\mathbb{R}$-bilineal por serlo cada uno de sus sumandos.

Es más, dado un elemento t en $\mathcal{F}(B)$ se verifica:

$$\begin{aligned}
F(v', tY) &= \sum u_i'v' \otimes (t[X_i, Y] + [X_i, t]Y) + [X', v'] \otimes tY \\
&= \sum u_i'v'(t \circ f) \otimes [X_i, Y] + \sum u_i'v'([X_i, t] \circ f) \otimes Y \\
&\quad + [X', v'](t \circ f) \otimes Y \\
&= \sum u_i'v'(t \circ f) \otimes [X_i, Y] + v'[X', t \circ f] \otimes Y \\
&\quad + [X', v'](t \circ f) \otimes Y \\
&= \sum u_i'v'(t \circ f) \otimes [X_i, Y] + [X', v'(t \circ f)] \otimes Y \\
&= F(v'(t \circ f), Y),
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la condición 3 de la definición de algebroide de Lie y de la $T(f)$-descomposición de $q'(X')$ inducida por la ϕ-descomposición de X'. Obsérvese entonces que

F puede extenderse de forma única a una aplicación $\bar{F} : \mathcal{F}(B') \otimes \Gamma A \longrightarrow \mathcal{F}(B') \otimes \Gamma A$ definida como:

$$\bar{F}(\sum w'_k \otimes Z_k) = \sum F(v'_j, Y_j).$$

En particular, si se aplica $\bar{F}$ a la ϕ-descomposición de Y' dada por $\phi^*(Y') = \sum v'_j \otimes Y_j$, se obtiene:

$$\bar{F}(\phi * (Y')) = \sum u_i v'_j \otimes [X_i, Y_j] + \sum [X', v'_j] \otimes Y_j,$$

que, en consecuencia, no depende de la ϕ-descomposición de Y'. Por lo tanto, la expresión (7.9) tampoco depende de dicha ϕ-descomposición. Si ahora se define $\bar{F}'$ como $\bar{F}$, pero a partir de la ϕ-descomposición de Y', y se lo aplica a $\phi^*(X')$ se tiene, por la antisimetría de (7.9) que dicha expresión tampoco depende de la ϕ-descomposición de X'. □

La composición de morfismos de algebroides de Lie, en el sentido habitual de la composición de morfismos de fibrados vectoriales, da lugar de nuevo a un morfismo de algebroides de Lie como puede verse en la siguiente:

Proposición 7.2.7. *Sean dos morfismos* $(\phi_1, f_1) : (A_3, p_3, B_3) \longrightarrow (A_2, p_2, B_2)$ *y* $(\phi_2, f_2) : (A_2, p_2, B_2) \longrightarrow (A_1, p_1, B_1)$ *de algebroides de Lie. Entonces la composición* $(\phi_2 \circ \phi_1, f_2 \circ f_1) : (A_3, p_3, B_3) \longrightarrow (A_1, p_1, B_1)$ *es un morfismo de algebroides de Lie.*

Demostración. $(\phi_2 \circ \phi_1, f_2 \circ f_1)$ es un morfismo de fibrados vectoriales por la Proposición 2.1.25 y, si las anclas son q_3, q_2 y q_1, respectivamente, se tiene:

$$q_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_1) = T(f_2) \circ q_2 \circ \phi_1 = T(f_2) \circ T(f_1) \circ q_3 = T(f_2 \circ f_1) \circ q_3.$$

Por lo tanto, sólo resta probar que se cumple (7.9) para las $\phi_2 \circ \phi_1$-descomposiciones.

Para ello, sean $X_3, Y_3 \in \Gamma A_3$ con las ϕ_1-descomposiciones:

$$\phi_1^*(X_3) = \sum u_{3i} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} X_{2i} \quad \text{y} \quad \phi_1^*(Y_3) = \sum v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} Y_{2j};$$

considérense las ϕ_2-descomposiciones de los elementos X_{2i}, Y_{2j}, para todo i, j, que aparecen en las ϕ_1-descomposiciones de X_3 e Y_3:

$$\phi_2^*(X_{2i}) = \sum u_{2ik} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} X_{1ik} \quad \text{y} \quad \phi_2^*(Y_{2j}) = \sum v_{2jh} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} Y_{1jh}, \quad \forall i, j.$$

Entonces, combinando la ϕ_1-descomposición de X_3 (respectivamente Y_3) con las ϕ_2-descomposiciones de los X_{2i} (respectivamente Y_{2j}), se obtienen las $\phi_2 \circ \phi_1$-descomposiciones de X_3 e Y_3 dadas por:

$$(\phi_2 \circ \phi_1)^*(X_3) = \sum u_{3i} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} (u_{2ik} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} X_{1ik}) \quad \text{y}$$
$$(\phi_2 \circ \phi_1)^*(Y_3) = \sum v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} (v_{2jh} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} Y_{1jh}).$$

Se verá que se cumple la condición (7.9) con estas $\phi_2 \circ \phi_1$-descomposiciones y, entonces, se tendrá lo buscado por el Lema 7.2.6. En efecto, al ser ϕ_2 y ϕ_1 morfismos de algebroides de Lie se tiene:

$$
\begin{aligned}
(\phi_2 \circ \phi_1)^*[X_3, Y_3] &= \phi_2^*(\sum u_{3i}v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} [X_{2i}, Y_{2j}] \\
&\quad + \sum [X_3, v_{2j}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} Y_{2j} \\
&\quad - \sum [Y_3, u_{3i}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} X_{2i}) \\
&= \sum u_{3i}v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \phi_2^*([X_{2i}, Y_{2j}]) \\
&\quad + \sum [X_3, v_{2j}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \phi_2^*(Y_{2j}) \\
&\quad - \sum [Y_3, u_{3i}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \phi_2^*(X_{2i})) \\
&= \sum u_{3i}v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} (\sum u_{2ik}v_{2jh} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} [X_{1ik}, Y_{1jh}] \\
&\quad + \sum [X_{2i}, v_{2jh}] \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} Y_{1jh} \\
&\quad - \sum [Y_{2j}, u_{2ik}] \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} X_{1ik}) \\
&\quad + \sum [X_3, v_{3j}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \left(\sum v_{2jh} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} Y_{1jh}\right) \\
&\quad - \sum [Y_3, u_{3i}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \left(\sum u_{2ik} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} X_{1ik}\right) \\
&= \sum u_{3i}v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} \big(u_{2ik}v_{2jh} \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} [X_{1ik}, Y_{1jh}]\big) \\
&\quad + \sum [X_3, v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} v_{2jh}] \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} Y_{1jh} \\
&\quad - \sum [Y_3, u_{3i} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} u_{2ik}] \otimes_{\mathcal{F}(B_1)} X_{1ik} \,.
\end{aligned}
$$

Y, por la definición de los productos tensoriales implicados, se verifica:

$$[X_3, v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} v_{2jh}] = [X_3, v_{3j}] \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} v_{2jh} + v_{3j} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} [\phi_1^*(X_3), v_{2jh}],$$

con lo que se demuestra la proposición sin más que hacer un razonamiento análogo con $[Y_3, u_{3i} \otimes_{\mathcal{F}(B_2)} u_{2ik}]$. □

Corolario 7.2.8. *Existe la* **categoría $\mathcal{LA}$ de los algebroides de Lie** *cuyos objetos son los algebroides de Lie y cuyos morfismos son los morfismos de algebroides de Lie.* □

Se continuará con una proposición que permite afirmar la equivalencia entre la Definición 7.1.8 y la Definición 7.2.3 para el caso de que los dos algebroides de Lie posean la misma base.

Proposición 7.2.9. *Si A' y A son dos algebroides de Lie sobre la variedad B y $\phi : A' \longrightarrow A$ es un morfismo de algebroides de Lie sobre B en el sentido de Definición 7.1.8, entonces ϕ es un morfismo de algebroides de Lie en el sentido de Definición 7.2.3.*

Demostración. Si X' es un elemento de $\Gamma A'$, entonces se tiene la ϕ-descomposición dada por $1 \otimes \phi(X')$, donde $\phi(X')$ es $\phi \circ X'$ perteneciente a ΓA. Por lo tanto, (7.9) se reduce a:

$$\phi([X', Y']) = [\phi(X'), \phi(Y')],$$

con $X', Y' \in \Gamma A'$. Además, como $T(id_B) = id_{TB}$, la condición $q \circ \phi = T(id_B) \circ q'$ se reduce a $q \circ \phi = q'$. □

Corolario 7.2.10. *Dada una variedad diferenciable B, existe la* **categoría $\mathcal{L}\mathcal{A}_B$ de los algebroides de Lie sobre** *B, cuyos objetos son los algebroides de Lie sobre B y cuyos morfismos son los morfismos de algebroides de Lie que conservan la base. Además $\mathcal{L}\mathcal{A}_B$ es una subcategoría llena de $\mathcal{L}\mathcal{A}$.* □

La noción de morfismo de algebroide de Lie permite dar la siguiente:

Definición 7.2.11. *Sea A un algebroide de Lie sobre B. Un* **subalgebroide de Lie** *de A es un morfismo de algebroides de Lie:*

$$(\psi, f) : (A', p', B') \longrightarrow (A, p, B),$$

donde tanto ψ como f son inmersiones inyectivas.

Nota 7.2.12. *La Definición 7.2.11 generaliza la dada en la Definición 7.1.27 para un subalgebroide de Lie de un algebroide de Lie dados ambos sobre una misma base, ya que la aplicación sobre las bases es la identidad (que es una inmersión inyectiva).*

7.3 Construcción del algebroide de Lie

El objetivo de esta sección es construir un algebroide de Lie a partir de un grupoide diferenciable. Dicha construcción se debe a Pradines (véase **[45]**) y el algebroide de Lie resultante recibirá el nombre de algebroide de Lie asociado al grupoide diferenciable. Para ello, se tendrán en cuenta **[24, 29, 31, 34]**. La forma de construir este algebroide a partir del grupoide diferenciable está basada en la construcción del algebra de Lie asociada a un grupo de Lie.

Sea Ω un grupoide diferenciable con base B, con proyecciones origen y destino $\alpha, \beta : \Omega \longrightarrow B$ y con inclusión de objetos $\varepsilon : B \longrightarrow \Omega$. Las traslaciones a derechas $R_\xi : \Omega_{\beta\xi} \longrightarrow \Omega_{\alpha\xi}$ sobre un grupoide diferenciable (véase la Definición 5.2.8) son difeomorfismos solamente en las α-fibras y no en todo el grupoide diferenciable (véase la Proposición 6.1.4).

Considérese la aplicación diferenciable $T(\alpha) : T\Omega \longrightarrow TB$ inducida por α sobre los fibrados tangentes de Ω y de B; dicha aplicación es un morfismo de fibrados vectoriales de rango constante por ser la aplicación α una submersión sobreyectiva. Defínase ahora $T^\alpha\Omega$ como el subfibrado $\ker T(\alpha)$ del fibrado tangente $T\Omega$, consistente en los vectores tangentes a las fibras de $\alpha : \Omega \longrightarrow B$. Este subfibrado existe en virtud de la Proposición 2.3.8. Este concepto es análogo al de subfibrado vertical de un fibrado vectorial visto en la Sección 2.4. De hecho, en diversos artículos el subfibrado $T^\alpha\Omega$ recibe el nombre de **subfibrado tangente vertical**.

Obsérvese que en esta ocasión no se han denotado los fibrados vectoriales como las ternas de la Definición 2.1.1. Esto se debe a que, para simplificar la notación de esta construcción, sólo se pondrá el espacio total del fibrado vectorial siempre que no quede duda de cuál es la base y cuál es la proyección.

Considérese $\varepsilon^*(T^\alpha\Omega)$ el pullback del fibrado vectorial $T^\alpha\Omega$ sobre la inclusión de objetos ε (véase la Definición 2.3.1) que resulta ser un fibrado vectorial sobre B.

Notación 7.3.1. *Al fibrado vectorial $\varepsilon^*(T^\alpha\Omega)$ sobre B se lo denotará en adelante por $\mathcal{A}\Omega$.*

Al ser $\mathcal{A}\Omega$ el fibrado inducido por $T^\alpha\Omega$ sobre ε, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\Omega & \xrightarrow{\mu} & T^\alpha\Omega \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ B & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega \end{array} \tag{7.11}$$

que representa al morfismo de fibrados vectoriales definido en el Teorema 2.3.4. Recuérdese además que en dicho teorema, la fibra del pullback $\mathcal{A}\Omega$ en $x \in B$ es la fibra de $T^\alpha\Omega$ en $\varepsilon(x) = \widetilde{x}$.

Al ser ε una inmersión inyectiva (véase la Proposición 6.1.8), puede considerarse a $\mathcal{A}\Omega$ como la restricción de $T^\alpha\Omega$ en B e identificar las fibras $\mathcal{A}\Omega_x$ como los espacios tangentes $T^\alpha_{\widetilde{x}}\Omega$, para cada $x \in B$. De igual modo, se podría considerar la aplicación $\mathcal{A}\Omega \longrightarrow T^\alpha\Omega$ como la inclusión.

Para continuar es necesario introducir el concepto de campo de vectores invariantes a derecha del grupoide diferenciable. Estos campos harán las funciones de los campos invariantes a izquierda de un grupo de Lie en la construcción de su álgebra de Lie.

Definición 7.3.2.

1. *Un campo $X \in \Gamma T\Omega$ de vectores tangentes sobre Ω se dice* **α-vertical** *si verifica que $T(\alpha)(X) = 0$.*

2. *Un campo $X \in \Gamma T\Omega$ de vectores tangentes sobre Ω se dice* **invariante a derecha** *si es α-vertical y verifica:*

$$X(\eta\xi) = T_\eta(R_\xi)(X(\eta)), \forall(\eta, \xi) \in \Omega * \Omega.$$

Se observa a continuación una caracterización de los campos α-verticales como secciones del subfibrado vertical $T^\alpha\Omega$.

Lema 7.3.3. *Un campo X de vectores tangentes sobre Ω es α-vertical si y sólo si X es una sección de $T^\alpha\Omega$.*

Demostración. El campo X es α-vertical si y sólo si se tiene $T(\alpha)(X) = 0$. Esto equivale a que para cada $\xi \in \Omega$ se tiene $\alpha_*(X_\xi) = 0_{\alpha(\xi)}$.

Como $T^\alpha\Omega$ coincide con el conjunto:

$$\{(\xi, v) \in T\Omega \mid \alpha_*(v) = 0_{\alpha(\xi)}\},$$

entonces "X es α-vertical" equivale a "X pertenece a $T^\alpha\Omega$". □

Nota 7.3.4. *Obsérvese que, por definición, X es α-vertical si y sólo si $X \sim_\alpha 0$.*

Por la Proposición 7.3.3, la definición de campo invariante a derecha es equivalente a la siguiente:

Definición 7.3.5. *Un campo de vectores tangentes sobre Ω se dice* **invariante a derecha** *si es una sección global $X : \Omega \longrightarrow T^\alpha\Omega$ del fibrado vectorial $T^\alpha\Omega$ tal que:*

$$X(\eta\xi) = T(R_\xi)(X(\eta)) \quad \forall\eta, \xi \in \Omega * \Omega$$

(recuérdese que $\Omega * \Omega$ es el conjunto de pares de elementos de Ω para los que la composición está definida).

Los campos de vectores tangentes invariantes a derecha son secciones de $T^\alpha\Omega$ debido a que la definición se basa en las traslaciones a derecha R_ξ que son aplicaciones definidas sólo en las α-fibras.

Nota 7.3.6. *Un campo de vectores tangentes invariante a derecha sobre Ω está completamente determinado por los valores que toma en los elementos identidad del grupoide, puesto que, dado $\xi \in \Omega_x^y$, se tiene:*

$$X(\xi) = T(R_\xi)(\widetilde{\beta(\xi)}).$$

Nota 7.3.7. *Si un campo X es invariante a derecha entonces, por la Nota 7.3.6, se cumple:*

$$X(\eta\xi) = T(R_\xi)(X(\eta)),$$

para todo $\eta \in \Omega_y$. Por lo tanto, se tiene $X_{|\Omega_y} \sim_{R_\xi} X_{|\Omega_x}$.

Recíprocamente, si $X \in \Gamma T^\alpha\Omega$ verifica $X_{|\Omega_y} \sim_{R_\xi} X_{|\Omega_x}$ con $\xi \in \Omega_x^y$, entonces $X(\eta\xi) = T(R_\xi)(X(\eta))$, para todo $\eta \in \Omega_y$.

A continuación, se verá la relación existente entre las secciones de $\mathcal{A}\Omega$ y las de $T^\alpha\Omega$. Recuérdese que $\mathcal{A}\Omega$ podía considerarse como la restricción de $T^\alpha\Omega$ a B, por lo que las fibras son isomorfas para cada elemento de B. Al ser la inclusión un morfismo de fibrados vectoriales, que es isomorfismo lineal sobre cada fibra de un elemento de B, puede usarse la Proposición 3.2.7 y, en consecuencia, a cada sección X de $T^\alpha\Omega$ le corresponde una sección de $\mathcal{A}\Omega$, que se denotará por $X_{\downarrow_B}$. Interesa en este punto hallar una aplicación inversa a $X \mapsto X_{\downarrow_B}$, que es lo que se tratará a continuación.

Proposición 7.3.8. *Existe el morfismo de fibrados vectoriales:*

$$\begin{array}{ccc} T^\alpha\Omega & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathcal{A}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{7.12}$$

donde las aplicaciones son las proyecciones de los fibrados vectoriales y la aplicación $\mathcal{R}$ se define sobre cada fibra de $T^\alpha\Omega$ como el isomorfismo lineal:

$$\mathcal{R}_\xi = T_\xi(R_{\xi^{-1}}) : T_\xi(\Omega_{\alpha(\xi)}) \longrightarrow T_{\beta(\xi)}(\Omega_{\beta(\xi)}).$$

Demostración. El morfismo división de grupoides diferenciables $\delta : \Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega \longrightarrow \Omega$, definido en el Ejemplo 4.3.27, induce el morfismo de fibrados vectoriales $T(\delta) : T(\Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega) \longrightarrow T\Omega$, dado por la aplicación derivada de la aplicación diferenciable δ.

Sea el morfismo de grupoides $H : \Omega \longrightarrow \Omega \underset{\alpha}{\times} \Omega$ definido como:

$$\xi \mapsto (\widetilde{\alpha\xi}, \xi),$$

que es diferenciable, por ser la aplicación $(\varepsilon \circ \alpha, id_\Omega)$.

Sea la composición del morfismo de fibrados vectoriales $T(H)$ con el morfismo $T(\delta)$ restringida a $T^\alpha\Omega \longrightarrow T^\alpha\Omega$. La Proposición 3.2.7 permite factorizar este morfismo por medio del morfismo $\mathcal{A}\Omega \longrightarrow T^\alpha\Omega$, con lo que se obtiene el morfismo de fibrados vectoriales $\mathcal{R}$ buscado.

Obviamente, cada $\mathcal{R}_\xi$ es un isomorfismo lineal por ser R_ξ una biyección. □

El objetivo del siguiente corolario es relacionar las secciones del fibrado $\mathcal{A}\Omega$ con los campos invariantes a derecha del grupoide diferenciable Ω de partida.

Corolario 7.3.9. *Dado $X \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$, se puede definir un campo de vectores sobre Ω invariante a derecha como:*

$$\vec{X}(\xi) = T(R_\xi)(X(\beta(\xi))), \qquad \xi \in \Omega.$$

Demostración. Aplicando la Proposición 3.2.7 al morfismo $\mathcal{R}$, se tiene:

$$\vec{X} = \mathcal{R}^\sharp(X).$$

□

Corolario 7.3.10. *La aplicación:*

$$\mathcal{F}(\Omega) \otimes_{\mathcal{F}(B)} \Gamma\mathcal{A}\Omega \longrightarrow \Gamma T^\alpha\Omega : f \otimes X \mapsto f\vec{X}$$

es un isomorfismo de $\mathcal{F}(\Omega)$-módulos.

Demostración. Es inmediato por la Proposición 3.3.1, sin más que considerar que $\mathcal{A}\Omega$ es el pullback de $T^\alpha\Omega$ sobre ε. □

Por el Corolario 7.3.10, puede afirmarse que para cualquier campo de vectores tangentes X perteneciente a $\Gamma T^\alpha\Omega$, existen campos X_i en $\Gamma\mathcal{A}\Omega$ y f_i en $\mathcal{F}(\Omega)$ tales que:

$$X = f_1\vec{X}_1 + \cdots + f_n\vec{X}_n.$$

Pero los X_i y n varían en función de X, ya que $\Gamma\mathcal{A}\Omega$ es, en general, solamente un $\mathcal{F}(B)$-módulo y no es libre. Obsérvese que el álgebra de Lie de un grupo de Lie sí es un $\mathcal{F}(B)$-módulo libre.

Proposición 7.3.11. *El fibrado vectorial dado por la proyección $\mathcal{A}\Omega \longrightarrow B$ es trivializable si y sólo si el fibrado vectorial dado por $T^\alpha\Omega \longrightarrow \Omega$ también lo es.*

Demostración. La demostración se basa en que ambos fibrados son isomorfos en virtud de la Proposición 7.3.8 y la Nota 2.3.6. □

A continuación, se dará el isomorfismo que se mencionó anteriormente entre las secciones de $\mathcal{A}\Omega$ y los campos invariantes a derecha del grupoide diferenciable Ω dado.

Notación 7.3.12. *Se denota como $\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$ al conjunto de los campos de vectores tangentes sobre Ω que son invariantes a derecha.*

Proposición 7.3.13. *$\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$ es un $\mathcal{F}(B)$-módulo por medio de la multiplicación:*

$$fX = (f \circ \beta)X .$$

Además, las siguientes aplicaciones:

$$\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega \longrightarrow \Gamma\mathcal{A}\Omega : X \mapsto X_{\downarrow_B} \quad y \quad \Gamma\mathcal{A}\Omega \longrightarrow \Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega : X \mapsto \vec{X} \tag{7.13}$$

son mutuamente isomorfismos inversos de $\mathcal{F}(B)$-módulos.

Demostración. La multiplicación definida da una estructura de $\mathcal{F}(B)$-módulo. En efecto:

1. Dados $f, g \in \mathcal{F}(B), X \in \Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$, entonces:

$$(fg)X = (fg \circ \beta)X = ((f \circ \beta)(g \circ \beta))X = (f \circ \beta)((g \circ \beta)X) = f(gX);$$

2. Con las mismas hipótesis, se tiene:

$$(f+g)X = ((f+g) \circ \beta)X = (f \circ \beta + g \circ \beta)X = fX + gX;$$

3. Dados $f \in \mathcal{F}(B), X, Y \in \Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$, entonces:

$$f(X+Y) = (f \circ \beta)(X+Y) = (f \circ \beta)X + (f \circ \beta)Y = fX + fY;$$

4. Dado $X \in \Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$ y 1_B la función constante con valor 1 sobre B, entonces:

$$1_B X = (1_B \circ \beta)X = X.$$

Queda ver que son morfismos de módulos y que son inverso uno del otro. Pero esto se tiene directamente del hecho de obtenerse el morfismo de fibrados $\mathcal{R}$ de la Proposición 7.3.8, que define la aplicación $\Gamma\mathcal{A}\Omega \longrightarrow \Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$, como factorización del pullback que determina (7.11). □

El resultado anterior establece un isomorfismo de módulos entre $\mathcal{A}\Omega$ y $\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$.

Se pretende, a partir de este momento, definir un corchete y un ancla en $\mathcal{A}\Omega$ para poder llegar a concluir que $\mathcal{A}\Omega$ es un algebroide de Lie. Para definir el corchete, se trasladará a $\mathcal{A}\Omega$ un corchete desde $\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$.

Lema 7.3.14. *El corchete de Poisson restringido a $\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$ es cerrado.*

Demostración. Es conocido que $X\in\Gamma T\Omega$ es α-vertical si y sólo si $X\sim_{\alpha} 0$ (véase la Nota 7.3.4) y que $X\in\Gamma T^{\alpha}\Omega$ es invariante a derecha si y sólo si $X_{|\Omega_y}\sim_{R_\xi} X_{|\Omega_x}$ para cada $\xi\in\Omega_x^y$.

Como α es diferenciable, entonces dados X, Y dos campos α-verticales sobre Ω se tiene que $X, Y \sim_{\alpha} 0$ y, por lo tanto, $[X,Y]\sim_{\alpha} 0$; lo que es equivalente a $[X,Y]$ es α-vertical. Además, si X, Y son invariantes a derecha, entonces $X_{|\Omega_y} \sim_{R_\xi} X_{|\Omega_x}$ y $Y_{|\Omega_y} \sim_{R_\xi} Y_{|\Omega_x}$ para cada $\xi\in\Omega_x^y$; por lo tanto:

$$[X_{|\Omega_y}, Y_{|\Omega_y}] = [X,Y]_{|\Omega_y} \sim_{R_\xi} [X_{|\Omega_x}, Y_{|\Omega_x}] = [X,Y]_{|\Omega_x}.$$

En consecuencia, $[X,Y]$ es también invariante a derecha. □

Nota 7.3.15. *En la demostración anterior se hace uso de un resultado bien conocido de Geometría Diferencial que afirma que, dada una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$, si dos campos* *vectoriales X, Y sobre la variedad M están f-relacionados con dos campos X', Y' sobre la variedad N, respectivamente, entonces el campo $[X,Y]$ de M está f-relacionado con el campo $[X',Y']$ de N. Este resultado puede verse en* **[28]**, *por ejemplo.*

Proposición 7.3.16. *El corchete* $[\ ,\ ]: \Gamma\mathcal{A}\Omega \times \Gamma\mathcal{A}\Omega \longrightarrow \Gamma\mathcal{A}\Omega$ *definido como:*

$$[X,Y] = [\vec{X},\vec{Y}]_{\downarrow_B} \qquad \forall X,Y \in \Gamma\mathcal{A}\Omega,$$

es $\mathbb{R}$-bilineal, alternado y satisface la identidad de Jacobi.

Demostración. La definición del corchete en $\Gamma\mathcal{A}\Omega$ proviene de trasladar, por medio del isomorfismo de $\mathcal{F}(B)$-módulos dado en la Proposición 7.3.13, el corchete de Poisson restringido a $\Gamma^{RI}T^{\alpha}\Omega$, como puede verse en la Proposición 7.3.14.

Como el corchete de Poisson en $T\Omega$ es $\mathbb{R}$-bilineal, alternado y satisface la identidad de Jacobi, se sigue que el corchete definido en $\Gamma\mathcal{A}\Omega$ también posee tales propiedades. □

Dada una función diferenciable $f \in \mathcal{F}(B)$ y dos secciones globales $X, Y \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$, entonces se verifica:

$$\overrightarrow{[X,fY]} = [\vec{X},(f\circ\beta)\vec{Y}] = (f\circ\beta)[\vec{X},\vec{Y}] + \vec{X}(f\circ\beta)\vec{Y} = \overrightarrow{f[X,Y]} + \vec{X}(f\circ\beta)\vec{Y}, \tag{7.14}$$

ya que $\overrightarrow{fX} = (f\circ\beta)\vec{X}$.

Como la proyección destino $\beta : \Omega \longrightarrow B$ es una submersión sobreyectiva (véase la Definición 6.1.1) y se cumple $\beta \circ R_{\xi} = \beta$, para cada $\xi \in \Omega$, entonces todo campo $\vec{X}$ de vectores tangente invariante a derecha es β-proyectable (véanse la Proposición 1.4.43 y la Definición 1.4.44).

Por lo tanto, para cada $f \in \mathcal{F}(B)$, se cumple $X'(f)\circ\beta = \vec{X}(f\circ\beta)$ y, en consecuencia, (7.14) se escribe:

$$[X,fY] = f[X,Y] + X'(f)Y, \tag{7.15}$$

donde X' es la β-proyección del campo de vectores tangentes invariante a derecha asociado al campo X. Esto lleva a la siguiente:

Definición 7.3.17. *El* **ancla** $q = q^{\Omega} : \mathcal{A}\Omega \longrightarrow TB$ *de* $\mathcal{A}\Omega$ *es el morfismo de fibrados vectoriales resultante de componer el morfismo de fibrados vectoriales:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\Omega & \longrightarrow & T^{\alpha}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega \end{array}$$

definido en (7.11) *y el morfismo de fibrados vectoriales:*

$$\begin{array}{ccccc} T^{\alpha}\Omega & \longrightarrow & T\Omega & \xrightarrow{T(\beta)} & TB \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega & = & \Omega & \xrightarrow{\beta} & B \end{array}$$

donde el primero es el dado por la inclusión de $T^{\alpha}\Omega$ *en* $T\Omega$ *y el segundo el inducido por la aplicación diferenciable* $\beta : \Omega \longrightarrow B$ *sobre los fibrados tangentes respectivos.*

Nota 7.3.18. *El morfismo de fibrados vectoriales dado en la definición anterior es un* B*-morfismo porque* $\beta \circ \varepsilon$ *coincide con* id_B.

Se verá que el ancla q que se ha definido sobre $\mathcal{A}\Omega$ verifica las condiciones 2 y 3 de la Definición 7.1.1 de algebroide de Lie. Para ello, se requiere el siguiente:

Lema 7.3.19. *Si* $X \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$, *entonces* $\vec{X}$ *está* β*-relacionado con* $q(X)$.

Demostración. Sea $\xi \in \Omega$. Entonces se cumple:

$$T(\beta)(\vec{X}(\xi)) = T(\beta \circ R_{\xi})(X(\beta(\xi))) = T(\beta)(X(\beta(\xi))),$$

debido a la Proposición 7.3.9 y a que β y $\beta \circ R_\xi$ son coincidentes.

Por otro lado, se mencionó al principio de la sección que, para cada $x \in B$, la fibra de de $\mathcal{A}\Omega$ en x coincide con la fibra de $T\Omega$ en $\widetilde{x}$. Por lo tanto, la aplicación $q_x : \mathcal{A}\Omega_x \longrightarrow T_xB$ coincide con $T_{\widetilde{x}}(\beta_x) : T_{\widetilde{x}}(\Omega_x) \longrightarrow T_xB$.

En consecuencia, $T(\beta)(X(\beta(\widetilde{x})))$ coincide con $q(X)(x)$ para cada $x \in B$, con lo que se concluye el lema. $\square$

Con este lema ya se está en condiciones de demostrar las dos siguientes proposiciones que permitirán probar las condiciones 2 y 3 de la Definición 7.1.1 de algebroide de Lie.

Proposición 7.3.20. *Sean $X, Y \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$ y $f \in \mathcal{F}(B)$. Entonces se cumple:*

$$[X, fY] = f[X, Y] + q(X)(f)Y.$$

Demostración. Se tiene directamente de (7.15) y del Lema 7.3.19. $\square$

Proposición 7.3.21. *Si X, $Y \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$, entonces:*

$$q[X, Y] = [q(X), q(Y)].$$

Demostración. Por el Lema 7.3.19, los campos $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ están β-relacionados con $q(X)$ y $q(Y)$, respectivamente. En consecuencia, $[\vec{X}, \vec{Y}]$ está β-relacionado con $[q(X), q(Y)]$. Como también $[\vec{X}, \vec{Y}] = \overrightarrow{[X, Y]}$, entonces $[\vec{X}, \vec{Y}]$ está β-relacionado con $q([X, Y])$. Al ser β sobreyectiva, se tiene que $q([X, Y]) = [q(X), q(Y)]$, en virtud de la Proposición 1.4.43. $\square$

Todo lo hecho hasta este momento lleva al siguiente:

Teorema 7.3.22. *El fibrado vectorial $\mathcal{A}\Omega$ sobre B es un algebroide de Lie junto con el corchete y el ancla definidos en la Proposición 7.3.16 y en la Definición 7.3.17, respectivamente.* $\square$

Definición 7.3.23. *Se denomina* **algebroide de Lie del grupoide diferenciable** Ω *al algebroide de Lie* $\mathcal{A}\Omega$ *sobre* B.

7.4 Funtor de Lie para $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd_B$

A continuación, se verá que, dado un morfismo $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ de grupoides diferenciables sobre una misma base, se puede definir un morfismo de algebroides de Lie $\mathcal{A}(\phi) : \mathcal{A}\Omega \longrightarrow \mathcal{A}\Omega'$ entre los algebroides de Lie asociados a dichos grupoides diferenciables que conserve la base B de dichos algebroides.

Proposición 7.4.1. *Sea* $\phi : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *un morfismo de grupoides diferenciables que conserve la base* B *común a los dos. Entonces existe un* B*-morfismo* $\mathcal{A}(\phi) : \mathcal{A}\Omega \longrightarrow \mathcal{A}\Omega'$ *entre los algebroides de Lie de dichos grupoides.*

Demostración. Según se vio en (7.11), se tienen definidos los morfismos de fibrados vectoriales dados por los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\Omega & \xrightarrow{\mu} & T^{\alpha}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega \end{array} \tag{7.16}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\Omega' & \xrightarrow{\mu'} & T^{\alpha'}\Omega' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{\varepsilon'} & \Omega'. \end{array} \tag{7.17}$$

Por otro lado, se tiene el morfismo de fibrados vectoriales definido por la aplicación tangente $T(\phi)$ entre los fibrados tangentes de los grupoides. Además, como se cumple $\alpha = \alpha' \circ \phi$, puede restringirse la aplicación $T(\phi)$ a los subfibrados verticales respectivos. Por lo tanto, se posee el morfismo de fibrados vectoriales definido por el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T^{\alpha}\Omega & \xrightarrow{T(\phi)} & T^{\alpha'}\Omega' \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{\phi} & \Omega'. \end{array} \tag{7.18}$$

De este modo, se construye el morfismo de fibrados vectoriales definido al componer el diagrama (7.16) seguido de (7.18), obteniendo el morfismo dado por:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}\Omega & \xrightarrow{\mu} & T^{\alpha}\Omega & \xrightarrow{T(\phi)} & T^{\alpha'}\Omega' \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ B & \xrightarrow{\varepsilon} & \Omega & \xrightarrow{\phi} & \Omega'. \end{array} \tag{7.19}$$

Como dicho morfismo es $T(\phi) \circ \mu$ sobre $\varepsilon' = \phi \circ \varepsilon$, se tiene que existe un único B-morfismo $\mathcal{A}(\phi) : \mathcal{A}\Omega \to \mathcal{A}\Omega'$ verificando $T(\phi) \circ \mu = \mu' \circ \mathcal{A}(\phi)$, en virtud de la Proposición 2.3.5. □

Nota 7.4.2. *Nótese que el morfismo $\mathcal{A}(\phi)$ de fibrados vectoriales definido en la proposición anterior posee una propiedad sumamente importante: es el único que cumple:*

$$T(\phi) \circ \mu = \mu' \circ \mathcal{A}(\phi).$$

Seguidamente se verá que el morfismo $\mathcal{A}(\phi)$ es un morfismo de algebroides de Lie sobre una misma base B; para ello, ha de verse que se cumplen las condiciones de la Definición 7.1.1.

Proposición 7.4.3. *Si q y q' son las respectivas anclas de $\mathcal{A}\Omega$ y $\mathcal{A}\Omega'$, entonces se tiene que $q' \circ \mathcal{A}(\phi) = q$.*

Demostración. Por la definición de q' (véase la Definición 7.3.17), se tiene:

$$q' \circ \mathcal{A}(\phi) = T(\beta') \circ \mu' \circ \mathcal{A}(\phi),$$

donde $\mu' : \mathcal{A}\Omega' \longrightarrow T^{\alpha'}\Omega'$. Por la Nota 7.4.2, se cumple que:

$$q' \circ \mathcal{A}(\phi) = T(\beta') \circ T(\phi) \circ \mu.$$

Y como $\beta' \circ \phi = \beta$ y, por tanto, $T(\beta') \circ T(\phi) = T(\beta)$, entonces:

$$q' \circ \mathcal{A}(\phi) = T(\beta) \circ \mu,$$

siendo el segundo miembro de la expresión la definición de q. □

A continuación, se probará que el morfismo $\mathcal{A}(\phi)$ conserva los corchetes. Para ello, es necesario previamente el siguiente:

Lema 7.4.4. *Si $X \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$, $X' \in \Gamma\mathcal{A}\Omega'$, entonces $X' = \mathcal{A}(\phi)(X)$ si y sólo si $\vec{X} \sim_\phi \overrightarrow{X'}$.*

Demostración. En primer lugar, $\vec{X} \sim_\phi \overrightarrow{X'}$ es equivalente a $\phi \circ \vec{X} = \overrightarrow{X'}$.

Por otro lado, para cada $\xi \in \Omega'$, se tiene por la Proposición 7.3.9, que:

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(\phi)(X)}(\xi) = T(R_\xi)(\mathcal{A}(\phi)(X)(\beta'(\xi))).$$

□

Una vez se está en posesión del lema anterior, es posible afirmar la siguiente:

Proposición 7.4.5. *La aplicación $A(\phi)$ conserva los corchetes.*

Demostración. Sean $X, Y \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$ y sean $X' = A(\phi)(X)$ y $Y' = A(\phi)(Y)$. Por el Lema 7.4.4, se tiene que $\vec{X} \sim_\phi \overrightarrow{X'}$ y $\vec{Y} \sim_{A(\phi)} \overrightarrow{Y'}$. Por lo tanto, se tiene:

$$\overrightarrow{[X,Y]} = [\vec{X}, \vec{Y}] \sim_\phi [\overrightarrow{X'}, \overrightarrow{Y'}] = \overrightarrow{[X', Y']}.$$

De nuevo, por el Lema 7.4.4, se cumple que $[X', Y'] = A(\phi)([X, Y])$.

□

Las Proposiciones 7.4.3 y 7.4.5 permiten enunciar el siguiente:

Teorema 7.4.6. *La construcción de la aplicación* $\Omega \longrightarrow \mathcal{A}\Omega$ *y* $\phi \longrightarrow \mathcal{A}(\phi)$ *constituye un funtor entre la categoría* $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd_B$ *y la categoría* $\mathcal{LA}_B$. □

Notación 7.4.7. *En este teorema, la categoría* $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd_B$ *es la que tiene por objetos los grupoides diferenciables sobre la base* B *y por morfismos los morfismos de grupoides diferenciables; mientras que la categoría* $\mathcal{LA}_B$ *es la que tiene por objetos los algebroides de Lie sobre la variedad* B *y por morfismos los morfismos de algebroides de Lie.*

Definición 7.4.8. *El funtor* $\mathcal{A}$ *del Teorema 7.4.6 recibe el nombre de* **funtor de Lie**.

7.5 Funtor de Lie para $\mathcal{D}if\mathcal{G}rd$

Para concluir este capítulo, se obtendrá un funtor de Lie de forma análoga a como se realizó en la sección anterior, pero sin la restricción de que los grupoides sean sobre la misma base. Para ello, se tomará como referencia básica **[24]** con el fin de ver que, dado un morfismo de grupoides diferenciables $F:\Omega'\longrightarrow\Omega$ sobre $f:B'\longrightarrow B$, la aplicación inducida $\mathcal{A}(F)=F_*:\mathcal{A}\Omega'\longrightarrow\mathcal{A}\Omega$ entre los algebroides de Lie satisface la Definición 7.2.3 de morfismo de algebroides de Lie. Para llegar a este resultado, se necesita previamente la siguiente:

Proposición 7.5.1. *Sea* $f : B' \longrightarrow B$ *una aplicación diferenciable entre las variedades diferenciables* B' *y* B. *Entonces* $T(f):TB'\longrightarrow TB$ *es un morfismo de algebroides de Lie sobre* f.

Demostración. Basta demostrar la condición (7.9) del corchete puesto que la condición sobre las anclas se cumple trivialmente debido a la definición de las mismas.

Sean, por tanto, $X', Y' \in \Gamma TB'$ con las siguientes $T(f)$-descomposiciones:

$$T(f)\circ X' = \sum u'_i(X_i \circ f) \qquad \text{y} \qquad T(f)\circ Y' = \sum v'_j(Y_j \circ f).$$

En consecuencia, para todo $r, s \in \mathcal{F}(B)$, se tienen:

$$T(r\circ f)\circ X' = \sum u'_i(X_i(r)\circ f) \quad \text{y} \quad T(s\circ f)\circ Y' = \sum v'_j(Y_j(s)\circ f),$$

con lo que:

$$\begin{aligned} X'(Y'(s\circ f)) &= \sum X'(v'_j)(Y_j(s)\circ f) + \sum v'_j X'(Y_j(s)\circ f) \\ &= \sum X'(v'_j)(Y_j(s)\circ f) + \sum v'_j u'_i(X_i(Y_j(s))\circ f); \end{aligned}$$

y análogamente:

$$Y'(X'(s\circ f)) = \sum Y'(u'_i)(X_i(s)\circ f) + \sum v'_j u'_i(Y_j(X_i(s))\circ f).$$

De este modo se tiene, para cada $s \in \mathcal{F}(B)$:

$$\begin{aligned} (T(f)\circ[X',Y'])(s) &= [X',Y'](s\circ f) = X'(Y'(s\circ f)) - Y'(X'(s\circ f)) \\ &= \sum X'(v'_j)(Y_j(s)\circ f) + \sum v'_j u'_i(X_i(Y_j(s))\circ f) \\ &\quad - \sum Y'(u'_i)(X_i(s)\circ f) - \sum v'_j u'_i(Y_j(X_i(s))\circ f) \\ &= \sum v'_j u'_i((X_i(Y_j(s)) - Y_j(X_i(s)))\circ f) \\ &\quad + \sum Y'(u'_i)(X_i(s)\circ f) - \sum X'(v'_j)(Y_j(s)\circ f), \end{aligned}$$

que es la condición (7.9). □

Como se verifica que $\alpha\circ F = f\circ\alpha'$, debido a ser morfismo de grupoides diferenciables, el morfismo de fibrados vectoriales $T(F): T\Omega' \longrightarrow T\Omega$ sobre $F: \Omega' \longrightarrow \Omega$ puede restringirse a un morfismo de fibrados vectoriales $T^\alpha(F): T^{\alpha'}\Omega' \longrightarrow T^\alpha\Omega$ sobre F. Pero el morfismo $T^\alpha(F)$ induce una aplicación $\mathcal{A}(F): \mathcal{A}\Omega' \longrightarrow \mathcal{A}\Omega$, definida por el diagrama representado en la Figura 7.1, en el que los cuadra-

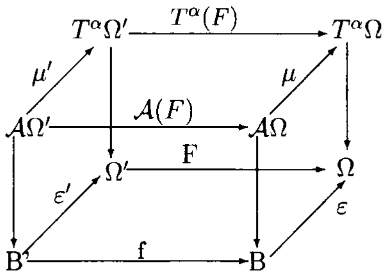

Figura 7.1: Diagrama de la aplicación $\mathcal{A}(F)$.

dos laterales son los que se obtienen al construir los algebroides de Lie $\mathcal{A}\Omega$ y $\mathcal{A}\Omega'$ como pullbacks de $T^\alpha\Omega$ y $T^{\alpha'}\Omega'$ sobre ε y ε', respectivamente. Recuérdese (como se comentó al principio de esta Sección 7.3) que las aplicaciones μ y μ' podían considerarse como inclusiones, por lo que $\mathcal{A}(F)$ es diferenciable. Se probará que $\mathcal{A}(F)$ es un morfismo de algebroides de Lie.

Proposición 7.5.2. *La aplicación $\mathcal{A}(F) : \mathcal{A}\Omega' \longrightarrow \mathcal{A}\Omega$ conserva las anclas.*

Demostración. Si q y q' son las anclas de $\mathcal{A}\Omega$ y $\mathcal{A}\Omega'$, entonces:

$$T(f)\circ q' = T(f)\circ T(\beta')\circ\mu' = T(\beta)\circ T(F)\circ\mu' = T(\beta)\circ\mu\circ\mathcal{A}(F) = q\circ\mathcal{A}(F),$$

debido al diagrama de la Figura 7.1 y a las definiciones de q y q'. □

Proposición 7.5.3. *La aplicación $\mathcal{A}(F)$ verifica la condición (7.9) de la definición de morfismo de algebroides de Lie.*

Demostración. Sea $X' \in \Gamma\mathcal{A}\Omega'$ con una $\mathcal{A}(F)$-descomposición:

$$\mathcal{A}(F)\circ X' = \sum u_i'(X_i\circ f),$$

con $u_i' \in \mathcal{F}(B')$ y $X_i \in \Gamma\mathcal{A}\Omega$. Sean $\vec{X'}$ y $\vec{X_i}$ los campos de vectores tangentes invariantes a derecha correspondientes a X y X_i sobre Ω'

y Ω, respectivamente; es decir:

$$\overrightarrow{X'}(\xi') = T(R_{\xi'})(X'(\beta'(\xi'))) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{X_i}(\xi) = T(R_\xi)(X(\beta(\xi))),$$

con $\xi \in \Omega$, $\xi' \in \Omega'$ y las traslaciones a derecha R_ξ y $R_{\xi'}$.

Ahora se considerarán los morfismos de fibrados vectoriales:

$$\begin{array}{ccc} T^{\alpha'}\Omega' & \xrightarrow{\mathcal{R}'} & \mathcal{A}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega' & \xrightarrow{\beta'} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T^{\alpha}\Omega & \xrightarrow{\mathcal{R}} & \mathcal{A}\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega & \xrightarrow{\beta} & B, \end{array}$$

que se definían en la Proposición 7.3.8. Recuérdese que el morfismo $\mathcal{R}$ (análogamente con $\mathcal{R}'$), en la fibra de $\xi \in \Omega$, funcionaba como:

$$T(R_{\xi^{-1}}) : T(\Omega_{\alpha(\xi)})_\xi \longrightarrow T(\Omega_{\beta(\xi)})_{\widetilde{\beta(\xi)}}.$$

Debido a las definiciones de $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}$, se tiene que $\overrightarrow{X'}$ se proyecta en X' respecto de $\mathcal{R}'$ y que $\overrightarrow{X_i}$ se proyecta en X_i respecto de $\mathcal{R}$. Por el mismo motivo, se sigue de la $\mathcal{A}(F)$-descomposición de X' que $T(F) \circ \overrightarrow{X'} = \sum (u_i' \circ \beta')(\overrightarrow{X_i'} \circ F)$.

De manera análoga, dado $Y' \in \mathcal{A}\Omega'$ cuya $\mathcal{A}(F)$-descomposición es $\mathcal{A}(F) \circ Y' = \sum v_j'(Y_j \circ f)$, se obtiene $T(F) \circ \overrightarrow{Y'} = \sum (v_j' \circ \beta')(\overrightarrow{Y_j} \circ F)$.

Aplicando la Proposición 7.5.1 a F, se llega a que:

$$\begin{aligned} T(F) \circ [\overrightarrow{X'}, \overrightarrow{Y'}] = & \sum (u_i' \circ \beta')(v_j' \circ \beta')([\overrightarrow{X_i}, \overrightarrow{Y_j}] \circ F) \\ & + \sum [\overrightarrow{X'}, v_j' \circ \beta'](\overrightarrow{Y_j} \circ F) - \sum [\overrightarrow{Y'}, u_i' \circ \beta'](\overrightarrow{X_i} \circ F). \end{aligned}$$

Esta es una ecuación para aplicaciones definidas sobre Ω', tomando valores en $T\Omega$. Restringiéndola a B', se obtiene:

$$\mathcal{A}(F) \circ [X', Y'] = \sum u_i' v_j'([X_i, Y_j] \circ f) + \sum [X', v_j](Y_j \circ f) - \sum [Y', u_i](X_i \circ f),$$

donde se hace uso de $\overrightarrow{X'} \sim_{\beta'} q'(X')$, hecho que se demostró en el Lema 7.3.19. $\square$

Como conclusión de esta sección, de las Proposiciones 7.5.2 y 7.5.3 se sigue el siguiente:

Teorema 7.5.4. *Las aplicaciones* $\Omega \longrightarrow \mathcal{A}(\Omega)$ *y* $F \longrightarrow \mathcal{A}(F)$ *construidas anteriormente definen un funtor* $\mathcal{A}{:}\,\mathcal{D}if\mathcal{G}rd \longrightarrow \mathcal{LA}$. □

Definición 7.5.5. *El funtor* $\mathcal{A}$ *definido en el Teorema 7.5.4 recibe el nombre de* **funtor de Lie**.

Nota 7.5.6. *Obsérvese que el funtor de Lie dado en la Definición 7.4.8 es la restricción del dado en la Definición 7.5.5 a la subcategoria* $\mathcal{DG}rd_B$ *de la categoría* $\mathcal{DG}rd$.

Espero haber convencido al lector de que merece la pena conocer los grupoides y quedarse a la expectativa.

A. Weinstein.

Bibliografía

Artículos y monografías referenciadas

[1] R. Almeida, Teoría de Lie para os grupóides diferenciáveis, Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 1980.

[2] R. Almeida et A. Kumpera, Structure produit dans la catégorie des algébroides de Lie, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* **53** (1981), 247–250.

[3] R. Almeida et P. Molino, Suites d'Atiyah et feuilletages transversalment complets, *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** Série A (1985), 13–15.

[4] W. M. Boothby, An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, San Diego, 1985.

[5] H. Brandt, Über eine Verallgemienrung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.* **96** (1926), 360–366.

[6] R. Brown, From groups to groupoids: a brief survey, *Bull. London Math. Soc.* **19** (1987), 113–134.

[7] R. Brown, Topology: A Geometric Account of General Topology, Homotopy Types and the Fundamental Groupoid, Halsted Press, New York, 1988.

[8] R. Brown and G. Danesh-Naruie, The fundamental groupoid as a topological groupoid, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **19** (1975), 237–244.

[9] R. Brown, G. Danesh-Naruie and J. P. L. Hardy, Topological groupoids: II. Covering morphisms and G-spaces, *Math. Nachr.* **74** (1976), 143–156.

[10] R. Brown and J. P. L. Hardy, Topological Groupoids: I. Universal Constructions, *Math. Nachr.* **71** (1976), 273–286.

[11] J. F. Cariñena, Lie groupoids and algebroids in Classical and Quantum Mechanics. En el libro: Symmetries in Quantum Mechanics and Quantum Optics, Universidad de Burgos, Burgos (España), 1999, 67–81.

[12] J. F. Cariñena and E. Martínez, Lie algebroid generalization of geometric mechanics. En el libro: Lie Algebroids, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 201–215.

[13] J. Clemente-Gallardo, Applications of Lie algebroids in mechanics and control theory. En el libro: Nonlinear control in the New Millenium, F. Lamnabhi-Lagarrigue et al. (eds.), Springer, 2001, 299–313.

[14] J. Dieudonné, Treatise on Analysis Vol. III, Academic Press, New York, 1972.

[15] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[16] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Colloque de Topologie (Espaces Fibrés), Bruxelles, 1950*, Georges Thone, Liège, 1951.

[17] C. Ehresmann, Les prolongamentes d'une variété différentiable, V: Covariants differentiels et prolongaments d'une structure infinitésimale, *C. R. Acad. Sci. Paris* **234** Série A (1952), 1424–1425.

[18] C. Ehresmann, Sur les connexions d'ordre supérieur, *Dagli Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana*, Pavia-Torino, 1956, 344–346.

[19] C. Ehresmann, Catégories topologiques et catégories différentiables, *Colloque de Géometrie Différentielle Globale*, Centre Belge de Recherches Mathematiques, Bruxelles, 137–150, 1959.

[20] S. Eilenberg and S. MacLane, The General Theory of Natural Equivalences, *Trans. Amer. Math. Soc.* **58** (1945), 231–294.

[21] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, Connections, Curvature, and Cohomology I, Academic Press, New York, 1972.

[22] A. Grothendieck, Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique III: préschemas quotients, *Séminaire Bourbaki 13e année 1960/1961*, n^o 212, 1961.

[23] P. J. Higgins, Notes on categories and groupoids, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.

[24] P. J. Higgins and K. C. H. Mackenzie, Algebraic Constructions in the Category of Lie Algebroids, *J. Algebra* **129** (1990), 194–230.

[25] D. Husemoller, Fibre Bundles, Springer-Verlag, New York, 1974.

[26] J. L. Koszul, Lectures on fibre bundles and differential geometry, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[27] A. Kumpera and D. Spencer, Lie Equations I: Theory General, Princeton University Press, Princeton, 1972.

[28] S. Lang, Differential and Riemannian Manifolds, Springer-Verlag, New York, 1995.

[29] P. Libermann, Lie algebroids and mechanics, *Archivum Mathematicum* **32** (1996), 147–162.

[30] K. Mackenzie, Infinitesimal theory of principal bundle, Charla en 50^{th} ANZAAS Conference, Adelaide, 8, 1980.

[31] K. Mackenzie, Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry, *London Mathematical Society Lecture Note Series* **124**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[32] K. Mackenzie, A note on Lie algebroids wich arise from groupoid actions, *Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catégoriques* **28** (1987), 283–302.

[33] K. C. H. Mackenzie, Double Lie algebroids and second-order geometry, I, *Adv. Math.* **94** n^o 2 (1992), 180–239.

[34] K. C. H. Mackenzie, Lie algebroids and Lie pseudoalgebras, *Bull. London Math. Soc.* **27** (1995), 97–147.

[35] K. C. H. Mackenzie, General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids, *London Mathematical Society Lecture Note Series* **213**, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[36] K. C. H. Mackenzie and P. Xu, Lie bialgebroids and Poisson groupoids, *Duke Math. J.* **73** (1994) n^o 2, 414–452.

[37] K. C. H. Mackenzie and P. Xu, Integration of Lie bialgebroids, *Topology* **39** (2000), 445–467; arXiv:dg-ga/9712012.

[38] G. W. Mackey, Ergodic theory and virtual groups, *Math. Ann.* **166** (1966), 187–207.

[39] E. Martínez, Lagrangian mechanics on Lie algebroids, *Acta Appl. Math.* **67** (2001), 295–320.

[40] Y. Matsushima, Diferentiable Manifolds, Marcel Dekker, New York, 1972.

[41] B. Mitchell, Theory of categories, Academic Press, New York, 1965.

[42] J.-I. Nagata, Modern General Topology, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[43] M. Postnikov, Lie Groups and Lie Algebras, Lectures in Geometry V, "Nauka", Moscow, 1994.

[44] J. Pradines, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propiétés locales et globales, *C. R. Acad. Sci. Paris* **263** Série A (1966), 907–910.

[45] J. Pradines, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux, *C. R. Acad. Sci. Paris* **264** Série A (1967), 245–248.

[46] J. Pradines, Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde, *C. R. Acad. Sci. Paris* **266** Série A (1968), 1194–1196.

[47] J. Pradines, Troisième théoréme de Lie pour les groupoïdes différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **267** Série A (1968), 21–23.

[48] J. Pradines, Quotients de groupoïdes différentiables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **303** Série A (1986), 817–820.

[49] M. Reid, Undergraduate Conmutative Algebra, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[50] J. Renault, A groupoid approach to C^*-algebras, *Lecture Notes in Math.* (1980), 793.

[51] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, Lie Groups and Lie Algebras with applications to Physics, Geometry and Mechanics, University of Bangalore Press, Bangalore, 1997.

[52] H. Schubert, Categories, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[53] I. M. Singer and J. A. Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, University of Bangalore Press, Bangalore, 1996.

[54] R. G. Swan, Vector Bundles and proyective modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **105** (1962) 264–277.

[55] V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras and Their Representations, Selected Monographies **17**, Collæge Press, Beijing, 1998.

[56] P. ver Eecke, Calculus of jets and higher-order connections, University of Melbourne, Mathematics Research Report, 1981.

[57] A. Viña Escalar, Geometría Diferencial, Universidad de Oviedo, Oviedo, 1999.

[58] A. Weinstein, Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry, *Notices Amer. Math. Soc.* **43** (1996), 744–752.

[59] A. Weinstein, Lagrangian mechanics and groupoids. En el libro: Mechanics, S.W.F. Day, P.S. Krishnaprasad and T.S. Raitu eds., Fields Institute Communications **7**, American Mathematical Society, 1996, 207–231.

Otras obras de interés

[60] F. Abadie, Sobre açoes parciais, fibrados de Fell e grupóides, Tese de doutorado, São Paulo, Brazil, 1999.

[61] C. Albert et P. Dazord, Groupoïdes de Lie et groupoïdes symplectiques. En el libro: Symplectic geometry, groupoids and integrable systems, *Séminaire Sud Rhodaien de Géométrie* (1989), P. Dazord y A. Weinstein eds. Springer-Verlag, MSRI Publications, 20, 1991.

[62] B. Bakalov, A. D'Andrea and V. G. Kac, Theory of Finite Pseudoalgebras, *Adv. Math.* **162** (2001), 1–140.

[63] I. W. Belko, Characteristic classes of transitive Lie algebroids, *Preprint Minsk*, 1994, 192pp.

[64] I. W. Belko, Charasteristic homomorphism of a Lie algebroid, *Vestsi Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk* **1** (1997), 50–55.

[65] R. Brown, Groupoids and Van Kampen's Theorem, *Proc. London Math. Soc.* (3) **17** (1967), 385–401.

[66] R. Brown, Groupoids and crossed objects in algebraic topology, *Homology, Homotopy and Applications* **1** (1999), 1–78.

[67] R. Brown and J. F. Glazebrook, Connections, local subgroupoids and a holonomy Lie groupoid of a line bundle gerbe, *Univ. Iagel. Acta Math.* **XLI** (2003), 283–296; arXiv:math.DG/0210322.

[68] R. Brown, P. R. Heath and K. H. Kamps, Groupoids and the Mayer-Vietoris sequence, *J. Pure Appl. Algebra* **30** (1983), 109–129

[69] R. Brown and İ. İçen, Lie local subgroupoids and their holonomy and monodromy Lie groupoids, *Topology Appl.* **115** (2001), 125–138; arXiv:math.DG/9808112.

[70] R. Brown and İ. İçen, Homotopies and automorphism of crossed modules of groupoids, *Appl. Categorical Structure* **11** (2003), 185–206; arXiv:math.CT/0008117.

[71] R. Brown, İ. İçen and O. Mucuk, Holonomy and monodromy groupoids. En el libro: Lie algebroid, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 9–20; arXiv:math.DG/0110064.

[72] R. Brown and O. Mucuk, The monodromy groupoid of a Lie groupoid, *Cahiers Top. Géom. Diff. Cat.* **36** (1995) n^o 4, 345–369.

[73] R. Brown and O. Mucuk, Foliations, Locally Lie Groupoids and Holonomy, *Cahiers Top. Géom. Diff. Cat.* **37** (1996), 61-71.

[74] R. Brown, İ. İçen and O. Mucuk, Local subgrupoids II: Examples and properties, *Topology Appl.* **127** (2003), 393–408; arXiv:math.DG/0008165.

[75] T. Courant, Tangent Lie algebroids, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 4527–4536.

[76] M. Crainic and R. L. Fernandes, Integrability of Lie Brackets, *Ann. of Math.* **157** (2003), 575–620; arXiv:math.DG/0105033.

[77] G. Danesh-Naruie, Topological groupoids, Ph.D. Thesis, University of Southampton, 1970.

[78] C. Debord, Groupoïdes d'holonomic de feuilletages singuliers, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I* **330** (2000), 361–364.

[79] C. Debord, Local integration of Lie algebroids. En el libro: Lie Algebroids, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 21–33.

[80] J.-P. Dufour, Normal forms of Lie algebroids. En el libro: Lie Algebroids, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 35–41.

[81] C. Ehresmann, Groupoides differenciables y pseudogrupos de Lie, *Revista de la Unión Argentina* XIX (1960).

[82] C. Ehresmann, Catégories différentiables et Géometrie Différentiable, Seminare d'été Montreal, Department de Mathematique, Universite de Montreal, 1961.

[83] S. Even, J.-H. Lu and A. Weinstein, Transverse measures, the modules class and cohomology pairing for Lie algebroids, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (2) **50** (1999), 417–436.

[84] R. L. Fernandes, Lie Algebroids, Holonomy, and Characteristic Classes, *Adv. Math.* **170** (2002), 119–179; arXiv:math.DG/0007132.

[85] R. L. Fernandes, Invariants of Lie algebroids, *Diff. Geom. Appl.* **19** (2003), 223–243; arXiv:math.DG/0202254.

[86] K. Grabowska, J. Grabowski and P. Urbański, Lie brackets on affine bundles, *Ann. of Glob. Anal. and Geom.* **24** (2003), 101–130; arXiv:math.DG/0203112.

[87] J. Grabowski, The Lie algebra of a Lie algebroid. En el libro: Lie Algebroids, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 43–50.

[88] J. Grabowski and G. Marmo, On Filipov algebroids and multiplicative Nambu-Poisson structures, *Diff. Geom. Appl.* **12** (2000), 35–50.

[89] J. Grabowski and G. Marmo, Non-antisymmetric versions of Nambu-Poisson and Lie algebroid brackets, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 3803–3809; arXiv:math.DG/0104122.

[90] J. Grabowski and G. Marmo, Jacobi structures revisited, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 10975–10990; arXiv:math.DG/0111148.

[91] J. Grabowski and G. Marmo, The graded Jacobi algebras and (co)homology, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 161–181; arXiv:math.DG/0207017.

[92] J. Grabowski and P. Urbański, Lie algebroids and Poisson-Nijenhuis structure, *Rep. Math. Phys.* **40** (1997), 195–208; arXiv:dg.ga/9710007.

[93] J. Grabowski and P. Urbański, Algebroids - general differential calculi on vector bundle, *J. Geom. Phys.* **31** (1999), 111–141.

[94] J. P. L. Hardy, Topological Groupoids, M.A. Dissertation, University of Wales, 1972.

[95] J. P. L. Hardy, Topological groupoids: coverings and universal constructions, Ph.D. Thesis, University of Wales, 1974.

[96] M. Heller and W. Sasin, Noncommutative regime of Fundamental Physics, arXiv:gr-qc/0104003.

[97] J.-C. Herz, Pseudo-algèbres de Lie, *C. R. Acad. Sci. Paris Série A* **236** (1953), 1935-1937.

[98] J.-C. Herz, Pseudo-algèbres de Lie, II, *C. R. Acad. Sci. Paris Série A* **236** (1953), 2289-2291.

[99] P. J. Higgins and K. C. H. Mackenzie, Fibrations and quotients of differentiable groupoids, *J. London Math. Soc.* (2) **42** (1990), 194-230.

[100] R. Ibáñez, M. de León, J. C. Marrero and E. Padrón, Leibniz algebroids associated with a Nambu-Poisson structure, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) n^o 46, 8129-8144.

[101] R. Ibáñez, M. de León, B. López, J. C. Marrero and E. Padrón, Duality and modular class of a Nambu-Poisson structure, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 3623-3650.

[102] D. Iglesias and J. C. Marrero, Lie algebroids, Jacobi structures and Lie groups, *Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics, Publicaciones de la RSME* **3** (2001), 89-106.

[103] D. Iglesias and J. C. Marrero, Generalized Lie bialgebroids and Jacobi structures, *J. Geom. and Phys.* **40** (2001), 176-199; arXiv:math.DG/0008105.

[104] İ. İçen, Sheaves and local subgroupoids, *Mathematics Preprint* **00.16**, University of Wales, Bangor, 2000.

[105] R. Kälsström, Smooth modules over Lie algebroids I, arXiv:math.AG/9808108.

[106] Y. Kerbrat et Z. Souici-Benhammandi, Variétés de Jacobi et groupoïdes de contact, *C.R. Acad. Sci. París Série I* **317** (1993), 81-86.

[107] A. Kock, On the integration theorem for Lie groupoids, *Czechoslovak Math. J.* **39** (1989), 423–431.

[108] Y. Kosmann-Schawrzbach and K.C.H. Mackenzie, Differential operators and actions of Lie algebroids, *Contemp. Math.* **315** (2002), 213–233; arXiv:math.DG/0209337.

[109] J. Kubarski, Exponential mapping for Lie groupoids, *Colloq. Math.* **47** (1982), 267–282.

[110] J. Kubarski, Exponential mapping for Lie groupoids. Applications, *Colloq. Math.* **54** (1987), 39–48.

[111] J. Kubarski, Characteristic classes of regular Lie algebroids - a sketch, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) Suppl. n^o 30 (1993), 71–94.

[112] J. Kubarski, Bott's vanishing theorem for regular Lie algebroids, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 2151–2167.

[113] J. Kubarski, The Weil algebra and the secondary charasteristic homomorphism of regular Lie algebroid. En el libro: Lie

Algebroids, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 135–173.

[114] A. Kumpera, An introduction to Lie groupoids. Duplicated notes, Núcleo de Estudos e Pesquisas Científicas, Rio de Janeiro, 1971.

[115] N. P. Landsman, Classical and quantum representation theory,*Proc. Sem. Math. Struct. Field Theory 1989–1990. CWI-syllabus* **39** (1996), 135–163; arXiv:hep-th/9411172.

[116] N. P. Landsman, Lie groupoid C^*-algebras and Weyl quantization, *Commun. Math. Phys.* **206** (1999), 367–381.

[117] N. P. Landsman, Quantization as a functor, *Contemp. Math.* **315** (2002), 9–24; arXiv:math-ph/0107023.

[118] N. P. Landsman, Operator algebras and Poisson manifolds associated to groupoids, *Commun. Math. Phys.* **222** (2001), 97–116; arXiv:math-ph/0008036.

[119] N. P. Landsman and B. Ramazan, Quantization of Poisson algebras associated to Lie algebroids, *Contemp. Math.* **282** (2001), 159–192; arXiv:math-ph/0001005.

[120] P. Libermann, Pseudogroupes infinitésimaux attachés aux pseudogroupes de Lie, *Bull. Soc. Math. France* **87** (1959), 409–425.

[121] P. Libermann, Sur les groupides différentiables et les "presque parallélisme", Instituto nazionale di alta matematica, *Symposia mathematica* X (1972), 59–93.

[122] J.-H. Lu, Poisson homogeneus spaces and Lie algebroids associated to Poisson actions, *Duke Math. J* **86** (1997), 261–304.

[123] J.-H. Lu, Lie algebroids associated to Poisson actions, arXiv:q-alg/9503003.

[124] J.-H. Lu, Hopf algebroids and quantum groupoids, *International J. Math.* **7** (1996), 47–70.

[125] D. Macho and J. C. Cariñena, Lie algebroids, Jacobi structures and Lie groups, *Proc. IX Fall Workshop Geom. Phys.*, Publ. RSME **3** (2001), 89-106.

[126] M. Macho-Stadler and M. O'uchi, Correspondences and groupoids, *Proceedings of the IX Fall Workshop on Geometry and Physics*, *Publicaciones de la RSME* **3** (2001), 233–238.

[127] K. C. H. Mackenzie, Classification of principal bundles and Lie groupoids with prescribed gauge group bundle, *J. Pure Appl. Algebra* **58** (1989), 181–208.

[128] K. C. H. Mackenzie, Double Lie algebroids and the double of Lie bialgebroids, arXiv:math.DG/9808081.

[129] K. C. H. Mackenzie, Drinfel'd doubles and Ehresmann doubles for Lie algebroids and Lie bialgebroids, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* **4** (1998), 74–87.

[130] K. C. H. Mackenzie, Double Lie algebroids and second order geometry, II, *Adv. Math.* **154** (2000), 46–75; arXiv:dg-ga/9712013.

[131] K. C. H. Mackenzie, Notions of double for Lie algebroids, arXiv: math.DG/0011212.

[132] A. R. Magid, Galois groupoids, *J. Algebra* **18** (1971), 89–102.

[133] G. Maltsiniotis, Groupoides quantiques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **314** (1992), 249–252.

[134] G. Maltsiniotis, Groupoides quantiques de base non-commutative, *Comm. in Alg.* **28** (2000), 3441–3501.

[135] E. Martínez, T. Mestdag and W. Sarlet, Lie algebroid structures and Lagrangian systems on affine bundles, *J. Geom. Phys.* **44** (2002), 70–95; aXiv:math.DG/0203178.

[136] L. Maxim-Raileanu, Cohomology of Lie algebroids, *An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi. Sect. la Mat.* **22** (1976), 197–199.

[137] I. Moerdijk and J. Mrčun, On integrability of infinitesimal actions, *Amer. J. Math.* **124** (3) (2002), 567–593; arXiv:math-ph/0006042.

[138] T. Mokri, Matched pairs of Lie bialgebroids, *Glasgow Math. J.* **39** (1997), 167–181.

[139] B. Monthubert et F. Pierrot, Indice analytique et groupoïdes de Lie, *C.R. Acad. Sci. París Série I* **325** (1997), 193–198.

[140] A. Nijeniiuis, Vector form brackets in Lie algebroids, *Archivum Mathematicum* **32** (1996), 317–323.

[141] V. Nistor, Groupoids and the integration of Lie algebroids, *J. Math. Soc. Japan* **52** (2000), 847–868; arXiv:math.SG/0004084.

[142] V. Nistor, A. Weinstein and P. Xu, Pseudodifferential operators on differential groupoids, *Pac. J. Math.* **189** (1999), 117–152.

[143] M. A. Olshanetsky, Lie algebroids as gauge symmetries in topological field theories. En el libro: M. A. Olshanetsky and A. Vainshtein (eds.), Multiplet Facets of Quantization and Supersymmetry, World Scientific, River Edge, 2002, 205–232; arXiv:hep-th/0201164.

[144] J. S. Park and K. H. Lee, Groupoid as a covering space, *Bull. Korean Math. Soc.* **21** (1984), 67–75.

[145] A. L. T. Paterson, Groupoids, inverse semigroups and their operator algebras, *Progress in Mathematics* **170** (1998), Birkhhäuser, Boston.

[146] A. L. T. Paterson, Continuous family groupoids, *Homology, Homotopy and Applications* **2** n^o 6 (2000), 89–104.

[147] A. L. T. Paterson The analytic index for proper, Lie groupoid actions, *Contemp. Math* **282** (2001), 115–135; http://home.olemiss.edu/ mmap/jsrc.dvi.

[148] D. Perrot, A Riemann-Roch theorem for one dimensional complex groupoids, *Commun Math. Phys.* **218** (2001), 373–391; arXiv:math-ph/0001040.

[149] M. Popescu and P. Popescu, Geometric objects defined by almost Lie structures. En el libro: Lie Algebroid, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 217–233.

[150] P. Popescu, On generalized algebroids. En el libro: J. Szenthe (ed.) New Developments in Differential Geometry, Kluwer Academic Publisher, 1998, 329–342.

[151] P. Popescu and M. Popescu, Anchored vector bundles and Lie algebroids. En el libro: Lie Algebroid, Banach Center Publications vol. **54**, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 2001, 51–69.

[152] B. Ramazan, Limite classique de C^*- algèbres de groupoïdes de Lie, *C.R. Acad. Sci. Parı́s Série I* **329** (1999), 603–606.

[153] J. N. Renault, Répresentation de produits croisés d'algèbres de groupoïdes, *J. Operator Theory* **18** (1987) 67–97.

[154] J. N. Renault, The ideal structure of groupoid crossed product C^*-algebras, *J. Operator Theory* **25** (1991), 3–36.

[155] M. A. Rieffel, Question on quantization, *Contemp. Math.* **228** (1998), 315–326; arXiv:quant-ph/9712009.

[156] A. Vaintrob, Lie algebroids and homological vector fields, Russ. Math. Surv. **52** (1997), 428–29.

[157] J. A. Vallejo, Nambu-Poisson manifolds and associated n-ary Lie algebroids, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 2867–2881; arXiv:math-ph/0104040.

[158] A. Weinstein, Symplectic groupoids and Poisson manifolds, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **16** (1987), 101–104.

[159] A. Weinstein, Linearization Problems for Lie Algebroids and Lie Groupoids, *Lett. Math. Phys.* **52** (2000), 93–102; arXiv:math.DG/9912189.

[160] J. Westman, Locally trivial C^r groupoids and their representations, *Pacific J. Math.* **20** (1967), 339–349.

[161] P. Xu, On Poisson groupoids, *International J. Math.* **6** (1995), 101–124.

[162] P. Xu, Quantum Groupoids, *Comm. Math. Phys.* **216** (2001), 539–581; arXiv:math.QA/9905192.

[163] N. T. Zung, Levi descomposition of analytic Poisson structures and Lie algebroids, *Topology* **42** (2003), 1403–1420; arXiv:math.DG/0203023.

Índice de Símbolos

Índice Terminológico

Índice de Autores

Índice de Figuras

UCA Universidad de Cádiz

Servicio de Publicaciones

ISBN 84-9828-075-3

9 788498 280753