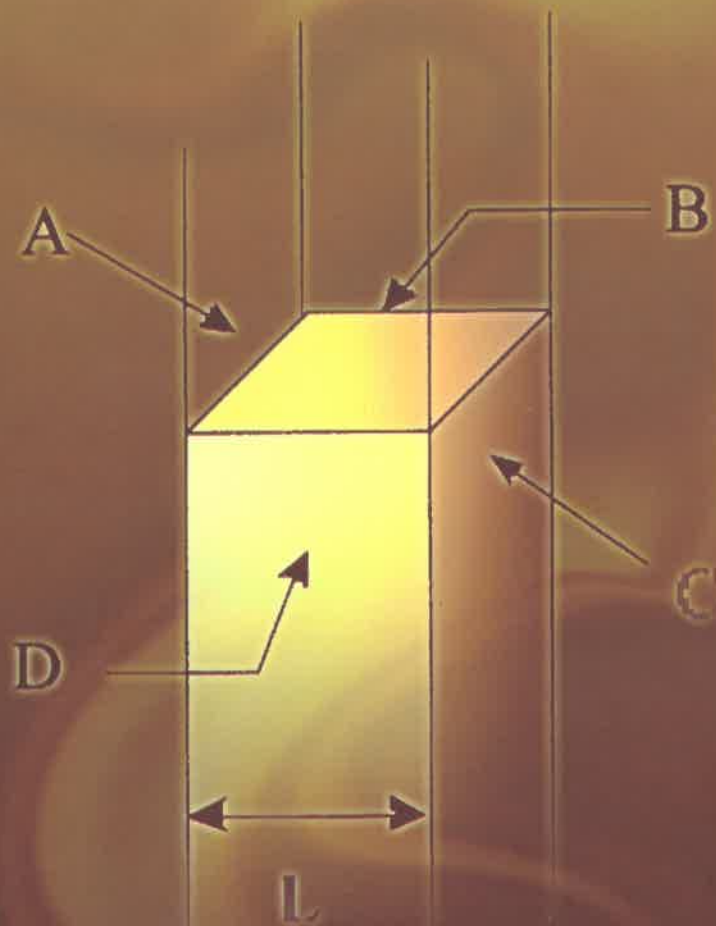


# Una introducción a los **MÉTODOS NUMÉRICOS** **EN CONDUCCIÓN DE CALOR**

Francisco Javier González  
José María Gutiérrez



Servicio de Publicaciones  
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ  
CALPE INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# UNA INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS EN CONDUCCIÓN DE CALOR

Francisco Javier González  
José María Gutiérrez



---

---

**Calpe Institute of Technology**

---

---



Servicio de Publicaciones  
Universidad de Cádiz

2001

González Gallero, Francisco Javier

Apuntes de métodos numéricos en conducción de calor / Francisco Javier González Gallero, José María Gutiérrez Cabeza. -- Cádiz : Servicio de Publicaciones de la Universidad, 2000. -- 100 p.

ISBN 84-7786-911-1

I. Calor-Conducción-Métodos numéricos. I. Gutiérrez Cabeza, José María. II. Universidad de Cádiz. Servicio de Publicaciones, ed. III. Título

53(076.1)

© Francisco Javier González y José María Gutiérrez

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz  
Calpe Institute of Technology

Diseño: Creasur

Fotocomposición: Creasur

I.S.B.N.: 84-7786-911-1

Depósito Legal: CA-027/02

Imprime: Jiménez-Mena, Cádiz.

## Presentación

El estudio de métodos que permitan conocer el comportamiento físico de un sólido en conducción de calor, es decir, la evaluación de su distribución de temperaturas así como el flujo de calor que es capaz de intercambiar con el medio exterior, presenta un indudable interés tecnológico. Basta pensar en conceptos como: ahorro energético, eficiencia térmica, contaminación térmica, etc.

Desde el punto de vista de la Física-Matemáticas, el sólido en conducción plantea *problemas de valores de contorno* y/o *problemas de valores iniciales*, pudiéndose aplicar diversas técnicas para encontrar una solución exacta o analítica cuando las combinaciones de hipótesis en cuanto a geometría, propiedades y condiciones de contorno sean relativamente sencillas. Para casos más realistas hay que acudir a métodos aproximados. El origen de estos métodos no es reciente. De hecho los primeros métodos aproximados los podemos considerar también como “clásicos”. Sin embargo, su potencial de cálculo no se desarrolló plenamente por el excesivo número de operaciones que podrían llegar a plantear.

Con el desarrollo de las técnicas computacionales y del cálculo numérico, han surgido nuevos métodos (*método de elementos finitos*, *método de elementos de contorno*) que aunque tienen u origen en los métodos clásicos aproximados, incorporan un planteamiento basado en la *discretización del continuo*. Naturalmente esto genera un volumen de cálculos soportables únicamente por los ordenadores. El desarrollo que están adquiriendo estos métodos es espectacular, siendo piezas claves en la ingeniería asistida por ordenador. Sin embargo, no podemos ni debemos estudiar estos nuevos métodos ignorando los métodos analíticos. En primer lugar, los métodos numéricos deberían aplicarse únicamente en los casos donde no sean viables los métodos analíticos y, en segundo lugar, debemos aprender a valorar la importancia de disponer de un abundante catálogo de casos resueltos por métodos analíticos. Esto último es clave tanto para el estudio como para el desarrollo de los métodos numéricos, donde se utilizan las soluciones analíticas a modo de test.

En las materias troncales y obligatorias correspondientes a los estudios de primer ciclo de ingeniería, la Transferencia de Calor se incluye, normalmente, en asignaturas que tienen a su vez encomendada la docencia de la Termodinámica. De esta forma el tiempo disponible no permite impartir la Transferencia de Calor con la extensión y profundidad que requiere, limitándose a exponer los fundamentos de los “mecanismos de transferencia” (conducción, convección y radiación). Las aplicaciones que se consideran son de carácter práctico, y con las simplificaciones necesarias para manejar soluciones analíticas, sin profundizar en la complejidad de las ecuaciones diferenciales que rigen la Transferencia de Calor. Para salvar en parte esa laguna se propuso una asignatura optativa de introducción a los métodos numéricos en conducción de calor, y para facilitar la tarea a los alumnos y a los interesados en conocer estos métodos se pensó en la posibilidad de publicar estos apuntes. Hay que tener presente que la producción bibliográfica en estos temas suele ser muy especializada, rigurosa, y normalmente en lengua inglesa.

Los contenidos se presentan a nivel de introducción y se recurre a la bibliografía para que el lector interesado profundice en el abanico de técnicas disponibles. El nivel y el lenguaje matemático se han procurado adaptar a los conocimientos previos de los estudiantes de primer ciclo. Como se insistió anteriormente no se han ignorado los métodos analíticos rigurosos, así en el primer tema se considera el método de separación de variables, que por otra parte es el de más fácil comprensión con el conocimiento de ecuaciones diferenciales ordinarias. También se dedica especial atención a los números adimensionales que surgen de las ecuaciones. El primer método numérico que se considera es el que conceptualmente resulta más fácil de asimilar, es decir, el *método de diferencias finitas*. Se dedica un tema a la obtención de las ecuaciones en diferencias finitas para problemas lineales en régimen permanente, y otro a los correspondientes en régimen transitorio. El tema siguiente considera algunos de los métodos clásicos aproximados basados en las técnicas de residuos ponderados, y en particular, la de *Galerkin*. Este tema permite conectar con el siguiente dedicado al *método de elementos finitos*. Al igual que se hizo con diferencias finitas, se obtienen primero las ecuaciones para problemas en régimen estacionario, y luego en régimen transitorio. Los tipos de elementos finitos considerados son los más sencillos de tratar matemáticamente (lineales de dos nodos y triangulares de tres nodos), pero suficientes para comprender la filosofía y potencia del método.

A pesar del carácter de introducción de esta publicación, se recomienda que el lector cuente con conocimientos previos de Física, de Fundamentos de Transferencia de Calor y de ecuaciones diferenciales ordinarias.

## ÍNDICE

<b>Tema 1:</b>	Métodos Analíticos	1
<b>Tema 2:</b>	El Método de las Diferencias Finitas: Régimen estacionario	21
<b>Tema 3:</b>	El Método de las Diferencias Finitas: Régimen transitorio	37
<b>Tema 4:</b>	Métodos Clásicos Aproximados	47
<b>Tema 5:</b>	Planteamiento de las ecuaciones del M.E.F.	63
<b>Bibliografía y Referencias</b>		99



# TEMA 1: MÉTODOS ANALÍTICOS

## 1.1 Introducción

En este tema se consideran algunos problemas en régimen estacionario en dos dimensiones, y en transitorio en una dimensión. Las técnicas para resolver de forma general el problema de conducción del calor pueden llegar a ser muy complejas, sobre todo cuando se intenta generalizar la geometría y las condiciones de contorno. Así, según los tipos de problemas se dispone de diversos métodos analíticos, y a pesar de todo tienen importantes limitaciones. Existen varias publicaciones [1–2] especializadas en estos métodos, y siempre podremos consultarlas para un problema en particular, pero el rigor que todas estas técnicas requieren, escapan de la formación y el perfil del ingeniero técnico. En este tema, y a modo de introducción, se hará mención a una de las técnicas analíticas más empleadas: el método de separación de variables. Aunque se aplicará sólo a unos casos relativamente sencillos, servirá como muestra de un método analítico riguroso, y además se podrá apreciar sus limitaciones. Por otro lado podemos aprovechar el dominio de aplicación del método para contrastar o chequear cualquier otro método numérico. Sin embargo conviene tener presente que la verdadera justificación de los métodos numéricos aproximados se encuentra en aquellos casos donde la solución analítica se hace inviable o de excesiva complejidad.

## 1.2 Conducción en régimen estacionario en dos dimensiones: Método de separación de variables

Consideremos un problema bidimensional en régimen estacionario. Si utilizamos coordenadas cartesianas, la solución para la temperatura será una función  $T(x,y)$ . Un ejemplo podría ser el dominio rectangular de la figura 1-1 de lados  $a$  y  $b$ , el cual está sujeto a condiciones de contorno por temperatura impuesta. El problema más elemental que podemos resolver por el método de separación de variables es aquél en el que todas las condiciones de contorno son homogéneas (en nuestro caso  $T=0$ ) excepto en un solo contorno donde es no homogénea. Aunque de entrada no está ocurriendo esto en nuestro problema, es evidente que si se introduce la transformación:

$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_1 \quad (1.1)$$

conseguimos transformar tres condiciones no homogéneas en homogéneas.

El problema de conducción, expresado en términos de la función  $\theta(x,y)$  será:



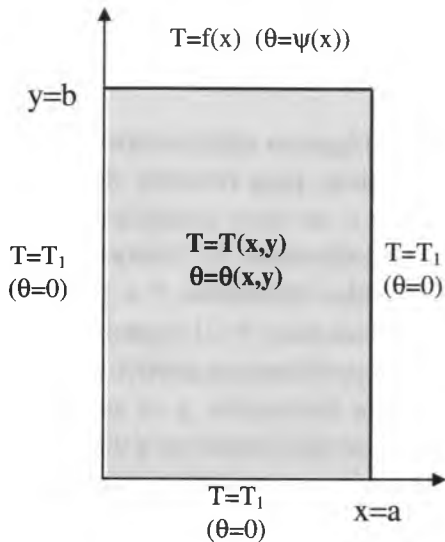


Figura 1-1

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq b, 0 \leq x \leq a \quad (1.2)$$

$$\theta(x, y) = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (1.3)$$

$$\theta(x, y) = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (1.4)$$

$$\theta(x, y) = 0 \quad \text{en } x = a \quad (1.5)$$

$$\theta(x, y) = \Psi(x) \quad \text{en } y = b \quad (1.6)$$

$$\text{donde } \psi(x) = f(x) - T_1$$

El punto de partida del método de separación de variables consiste en descomponer la función incógnita de dos o más variables, como el producto de funciones de cada una de las variables, es decir:

$$\theta(x, y) = X(x)Y(y) \quad (1.7)$$

al sustituir en la ecuación diferencial (1.2), resulta:

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (1.8)$$

Ahora observamos que a la izquierda de la igualdad sólo aparecen funciones de x, y a la derecha, sólo de y. Por tanto, para que tenga sentido la igualdad, la expresión (1.8) debe ser una constante, que llamaremos  $\lambda^2$ . Esto quiere decir que la separación de variables conduce al planteamiento de dos ecuaciones diferenciales ordinarias (de segundo orden con coeficientes constantes), con sus respectivas condiciones de contorno. Para la función de la variable x, tendremos:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq a \quad (1.9)$$

$$X = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (1.10)$$

$$X = 0 \quad \text{en } x = a \quad (1.11)$$

donde las condiciones de contorno se obtienen de las condiciones homogéneas (1.3) y (1.5). Para la función de la variable y:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad \text{para } 0 \leq y \leq b \quad (1.12)$$

$$Y = 0 \quad \text{en } y = 0 \quad (1.13)$$

En este caso la condición de contorno se obtiene de la condición homogénea (1.4). Se observa que la condición de contorno no homogénea todavía no ha sido utilizada. Esta ecuación se utilizará más adelante, para determinar los coeficientes que figuran en la solución general de la función  $\theta$ .

El problema planteado por la ecuación diferencial (1.9) y las condiciones de contorno homogéneas (1.10) y (1.11), está tipificado, apareciendo en los planteamientos de muchos problemas análogos, y se denomina *Problema de Valores Propios*. Este concepto no es nuevo. De los conocimientos de Física, se recordará que al analizar los modos de vibración de una cuerda fija por sus dos extremos (es decir sujeto a condiciones homogéneas de desplazamiento), la cuerda vibraba según ondas estacionarias. Las funciones de ondas estacionarias (autofunciones), representaban posibles soluciones de la ecuación de onda. Las frecuencias (autovalores) que figuraban en estas funciones de onda, no podían tomar valores arbitrarios, ya que la cuerda sólo podía vibrar en modo estacionario a frecuencias que fuesen múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. De forma análoga, veremos a continuación que el problema planteado por (1.9) y las condiciones (1.10) y (1.11) solamente tiene solución para ciertos valores del parámetro  $\lambda = \lambda_n$ , para  $n=1,2,\dots$ . Cada uno de los valores de  $\lambda_n$  se denomina *autovalor*. De manera similar, cada una de las soluciones posibles, que se obtienen para cada uno de los valores propios, es decir  $X(\lambda_n, x)$ , se denomina *autofunción*.

La ecuación diferencial (1.9) es la misma que se plantea en un oscilador armónico simple, por tanto la solución general se podrá expresar como:

$$X(x) = C_1 \text{sen}(\lambda x + C_2) \quad (1.14)$$

Por otro lado, la ecuación diferencial (1.12) es idéntica a la que se plantea en la conducción del calor para el caso de una aleta de sección uniforme. La solución general será:

$$Y(y) = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{+\lambda y} \quad (1.15)$$

Recordando que la función  $\theta(x,y)$  es el producto de las anteriores, tendremos:

$$\theta(x,y) = C_1 \text{sen}(\lambda x + C_2) (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{+\lambda y}) \quad (1.16)$$

Si aplicamos la condición (1.3):

$$\theta(0,y) = 0 \Rightarrow C_1 \text{sen} C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

Nótese que otra posibilidad compatible con la expresión anterior sería que  $C_1=0$ , pero ello supondría eliminar la dependencia de la temperatura con la variable  $x$ , lo cual no tiene sentido físico. Si hacemos  $C_2=0$ , y aplicamos la condición (1.4):

$$\theta(x,0)=0 \Rightarrow C_1 \operatorname{sen} \lambda x (C_3 + C_4)=0 \Rightarrow C_3 = -C_4 \quad (1.17)$$

Si ahora aplicamos la condición (1.5), entonces se ha de verificar:

$$C_1 C_4 \operatorname{sen} \lambda a (e^{+\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0 \quad (1.18)$$

Puesto que la variable “ $y$ ” puede tomar cualquier valor  $0 \leq y \leq b$ , la única forma de verificar (1.18) es que  $\lambda$  tome los valores discretos para los cuales  $\operatorname{sen} \lambda a = 0$ . Esos valores serán:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

se omite el autovalor correspondiente a  $n=0$ , pues daría una autofunción nula, y por tanto trivial.

Con todo lo anterior, y teniendo en cuenta que el producto de las constantes  $C_1$  y  $C_4$  es una nueva constante, para cada autovalor  $\lambda_n$ , tendremos una autofunción  $\theta$ :

$$\theta(x, y) = C_n \operatorname{sen} \lambda_n x \operatorname{senh} \lambda_n y$$

Como buscamos la solución general, esta deberá expresarse como la superposición de todas las soluciones posibles:

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \lambda_n x \operatorname{senh} \lambda_n y \quad (1.20)$$

en donde los  $C_n$  son los coeficientes de expansión del desarrollo. Para determinar estos coeficientes, acudiremos, como advertimos al principio, a la condición de contorno no homogénea (1.6), y por lo tanto en  $y=b$  se ha de verificar:

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{senh} \lambda_n b \operatorname{sen} \lambda_n x \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.21)$$

Llegado a este punto, lo que resta es despejar los coeficientes  $C_n$ . En principio parece que no son despejables analíticamente. Sin embargo existe un método que posibilita esta tarea. Este método se basa en las interesantes propiedades que ofrecen las *funciones ortogonales*. El lector interesado por estas funciones puede consultar[3].

Un conjunto infinito de funciones  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ , se dice que es *ortogonal* en el dominio  $a \leq x \leq b$ , si se verifica:

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x)dx = 0 \quad m \neq n \quad (1.22)$$

La nulidad de la integral para cualquier producto de funciones ortogonales diferentes, resulta de mucha utilidad, y en este problema de valores propios nos permitirá “despejar” los coeficientes  $C_n$ . Es conocido que las funciones seno y coseno verifican la propiedad de ortogonalidad, y constituyen una muestra importante, pero no la única, de funciones ortogonales. En esta clase de funciones podemos incluir también a las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre, etc..

Por otro lado, con respecto a cualquier conjunto infinito de funciones ortogonales  $\{g_n(x)\}$  sobre un intervalo  $(a,b)$ , una función arbitraria  $\phi(x)$  admite un desarrollo en serie análogo a un desarrollo de Fourier. Entonces podemos escribir:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \quad a \leq x \leq b \quad (1.23)$$

para evaluar los coeficientes de expansión  $A_n$  de este desarrollo, multiplicamos a cada lado de la igualdad anterior por  $g_n(x)$ , e integramos entre los límites  $a$  y  $b$ :

$$\int_a^b \phi(x)g_n(x)dx = \int_a^b g_n(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)dx \quad (1.24)$$

si ahora aplicamos la propiedad de ortogonalidad (1.22), resulta evidente que de las infinitas integrales que aparecerían a la derecha de la igualdad, sólo existiría una no nula, quedando:

$$\int_a^b \phi(x)g_n(x)dx = A_n \int_a^b g_n^2(x)dx \quad (1.25)$$

y por lo tanto el coeficiente  $A_n$  queda como:

$$A_n = \frac{\int_a^b \phi(x)g_n(x)dx}{\int_a^b g_n^2(x)dx} \quad (1.26)$$

En nuestro problema se trata de evaluar los coeficientes  $C_n$  de (1.21). Como la función  $\text{sen}\lambda_n x$  es ortogonal, basta comparar (1.21) con (1.23), y establecer la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned}
A_n &\rightarrow C_n \sinh \lambda_n b \\
g_n(x) &\rightarrow \sin \lambda_n x \\
\phi(x) &\rightarrow \Psi(x) \\
(a, b) &\rightarrow (0, a)
\end{aligned}$$

si ahora aplicamos (1.26), y despejamos  $C_n$ :

$$C_n = \frac{\int_0^a \Psi(x) \sin \lambda_n x \, dx}{\sin \lambda_n b \int_0^a \sin^2 \lambda_n x \, dx} \quad (1.27)$$

La integral del denominador queda como:

$$\int_0^a \sin^2 \lambda_n x \, dx = \left| \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\lambda_n x}{4\lambda_n} \right|_0^a = \frac{a}{2} \quad (1.28)$$

La integral del numerador de (1.27) será fácilmente evaluable, pues la función que define la dependencia de la temperatura impuesta con la coordenada  $x$  será, en la mayoría de los casos, una función sencilla. Por tanto  $C_n$  quedará como:

$$C_n = \frac{2 \int_0^a \Psi(x) \sin \lambda_n x \, dx}{a \sin \lambda_n b} \quad (1.29)$$

Si sustituimos en (1.21), luego en (1.20) y por último en (1.1), la solución del problema quedaría como:

$$T(x, y) = T_1 + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \lambda_n y}{\sinh \lambda_n b} \sin \lambda_n x \int_0^a \Psi(x) \sin \lambda_n x \, dx \quad (1.30)$$

En el caso particular de que la condición de contorno en  $y=b$  tomase un valor constante:  $T=T_2$  ( $T_2 \neq T_1$ ), entonces en la condición (1.6)  $\Psi(x)$  pasaría a ser  $T_2 - T_1$ , y la constante  $C_n$  quedaría:

$$C_n = \frac{2(T_2 - T_1) [(-1)^{n+1} + 1]}{n \pi \sinh \lambda_n b} \quad (1.31)$$

Una vez conocida la solución analítica de la distribución de temperatura, podremos determinar el flujo de calor en cualquier contorno por medio de la ley de Fourier.

En el ejemplo anterior, la condición de contorno no homogénea, solamente afectaba a un contorno. En los casos en que se presenten más de una condición no homogénea, el problema puede descomponerse en otros más sencillos, en los cuales solamente una de las condiciones de contorno es no homogénea. Así por ejemplo, si en el rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , las condiciones de contorno fuesen las de la figura 1-2, entonces la solución buscada  $T(x,y)$  se descompondría en otras dos:

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \tag{1.32}$$

En donde las funciones  $T_1(x,y)$  y  $T_2(x,y)$  son las soluciones de dos problemas de conducción (fig. 1-2) en los que sólo se plantea una condición de contorno no homogénea. Esos problemas más elementales pueden resolverse por el método de separación de variables como acabamos de ver. Si en vez de dos condiciones no homogéneas, el problema tuviese tres, entonces la descomposición generaría tres problemas elementales.

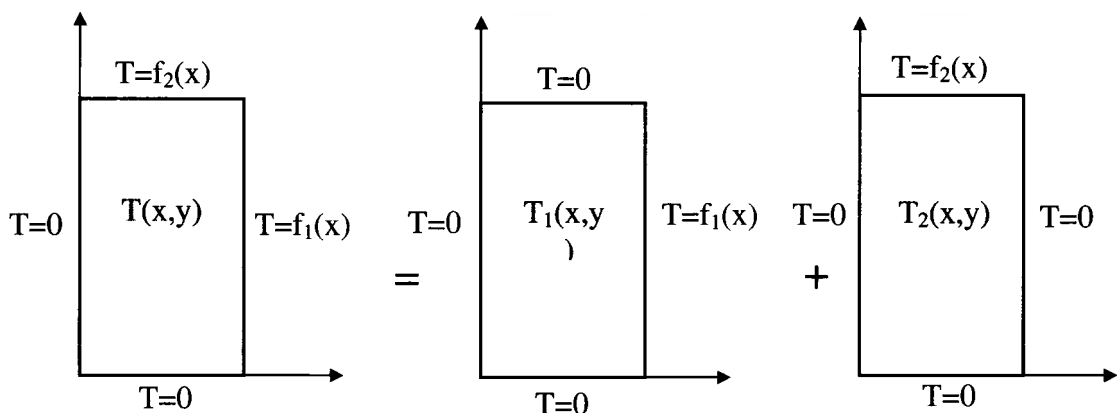


Figura 1-2

En general, con el método de separación de variables se pueden resolver problemas con tres tipos de condiciones de contorno: de temperatura impuesta (o de primera clase), de flujo impuesto (o de segunda clase) y de convección (o de tercera clase). En coordenadas rectangulares, los problemas se han de descomponer en problemas elementales, en los que figuren tres condiciones homogéneas (de primera, segunda o tercera clase). En total pueden presentarse nueve combinaciones diferentes. En todos estos problemas, si se considera la separación de variables, se plantea un problema de autovalores y autofunciones análogo al desarrollado anteriormente, sin embargo los autovalores no siempre se obtienen de una función seno o coseno. A veces se plantean ecuaciones trascendentes, en donde las raíces se obtienen en forma iterativa, como se podrá comprobar más adelante. Las raíces de las ecuaciones trascendentes suelen venir tabuladas, y con unos pocos sumandos del desarrollo en serie es suficiente para llegar a un resultado muy aceptable. Todos estos detalles se pueden consultar y ampliar en las referencias [4] y [8].

Se habrá podido observar que para poder aplicar el método de separación de variables, las geometrías de los contornos (en coordenadas cartesianas) han de coincidir

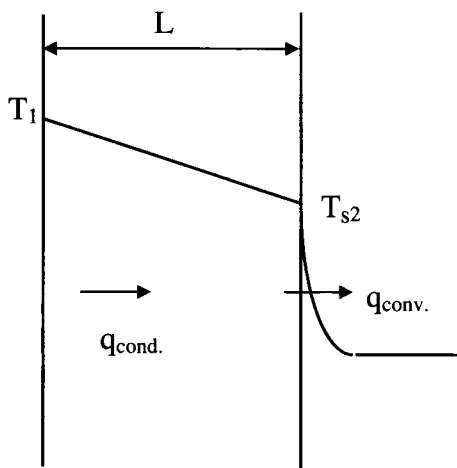
con con valores  $x=cte.$  ó  $y=cte.$  Nada de lo propuesto hubiese sido posible en un contorno dado por una ecuación del tipo  $F(x,y)=0.$  Además, en los contornos con condiciones no homogéneas, en los casos más complejos, éstas se expresan como una función sólo de  $x$  (si el contorno es  $y=cte.$ ), o sólo de  $y$  (si el contorno es  $x=cte.$ ). En los problemas con simetría cilíndrica o esférica los contornos pueden ser curvos, pero han de coincidir con  $r=cte., \theta=cte.,$  etc.. En estos problemas la complejidad aumenta, pues aparecen otras funciones ortogonales denominadas funciones de Bessel.

### 1.3 Conducción en régimen transitorio

#### 1.3.1 Números adimensionales de Biot y de Fourier

Los números adimensionales de Biot (Bi) y de Fourier (Fo) juegan un importante papel en los problemas de conducción en régimen transitorio.

Para introducir el número de Biot y su significado, consideremos un muro plano de conductividad  $K,$  y longitud  $L,$  cuyas paredes están sujetas a: temperatura impuesta  $T_1,$  y a transferencia por convección con un fluido a temperatura  $T_\infty$  ( $T_1 > T_\infty$ ). El coeficiente de transferencia es  $h.$  Si no hay alteración de estas condiciones, se establece un régimen permanente, en el que el flujo de calor que transmite la pared por conducción, sale hacia el fluido por convección.



Para una sección  $A$  de la pared, se verificará:

$$\frac{KA}{L}(T_1 - T_{s2}) = hA(T_{s2} - T_\infty)$$

Fácilmente se puede llegar a formar un cociente donde en el numerador figure la caída de temperatura por conducción el sólido, y en el denominador figure el cambio de temperatura por convección en la capa de fluido.

$$\frac{T_1 - T_{s2}}{T_{s2} - T_\infty} = \frac{L/K A}{1/hA} = \frac{R_{\text{cond.}}}{R_{\text{conv.}}} = \frac{hL}{K} = \text{Bi} \quad (1.33)$$

En general,  $L$  será una longitud característica, obtenida como el ratio entre el volumen y el área superficial de transferencia por convección. El número de Biot se plantea en los problemas de conducción en los que exista al menos un contorno sometido a convección. De la expresión (1.33), se puede extraer su significado. Al representar el cociente entre las resistencias por conducción y convección, dicho número compara el gradiente de temperatura en el sólido en conducción, frente al cambio de temperatura en la capa de fluido por convección. Eso quiere decir que si  $\text{Bi} \ll 1,$  entonces  $R_{\text{cond.}} \ll R_{\text{conv.}},$  lo cual implica que el gradiente de temperatura en el sólido es

despreciable frente al que se produce en la capa de fluido. Por lo tanto en ese caso se puede admitir que, en un instante dado la temperatura del sólido es prácticamente uniforme, es decir que el problema general cuya solución es una función  $T(x,y,z,t)$ , se puede simplificar a un problema cuya solución es  $T(t)$ .

Para introducir el número de Fourier, conviene recordar el planteamiento de la ecuación de difusión del calor. Si se considera un balance de energía por unidad de tiempo en un volumen de control diferencial (expresado, por ejemplo, en coordenadas cartesianas), y se admite que la conductividad es constante, entonces se llega a:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{g}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.34)$$

donde  $g$  es la tasa de generación de calor por unidad de volumen ( $W/m^3$ ), y  $\alpha=K/\rho c$  es un grupo de propiedades del material que se denomina difusividad térmica, teniendo unidades de ( $m^2/s$ ). El significado físico de la difusividad está asociado con la rapidez de propagación del calor (“onda térmica”) a través de un sólido por cambios temporales de la temperatura, de modo que a mayor difusividad, más rapidez de propagación del calor. Este concepto se verá claramente al estudiar la propagación del calor en un sólido semi-infinito.

El número de Fourier ( $Fo$ ) aparece cuando la ecuación (1.34) se expresa en forma adimensional. Al plantear el problema bajo esa nueva forma, el número adimensional de Fourier siempre aparece como una difusividad multiplicada por un tiempo y dividida por el cuadrado de una longitud característica, es decir:

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (1.35)$$

Para entender su significado, sustituimos  $\alpha=K/\rho c$  y multiplicamos y dividimos por  $L$ .

$$Fo = \frac{(K/\rho c) t}{L^2} = \frac{KL^2(1/L)}{\rho cL^3/t}$$

Imaginemos un sólido de volumen  $L^3$  con sección  $L^2$  y longitud  $L$ . De este modo vemos que en el numerador figura la cantidad de calor que por unidad de salto de temperatura, y por unidad de tiempo, *transmite* por conducción dicho sólido de conductividad  $K$ , y sección  $L^2$  entre dos superficies separadas una distancia  $L$ . Por otro lado, si el sólido lo hacemos pasar de un estado de equilibrio a otro entre los cuales hay un cambio de temperatura, la cantidad de energía que el sólido *almacena* por unidad de tiempo y por unidad de cambio de temperatura, se corresponde con lo expresado en el denominador. Por tanto, el número de Fourier da una medida de la tasa de calor transmitido por conducción comparada con la tasa de calor almacenado en un determinado volumen. En la conducción en régimen transitorio, el balance sobre un volumen de control, introduce ambos conceptos, pues parte de la energía se transmite y parte se almacena. Cuanto mayor sea el número de Fourier, más penetración tiene el calor en el interior de un sólido para un tiempo dado.



### 1.3.2 Sistemas con capacidad térmica concentrada

Consideremos un sólido, de volumen  $V$ , área superficial total  $A$ , conductividad térmica  $K$ , densidad  $\rho$  y calor específico  $c$ . Supongamos que inicialmente está a una temperatura uniforme  $T_0$ , y bruscamente se sumerge en un fluido cuya temperatura es  $T_\infty$ . A partir de ese instante, la temperatura comienza a cambiar. Su evolución en el tiempo  $T(x,y,z,t)$  vendrá condicionada por su condición inicial (en este caso  $T_0$ ) y sus condiciones de contorno. Formalmente se dice que se plantea un *Problema de Valores Iniciales y Valores de Contorno*. Sin embargo si las propiedades y dimensiones del cuerpo hacen que  $Bi \ll 1$ , entonces podemos desprestigiar el gradiente de temperatura en el sólido (en definitiva, la variación espacial), y admitir que en un instante dado todo el sólido se caracteriza por una temperatura  $T(t)$ , y su evolución temporal, sólo dependerá de las condiciones iniciales. De su geometría, sólo nos interesa su volumen  $V$  (para evaluar su capacidad térmica concentrada) y su área superficial  $A$  (para evaluar su resistencia térmica por convección), pero su forma no tendría influencia. Bajo esta simplificación, se dice que se plantea exclusivamente un *Problema de Valores iniciales*.

Si admitimos la anterior simplificación, y contamos el tiempo a partir de sumergir el sólido en el fluido, entonces la función  $T(t)$  debe ser tal que cuando  $t \rightarrow \infty$ , el sólido alcance el equilibrio térmico con el fluido que lo baña. Si suponemos que  $T_\infty > T_0$ , entonces el flujo neto que entra en el sistema se invierte en incrementar la energía interna del mismo. Esto supone que:

$$A h (T_\infty - T(t)) = \rho c V \frac{dT}{dt}$$

Lo cual también puede escribirse en la forma:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{A h}{\rho c V} T(t) = \frac{A h}{\rho c V} T_\infty \quad (1.36)$$

Se trata de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, análoga a la planteada en el proceso transitorio de carga de un condensador en un circuito RC (en realidad es un problema análogo). La solución general de (1.36) será:

$$T(t) = T_\infty + C e^{-\frac{A h}{\rho c V} t}$$

para hallar la constante  $C$ , de la condición inicial, resulta  $C = T_0 - T_\infty$ , quedando la solución particular:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-\frac{A h}{\rho c V} t} \quad (1.37)$$

Así pues, queda claro que cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $T$  evoluciona a  $T_\infty$ . La constante de tiempo  $\tau$ , que marca la rapidez de evolución será:  $\tau = \rho c V / A h$ . El exponente es adimensional, y se puede ver que es igual al producto de los números de Biot y Fourier. Si se multiplica y

divide por la conductividad, se tiene en cuenta que  $\alpha=K/\rho c$ , y que la longitud característica  $L=V/A$ , resulta:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{Aht}{\rho cV} = \frac{ht}{\rho cL} = \frac{hL}{K} \frac{Kt}{\rho cL^2} = \left(\frac{hL}{K}\right) \left(\frac{\alpha t}{L^2}\right) = (Bi)(Fo)$$

La solución (1.37), expresada en forma adimensional, y en función de los números de Biot y Fourier, quedaría de la forma:

$$\frac{\theta(t)}{\theta_0} = e^{-(Bi)(Fo)} \quad \text{siendo } \theta(t) = T(t) - T_\infty \quad \text{y} \quad \theta_0 = T_0 - T_\infty \quad (1.38)$$

Sabemos que esta solución sólo es aplicable cuando  $Bi \ll 1$ . Si  $Bi < 0.1$ , entonces el error que se comete al adoptar esta aproximación es inferior a un 5%. Si necesitamos menor error, o si  $Bi > 0.1$ , entonces debemos recurrir a otros métodos que tengan en cuenta la variación espacial de la temperatura.

Una vez conocida la solución  $T(t)$  (“historia de la temperatura” en este caso de todo el sólido con capacitancia concentrada), podemos calcular:

1) La transferencia instantánea de calor por convección  $q(t)$  a través del área superficial. Sería de acuerdo con:

$$q(t) = hA [T(t) - T_\infty]$$

sustituyendo  $T(t)$  por (1.37), resulta:

$$q(t) = hA \left[ (T_0 - T_\infty) e^{-\frac{Ah}{\rho cV} t} \right] \quad (1.38)$$

2) La cantidad total de calor  $Q(t)$  transferido desde  $t=0$  hasta otro instante arbitrario  $t$ . Para ello basta integrar (1.38) en el intervalo correspondiente de tiempo.

$$Q(t) = \int_0^t q(t) dt = \frac{hA(T_0 - T_\infty)}{(Bi)(Fo)} t \left( 1 - e^{-(Bi)(Fo)} \right) \quad (1.39)$$

### 1.3.3 Conducción Transitoria en una placa

Supongamos una placa indefinida en la dirección vertical, de un espesor finito  $L$  en la dirección horizontal, la cual denominaremos dirección  $x$  (figura 1-4). Se considera en primer lugar un caso en el que la placa está inicialmente a una temperatura uniforme  $T=T_0$ . La superficie  $x=0$  se mantiene aislada (se puede interpretar también como una condición de simetría), mientras que la superficie  $x=L$  se enfría bruscamente desde  $T_0$  hasta  $T=0$  a partir de  $t > 0$ .

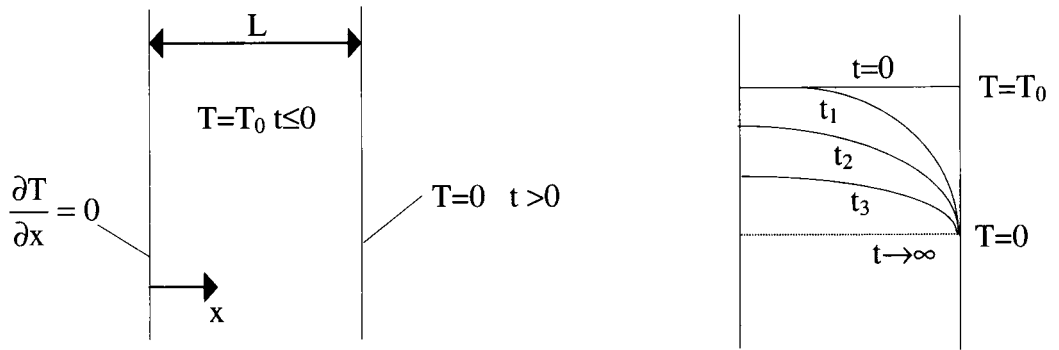


figura 1-4

La evolución de la distribución de la temperatura para cada uno de los instantes de tiempo deberá ser coherente con el esquema representado en la figura 1-4. Hemos elegido esta condición de contorno de temperatura impuesta al valor cero, para que la misma sea homogénea. Si este valor no fuese cero, y fuese por ejemplo  $T=T_2$ , entonces habría que proponer la transformación:  $\theta(x,y) = T(x,y)-T_2$ . La formulación matemática de nuestro problema se expresa:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (1.41)$$

sujeto a las condiciones de contorno (homogéneas):

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad t > 0 \quad (1.42)$$

$$T(x,t) = 0 \quad \text{en } x = L, \quad t > 0 \quad (1.43)$$

y a la condición inicial:

$$T(x,t) = T_0 \quad \text{cuando } t \leq 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.44)$$

Al proponer la separación de variables:

$$T(x,t) = X(x) \Gamma(t) \quad (1.45)$$

de la misma forma que se vio en los problemas bidimensionales en régimen estacionario, ahora se plantea dos ecuaciones diferenciales ordinarias, de modo que al lado izquierdo de la igualdad sólo figura una función de  $x$ , mientras que al lado derecho sólo figura una función de  $t$ . Para que la igualdad tenga sentido, es necesario que ambas funciones sean constantes e iguales a  $-\lambda^2$ .

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha \Gamma} \frac{d\Gamma}{dt} = -\lambda^2 \quad (1.46)$$

Para la función  $\Gamma(t)$  se plantea la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \alpha \lambda^2 \Gamma = 0 \quad t > 0 \quad (1.47)$$

cuya solución general es:

$$\Gamma(t) = C_1 e^{-\alpha \lambda^2 t} \quad (1.48)$$

Es conveniente hacer notar que el signo menos de la constante que figura en (1.46) asegura que cuando  $t \rightarrow \infty$  la temperatura final de equilibrio sea  $T=0$  (es decir la condición de contorno homogénea impuesta).

Para la función  $X(x)$  se plantea:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.49)$$

$$\frac{dX}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (1.50)$$

$$X = 0 \quad \text{en } x = L \quad (1.51)$$

por lo tanto, la solución general de  $X(x)$  será:

$$X(x) = C_2 \text{sen}(\lambda x + C_3) \quad (1.52)$$

Si imponemos las condición (1.50), resulta:

$$C_2 \lambda \cos C_3 = 0$$

Para evitar la solución trivial,  $C_2 \neq 0 \Rightarrow C_3 = \pi / 2$ , y en consecuencia (1.52) quedaría como:

$$X(x) = C_2 \cos \lambda x \quad (1.53)$$

Al imponer la segunda condición de contorno (1.51), se tendrá que verificar que:

$$C_2 \cos \lambda L = 0$$

Las posibles soluciones de  $\lambda$  (autovalores) son:

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2L} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.54)$$

y las correspondientes autofunciones serían:

$$X(x) = C_2 \cos \lambda_n x \quad (1.55)$$

La función  $T(x,t)$  vendrá dada por el producto de (1.48) y (1.55). Si tenemos en cuenta que el producto de las constantes  $C_1$  por cada  $C_n$  es una nueva constante, y que la solución general deberá expresarse como la superposición de todas las soluciones posibles, se llega a la siguiente expresión:

$$T(x,t) = X(x)\Gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x) \quad (1.56)$$

El paso siguiente consiste en despejar los coeficientes  $C_n$  de la expansión anterior. Para ello recurriremos de nuevo a la propiedad de ortogonalidad de las autofunciones, y a la condición inicial. Hacemos notar que haremos uso de la condición inicial con la misma finalidad que, en los problemas en régimen estacionario se hacía con la condición no homogénea. La condición inicial nos dice que:

$$T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \lambda_n x \quad (1.57)$$

Para obtener las expresiones de  $C_n$ , comparamos (1.57) con (1.23) y (1.26), lo cual nos permite establecer la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} A_n &\rightarrow C_n \\ g_n(x) &\rightarrow \cos \lambda_n x \\ \phi(x) &\rightarrow T_0 \\ (a,b) &\rightarrow (0,L) \end{aligned}$$

resultando:

$$C_n = \frac{\int_0^L T_0 \cos \lambda_n x \, dx}{\int_0^L \cos^2 \lambda_n x \, dx} = \frac{T_0 \frac{\text{sen } \lambda_n L}{\lambda_n}}{L/2}$$

sustituyendo en (1.56) nos queda finalmente:

$$T(x,t) = \frac{T_0}{L/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda_n x)}{\lambda_n} e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x) \quad (1.58)$$

Si conocemos la distribución de temperatura, podremos evaluar el flujo de calor a lo largo de un contorno, en nuestro caso en  $x=L$ .

$$q(x, t)_{x=L} = K \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = K \frac{T_0}{L/2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}^2 \lambda_n L e^{-\alpha \lambda_n^2 t} \quad (1.59)$$

En el ejemplo que hemos resuelto, las condiciones de contorno consideradas permiten que los autovalores se obtengan fácilmente a partir de los “ceros” de una función coseno. Si en  $x=L$  se consideran condiciones de transferencia por convección, se plantea también un problema de autovalores y autofunciones. Sin embargo, los autovalores se obtendrán de una ecuación trascendente, como veremos a continuación.

Supongamos que en  $x=L$  se cambia bruscamente la temperatura del fluido que baña a dicha superficie, pasando de la temperatura uniforme inicial  $T_{\infty} = T_0$  ( $t \leq 0$ ) a  $T_{\infty} = 0$ , a partir de  $t \geq 0$ . En  $x=L$  se producirá un enfriamiento por convección con un determinado coeficiente  $h$ . La formulación matemática vendría dada por la ecuación diferencial (1.41), junto con las condiciones de contorno:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{en } x = 0, \quad t > 0 \quad (1.60)$$

$$-K \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) = h(T - T_{\infty}) \quad \text{en } x = L, \quad t > 0 \quad (1.61)$$

La condición inicial es (1.44). Hacemos notar que se considera  $T_{\infty} = 0$ , pues de este modo la condición de contorno (1.61) adopta su forma homogénea. En caso de ser  $T_{\infty} \neq 0$ , se propondría la transformación:  $\theta(x, t) = T(x, t) - T_{\infty}$ . Como es habitual en el método de separación de variables se propone:  $T(x, t) = X(x) \Gamma(t)$ , y de forma análoga al caso anterior, se llega a que la función  $\Gamma(t)$  debe tener una solución general dada por (1.48). Para la función  $X(x)$ , se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \quad (1.62)$$

$$\frac{dX}{dx} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (1.63)$$

$$K \frac{dX}{dx} + hX = 0 \quad \text{en } x = L \quad (1.64)$$

Si comparamos con el problema anteriormente resuelto, la condición (1.51) ha sido sustituida por la condición de tipo mixto (1.64). Obviamente, la solución general de  $X(x)$  vuelve a ser la expresión (1.52). Al imponer la condición de contorno (1.63) (que es la misma que (1.50)) se llega a la expresión (1.53), es decir:

$$X(x) = C_2 \cos \lambda x$$

Si ahora imponemos la condición (1.61), resulta:

$$K\lambda \operatorname{sen} \lambda L = h \cos \lambda L$$

multiplicando por  $L$  y dividiendo por  $K$  en ambos lados de la igualdad, se llega finalmente a la siguiente ecuación trascendental:

$$\lambda L \tan \lambda L = \frac{hL}{K} = \text{Bi} \quad (1.65)$$

En este caso, los autovalores  $\lambda_n$  serán las raíces positivas de la ecuación trascendental. Puesto que la incógnita no se puede despejar, esta ecuación hay que resolverla numéricamente por métodos iterativos, y sus raíces suelen encontrarse tabuladas. No obstante resulta muy conveniente considerar las soluciones por métodos gráficos. La ecuación (1.65), puede también expresarse como:

$$\frac{\lambda L}{\text{Bi}} = \cot \lambda L$$

si denominamos  $f_1 = \lambda L / \text{Bi}$ , y  $f_2 = \cot \lambda L$ , al representar gráficamente  $f_1$  y  $f_2$  frente a  $\lambda L$ , las raíces de la ecuación trascendental (es decir los autovalores), se corresponden con los puntos de corte de ambas representaciones. Si tenemos en cuenta que  $f_2$  es periódica, la representación sería como indica la figura 1-5:

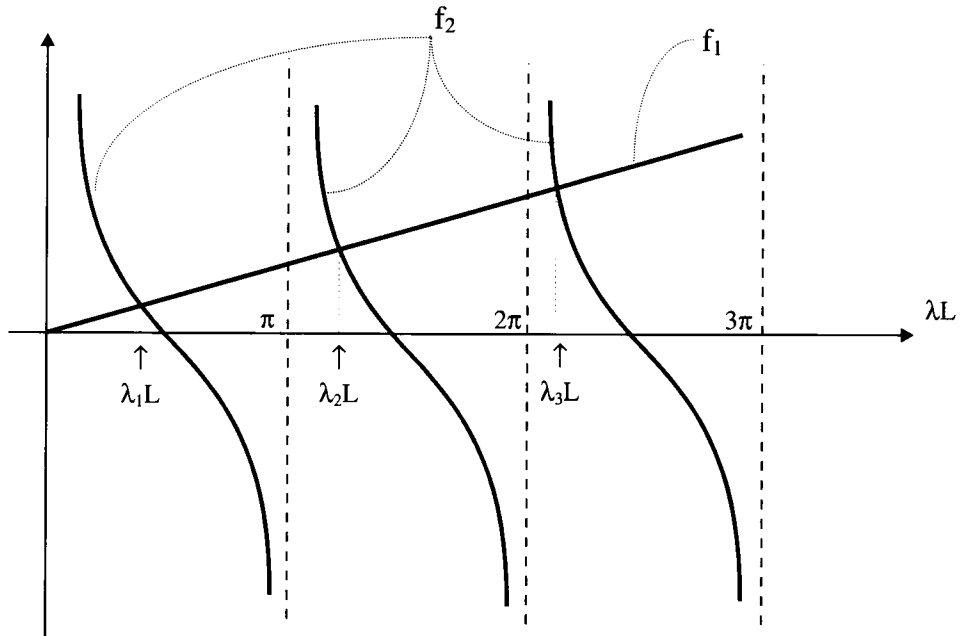


figura 1-5

Una vez determinada la serie de valores  $\lambda_n$ , el proceso que sigue para llegar a obtener las autofunciones y la solución  $T(x,t)$  es idéntico al caso anterior, por lo que la expresión general (1.56) es igualmente válida, lo único que varía son los valores de  $\lambda_n$  y  $C_n$ . Los posibles valores de  $\lambda_n$  ahora no se espacian regularmente, por lo que no es posible llegar a una expresión sencilla como la (1.54). Los valores específicos de  $h$ ,  $K$ , y  $L$  son los que determinan el valor del número de Biot lo cual, desde un punto de vista gráfico, condiciona la pendiente de la función  $f_1$  y en consecuencia los puntos de corte con  $f_2$ . Aunque la solución analítica (1.56) implica un desarrollo en serie de infinitos sumandos, la convergencia de estas series es muy rápida debido a la presencia del término exponencial decreciente, por lo que será suficiente con tomar unos cuantos términos. Lógicamente la rapidez de convergencia dependerá del exponente  $\alpha$ . Sólo cuando los valores de  $\alpha t$  sean pequeños, la convergencia será lenta.

La metodología aplicada a problemas unidimensionales de conducción en régimen transitorio también puede extenderse a la conducción transitoria en la dirección radial para cilindros y esferas. Para evitar realizar los cálculos que imponen los desarrollos en serie de las soluciones analíticas, existe una opción aproximada desarrollada por Heisler [5], basada en el manejo de diagramas típicos de temperatura transitoria, aplicables a sistemas en cartesianas, cilíndricas y esféricas. Son gráficas de familias de curvas parametrizadas en forma adimensional. Así por ejemplo, para el problema que acabamos de considerar, la entrada en el tiempo (adimensionalizado) se realiza por  $\alpha t/L^2$ , la posición (adimensionalizada) se especifica por  $x/L$ , y las propiedades adimensionales de conducción y convección se indican en la inversa del número de Biot  $K/hL$ . Primero se obtiene la temperatura adimensional  $T-T_\infty / T_0 - T_\infty$ , para un instante dado, en la posición  $x=0$  (o bien  $r=0$ , si es un problema referido a una coordenada radial). Luego a partir de ese valor, se obtiene en otro diagrama un factor de corrección que permite hallar la temperatura en otra posición arbitraria. Una colección muy completa de diagramas de este tipo puede encontrarse en la referencia [6].

### 1.3.4 Conducción Transitoria en un sólido semi-infinito.

El sólido semi-infinito es otro modelo o simplificación que en determinadas circunstancias puede aplicarse a sólidos finitos. En principio un sólido semi-infinito es un objeto de grandes dimensiones (por ejemplo la Tierra), sin embargo la conducción transitoria del calor en un sólido semi-infinito, puede ser aplicable a un sólido finito. La conducción transitoria en el sólido finito es igual a la del semi-infinito (se entiede que en la porción de espacio que ocuparía el sólido finito) durante un cierto intervalo de tiempo a partir de los primeros instantes. Esto quiere decir que si la conducción transitoria en el sólido finito se origina por una perturbación (de flujo de calor, de temperatura impuesta o temperatura de fluido) en un contorno, mientras que la “onda térmica” no llegue a los restantes contornos no perturbados, el modelo de conducción del sólido semi-infinito es aplicable al finito. Así por ejemplo, si en un muro inicialmente a temperatura uniforme, se produce un cambio brusco (o gradual) de la temperatura de una de sus caras, mientras que la temperatura de la cara opuesta no se altere, existe un intervalo de tiempo en el que el muro conduce transitoriamente el calor igual que si su espesor tendiese a infinito. Como resumen podemos decir que el rango de aplicabilidad del modelo de sólido semi-infinito a un sólido finito dependerá de: (i) el intervalo de tiempo considerado, (ii) de las propiedades del sólido para propagar el



calor más o menos rápidamente, es decir, de su difusividad, y (iii) de sus dimensiones o longitud característica, que en definitiva determinan el espacio que ha de recorrer la “onda térmica”. Conviene recordar que estos tres factores ( difusividad, tiempo y longitud característica), se agrupan en el número de Fourier.

Consideremos una región semi-infinita (figura 1-6), en la que inicialmente existe una temperatura uniforme  $T_0$ , y para  $t > 0$  la temperatura de la superficie en  $x=0$  cambia bruscamente a la temperatura  $T=0$ . La formulación matemática del problema viene dada por la ecuación:

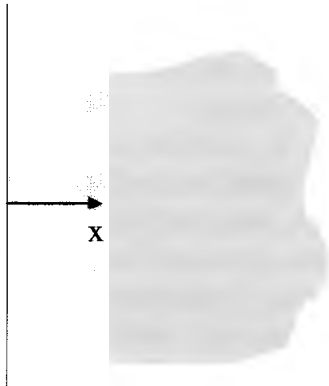


figura 1-6

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad \text{en } 0 \leq x \leq \infty, \text{ y } t > 0 \quad (1.66)$$

sujeto a la condición de contorno:

$$T(0,t) = 0 \quad \text{para } x = 0 \text{ y } t > 0 \quad (1.67)$$

y a la condición inicial:

$$T(x,0) = T_0 \quad \text{para } x \geq 0, \text{ y } t = 0 \quad (1.68)$$

Si la condición de contorno en la superficie  $x=0$  no fuese homogénea ( $T=T_s$ ), se propondría el habitual cambio de variable, dado por:

$$\theta(x,t) = T(x,t) - T_s \quad (1.69)$$

Es evidente que si el sólido es semi-infinito, sólo existirá una condición de contorno. Tras proponer la separación de variables en las funciones  $X(x)$  y  $\Gamma(t)$ , el proceso para llegar a la solución general de  $X(x)$  es análogo al que se vio en el caso de la placa finita. Si además tenemos en cuenta la condición (1.67), se llega a:

$$X(x) = C \text{ sen } \lambda x$$

En el caso de la placa finita, se podría imponer otra condición de contorno (en  $x=L$ ), lo cual permitía obtener una serie de autovalores compatibles con ambas condiciones de contorno. Aunque la serie era infinita, los valores eran discretos, de modo que la solución general se expresaba mediante un sumatorio que contenía todas las autofunciones posibles. En contraste, en el sólido semi-infinito no existen más condiciones que la impuesta en el contorno  $x=0$ . La consecuencia inmediata es que los posibles autovalores  $\lambda$  pueden variar de forma continua. Así pues, si en la placa finita, la expresión de las posibles autofunciones era:

$$X(\lambda_n, x) = C_n \text{ sen } \lambda_n x$$

en el sólido semi-infinito, habrá que expresarla como:

$$X(\lambda, x) = C(\lambda) \text{sen } \lambda x$$

En la solución general, el sumatorio que se vio anteriormente queda sustituido por una integral, llegándose a:

$$T(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} C(\lambda) e^{-\alpha \lambda^2 t} \text{sen } \lambda x \, d\lambda \quad (1.70)$$

Recurriendo de nuevo al símil de la cuerda vibrante, si ésta es finita y está fija por ambos extremos, puede vibrar con infinitas frecuencias, pero todas han de ser múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Ahora bien si la cuerda es semi-infinita, sólo existe una restricción (en  $x=0$ ), la onda (o perturbación) será viajera, y evidentemente la solución más general deberá contener a todas las frecuencias del espectro.

El proceso matemático para determinar la función continua  $C(\lambda)$  en (1.70) es un poco más complejo que el que se lleva a cabo para determinar  $C_n$  (en los sólidos finitos), pero en ambos casos se determina recurriendo a la condición inicial. El resultado final conduce a que  $T(x, t)$  se exprese como una función notable conocida como función error, y etiquetada por **erf**, lo cual deriva de la denominación en lengua inglesa: **error function**. La función error es muy importante debido a que aparece en muchas aplicaciones técnicas, y es definida como:

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\eta^2} \, d\eta \quad (1.71)$$

y su derivada es:

$$\frac{d}{du} (\text{erf}(u)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \quad (1.72)$$

en el problema que nos ocupa, el argumento  $u$  es en realidad una función de  $x$ , y de  $t$ , concretamente:  $x/2\sqrt{\alpha t}$ , de modo que  $T(x, t)$  se expresa como:

$$T(x, t) = T_0 \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha t}} e^{-\eta^2} \, d\eta \quad (1.73)$$

Si la temperatura superficial en  $x=0$  no hubiese sido cero, se habría tenido que recurrir al cambio de variable (1.69). Una vez determinada la función  $\theta(x, t)$ , podemos recuperar la función  $T(x, t)$ , quedando:

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_0 - T_s} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (1.75)$$

El flujo de calor que se transfiere por el contorno  $x=0$ , se evalúa a partir de la ley de Fourier:

$$q(t) = -K \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -K(T_0 - T_s) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \Big|_{x=0} = \frac{K(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha t}} \quad (1.76)$$

La cantidad total de calor  $Q(t)$  transferido por el contorno durante el intervalo de  $t=0$  a un instante arbitrario  $t$ , se obtendrá integrando la anterior expresión, resultando:

$$Q(t) = \int_{t=0}^t q(t) dt = \frac{K(T_s - T_0)}{\sqrt{\pi \alpha}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2K(T_s - T_0) \sqrt{\frac{t}{\pi \alpha}} \quad (1.77)$$

En el sólido semi-infinito también se puede estudiar la conducción transitoria por un cambio en la temperatura de un fluido que baña la superficie  $x=0$ , o por un cambio del flujo impuesto. Otro estudio de interés se refiere al efecto de un cambio periódico en la temperatura superficial de un sólido semi-infinito [9], esto último tiene aplicaciones en la superficie terrestre, y en particular a los conductos enterrados.

# TEMA 2: EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS: RÉGIMEN ESTACIONARIO

## 2.1 Introducción

El Método de las Diferencias Finitas (M.D.F.) es una de las técnicas numéricas empleadas para obtener soluciones aproximadas de problemas en los que la solución analítica es inviable.

En el M.D.F. las ecuaciones diferenciales que intervienen en la formulación diferencial son sustituidas y aproximadas por ecuaciones algebraicas, las cuales son más fáciles de resolver. La base del método radica en que la derivada (de un cierto orden) de una función en un punto, puede ser aproximada por simples operaciones algebraicas entre el valor de la función en ese punto, y los valores en otros puntos “*cercanos*”.

Las ecuaciones algebraicas de diferencias finitas se pueden deducir de dos formas: La primera sería considerando un balance de energía sobre el volumen de control que representa un nudo de la red discreta. De esta manera planteamos las ecuaciones sin perder de vista el significado físico del problema, y es lo que llamaremos “*Formulación Física*”. En realidad al considerar el balance, estamos empleando el mismo procedimiento que el seguido en la formulación diferencial, la única diferencia consiste en que el volumen de control no es diferencial, sino que tiene un tamaño finito. Otro enfoque sería puramente matemático, en donde el punto de partida es la formulación diferencial. Seguidamente cada una de las derivadas que figuran en los operadores diferenciales (que actúan sobre la función incógnita), se aproximan por diferencias finitas en base a una expansión en serie de Taylor en el entorno de las coordenadas de un nudo de la red. Esto es lo que llamaremos “*Formulación Matemática*” y tiene la ventaja de suministrar información del *Orden de Error* que cometemos en la discretización. Obviamente ambas formulaciones conducen al mismo planteamiento.

Diremos por último que en la literatura se emplean diversos términos para referirse a conceptos equivalentes; así, se habla de *nodo* o de *nudo*, como un conjunto de puntos que forman una *red* o *malla*. Nosotros en el M.D.F. emplearemos la denominación de *nudo* y *red*, mientras que en el método de elementos finitos hablaremos de *nodo* y *malla*.

## 2.2 Formulación Física

Los pasos a seguir para plantear la formulación física de las ecuaciones en diferencia finita para el problema de conducción son los siguientes:

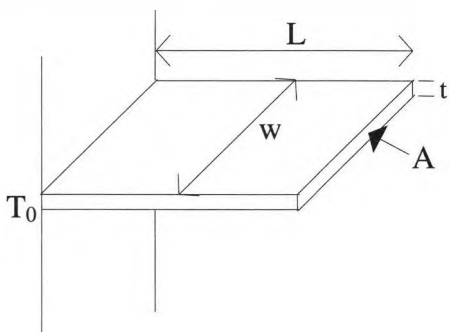
- Se recopila toda la información acerca del problema. Es decir, su *geometría*, *condiciones de contorno*, y *propiedades*.
- Se divide el cuerpo (1D, 2D o 3D) en una *red* patrón (adecuada a un sistema de coordenadas), originándose una partición, de modo que cada *nudo* (o punto de la red) representa un subdominio o región asociada al nudo, lo cual implica que la temperatura asignada a un nudo representa el promedio de temperatura del subdominio correspondiente. Eso equivale a plantear el problema bajo un esquema de parámetros concentrados.

- El área disponible para la conducción entre dos nudos es el área de la interfase que separa a las particiones adyacentes.
- Se efectúa un balance de energía en cada partición, y se obtiene para cada nudo una ecuación algebraica que liga la temperatura de ese nudo con la de sus “vecinos”.
- Se ordenan todas las ecuaciones llegando al planteamiento de un sistema de ecuaciones algebraicas. Al resolver el sistema, por algún método directo o iterativo, resolveremos de forma aproximada el problema.

Comenzaremos planteando las ecuaciones en un problema unidimensional.

**CASO UNIDIMENSIONAL:**

En este apartado consideraremos el caso de una aleta delgada. Notaremos por  $A$  a la sección de la aleta, por  $L$  su longitud, y  $p$  su perímetro. Si el ancho es  $w$ , y el espesor (uniforme) es  $t$ , según la figura 2-1 se verifica que:



$$p = 2w + 2t$$

$$A = wt$$

Figura 2-1

La temperatura en la base de la aleta es  $T_0$ , y la del fluido exterior  $T_\infty$ , presentando un coeficiente de transferencia  $h$ , que supondremos constante en todo el contorno de la aleta. La conductividad la notaremos por  $K$ . La figura 2-2, muestra la aleta dividida en  $M-2$  subdominios iguales, con longitud  $\Delta x$ . En los extremos tenemos subdominios de longitud  $\Delta x/2$ . En total tenemos  $M$  nudos. Las coordenadas de los nudos se indica también en la figura. La región (o trozo de aleta) que representa cada nudo interno tiene un volumen  $A\Delta x$ . Los nudos extremos representan regiones de la mitad de tamaño que los internos. Aunque el problema tiene solución analítica conocida, lo utilizaremos a propósito para contrastar el M.D.F.

tenemos subdominios de longitud  $\Delta x/2$ . En total tenemos  $M$  nudos. Las coordenadas de los nudos se indica también en la figura. La región (o trozo de aleta) que representa cada nudo interno tiene un volumen  $A\Delta x$ . Los nudos extremos representan regiones de la mitad de tamaño que los internos. Aunque el problema tiene solución analítica conocida, lo utilizaremos a propósito para contrastar el M.D.F.

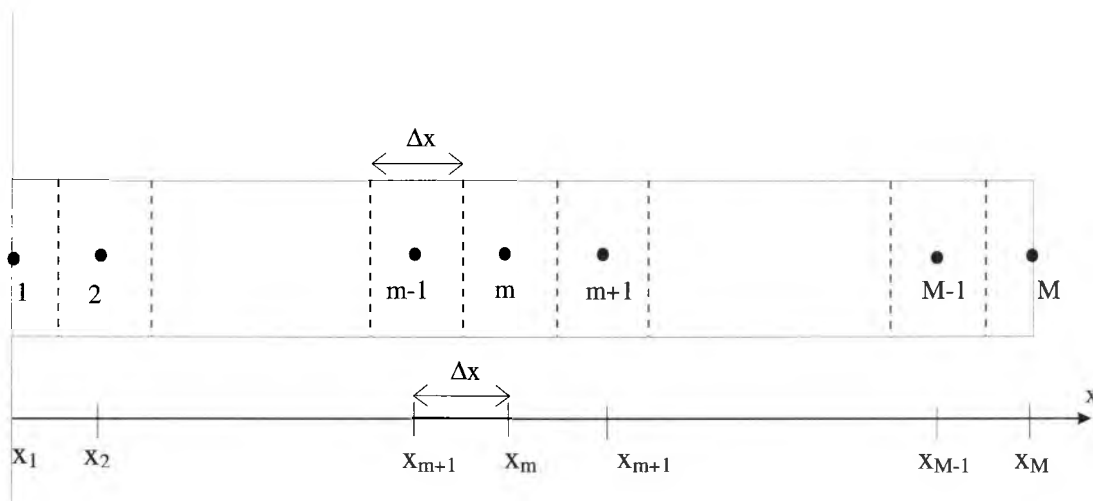


Figura 2-2

A continuación, y siguiendo los pasos indicados anteriormente, consideramos un balance de energía en cada subdivisión de la aleta.

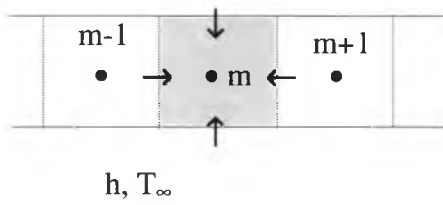


Figura 2-3

Empezaremos con un nudo cualquiera del interior de la aleta. Notamos por  $\phi$  al flujo de calor ( $\dot{Q}$ ) que que atraviesa una superficie del elemento, y aplicamos la ley de Fourier (en forma incremental). En la interfase entre la región del nudo  $m-1$  y el  $m$ , en la dirección indicada por la flecha de la figura 2-3, se tiene que verificar:

$$\phi_{(m-1) \rightarrow m} = KA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad (2.1)$$

análogamente:

$$\phi_{(m+1) \rightarrow m} = KA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (2.2)$$

y según la ley de enfriamiento de Newton, la transferencia por convección

$$\phi_{\infty \rightarrow m} = h \Delta x p (T_{\infty} - T_m) \quad (2.3)$$

El balance de energía en régimen estacionario y sin generación de calor establece que el flujo neto de calor que atraviesa el contorno del subdominio ha de ser cero (o que la divergencia del flujo sea nula), por lo tanto:

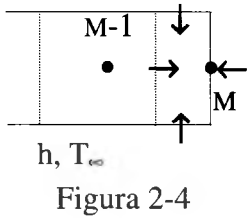
$$KA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} + KA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + h \Delta x p (T_{\infty} - T_m) = 0$$

Tras multiplicar ambos miembros por  $\Delta x / KA$ , y reordenar, resulta la ecuación:

$$T_{m-1} - \left[ 2 + \left( \frac{h(\Delta x)^2 p}{KA} \right) \right] T_m + T_{m+1} = \left( \frac{h(\Delta x)^2 p}{KA} \right) T_{\infty} \quad (2.4)$$

Hacemos notar que a la derecha de la igualdad ponemos la información conocida por las condiciones de contorno y las propiedades. Las incógnitas aparecen multiplicadas por coeficientes evaluables también a partir de la información conocida. Observe que los coeficientes que multiplican a las temperaturas han de ser adimensionales.

Para el nudo  $m=1$ , la temperatura es conocida ( $T_1=T_0$ ), por lo tanto no es una incógnita, y en consecuencia no planteamos un balance sobre la región de dicho nudo.



En el nudo  $m=M$ , hay transferencia por convección a través de la superficie lateral y la superficie del extremo. El balance de energía en este caso es:

$$KA \frac{T_{M-1} - T_M}{\Delta x} + h \frac{\Delta x p}{2} (T_\infty - T_M) + hA(T_\infty - T_M) = 0 \quad (2.5)$$

reordenando resulta:

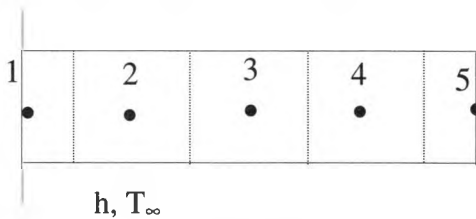
$$T_{M-1} - \left[ 1 + \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} + \frac{h \Delta x}{K} \right] T_M = - \left[ \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} + \frac{h \Delta x}{K} \right] T_\infty \quad (2.6)$$

Si la sección transversal de la aleta es pequeña (aleta delgada), en el balance global de calor disipado a lo largo de la aleta, el que se transfiere en la superficie del extremo resulta despreciable. Por ello a veces se considera al extremo como si estuviese aislado, lo cual analíticamente simplifica bastante la solución. Si quisiéramos obtener la ecuación en diferencia finita para la última subdivisión en tales circunstancias (extremo aislado) bastaría con hacer  $h=0$  en el tercer sumando de (2.5), tras lo cual resultaría:

$$T_{M-1} - \left[ 1 + \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} \right] T_M = - \left[ \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} \right] T_\infty \quad (2.7)$$

En esta discretización hemos supuesto una red regular, es decir, todos los  $\Delta x$  iguales. Conceptualmente no surge ninguna dificultad si la red es irregular, aunque se complicaría el algoritmo.

Particularicemos estos razonamientos en un caso sencillo en el que  $K=43 \text{ W/m}^\circ\text{C}$ ,  $h=120 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_0=200 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_\infty=25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $p=3.1416 \text{ cm.}$ ,  $A=0.785 \text{ cm}^2$ ,  $L=3 \text{ cm}$ .



La aleta se discretiza con cinco nudos según indica la figura 2-5, de modo que  $\Delta x=L/4=0.0075 \text{ m}$ .

Con respecto al nudo 1 sabemos que  $T_1=200^\circ\text{C}$ . En los nudos 2,3 y 4, aplicaremos (2.4). Si despreciamos el flujo intercambiado en el extremo de la aleta, en el nudo 5 el balance se traduce en (2.7). Si expresamos todos los datos en unidades coherentes, la sección  $A=0.785 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , y  $L=3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Seguidamente evaluamos algunos coeficientes:

Si expresamos todos los datos en unidades coherentes, la sección  $A=0.785 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , y  $L=3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ . Seguidamente evaluamos algunos coeficientes:

$$\frac{h(\Delta x)^2 p}{KA} = 0.0628 \quad \frac{h(\Delta x)^2 p}{KA} T_\infty = 1.57 \quad \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} = 0.0314 \quad \frac{h(\Delta x)^2 p}{2KA} T_\infty = 0.785$$

Sólo queda aplicar los algoritmos, resultando el sistema:

$$\begin{bmatrix} -2.06 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2.06 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2.06 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1.03 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20157 \\ -157 \\ -157 \\ -0875 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$T_2 = 173^\circ\text{C} \quad T_3 = 155^\circ\text{C} \quad T_4 = 145^\circ\text{C} \quad T_5 = 141^\circ\text{C}$$

Si se compara estos resultados con la solución analítica (consulte cualquier texto de transferencia de calor), se observa que el máximo error no supera el 2%. Para evaluar la cantidad total de calor que libera la aleta al fluido que la baña, bastaría con sumar todas las transferencias por convección desde la aleta hacia el fluido (es decir con el sentido de las flechas opuesto al indicado en la figuras 2-3, y 2-4). Sin embargo el calor que por conducción se transfiere desde el subdominio del nudo 1 al subdominio contiguo, más el disipado al fluido en el propio subdominio 1 equivale a lo anterior, por tanto:

$$Q_{\text{disipado}} = KA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + hp \frac{\Delta x}{2} (T_1 - T_\infty) = 14.6 \text{ W}$$

Analíticamente el flujo disipado sería de 15.1W. Por tanto el error cometido en este cálculo es de aproximadamente de un 3.3%.

### CASO BIDIMENSIONAL:

Supongamos una columna de sección cuadrada en la que las superficies A, B y C permanecen a una temperatura impuesta  $T_0$ . Imaginemos que la superficie D transfiere calor por convección a un fluido a  $T_\infty$ , con un coeficiente de transferencia  $h$ . Si la columna es lo suficientemente larga, la distribución de temperatura (salvo en las esquinas donde se producen los “efectos de borde”) es bidimensional, es decir,  $T = T(x,y)$ .

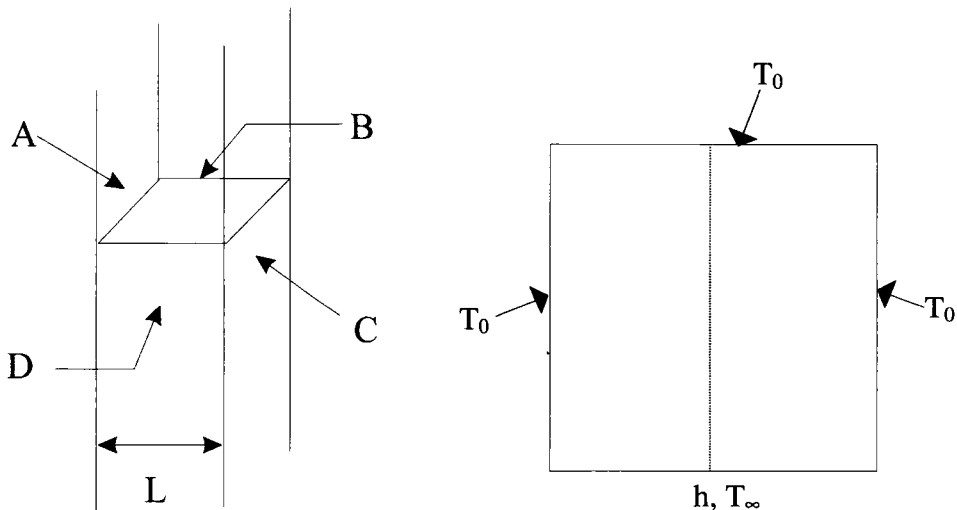


Figura 2-6



Analizamos un trozo de columna de sección  $L^2$  y espesor  $w$  ( $w$  puede ser la unidad de longitud). Teniendo en cuenta la geometría y las condiciones de contorno aplicadas, resulta evidente que la única línea de flujo de calor que no se curva (por razones de simetría), sería la que pasa por la línea a trazos (figura 2-6), por lo tanto, esa línea equivale a un contorno adiabático, es decir, el flujo es tangente a ella, o su componente en la dirección normal sería nula. En consecuencia, por la simetría del problema basta con analizar media sección (figura 2-7) Se ha considerado una discretización regular, de modo que existen 8 nudos en los que desconocemos las temperaturas. Podemos ver (en fondo gris) las diferentes formas de los subdominios correspondientes a los nudos. Existen nudos situados en el centro de un subdominio o elemento interno, como el nudo 1, otros de tamaño mitad situados en el contorno, como el nudo 4, y nudos en las esquinas de la cuarta parte de tamaño, como el nudo 8.

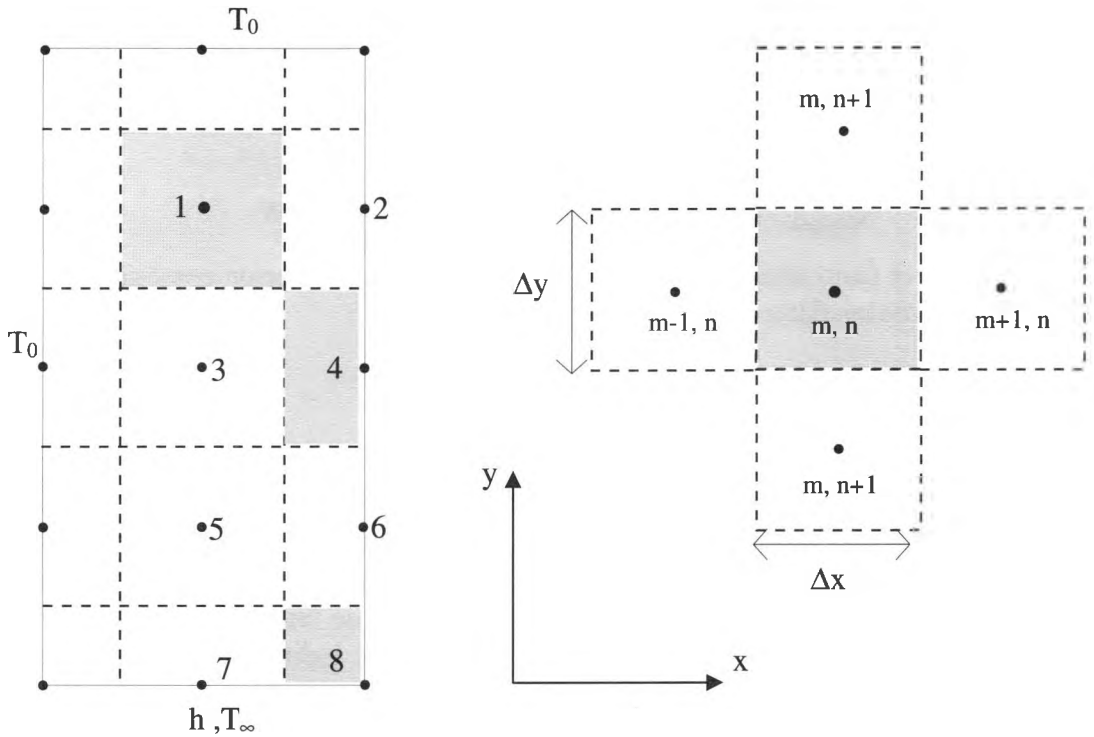


Figura 2-7: Discretización de la mitad de la sección de la columna

Veamos como se plantea el balance de energía en un elemento interno. En la figura 2-7 tenemos un nudo genérico de coordenadas  $x_m, y_n$ , y los correspondientes nudos vecinos. El flujo de calor desde los nudos vecinos al nudo  $m, n$  será:

$$\begin{aligned} \phi_{(m-1, n) \rightarrow (m, n)} &= K(\Delta y w) \frac{T_{m-1, n} - T_{m, n}}{\Delta x} & \phi_{(m+1, n) \rightarrow (m, n)} &= K(\Delta y w) \frac{T_{m+1, n} - T_{m, n}}{\Delta x} \\ \phi_{(m, n+1) \rightarrow (m, n)} &= K(\Delta x w) \frac{T_{m, n+1} - T_{m, n}}{\Delta y} & \phi_{(m, n-1) \rightarrow (m, n)} &= K(\Delta x w) \frac{T_{m, n-1} - T_{m, n}}{\Delta y} \end{aligned}$$

El balance de energía, al no existir generación de calor, equivale a anular la suma de los cuatro flujos. Si suponemos que  $\Delta x = \Delta y$ , entonces la ecuación que resulta es:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.8)$$

En caso de que hubiese generación de calor, entonces una forma de plantear el balance sería que el calor generado (por unidad de tiempo) en el subdominio (es decir:  $g \Delta x \Delta y w$ ) se iguale con el flujo por conducción desde el nudo  $(m,n)$  hacia sus vecinos. Si  $\Delta x = \Delta y$ , entonces se llega a:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + g \frac{(\Delta x)^2}{K} = 0 \quad (2.9)$$

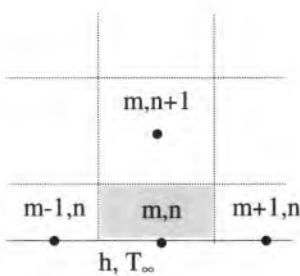


Figura 2-8

Si el nudo  $m,n$  pertenece al contorno de la superficie donde se transfiere calor por convección, entonces el balance que se plantea es:

$$\phi_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = K(\Delta x w) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y}$$

$$\phi_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = K \frac{(\Delta y w)}{2} \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\phi_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = K \frac{(\Delta y w)}{2} \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\phi_{\infty \rightarrow (m,n)} = h \Delta y w (T_{\infty} - T_{m,n})$$

El balance de energía en régimen estacionario y sin generación de calor establece que el flujo neto de calor que atraviesa el contorno del subdominio ha de ser cero, de lo cual se llega a:

$$(2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + \frac{2h\Delta x}{K} T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{K} + 2\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.10)$$

Para los nudos en el contorno adiabático, se podría repetir el razonamiento anterior suponiendo que  $h=0$  y que la disposición de los nudos es como indica la figura 2-9, tras lo cual se llegaría a:

$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) - 4T_{m,n} = 0 \quad (2.11)$$

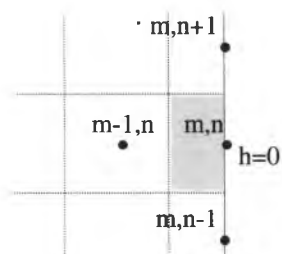


Figura 2-9

Observe que esta ecuación también se puede obtener de la (2.8). Para ello imponemos simetría en la distribución de temperaturas en la dirección  $x$ . Es decir imaginamos un nudo virtual  $(m+1,n)$  a la derecha del  $(m,n)$  de modo que su temperatura fuese igual que la del nudo a su izquierda  $(m-1,n)$ , de ese modo el flujo de energía no puede tener componente  $x$ . Por tanto si en (2.8) hacemos  $T_{m+1,n} = T_{m-1,n}$ , resulta (2.11).

Por último nos queda por considerar el balance sobre el elemento representado por el nudo 8. Por estar situado en una esquina, tiene un tamaño cuatro veces menor que uno interno. El balance supone:

$$\phi_{7 \rightarrow 8} + \phi_{6 \rightarrow 8} + \phi_{\infty \rightarrow 8} = 0$$

siendo:

$$\phi_{7 \rightarrow 8} = K \frac{\Delta y}{2} w \frac{T_7 - T_8}{\Delta x} \quad \phi_{6 \rightarrow 8} = K \frac{\Delta x}{2} w \frac{T_6 - T_8}{\Delta y} \quad \phi_{\infty \rightarrow 8} = h \frac{\Delta x}{2} w (T_{\infty} - T_8) = 0$$

Teniendo en cuenta que  $\Delta x = \Delta y$ , se llega finalmente:

$$T_6 + T_7 - \left( \frac{h \Delta x}{K} + 2 \right) T_8 + \frac{h \Delta x}{K} T_{\infty} = 0 \quad (2.12)$$

Si en el ejemplo de la columna particularizamos para:  $L=1\text{m.}$ ,  $\Delta x=0.25\text{ m.}$ ,  $K=1\text{ W/m}^{\circ}\text{C}$ ,  $T_0=500^{\circ}\text{K}$ ,  $T_{\infty}=300^{\circ}\text{K}$ ,  $h=10\text{W/m}^2\text{ }^{\circ}\text{C}$ , resulta:

Nudos interiores (1,3 y 5), ecuación (2.8):

$$\text{Nodo 1: } T_2 + T_3 - 4T_1 = -1000$$

$$\text{Nodo 3: } T_1 + T_4 + T_5 - 4T_3 = -500$$

$$\text{Nodo 5: } T_3 + T_6 + T_7 - 4T_5 = -500$$

Nudos en el contorno aislado (2,4 y 6), ecuación (2.11):

$$\text{Nodo 2: } 2T_1 + T_4 - 4T_2 = -500$$

$$\text{Nodo 4: } 2T_3 + T_2 + T_6 - 4T_4 = 0$$

$$\text{Nodo 6: } 2T_5 + T_4 + T_8 - 4T_6 = 0$$

Nudos en el contorno convectivo (7 y 8), ecuaciones (2.10) y (2.12) respectivamente:

$$\text{Nodo 7: } 2T_5 + T_8 - 9T_7 = -2000$$

$$\text{Nodo 8: } 2T_6 + 2T_7 - 9T_8 = -1500$$

Con estas ecuaciones se forma un sistema cuya matriz y vector de datos son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ -500 \\ -500 \\ 0 \\ -500 \\ 0 \\ -2000 \\ -1500 \end{Bmatrix}$$

y la solución del sistema (en ° Kelvin):

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 489.3 \\ 485.2 \\ 472.0 \\ 462.0 \\ 437.0 \\ 418.7 \\ 357.0 \\ 339.1 \end{Bmatrix}$$

Si deseamos calcular el flujo de calor por unidad de longitud  $\phi$  de la columna ( $w=1\text{m.}$ ) liberado en el contorno convectivo:

$$\phi'' = 2(\phi_{a \rightarrow \infty} + \phi_{7 \rightarrow \infty} + \phi_{8 \rightarrow \infty})$$

donde:

$$\phi_{a \rightarrow \infty} = h \frac{\Delta x}{2} (T_a - T_\infty) \quad \phi_{7 \rightarrow \infty} = h \Delta x (T_7 - T_\infty) \quad \phi_{8 \rightarrow \infty} = h \frac{\Delta x}{2} (T_8 - T_\infty)$$

En esta expresión hemos llamado "a" al nudo del vértice cuya temperatura  $T_a=500^\circ \text{K}$  era conocida a priori. Además, se ha tenido en cuenta la condición de simetría, por ello multiplicamos por dos. Al sustituir los datos se obtiene  $\phi''=883 \text{ W/m}$ . Obviamente la contribución mayor al flujo de calor se realiza en las esquinas, que es donde existe mayor diferencia de temperatura con el fluido exterior.

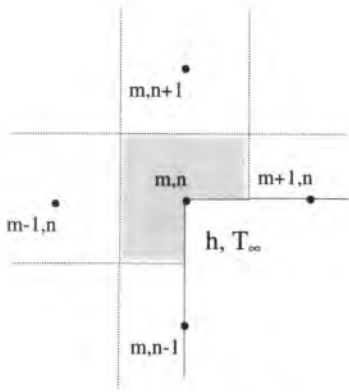


Figura 2-10

En este ejemplo hemos visto tres tipos de elementos, uno interno, otro en un contorno (sin esquina) aislado y/o convectivo y otro en una esquina. Pueden presentarse otros tipos. Por ejemplo, el caso de la figura 2-10. Si se considera que  $\Delta x = \Delta y$ , del correspondiente balance se llega fácilmente a:

$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + \frac{2h\Delta x}{K} T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{K} + 3\right) T_{m,n} = 0 \quad (2.13)$$

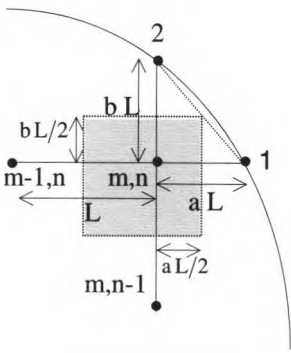


Figura 2-11

En el caso en que la geometría del contorno a discretizar no se adapte al sistema de coordenadas utilizado (consideramos un sistema cartesiano), habría que adaptar la localización de los nudos ubicados en el contorno con unos coeficientes (a y b) particulares para cada caso. Este inconveniente no se presenta en el método de los elementos finitos. En la figura 2-11 podemos ver los nudos 1 y 2 en el contorno irregular. A consecuencia de ello, el tamaño del subdominio del nudo m,n se ve alterado. Si  $\Delta x = \Delta y = L$ , las distancias entre m,n y los nudos 1 y 2, son aL y bL, respectivamente, donde a y b son coeficientes comprendidos entre cero y la unidad. Si en estos nudos la temperatura estuviese impuesta a

$T_1$  y  $T_2$ , el balance sería:

$$\begin{aligned} \phi_{1 \rightarrow (m,n)} &= K \left( \frac{L}{2} + \frac{bL}{2} \right) w \frac{T_1 - T_{m,n}}{aL} & \phi_{2 \rightarrow (m,n)} &= K \left( \frac{L}{2} + \frac{aL}{2} \right) w \frac{T_2 - T_{m,n}}{bL} \\ \phi_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} &= K \left( \frac{L}{2} + \frac{aL}{2} \right) w \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{L} & \phi_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} &= K \left( \frac{L}{2} + \frac{bL}{2} \right) w \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{L} \end{aligned}$$

de lo cual se deduce la ecuación:

$$T_1 \frac{1}{a(a+1)} + T_2 \frac{1}{b(b+1)} + T_{m,n-1} \frac{1}{(b+1)} + T_{m-1,n} \frac{1}{(a+1)} - T_{m,n} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0 \quad (2.14)$$

## 2.2 Formulación Matemática: Orden de Error

Sea una función  $T(x)$ , y nos planteamos el problema de aproximar la derivada (espacial) de dicha función en  $x=x_m$ , como una diferencia de  $T(x_m) = T_m$  con respecto a los valores en su entorno, es decir, con  $T(x_{m+1}) = T_{m+1}$ , y con  $T(x_{m-1}) = T_{m-1}$ . Obviamente

en el dominio analítico, este concepto lo encontramos acudiendo al desarrollo en serie de Taylor, el cual nos permitirá discutir el orden de error de la aproximación. En principio la aproximación de la derivada la podemos hacer de tres formas:

- Aproximación por *diferencia hacia adelante*:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_m} = \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} = \tan\theta_+ \quad (2.15)$$

- Aproximación por *diferencia hacia atrás*:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_m} = \frac{T_m - T_{m-1}}{\Delta x} = \tan\theta_- \quad (2.16)$$

- Aproximación por *diferencia centrada*:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_m} = \frac{T_{m+1} - T_{m-1}}{2 \Delta x} = \tan\theta \quad (2.17)$$

Si recordamos el significado geométrico de la derivada, es evidente que la tercera opción es la que mejor aproxima la derivada de  $T(x)$  en  $x_m$ , como se puede ver en la figura 2-10. De todos modos el orden de error de la aproximación se evalúa considerando el desarrollo en serie de Taylor de la función  $T(x)$ .

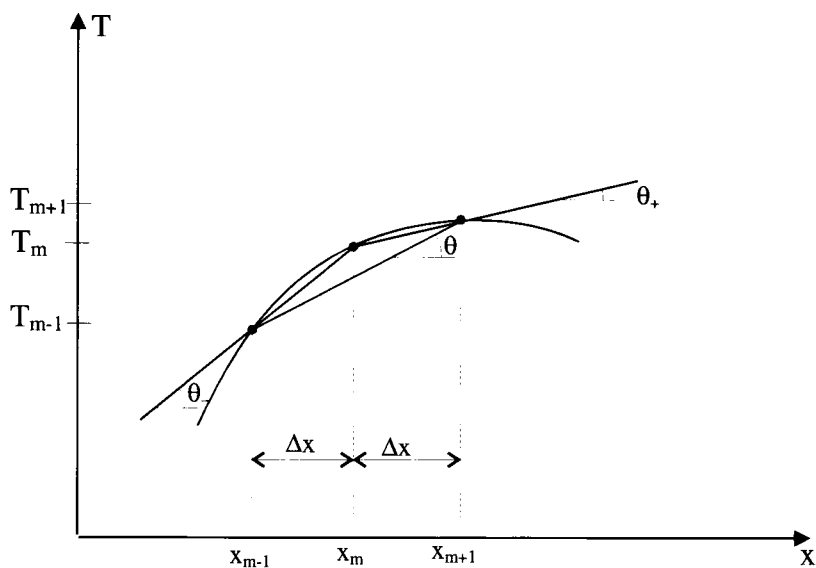


Figura 2-10

Si consideramos el desarrollo de  $T(x)$  en el entorno  $(x, x+\Delta x)$ , tendremos:

$$T(x + \Delta x) = T(x) + T'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}T''(x)(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}T'''(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (2.18)$$

análogamente podemos considerar el entorno  $(x-\Delta x, x)$ :

$$T(x-\Delta x) = T(x) - T'(x)\Delta x + \frac{1}{2!}T''(x)(\Delta x)^2 - \frac{1}{3!}T'''(x)(\Delta x)^3 + \dots \quad (2.19)$$

Si despejamos  $T'(x)$  en (2.18):

$$T'(x) = \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} - \left[ \frac{1}{2!}T''(x)\Delta x + \frac{1}{3!}T'''(x)(\Delta x)^2 + \dots \right]$$

que se expresa también como:

$$T'(x) = \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.20)$$

El símbolo  $O(\Delta x)$  significa que el orden de magnitud del resto del desarrollo es de  $\Delta x$ . Si  $x=x_m$ , y  $x+\Delta x=x_{m+1}$ , entonces:

$$T'_m = \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.21)$$

Por lo tanto si aproximamos la derivada en  $x_m$  por la diferencia finita hacia delante (2.15) es claro que cometemos (por truncamiento) un orden de error del resto de desarrollo omitido es decir  $O(\Delta x)$ . Análogamente, partiendo de (2.19) se puede comprobar que se comete el mismo orden de error en la aproximación por diferencia hacia atrás.

Para considerar el orden de error en la aproximación por diferencia centrada, consideramos la resta  $T(x+\Delta x) - T(x-\Delta x)$ , según (2.18) y (2.19), y despejamos  $T'(x)$ , obtendremos:

$$T'(x) = \frac{T(x+\Delta x) - T(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \left[ \frac{1}{3!}T'''(x)(\Delta x)^2 + \dots \right]$$

Si  $x=x_m$ ,  $x+\Delta x=x_{m+1}$  y  $x-\Delta x=x_{m-1}$ , entonces:

$$T'_m = \frac{T_{m+1} - T_{m-1}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

Podemos concluir diciendo que en la aproximación central el orden de error es  $O[(\Delta x)^2]$ . Con este orden de error conseguimos mejor aproximación que en los casos anteriores. Así por ejemplo, si  $\Delta x$  se redujese a la mitad, el orden de error de la aproximación por diferencia centrada se reduce a la cuarta parte, mientras que en la diferencia hacia delante y hacia atrás el orden de error se reduce a la mitad.

En la formulación diferencial del problema de conducción, las condiciones de contorno involucran derivadas de primer orden, pero en la ecuación diferencial gobernante, aparecen derivadas de segundo orden. Así pues, hemos de extender este procedimiento de aproximación a la segunda derivada. Para ello consideramos la suma:  $T(x+\Delta x) + T(x-\Delta x)$ , según (2.18) y (2.19), y luego despejamos  $T''(x)$ :

$$T''(x) = \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + \left[ \frac{2}{4!} T''''(x)(\Delta x)^2 + \dots \right]$$

es decir:

$$T''(x) = \frac{T(x + \Delta x) - 2T(x) + T(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

por tanto si aproximamos la segunda derivada por:

$$T''_m = \frac{T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.22)$$

cometeremos un error del orden de  $(\Delta x)^2$ . Es interesante observar que si en la formulación diferencial aproximamos la segunda derivada por (2.22) y la primera por la diferencia centrada (2.17), en ambos casos se comete el mismo orden de error.

En los problemas bi y tridimensionales, la ecuación diferencial gobernante es en derivadas parciales. A la vista de lo estudiado, se comprende fácilmente que la derivada parcial de primer orden sería:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(m,n)} = \frac{T(x_m + \Delta x, y_n) - T(x_m - \Delta x, y_n)}{2\Delta x} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m-1,n}}{2\Delta x} \quad (2.23)$$

análogamente la parcial con respecto a y:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(m,n)} = \frac{T(x_m, y_n + \Delta y) - T(x_m, y_n - \Delta y)}{2\Delta y} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n-1}}{2\Delta y} \quad (2.24)$$

Siguiendo un razonamiento paralelo a lo visto en la función de una variable, las derivadas parciales de segundo orden se aproximarán:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(m,n)} = \frac{T_{m+1,n} - 2T_{m,n} + T_{m-1,n}}{(\Delta x)^2} \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(m,n)} = \frac{T_{m,n+1} - 2T_{m,n} + T_{m,n-1}}{(\Delta y)^2} \quad (2.25)$$

A partir de estas ecuaciones, podemos formular la aproximación por diferencia finita desde un punto de vista matemático, para llegar a las mismas ecuaciones algebraicas



obtenidas por un planteamiento más físico. Así por ejemplo si consideramos un nudo  $m,n$  interno, en las coordenadas correspondientes a dicho punto se ha de cumplir:

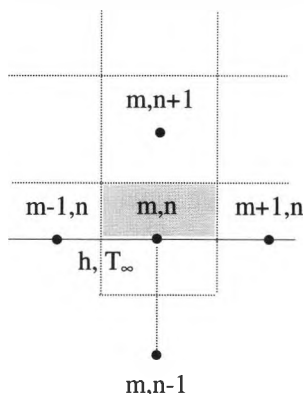
$$\nabla^2 T + \frac{g}{K} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{K} = 0 \quad (2.26)$$

Si tenemos en cuenta las aproximaciones de las segundas derivadas (2.25), y suponemos que  $\Delta x = \Delta y$ , resulta de inmediato la ecuación:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + g \frac{\Delta x^2}{K} = 0 \quad (2.27)$$

ecuación que ya fue deducida en el planteamiento físico.

Otro caso que conviene estudiar es la deducción de la ecuación correspondiente a un nudo situado en un contorno con convección:



Supongamos el caso de la figura 2-11. En el nudo  $m,n$  se ha de verificar la condición de contorno dada por la ecuación:

$$-K \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_\infty - T) \quad \text{en } (x, y) = (x_m, y_n)$$

que también puede expresarse:

$$K \frac{\partial T}{\partial y} + hT_\infty = hT \quad \text{en } (x, y) = (x_m, y_n) \quad (2.28)$$

Figura 2-11

Puesto que aproximación por diferencia centrada (2.24) de la primera derivada (parcial en este caso) involucra a los valores en los puntos anterior y posterior a  $(m,n)$ , necesitamos prolongar “virtualmente” (en la dirección  $y$ ) el contorno con un nudo imaginario  $(m,n-1)$  situado en  $x=x_m$ ,  $y=y_n-\Delta y$ , de modo que la temperatura de dicho nudo la notaremos por  $T_{m,n-1}^*$ . Estos nudos imaginarios no se necesitan en un nudo interno, pues los nudos “vecinos” (en las direcciones  $x$  e  $y$ ) pertenecen al dominio real o físico. Cuando el nudo esté en un contorno tendremos que acudir a este artificio para poder usar los algoritmos de las aproximaciones. En principio parece como si hubiésemos introducido una nueva incógnita sin sentido físico, sin embargo como el nudo  $(m,n)$  también ha de verificar la ecuación diferencial, las correspondientes ecuaciones también necesitan del nudo virtual. Al disponer de dos ecuaciones, podemos eliminar la temperatura del nudo virtual. Veámoslo en este caso. La aproximación por diferencia finita de la ecuación diferencial (2.26) es la ecuación (2.27) en la forma:

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1}^* + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} + g \frac{(\Delta x)^2}{K} = 0 \quad (2.29)$$

la aproximación por diferencia finita (centrada) de la ecuación correspondiente a la condición de contorno (2.28), sería:

$$K \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n-1}^*}{2\Delta y} + h T_{\infty} = h T_{m,n} \quad (2.30)$$

Eliminando  $T_{m,n-1}^*$  de (2.29) y (2.30), para una red con  $\Delta x = \Delta y$ , resulta:

$$(2T_{m,n+1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + \frac{2h\Delta x}{K} T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{K} + 2\right) T_{m,n} + g \frac{(\Delta x)^2}{K} = 0 \quad (2.31)$$

si no existiese generación de calor, queda la ecuación (2.10) deducida por planteamiento físico.

Finalizaremos este tema advirtiéndole que existen otras aproximaciones de la primera y segunda derivada que implican un orden de error menor, pero que involucran o relacionan a más puntos, llegando a ecuaciones más complejas.



# TEMA 3: EL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS: RÉGIMEN TRANSITORIO

## 3.1 Introducción

Cuando se afronta un problema de conducción en régimen transitorio, sabemos que  $T = T(\mathbf{r}, t)$ , siendo  $\mathbf{r}$  la posición y  $t$  el tiempo. Para abordarlo por el M.D.F., habrá que usar una red tanto para el espacio como para el tiempo. De hecho se obtienen para cada punto de la red soluciones aproximadas, para cada uno de los instantes de tiempo. Cuanto más pequeño sea el incremento de tiempo, se logra mayor exactitud. Si se usa un incremento de tiempo “lo suficientemente grande”, se puede presentar inestabilidad numérica, lo que se traduce en una solución carente de sentido físico.

Si las ecuaciones las planteamos basándonos en la “formulación física”, seguiremos haciendo uso del principio de conservación de la energía, sólo que ahora el flujo neto de calor hacia el elemento no es cero, sino que se iguala a la energía almacenada dentro del elemento. La energía almacenada hay que entenderla como la variación en el tiempo de la energía interna del elemento. En este caso la propiedad termodinámica que refleja la energía almacenada es el calor específico.

Existen varias técnicas para plantear las ecuaciones, aquí consideraremos el método explícito y método implícito.

## 3.2 Método Explícito

### PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

Consideremos en primer lugar un problema unidimensional en régimen transitorio, por ejemplo un muro en el que las condiciones de contorno han variado en el tiempo respecto de las que se mantenían en un régimen estacionario inicial.

Seleccionamos un “trozo” de dicho muro de sección  $A$ , y planteemos un balance de energía, comenzando por los nudos internos.

La energía del elemento representado por el nudo “ $m$ ”, la notaremos por  $U_m$ . El balance de energía será ahora:

$$\phi_{m-1 \rightarrow m} + \phi_{m+1 \rightarrow m} = \frac{\partial U_m}{\partial t} \quad (3.1)$$

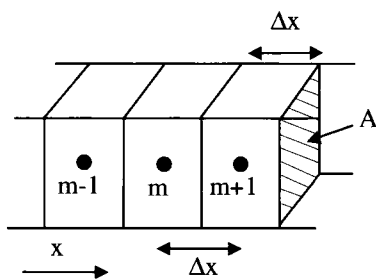


Figura 3.1

Los flujos de calor se relacionan con la derivada espacial (gradiente de temperatura en  $x$ ), y vendrán dados por:

$$\phi_{m-1 \rightarrow m} = KA \frac{T_{m-1} - T_m}{\Delta x} \quad \phi_{m+1 \rightarrow m} = KA \frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta x} \quad (3.2)$$

quedaría por especificar el instante de tiempo (que lo notaremos en un superíndice) en el que se considera el balance, o bien, si consideramos la formulación matemática, el instante en que se evalúa las

aproximaciones de las derivadas espaciales del operador  $\nabla^2$ . De momento hemos de admitir que las temperaturas de cada uno de los nudos van a ir variando con el tiempo.

Por otro lado la variación de la energía interna del elemento  $m$  con respecto al tiempo, se relaciona con la derivada temporal. Si suponemos la densidad ( $\rho$ ) y el calor específico ( $c$ ) constantes, será:

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} = \rho A \Delta x c \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=x_m} \quad (3.3)$$

Puesto que las temperaturas en cada uno de los nudos es función del tiempo, al sustituir (3.2) y (3.3) en (3.1), formaríamos una ecuación diferencial (en el tiempo) que relacionaría  $\dot{T}_m$  con las funciones del tiempo  $T_m(t)$ ,  $T_{m-1}(t)$ ,  $T_{m+1}(t)$ . Al extender el proceso a todos los nudos de la red, es evidente que se llegaría al planteamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales, que en su forma más general podría expresarse (en notación matricial) como:

$$\mathbf{C}\{\dot{\mathbf{T}}\} + \mathbf{K}\{\mathbf{T}\} + \{\mathbf{b}\} = 0$$

La solución de ese sistema de ecuaciones diferenciales (es decir del problema de valores iniciales), nos daría la evolución en el tiempo de las temperaturas de los nudos de la red a partir de las condiciones iniciales. La solución por procedimientos analíticos sólo es posible cuando el número de nudos fuese pequeño. Así por ejemplo si el muro se discretizase con sólo dos nudos de modo que únicamente en uno tuviésemos que averiguar la temperatura a lo largo del tiempo, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a una sola ecuación, y el problema de valores iniciales sería matemáticamente muy parecido al que se planteó en la ecuación (1.36) en los sistemas con capacidad térmica concentrada. Obviamente ese resultado analítico podría presentar bastante error debido a que la discretización espacial ha sido muy simple. Si se introduce un nudo más se mejoraría el resultado, aunque el procedimiento analítico se complica, especialmente si el número de nudos siguiese aumentando. Por tanto para llegar a una solución aproximada se impone discretizar también la derivada temporal. Al hacerlo así, la evolución temporal (de toda la red) también se irá obteniendo en forma discreta, es decir salto a salto. Este proceso lo denominaremos como “marcha en el tiempo”.

Antes de continuar, convendrá aclarar la notación que usaremos. Consideremos un salto de tiempo  $\Delta t$  a partir de la condición inicial ( $t=0$ ). Al transcurrir “ $p$ ” veces el intervalo  $\Delta t$ , estaremos en el instante  $t = p\Delta t$ . La temperatura del nudo “ $m$ ” en ese instante la notaremos por  $T_m^p$ . En el siguiente instante de tiempo, es decir en el instante  $t = p\Delta t + \Delta t = (p+1)\Delta t$ , la temperatura en el nudo “ $m$ ” la notaremos por  $T_m^{p+1}$ .

Si el instante de tiempo en que se considera el balance (o se evalúa la derivada espacial) es  $t = p\Delta t$ , y la derivada temporal se aproxima por un salto hacia adelante en el tiempo, se llega a la forma *explícita*. Por otro lado, si el instante de tiempo en que se considera el balance (o evaluación de la derivada espacial) es  $t=(p+1)\Delta t$ , y la derivada temporal se aproxima por un salto hacia atrás (con respecto a  $(p+1)\Delta t$ ) en el tiempo, se llega a la forma *puramente implícita*. Entre estas dos aproximaciones caben otras, pero en esta introducción nos centraremos en estas dos.

Si adoptamos el método explícito la derivada temporal se aproxima por:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x=x_m} \cong \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t} \quad (3.4)$$

si ahora evaluamos el balance en  $t = p\Delta t$ , entonces (3.1) queda como una ecuación algebraica:

$$K A \frac{T_{m-1}^p - T_m^p}{\Delta x} + K A \frac{T_{m+1}^p - T_m^p}{\Delta x} = \rho A \Delta x c \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

de donde:

$$T_m^{p+1} = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{m-1}^p + T_{m+1}^p) + \left( 1 - 2 \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \right) T_m^p$$

siendo  $\alpha = K/\rho c$ , la difusividad térmica del material. El cociente  $\alpha \Delta t / (\Delta x)^2$ , es el número adimensional de Fourier (Fo), definido en el tema 1. Por tanto para un nudo interno:

$$T_m^{p+1} = Fo (T_{m-1}^p + T_{m+1}^p) + (1 - 2Fo) T_m^p \quad (3.5)$$

El nombre de explícito obedece a que la temperatura desconocida  $T_m^{p+1}$ , en el salto de tiempo  $(p+1)$  se evalúa directamente (a través de (3.5)) a partir del conocimiento de las temperaturas  $T_{m-1}^p$ ,  $T_m^p$ ,  $T_{m+1}^p$  en el salto de tiempo anterior  $(p)$ . Naturalmente este proceso comienza a partir de las condiciones iniciales.

Para el caso de un nudo situado en un contorno que estuviese sometido a transferencia por convección, debemos considerar el balance específico que requiere el elemento representado por dicho nudo, es decir:

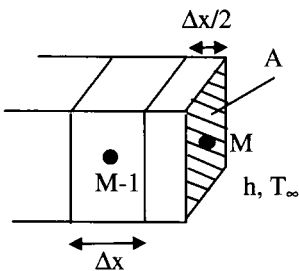


Figura 3-2

$$\phi_{M-1 \rightarrow M} + \phi_{\infty \rightarrow M} = \frac{\partial U_M}{\partial t}$$

Si lo desarrollamos según el método explícito, tendríamos:

$$K A \frac{T_{M-1}^p - T_M^p}{\Delta x} + h A (T_\infty - T_M^p) = \frac{\rho A \Delta x c}{2} \frac{T_M^{p+1} - T_M^p}{\Delta t}$$

y despejando  $T_M^{p+1}$ , se obtiene:

$$T_M^{p+1} = 2 Fo (T_{M-1}^p + Bi T_\infty) + (1 - 2 Fo - 2 Fo Bi) T_M^p \quad (3.6)$$

debido a la convección, en esta ecuación aparece el número adimensional de Biot,

$Bi=h\Delta x/K$ . Si el contorno estuviese aislado, bastaría con hacer  $h=0$ , es decir  $Bi=0$ .

Los algoritmos expresados en (3.5) y (3.6) se pueden implementar fácilmente en un programa de ordenador. Sólo habría que seleccionar el salto de tiempo  $\Delta t$ , para la resolución espacial ( $\Delta x$ ) deseada. Sin embargo esta elección tiene restricciones, ya que según el tipo de aproximación de la derivada temporal, el algoritmo puede presentar un comportamiento inestable en la marcha en el tiempo. Esta inestabilidad se manifiesta en oscilaciones, que aunque tiendan a desaparecer, no tienen sentido en la evolución de un sistema de orden uno. Sin embargo también puede ocurrir que las oscilaciones aumenten catastróficamente de amplitud. Esto último se relaciona con una continua amplificación de los errores en cada salto de tiempo. Todo ello puede ocurrir en los algoritmos del método explícito, el cual es el más sencillo, pero a la vez el más vulnerable a la inestabilidad. Por tanto hay que evitar hacer saltos de tiempo demasiado grandes para una determinada resolución espacial. Por ello los algoritmos deberán acompañarse de un criterio de estabilidad que marque el límite de estabilidad del algoritmo en cuestión. Desde un punto de vista matemático, el límite de estabilidad se obtiene del estudio de los autovalores de las ecuaciones algebraicas que se obtienen al aplicarlos [7].

La inestabilidad también puede analizarse, al menos cualitativamente, desde un punto de vista físico, pudiéndose comprobar que *la solución inestable viola la segunda ley de la termodinámica*. En efecto, imaginemos que en un muro simple (figura 3-3) de espesor  $a$ , se ha impuesto la temperatura en las caras A y B, por ejemplo a  $5^\circ\text{C}$ . Obviamente en el régimen estacionario la distribución de temperatura es uniforme. Si a partir de un cierto instante cambiamos bruscamente las condiciones de contorno de forma que en A la temperatura se impone a  $10^\circ\text{C}$  (y se mantiene) y en B se impone a  $6^\circ\text{C}$ , transcurrirá un cierto tiempo a partir de ese instante (que nosotros tomamos como  $t=0$ , o  $p=0$ ) para que de nuevo se alcance el régimen estacionario. En esa situación final sabemos que la temperatura variará linealmente a lo largo del muro, desde  $10^\circ\text{C}$  hasta  $6^\circ\text{C}$ . El tiempo del régimen transitorio dependerá de las propiedades térmicas ( $\alpha$ ) del muro.

En la figura 3-3 (b), se indica como sería la evolución real de la distribución de temperaturas en el muro, hasta alcanzar el estado estacionario. Esa evolución es suave, continua y sin oscilaciones.

Supongamos que consideramos una discretización espacial con una red de  $\Delta x=a/4$ . Tendremos cuatro nudos. En el instante inicial, salvo el nudo 1, que está obligado a permanecer siempre a  $10^\circ\text{C}$ , y el nudo 4, que está obligado a permanecer siempre a  $6^\circ\text{C}$ , los demás estarán (sólo en ese instante) a la temperatura de  $5^\circ\text{C}$ . Así pues la situación inicial ( $p=0$ ) será:

$$T_1^0 = T_1^t = 10 \quad \forall t \geq 0 \quad T_2^0 = 5 \quad T_3^0 = 5 \quad T_4^0 = T_4^t = 6 \quad \forall t \geq 0$$

Si ahora elegimos un salto de tiempo  $\Delta t$ , de modo tal el número de Fourier tome por ejemplo el valor unidad,  $Fo=\alpha\Delta t/(\Delta x)^2=1$ , entonces las ecuaciones para los nudos internos 2 y 3, vendrán dadas por (3.5), en las que  $1-2Fo=-1$ , resultando:

$$T_m^{p+1} = T_{m-1}^p + T_{m+1}^p - T_m^p$$

Por tanto, en el primer salto de tiempo ( $p=1$ ), las temperaturas serán:

$$T_2^1 = T_1^0 + T_3^0 - T_2^0 = 10 + 5 - 5 = 10^\circ \text{C}$$

$$T_3^1 = T_2^0 + T_4^0 - T_3^0 = 5 + 6 - 5 = 6^\circ \text{C}$$

Este resultado ya nos indica que el salto de tiempo no es el adecuado, pues si los nudos 2 y 3 están situados entre los contornos donde la temperatura se obliga a permanecer a  $10^\circ\text{C}$  y  $6^\circ\text{C}$  respectivamente, al cabo de un cierto tiempo  $\Delta t$  deberían alcanzar una temperatura intermedia entre ambos valores. Pero a un absurdo mayor se llega al considerar el siguiente salto de tiempo ( $p=2$ ):

$$T_2^2 = T_1^1 + T_3^1 - T_2^1 = 10 + 6 - 10 = 6^\circ \text{C}$$

$$T_3^2 = T_2^1 + T_4^1 - T_3^1 = 10 + 6 - 6 = 10^\circ \text{C}$$

Es decir, la distribución de temperaturas experimentaría una oscilación sin sentido físico, enfriándose la zona más cercana al contorno caliente ( $10^\circ\text{C}$ ), y calentándose la zona más próxima al contorno más frío ( $6^\circ\text{C}$ ), (figura 3-3(c)), lo cual violaría el segundo principio de la termodinámica, el cual precisamente marca el sentido de evolución de los procesos espontáneos.

Si ensayamos otros valores del salto de tiempo, y en consecuencia del número de Fourier, se llega a la conclusión que el comportamiento del algoritmo (3.5) no viola el segundo principio de la Termodinámica si:

$$Fo \leq \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

En definitiva, la restricción es que el coeficiente que multiplica a  $T_m^p$  debe ser mayor o igual a cero:

$$1 - 2Fo \geq 0$$

Si en los contornos A y/o B suponemos condiciones de contorno por convección, para los nudos situados en dichos contornos habría que aplicar la ecuación (3.6). Si se estudia de igual forma el límite de estabilidad al incorporar esta ecuación, se encuentra que también hay que exigir que el coeficiente de  $T_m^p$  sea positivo, lo cual equivale a que:

$$Fo(1 + Bi) \leq 1/2 \quad (3.8)$$

Lógicamente en un problema prevalecerá la condición más restrictiva de las que intervengan.



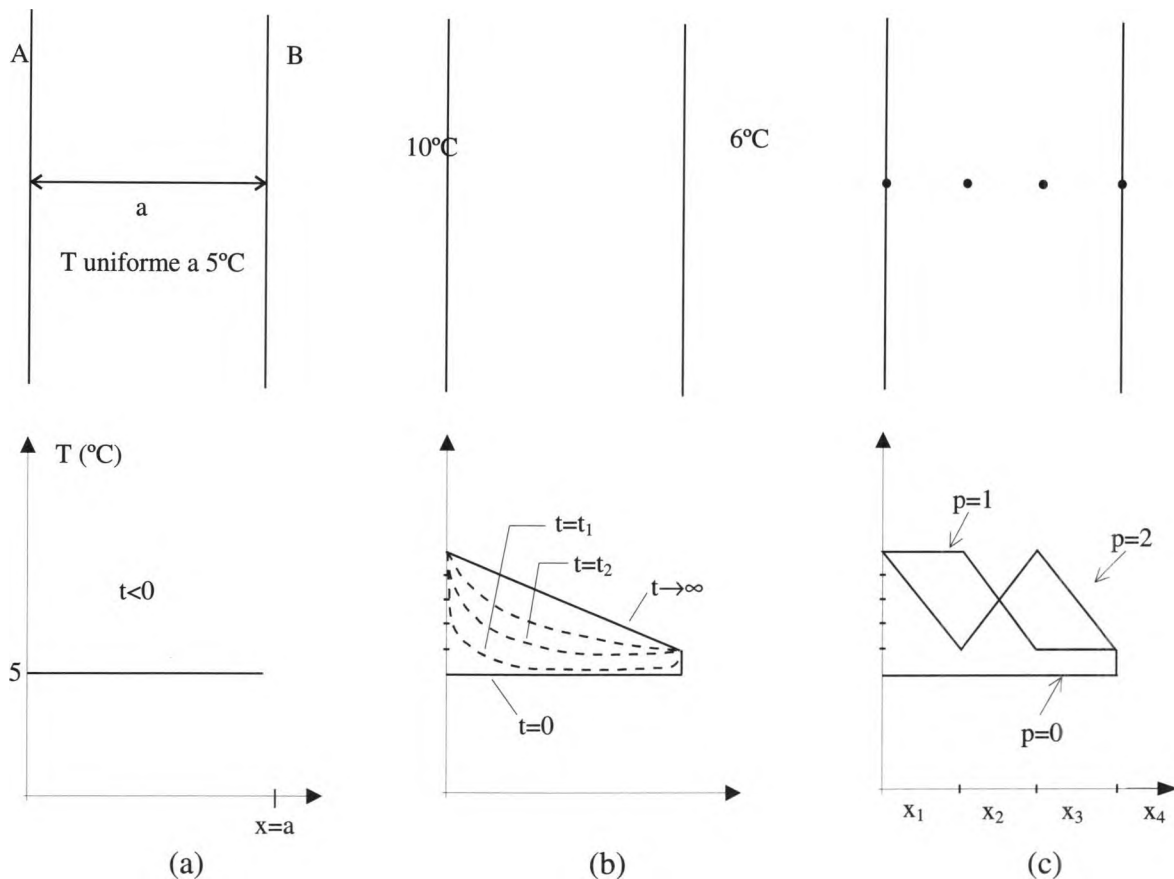
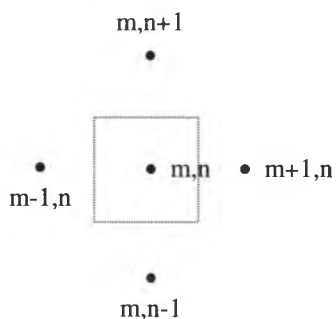


Figura 3-3

**PROBLEMA BIDIMENSIONAL**



En un problema bidimensional (de espesor  $w$ ), el planteamiento es similar. Si el nudo  $m,n$  es interno, el planteamiento del balance de energía en régimen transitorio sería:

$$\begin{aligned} & \phi_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} + \phi_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} \\ & + \phi_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} + \phi_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = \frac{\partial U_{m,n}}{\partial t} \end{aligned}$$

Si adoptamos el método explícito, resulta:

$$\begin{aligned} & K \Delta y w \frac{T_{m-1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + K \Delta y w \frac{T_{m+1,n}^p - T_{m,n}^p}{\Delta x} + K \Delta x w \frac{T_{m,n+1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} + K \Delta x w \frac{T_{m,n-1}^p - T_{m,n}^p}{\Delta y} \\ & = \rho \Delta x \Delta y w c \frac{T_{m,n}^{p+1} - T_{m,n}^p}{\Delta t} \end{aligned}$$

simplificando, suponiendo que  $\Delta x = \Delta y$ , y despejando  $T_{m,n}^p$ :

$$T_{m,n}^{p+1} = Fo(T_{m+1,n}^p + T_{m-1,n}^p + T_{m,n+1}^p + T_{m,n-1}^p) + (1 - 4Fo)T_{m,n}^p \quad (3.9)$$

El límite de estabilidad de este algoritmo exige también que el coeficiente de  $T_{m,n}^p$  sea positivo, luego se ha de verificar:

$$Fo \leq 1/4 \quad (3.10)$$

En las referencias [8-9], se puede consultar tablas donde aparecen las formas de las ecuaciones por el método explícito en las configuraciones más usuales de la ubicaciones de los nudos en un problema bidimensional. En cada caso se especifican los criterios de estabilidad.

### 3.2 Método Implícito

El inconveniente que puede presentar el método explícito consiste en que todas las ecuaciones planteadas en los nudos, se debe satisfacer un criterio de estabilidad. Para no superar el límite de estabilidad, en muchas ocasiones, para una resolución espacial dada, nos vemos obligados a utilizar pasos muy pequeños. Si queremos predecir la evolución en un gran intervalo de tiempo, va a ser a costa de muchos cálculos ya que la marcha en el tiempo, aunque es fácil (por ser explícito) puede resultar muy lenta (por los pequeños saltos). Este proceso se puede “agilizar” adoptando el método implícito, ya que este método resulta estable para todos los valores del número de Biot y Fourier, y permite trabajar con saltos de tiempo mayores. No obstante si el salto de tiempo aumenta, la solución tendrá un orden de error mayor, aunque no oscila ni se amplifican los errores. Por otro lado en este método, para cada salto de tiempo hay que resolver un sistema con tantas ecuaciones como nudos con temperaturas desconocidas. Por tanto si comparamos los métodos encontramos ventajas e inconvenientes, y lo ideal es poder utilizar indistintamente uno u otro según las circunstancias.

Para formular las ecuaciones por el método implícito, como se mencionó en el apartado anterior, el balance (o evaluación de la derivada espacial) se consideran en el instante  $t = (p+1)\Delta t$ , y la derivada temporal se aproxima por un salto hacia atrás (con respecto a  $(p+1)\Delta t$ ) en el tiempo.

Así en el caso unidimensional del muro, el balance de energía será:

$$KA \frac{T_{m-1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta x} + KA \frac{T_{m+1}^{p+1} - T_m^{p+1}}{\Delta x} = \rho A \Delta x c \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

reordenando, y expresando los coeficientes en función del número de Fourier:

$$(1 + 2Fo)T_m^{p+1} - Fo(T_{m-1}^{p+1} + T_{m+1}^{p+1}) = T_m^p \quad (3.11)$$

Ahora vemos que la temperatura futura (salto  $p+1$ ) de un nudo interno, se relaciona (linealmente) con la temperatura futura de los nudos vecinos. Por lo tanto si se conoce la

distribución de temperaturas en el instante  $t=p\Delta t$ , se deberán formular todas las ecuaciones de todos los nudos, lo cual conduce al planteamiento de un sistema, que en su forma más general será del tipo:

$$\mathbf{A} \{T\}^{p+1} = \mathbf{B} \{T\}^p \quad (3.12)$$

lo cual permite hacer la marcha en el tiempo (comenzando desde las condiciones iniciales), a costa de resolver un sistema de ecuaciones cada vez, pero con la ventaja de que es incondicionalmente estable.

Si el nudo perteneciese a un contorno convectivo, el balance de energía por el método implícito nos dará:

$$KA \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta x} + hA (T_\infty - T_m^{p+1}) = \frac{\rho A \Delta x c}{2} \frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}$$

reordenando:

$$(1 + 2Fo)(1 + Bi)T_m^{p+1} - 2Fo T_{m-1}^{p+1} = T_m^p + 2Fo Bi T_\infty \quad (3.13)$$

El método que hemos analizado es implícito, pero no el único. En la literatura se le conoce como método *puramente implícito*. Otra técnica de aproximación, también implícita, es la conocida por método de Crank-Nicolson. En esta técnica el balance (o evaluación de la derivada espacial) se considera en el instante  $t=p\Delta t + \Delta t/2$ , es decir en la mitad del intervalo entre  $t=p\Delta t$  y  $t=(p+1)\Delta t$ , esto lo notaremos por  $T^{p+1/2}$ . La derivada temporal se aproxima por un salto hacia atrás (con respecto a  $(p+1)\Delta t$ ) en el tiempo, sin embargo como nuestra referencia ahora está en  $(p+1/2)$  y no en  $p+1$ , la aproximación es en realidad por una diferencia centrada.

Si deseamos estudiar la ecuación en diferencia para un nudo interno, el balance ahora se plantea:

$$\underbrace{KA \frac{T_{m-1}^{p+1/2} - T_m^{p+1/2}}{\Delta x} + KA \frac{T_{m+1}^{p+1/2} - T_m^{p+1/2}}{\Delta x}}_{\text{evaluada en } t=p+1/2} = \frac{\rho A \Delta x c}{2} \underbrace{\frac{T_m^{p+1} - T_m^p}{\Delta t}}_{\text{centrada con respecto a } p+1/2} \quad (3.14)$$

La evaluación en el centro del intervalo, sólo tiene sentido (en la marcha en el tiempo) interpolando linealmente (a la mitad del salto) o promediando entre el salto  $p$  (conocido) y el  $p+1$  (desconocido). Es decir que  $T_m^{p+1/2}$  y las restantes temperaturas, en realidad significa:

$$T_m^{p+1/2} = \frac{T_m^{p+1} + T_m^p}{2} \quad T_{m-1}^{p+1/2} = \frac{T_{m-1}^{p+1} + T_{m-1}^p}{2} \quad T_{m+1}^{p+1/2} = \frac{T_{m+1}^{p+1} + T_{m+1}^p}{2} \quad (3.15)$$

Por otro lado, la aproximación de la derivada temporal, al ser centrada respecto a  $t=p\Delta t(1+1/2)$ , presenta un orden de error de  $O(\Delta t)^2$ , mientras que el método puramente implícito y el explícito presentan un orden de error  $O(\Delta t)$ . Esto puede comprobarse fácilmente considerando los desarrollos en serie de Taylor de  $T(t)$  en los entornos

$(t+\Delta t/2)$  y  $(t-\Delta t/2)$ . Al sustituir (3.15) en (3.14), tras reordenar se llega a la ecuación:

$$-\left(\frac{Fo}{2}\right) T_{m-1}^{p+1} + (1 + Fo) T_m^{p+1} - \left(\frac{Fo}{2}\right) T_{m+1}^{p+1} = -\left(\frac{Fo}{2}\right) T_{m-1}^p + (1 + Fo) T_m^p - \left(\frac{Fo}{2}\right) T_{m+1}^p \quad (3.16)$$

Vemos por tanto que también es un método implícito, es decir que en cada salto de tiempo hay que resolver un sistema de ecuaciones como (3.12). Tiene la ventaja respecto a los anteriores de cometer menos error.

El proceso de extensión a los problemas bidimensionales es análogo al considerado en el método implícito. En las referencias [8-9], se pueden consultar los algoritmos según la posición del nudo (interno, esquina etc.).



## TEMA 4: MÉTODOS CLÁSICOS APROXIMADOS

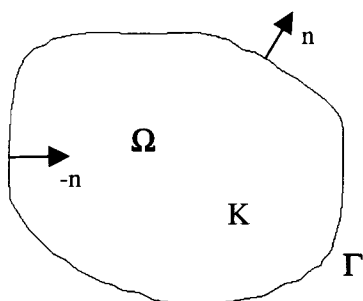
### 4.1 Introducción.

Para llegar al planteamiento de las ecuaciones que requiere el Método de Elementos Finitos (M.E.F.), es preciso partir de una forma integral que sea equivalente a la formulación diferencial. Existen principalmente dos procedimientos para conseguir este objetivo: los **Métodos de Residuos ponderados**, y los **Principios Variacionales**. En la metodología de residuos ponderados, existen a su vez varios métodos (se considerarán en este tema a través de un ejemplo), pero el de mayor utilidad para su posterior extensión a elementos finitos es el denominado *Método de Galerkin*. Existen problemas, como el de Conducción del calor, en los que ambos métodos proporcionan la misma solución. No obstante los métodos de residuos ponderados tienen un campo de aplicación más amplio que el variacional, pues no siempre se puede asegurar la existencia de un funcional adecuado.

Hasta que no se desarrolló la tecnología de la computación, había que recurrir a ambas técnicas para encontrar una solución aproximada en problemas gobernados por ecuaciones diferenciales donde no era posible encontrar la solución analítica, por ello se conocen como *Métodos Clásicos Aproximados*. Estos métodos aportan el soporte teórico de partida de métodos más avanzados, como el Método de Elementos Finitos y el Método de Elementos de Contorno, por ello los estudiaremos en este tema.

### 4.2 Conceptos Previos: Forma integral, Función de Ensayo, y Residuo.

Imaginemos un problema gobernado por una ecuación diferencial en un cierto dominio  $\Omega$ , sujeto a ciertas condiciones en su contorno  $\Gamma$ , donde la función a encontrar (función incógnita), denominamos  $u$ . Lo verdaderamente importante del método de residuos ponderados es que se puede aplicar a una gran variedad de ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno. Si perder generalidad, y sólo a título de ejemplo, supondremos que la ecuación diferencial es la ecuación de Laplace (4.1) y las condiciones de contorno fuesen esenciales (4.2) en  $\Gamma_1$ , y naturales (4.3) en  $\Gamma_2$ . El problema planteado así podría corresponder a un problema de conducción, es decir que  $u(x,y)$  sería  $T(x,y)$ .



$$\text{en } \Omega: \quad K \nabla^2 u = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{en } \Gamma_1: \quad u = \bar{u} \quad (4.2)$$

$$\text{en } \Gamma_2: \quad K \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}_{-n} \quad (4.3)$$

En los métodos de residuos ponderados, (y en los variacionales también) se pretende encontrar una solución aproximada  $\hat{u}$  expresada en función de unos

coeficientes ajustables  $a_i$ , y unas funciones linealmente independientes  $\Phi_i$ , denominadas funciones de “*ensayo*” o de “*prueba*”. La expresión de  $\hat{u}$  sería:

$$\hat{u} \cong \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i \quad (4.4)$$

Estas funciones se deberán elegir de entre una clase de funciones que sean **completas** en el dominio  $\Omega$ . Funciones completas son aquellas que formando una serie infinita a partir de las mismas, consiguen representar a cualquier otra función arbitraria que sea continua y derivable en determinado dominio. Funciones con estas características matemáticas son entre otras, las polinómicas y las trigonométricas. Un detalle importante es que a las funciones  $\Phi_i$  no se les exige satisfacer la ecuación diferencial, pero si se les exige satisfacer las condiciones de contorno. En nuestro ejemplo existen dos tipos de condiciones de contorno muy diferentes (naturales y esenciales), y resulta evidente que la elección de las funciones de ensayo para una geometría ligeramente compleja puede resultar una tarea complicada. Esta dificultad se puede salvar, haciendo que la exigencia sólo afecte a un tipo de condiciones de contorno (las esenciales), como se verá más adelante.

Al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial, se forma una nueva función residuo o error  $R$ , definida en  $\Omega$ , que en el caso que nos ocupa sería:

$$R = K \nabla^2 \hat{u} \quad (4.5)$$

Sea  $W$  una función arbitraria, pero integrable en  $\Omega$ . Si  $u$  es la solución exacta del problema, es evidente que:

$$\int_{\Omega} K(\nabla^2 u) W \, d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

es decir, la integral sería nula con independencia de la función arbitraria  $W$ . Si sustituimos  $u$  por  $\hat{u}$ , la función residuo  $R$  da una medida del error cometido en cualquier punto del dominio. Procede por tanto, el tratar de minimizar dicho error. Una forma de hacerlo sería utilizando un conjunto finito de funciones de ponderación  $W_j$ , de modo que para cada una de ellas se verifique:

$$\int_{\Omega} K(\nabla^2 \hat{u}) W_j \, d\Omega = \int_{\Omega} R W_j \, d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.7)$$

Al forzar a cero la integración de los residuos ponderados, se intenta encontrar una solución aproximada, planteándose de este modo un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

Los distintos métodos de residuos ponderados difieren entre sí en la forma de elegir las funciones de ponderación. Estos métodos se denominan: Colocación por

puntos, Colocación por subdominios, Mínimos cuadrados y Método de Galerkin. De todos ellos, el de mayor utilidad para adaptarlo a la técnica de elementos finitos es el de Galerkin. En este método las funciones de ponderación son las de ensayo originales, es decir:

$$W_j = \frac{\partial \hat{u}}{\partial a_j} = \Phi_j \quad (4.8)$$

Para comprender el sentido matemático de la aproximación conviene observar que al sustituir (4.8) en (4.7), lo que se está anulando es el producto interno entre la función residuo y cada una de las funciones de ponderación  $\Phi_j$ :

$$(\Phi_j, R) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

siendo:

$$(\Phi_j, R) = \int_{\Omega} R \Phi_j \, d\Omega \quad (4.10)$$

Al anular el producto interno se está imponiendo la ortogonalidad del residuo a todas las funciones  $\Phi_j$ . Si todas las funciones  $\Phi_j$  del conjunto completo fuesen incluidas en  $\hat{u}$ , es decir  $n \rightarrow \infty$ , entonces la única posibilidad compatible sería que el residuo fuese cero (elemento neutro), lo que equivaldría a que  $\hat{u}$  se correspondería con la solución exacta. Esto tiene el inconveniente que el número de parámetros  $a_i$  a determinar tiende también a infinito. Al utilizar un conjunto finito de  $n$  funciones  $\Phi_j$  (tantas como coeficientes a determinar), se plantea un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas, de forma que al resolverlo se llega a obtener una solución aproximada.

## 4.2 Técnicas de Residuos Ponderados.

Para mayor claridad, consideremos un problema genérico unidimensional, es decir  $u(x)$ , cuya formulación diferencial es la siguiente:

Ecuación Diferencial en el dominio  $\Omega$ :  $1 < x < 2$ , dada por:

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} = 0 \quad (4.11)$$

Condiciones de Contorno:

$$u(x) \Big|_{x=1} = 2 \quad (\Gamma_1: x=1) \quad (4.12)$$



$$-x \frac{du}{dx} \Big|_{x=2} = 1/2 \quad (\Gamma_2: x=2) \quad (4.13)$$

Podemos ver que la ecuación diferencial es de segundo orden. Las condiciones de contorno son de un orden inferior: de orden cero en  $\Gamma_1$  y de orden uno en  $\Gamma_2$ . Este problema tiene solución analítica por el método de Euler. Esta circunstancia nos permitirá comparar las aproximaciones que se consiguen con cada uno de los métodos de residuos ponderados. La solución analítica es:

$$u(x) = \frac{1}{2} \ln(x) + \frac{2}{x}$$

A continuación tenemos que proponer la solución aproximada. Lo primero que tenemos que decidir es el tipo de función así como el grado de aproximación. Puesto que las funciones polinómicas permiten una aproximación razonable en un intervalo en el que no existan discontinuidades, optaremos por una expansión polinomial. A continuación hay que decidir el grado. Si en el intervalo no se espera que la función experimente cambios muy bruscos, una aproximación cuadrática o para más seguridad cúbica suele ser suficiente. Por tanto la solución aproximada se podrá expresar en principio como:

$$\hat{u}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (4.14)$$

Observemos que esta propuesta no responde a lo expresado en (4.4), pues no aparecen las funciones de ensayo  $\Phi_j(x)$  de forma tal que  $\hat{u}$  satisfaga las condiciones de contorno. Si la expresión (4.14) se obliga a cumplir las condiciones de contorno, si conseguiremos nuestro objetivo. Por tanto si en (4.12) y (4.13) sustituimos  $u$  por  $\hat{u}$ , tendremos:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{u}(x) \Big|_{x=1} = 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2 \quad (4.15) \\ -x \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_{x=2} = 1/2 \quad \Rightarrow \quad c_2 + 4c_3 + 12c_4 = -1/4 \quad (4.16) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ Ec. y } 4 \text{ incógnitas} \end{array}$$

Para eliminar incógnitas dependientes, despejamos  $c_1$  de (4.15), y luego  $c_2$  de (4.16). Si despejamos  $c_1$  y sustituimos en (4.14), tras reordenar queda:

$$\hat{u}(x) = 2 + c_2(x-1) + c_3(x^2-1) + c_4(x^3-1) \quad (4.17)$$

Despejando  $c_2$  de (4.16) y sustituyendo en (4.17), tras reordenar, resulta:

$$\hat{u}(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + c_3(x-1)(x-3) + c_4(x-1)(x^2+x-11) \quad (4.18)$$

si introducimos la notación:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = c_3 \\ a_2 = c_4 \end{array} \right\} \text{coef. ajustables}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_0(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) \\ \Phi_1(x) = (x-1)(x-3) \\ \Phi_2(x) = (x-1)(x^2 + x - 11) \end{array} \right\} \text{funciones de ensayo}$$

logramos expresar la función aproximada como una combinación funciones de ensayo y coeficientes ajustables:

$$\hat{u}(x; a) = \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) \quad (4.20)$$

Con esta notación queremos expresar que la solución aproximada es una función de  $x$  (donde la dependencia la establecen las funciones de ensayo) y de los coeficientes ajustables. Podemos comprobar que con esta combinación de funciones, se satisfacen las dos condiciones de contorno. Por consiguiente, podemos considerarlas como *funciones de interpolación*. Obviamente esta solución no satisface la ecuación diferencial. Si sustituimos  $\hat{u}$  en la ecuación diferencial (4.11), resulta que a la derecha de la igualdad no figura un cero, figurará otra función de  $x$  y de los coeficientes  $a_i$ , que representa a la *función residuo*  $R(x, a)$ :

$$R(x; a) = \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\hat{u}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \neq 0$$

sustituyendo (4.20) en (4.11) resulta:

$$R(x; a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \quad (4.21)$$

La forma de averiguar  $a_1$  y  $a_2$  para que  $\hat{u}$  represente una solución aproximada, es introduciendo algún criterio que trate de que  $R(x; a)$  sea próxima a cero. Si tenemos en cuenta que en  $R(x; a)$  todavía tenemos la opción de variar los coeficientes ajustables, es lógico pensar que existirá una combinación de estos coeficientes que haga que  $R(x; a)$  tome valores próximos a cero.

Todos los métodos de residuos ponderados parten de un criterio común, dado por la expresión general:

$$\int_{\Omega} R W_j d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.22)$$

En cada uno de ellos lo que varía es el criterio que se toma para elegir las funciones de ponderación. En cualquier caso se tendrán que utilizar tantas funciones de ponderación

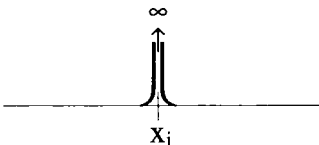
(n) como coeficientes a determinar (n). A continuación veremos como se resolvería el ejemplo planteado, aplicando cada una de las técnicas de ponderación.

• **Método de Colocación**

En este método se eligen n puntos interiores del dominio (tantos como coeficientes a determinar), denominados *puntos de colocación*, y en cada uno de ellos se fuerza a que el residuo se haga cero. Como el residuo es una función que depende del conjunto de coeficientes, se planteará un sistema de n ecuaciones (una por cada residuo igualado a cero) con n incógnitas, es decir:

$$R(x_j; a) = 0 \quad j = 1, \dots, n \tag{4.23}$$

La pregunta inmediata es: ¿Cuál ha sido la función de ponderación  $W_j$ ? Si comparamos (4.22) con (4.23) la respuesta es inmediata, la función elegida ha sido la *función delta de Dirac*, la cual se va aplicando en cada uno de los puntos de colocación. Recordemos que la función delta de Dirac se define:

$$\Delta^j = \Delta(x_j) = \begin{cases} 0 & x \neq x_j \\ \rightarrow \infty & x \rightarrow x_j \end{cases}$$


siendo  $x^j$  el punto de aplicación de la función, en el cual se hace singular. Además su singularidad llega a un extremo tal que su definición se completa con:

$$\int_{\Omega} \Delta^j d\Omega = 1$$

para cualquier dominio  $\Omega$  que contenga el punto de aplicación. Una de las propiedades más conocidas e importantes de  $\Delta^j$  es la de *desplazamiento*: Si  $f(x)$  es una función arbitraria definida en  $\Omega$ , entonces:

$$f(x_j) = \int_{\Omega} f(x) \Delta^j d\Omega$$

es decir, si la integral de  $f(x)$  se pondera con la función delta de Dirac colocada en  $x_j$ , lo que conseguimos es “filtrar” el valor de la función en  $x_j$ . Así pues, si  $W_j = \Delta^j$ , entonces de (4.22) se obtiene (4.23).

En el ejemplo considerado existen dos parámetros a determinar, por consiguiente tendremos que elegir dos puntos de colocación dentro del dominio [1,2]. Aunque las posibles localizaciones de esos puntos es uno de los aspectos que más influyen en los resultados finales, en principio se suele adoptar una elección uniforme y simétrica. Por tanto los puntos de colocación se situarán en  $x_1=4/3$ , y  $x_2=5/3$ . Si aplicamos las ecuaciones (4.23) resultan:

$$\left. \begin{aligned} R(x; a) \Big|_{x=4/3} = 0 &\Rightarrow \frac{4}{3}a_1 + 4a_2 = \frac{11}{8} \\ R(x; a) \Big|_{x=5/3} = 0 &\Rightarrow \frac{8}{3}a_1 + 13a_2 = \frac{97}{100} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_1 &= 2.0993 \\ a_2 &= -0.356 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Conocidos los coeficientes ajustables por este criterio, basta sustituirlos para determinar la solución aproximada:

$$\hat{u}(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.0993(x-1)(x-3) - 0.3560(x-1)(x^2 + x - 11) \quad (4.25)$$

Al objeto de realizar una comparación detallada con la solución analítica, conviene considerar la condición (4.13). Para facilitar la notación denominaremos  $\tau(x)$  al producto de:  $-x \, du/dx$ . Análogamente  $\hat{\tau}(x)$  se referirá a  $-x \, d\hat{u}/dx$ , y en nuestro ejemplo será:

$$-x \frac{d\hat{u}}{dx} = \hat{\tau}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + 4.1986(x-2) - 1.0680(x-2)(x+2) \quad (4.26)$$

mientras que analíticamente se tendría:

$$-x \frac{du}{dx} = \tau(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \quad (4.27)$$

Si ahora representamos gráficamente las funciones  $u(x)$ ,  $\hat{u}(x)$ ,  $\tau(x)$ ,  $\hat{\tau}(x)$ :

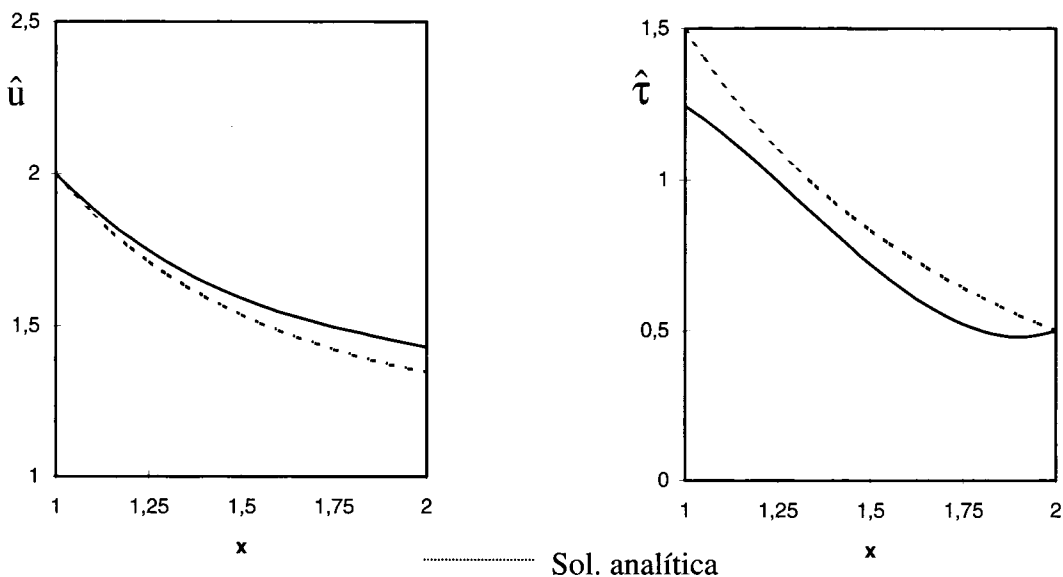


Figura 4-1: Solución analítica y aproximada por el método de colocación

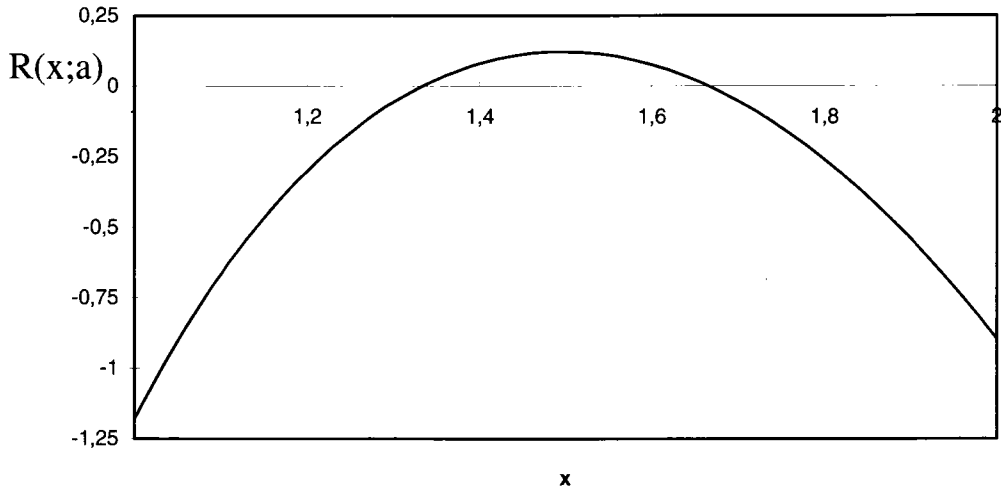


Figura 4-2: Función residuo para el método de colocación

En la figura 4-1 hemos representado gráficamente las funciones:  $u(x)$  junto con  $\hat{u}(x)$ , y por otro lado  $\pi(x)$  junto con  $\hat{\pi}(x)$ . Se puede ver como la solución aproximada satisface en  $x=1$  la condición de contorno esencial (4.12), y en el resto del dominio existe un error, pues la solución aproximada no satisface la ecuación diferencial. En la figura 4-2 representamos la función residuo (4.21), con los valores de los coeficientes obtenidos de (4.24). Conviene aclarar que aunque la función residuo se haga cero en los dos puntos de colocación (como indica la figura 4-2), eso no implica que la solución aproximada no presente error en dichos puntos, pues  $R(x;a)$  no es la diferencia entre  $\hat{u}(x)$  y  $u(x)$  (normalmente  $u(x)$  no se conoce), sino que es la función que se obtiene al introducir  $\hat{u}(x)$  en la ecuación diferencial. El forzar a cero la función residuo en los puntos de colocación, no es más que un criterio razonable para calcular los coeficientes ajustables. Si la función  $R(x;a)$  fuese cero en todo el intervalo (infinitos puntos), entonces la solución aproximada coincidiría con la exacta, pero para eso tendríamos que haber forzado a cero la función residuo en infinitos puntos y en definitiva estaríamos manejando infinitos coeficientes. Por otro lado, en la gráfica de  $\hat{\pi}(x)$  se puede ver que la condición de contorno (4.13) también es satisfecha por la solución aproximada, ya que el criterio para encontrar las funciones de ensayo fue el de satisfacer las condiciones de contorno (4.12) y (4.13).

- **Método de Subdominios**

En este método el dominio se particiona en tantos *subdominios* como coeficientes a determinar, y en cada uno de ellos se fuerza a cero el promedio de la función residuo sobre cada subdominio. Si denominamos  $\Delta x_j$  a cada uno de los subdominios, entonces el sistema de ecuaciones que se plantea es:

$$\frac{1}{\Delta x_j} \int_{\Delta x_j} R(x;a) dx = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

puesto que  $\Delta x_j$  no puede ser cero en ningún caso, (4.28) también puede expresarse como:

$$\int_{\Delta x_j} R(x; a) dx = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

De nuevo nos cuestionamos por la función de ponderación que utiliza este método. Si comparamos (4.22) con (4.29) la función utilizada ha sido la *función filtro* con una banda igual al subdominio, es decir  $\Delta x_j$ . Esta función consiste en un pulso rectangular, que toma el valor unidad en la banda, y cero en el resto (figura 4-3). Por ello cuando cualquier otra función se multiplica por la función filtro, se anula por completo fuera de la banda de paso, y se reproduce sin cambio alguno para los valores dentro de la banda.

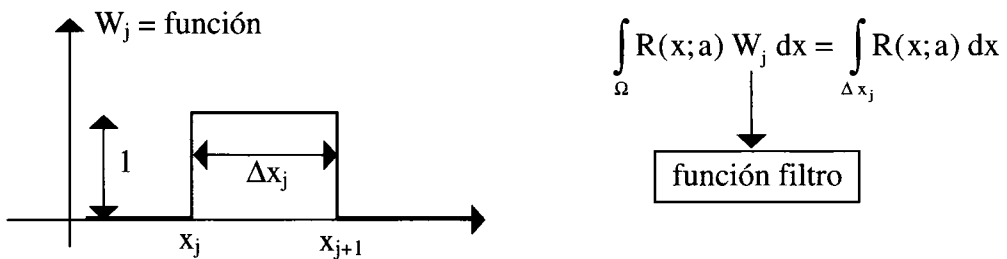


Figura 4-3: Función filtro

En el ejemplo que estamos considerando, elegimos dos subdominios iguales de modo que:

$$\Delta x_1 : 1 < x < 1.5 \quad \Delta x_2 : 1.5 < x < 2$$

Aplicando (4.29) a cada uno de los subdominios:

$$j = 1 \Rightarrow \int_1^{1.5} \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0 \quad (4.30)$$

$$j = 2 \Rightarrow \int_{1.5}^2 \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0$$

resolviendo las integrales, se plantea el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{8}a_2 &= \frac{19}{24} \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{8}a_2 &= \frac{19}{24} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 2.5417 \\ a_2 &= -0.4259 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Finalmente al sustituir estos coeficientes, obtenemos  $\hat{u}(x)$ ,  $\hat{\tau}(x)$ , y  $R(x;a)$ . Si consideramos las representaciones gráficas:

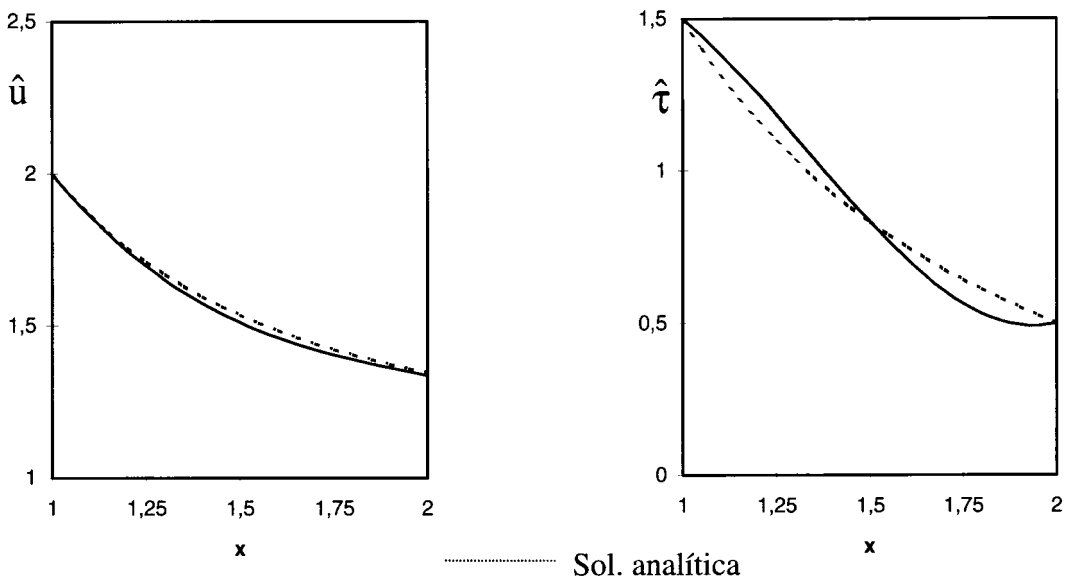


Figura 4-4: Solución analítica y aproximada por el método de subdominios

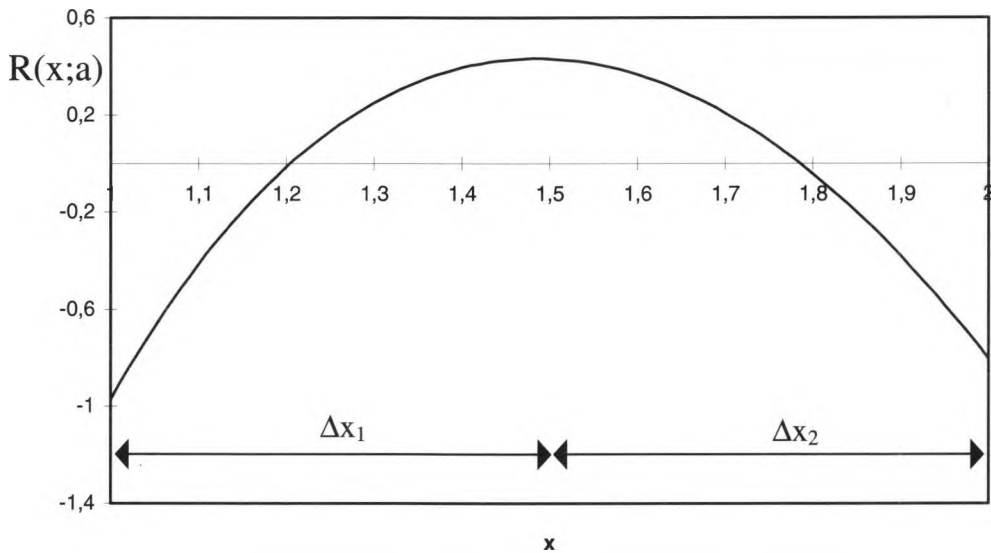


Figura 4-5: Función residuo para el método de subdominios

En este ejemplo, el método de subdominios arroja una mejor aproximación que el método de colocación. Podemos ver que se siguen cumpliendo las condiciones de contorno, ya que las funciones de ensayo no han variado. Lo que se ha modificado ha sido el criterio para calcular los coeficientes ajustables. En este caso el promedio de la función residuo en cada uno de los subdominios ( $\Delta x_1$  y  $\Delta x_2$ ) se ha forzado a cero. Al

sustituir los coeficientes (4.31) en la expresión general (4.21), resulta la función residuo que se ha ploteado en la figura 4-5.

• **Método de Mínimos Cuadrados**

Comencemos recordando que una vez encontradas las funciones de ensayo (como funciones de interpolación), la función residuo, dependerá de los coeficientes ajustables. Lo mismo se podrá decir de la integral de dicha función sobre el dominio, que equivaldría al área encerrada. Se podría pensar en adoptar como criterio la minimización del área encerrada, sin embargo eso sólo sería útil si la función residuo tomase solamente valores positivos, o valores negativos. Si fluctúa (que es lo más general) entonces resulta más interesante minimizar (con respecto a cada coeficiente  $a_j$ ) la integral del cuadrado de la función residuo sobre todo el dominio. La condición necesaria para minimizar exige que cada una de las derivadas parciales con respecto a cada coeficiente  $a_j$  sea cero, por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_{\Omega} R^2(x; a) d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.32)$$

Al introducir la derivada parcial en el integrando, resulta:

$$\int_{\Omega} R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_j} d\Omega = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (4.33)$$

Si comparamos (4.22) con (4.33), la función de ponderación en este método resulta ser:

$$W_j = \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_j} \quad (4.34)$$

En el ejemplo propuesto, las dos funciones de ponderación son:

$$W_1 = \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_1} = 4(x-1) \quad (4.35)$$

$$W_2 = \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_2} = 3(3x^2 - 4)$$

y las ecuaciones en términos de residuos ponderados quedan:



$$j=1 \Rightarrow \int_1^2 \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 4(x-1) dx = 0 \quad (4.36)$$

$$j=2 \Rightarrow \int_1^2 \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 3(3x^2-4) dx = 0$$

lo cual conduce al sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{16}{3}a_1 + 27a_2 &= 8\ln 2 - \frac{7}{2} \\ 27a_1 + \frac{711}{8}a_2 &= \frac{33}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 2.34155 \\ a_2 &= -0.3816 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalmente al sustituir estos coeficientes, obtenemos  $\hat{u}(x)$ ,  $\hat{\tau}(x)$ , y  $R(x;a)$ . Si consideramos las representaciones gráficas:

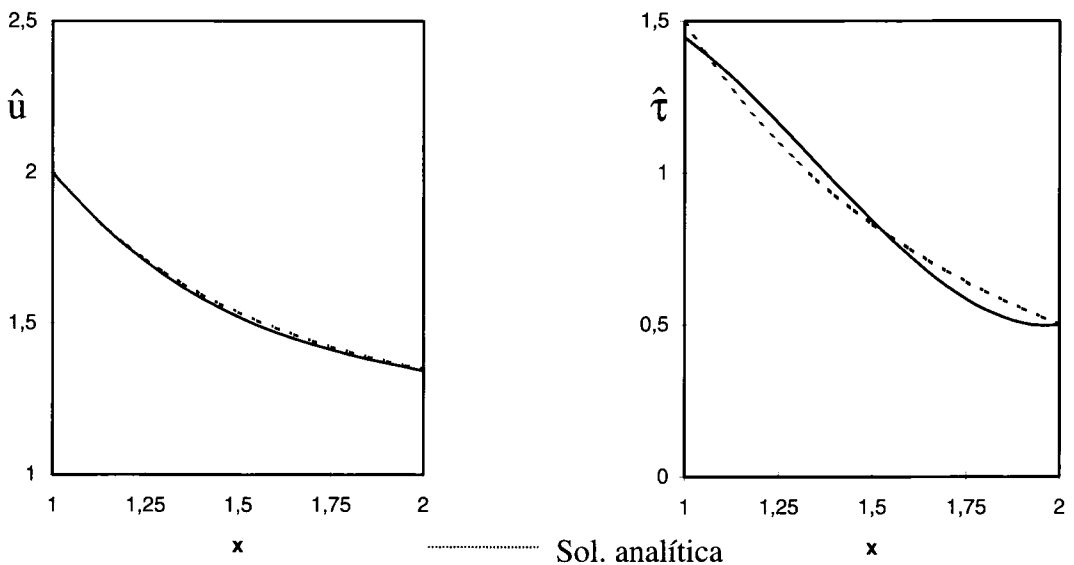


Figura 4-6: Solución analítica y aproximada por el método de mínimos cuadrados

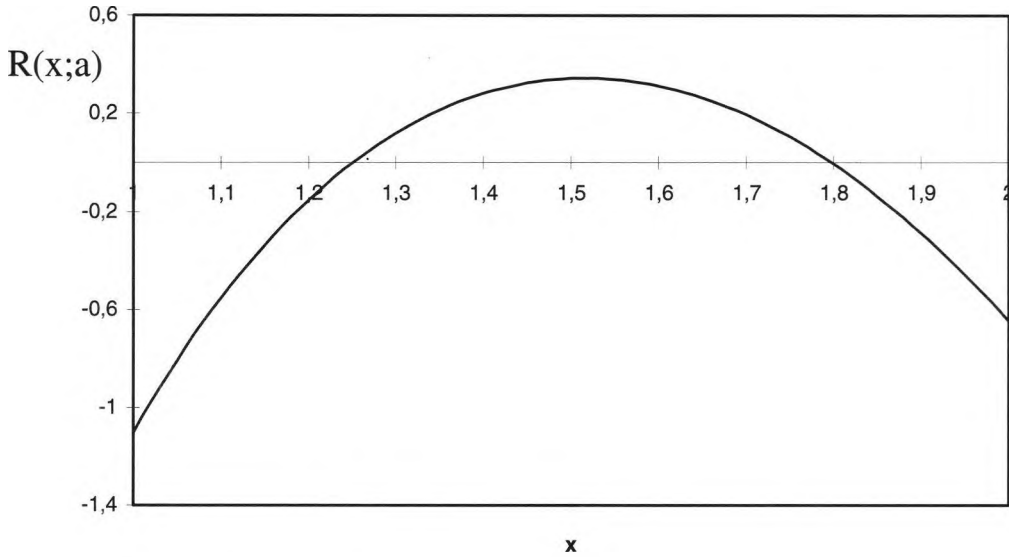


Figura 4-7: Función residuo para el método de mínimos cuadrados

• **Método de Galerkin**

En este método se propone que las funciones de ponderación sean las propias funciones de ensayo  $\Phi_j$ . Como éstas funciones están definidas en todo el dominio del problema, las integrales de los residuos ponderados quedan extendidas a todo el dominio  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} R(x;a) \Phi_j(x) d\Omega = 0$$

Si tenemos en cuenta la expresión general de la solución aproximada  $\hat{u}$ , es decir (4.4), podemos ver que en este caso la función de ponderación  $W_j$  se puede interpretar como:

$$W_j = \Phi_j = \frac{\partial \hat{u}}{\partial a_j}$$

Así pues, en los dos últimos métodos, el significado de la función de ponderación está dado por una derivada parcial (o un coeficiente de sensibilidad) con respecto al coeficiente  $a_j$ . En el método de mínimos cuadrados se considera la derivada parcial de la función residuo, y en el de Galerkin la derivada parcial de la función aproximada. En el ejemplo propuesto, las dos funciones de ponderación son:

$$W_1 = \Phi_1 = (x-1)(x-3)$$

$$W_2 = \Phi_2 = (x-1)(x^2 + x - 11)$$

y las ecuaciones en términos de residuos ponderados quedan:

$$j=1 \Rightarrow \int_1^2 \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) (x-1)(x-3) dx = 0 \quad (4.36)$$

$$j=2 \Rightarrow \int_1^2 \left( -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) (x-1)(x^2+x-11) dx = 0$$

lo cual conduce al sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{5}{3}a_1 - \frac{41}{5}a_2 &= 8 \ln 2 \\ -\frac{41}{5}a_1 - \frac{81}{2}a_2 &= \frac{211}{16} - 24 \ln 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= 2.1378 \\ a_2 &= -0.3477 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalmente al sustituir estos coeficientes, obtenemos  $\hat{u}(x)$ ,  $\hat{\tau}(x)$ , y  $R(x;a)$ . Si consideramos las representaciones gráficas:

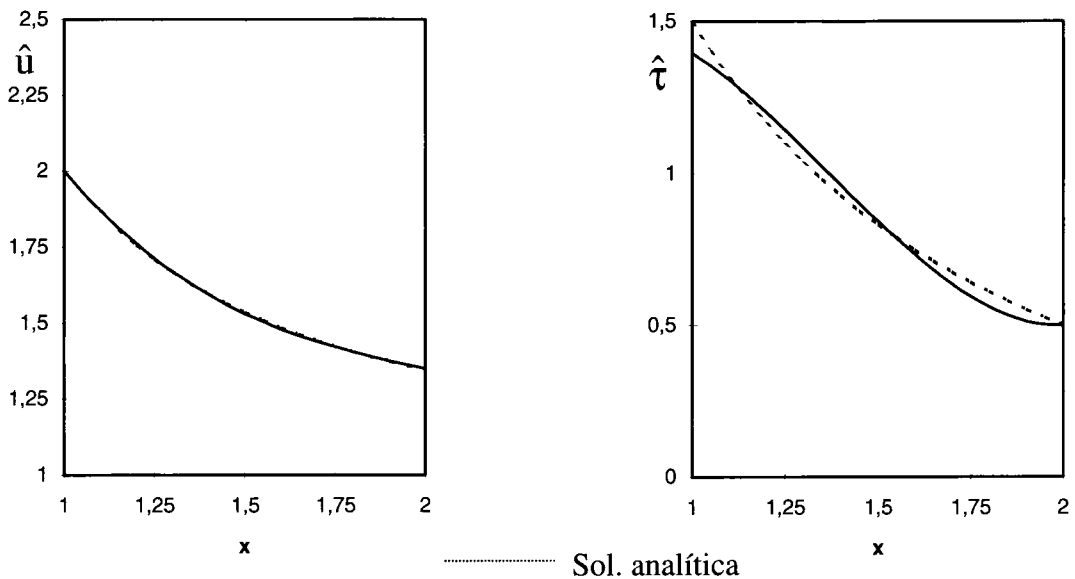


Figura 4-8: Solución analítica y aproximada por el método de Galerkin

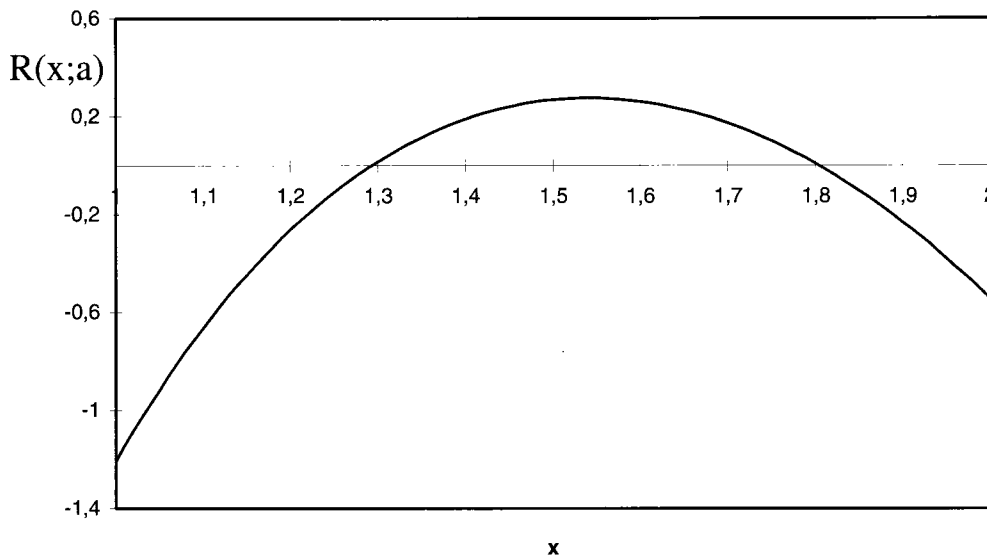


Figura 4-9: Función residuo para el método de Galerkin

Por último vamos a comprobar que el método de los residuos ponderados, según lo establecido en (4.9), converge hacia la solución exacta al aumentar el número de funciones  $\Phi_j$  del conjunto completo. Hasta ahora habíamos considerado una aproximación de grado 3. A continuación llegaremos hasta el grado 4, es decir proponemos una solución de ensayo del tipo:

$$\hat{u}(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4$$

al obligar a cumplir las condiciones de contorno (4.12) y (4.13), y análogamente a la aproximación de grado 3, se llega a:

$$\hat{u}(x; a) = \Phi_0(x) + a_1\Phi_1(x) + a_2\Phi_2(x) + a_3\Phi_3(x) \quad (4.38)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= 2 - \frac{1}{4}(x-1) & \Phi_1(x) &= (x^2 - 1) - 4(x-1) \\ \Phi_2(x) &= (x^3 - 1) - 12(x-1) & \Phi_3(x) &= (x^4 - 1) - 32(x-1) \end{aligned}$$

sustituyendo (4.38) en la ecuación diferencial (4.11) resulta:

$$R(x; a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 + 16(x^3 - 2)a_3 - \frac{2}{x^2} \quad (4.39)$$

Si adoptamos el método de colocación por puntos, se plantean tres ecuaciones con tres incógnitas cuyas soluciones son:

$$a_1 = 5.768 \quad a_2 = -1.959 \quad a_3 = 0.262 \quad (4.40)$$

Para estos valores la función residuo (figura 4-10) debe ser una función más próxima a cero que la de la figura (4-2). En trazo continuo se indica la función residuo correspondiente a la aproximación de grado 3, y en trazo discontinuo la correspondiente a la aproximación de grado 4.

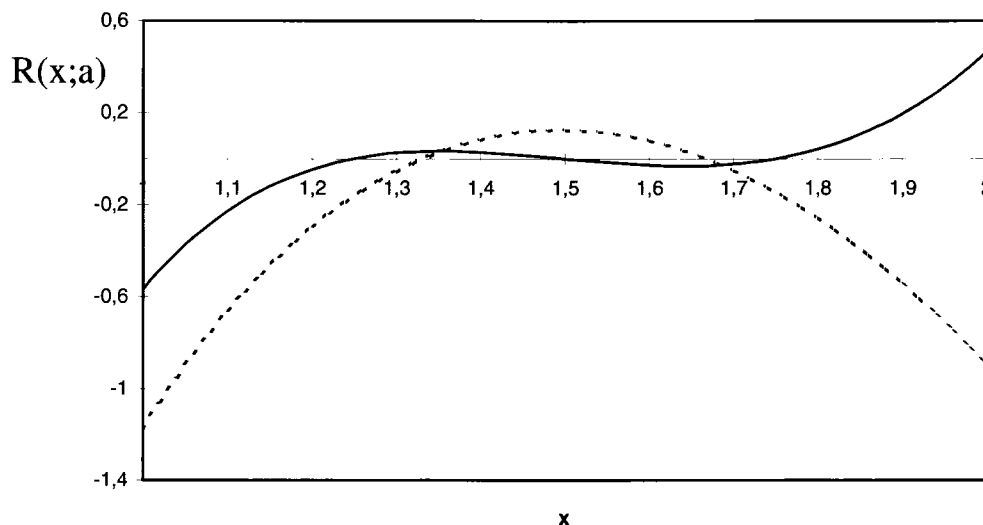


Figura 4-10: Función residuo para el método de colocación: grado 4 (línea continua), grado 3 (línea discontinua)

# TEMA 5: PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DEL M.E.F

## 5.1 Formulación débil

Una vez considerados los métodos de residuos ponderados, en este tema nos centraremos en el método de Galerkin y su posterior extensión al M.E.F. Por otro lado fijaremos nuestra atención en el problema que plantea un sólido en conducción, en principio en régimen estacionario. Para ello haremos referencia a un sólido de geometría arbitraria (figura 1-5), cuya formulación diferencial se podrá describir de la siguiente manera:

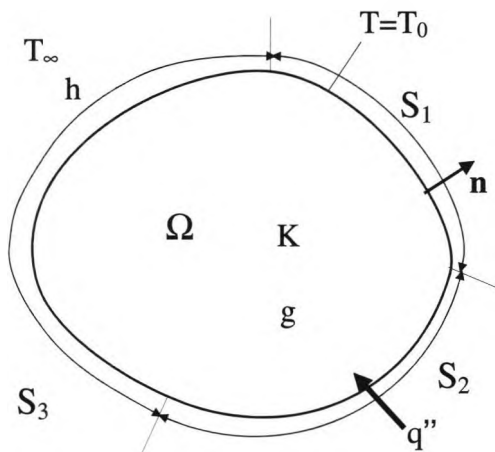


Figura 5-1: Sólido en conducción

El dominio del cuerpo en conducción se notará por  $\Omega$ , y la función temperatura por  $T$ . Si suponemos que la conductividad es constante, la ecuación diferencial que gobierna el problema es la llamada ecuación de Poisson:

$$K\nabla^2 T + g = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.1)$$

En caso de no existir generación de calor la anterior se reduce a la conocida ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.2)$$

En cuanto a las condiciones que afectan al contorno  $S$ , lo consideramos subdividido en tres posibles partes.  $S_1$  representa la parte del contorno afectada (si la hubiere) por condiciones esenciales (o de tipo Dirichlet), es decir la parte del contorno donde la temperatura se impone a un valor dado  $T_0$ :

$$T - T_0 = 0 \quad \text{en } S_1 \quad (5.3)$$

$S_2$  representa la parte del contorno afectada (si la hubiere) por condiciones naturales (o de tipo Newman), es decir la parte del contorno donde la el flujo de calor se impone a un valor dado:

$$K \frac{\partial T}{\partial n} - q'' = 0 \quad \text{en } S_2 \quad (5.4)$$

En el caso particular de que  $q''=0$ , entonces el contorno estaría aislado, por lo que la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{en } S_2 \quad (5.5)$$

Por último,  $S_3$  representa la parte del contorno afectada (si la hubiere) por condiciones naturales pero de tipo mixto, es decir la parte del contorno donde se transfiere calor por convección a un fluido a temperatura  $T_\infty$ , con coeficiente  $h$ :

$$K \frac{\partial T}{\partial n} - h(T_\infty - T) = 0 \quad \text{en } S_3 \quad (5.6)$$

Una vez definido el problema, trataremos de resolverlo por el método de Galerkin, y luego por el M.E.F. Conviene tener presente que en esencia el M.E.F. cabe interpretarlo como una extensión del método de Galerkin (o del método variacional), en el que se ha introducido la discretización. Para que la discretización resulte ventajosa, las funciones de ensayo (que se definen por trozos o elementos finitos) deben ser relativamente sencillas, pues de no ser así, la manipulación de muchas funciones (varias por cada elemento) y a su vez complejas no compensaría el esfuerzo. Con esto queremos decir que aunque tomemos el método de Galerkin como punto de partida, conviene introducir consideraciones y transformaciones matemáticas, que tiendan a facilitar la tarea que posteriormente acarrea el esquema discreto.

En el tema anterior se resolvió un problema (unidimensional) por el método de Galerkin, de modo que las funciones de forma no verificaban la ecuación diferencial (generando el correspondiente residuo en  $\Omega$ ), pero si satisfacían las condiciones de contorno. Si pensamos en un problema bidimensional (o tridimensional), con una geometría arbitraria (como la indicada en la figura 5-1), es evidente que la tarea de elección de funciones de ensayo  $\Phi_j$  que satisfagan las condiciones impuestas en  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ , es ya de por sí bastante compleja. Una opción intermedia y ventajosa, es la que se limita a exigir a las funciones de ensayo el cumplimiento de satisfacer únicamente las condiciones de contorno esenciales. Sin embargo esto último implica introducir nuevos residuos (en  $S_2$  y  $S_3$ ) por no satisfacer las condiciones de contorno naturales.

Si llamamos  $\hat{T}$  a la solución aproximada que satisfaga las condiciones de contorno esenciales (5.4), entonces al sustituirla en la ecuación diferencial (5.1), y en las condiciones de contorno naturales (5.4) y (5.6) se crearán las siguientes funciones residuo:

$$R = g + K\nabla^2 \hat{T} \quad \text{en } \Omega \quad (5.7)$$

$$R_2 = K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - q'' \quad \text{en } S_2 \quad (5.8)$$

$$R_3 = K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} - h(T_\infty - \hat{T}) \quad \text{en } S_3 \quad (5.9)$$

La forma integral equivalente ahora se expresa:

$$\int_{\Omega} W(g + K\nabla^2 T) d\Omega - \int_{S_2} W \left( K \frac{\partial T}{\partial n} - q'' \right) dS - \int_{S_3} W \left( K \frac{\partial T}{\partial n} - h(T_\infty - T) \right) dS = 0 \quad (5.10)$$

Puesto que en (5.10) figura la solución exacta  $T$ , la relación se cumplirá rigurosamente con independencia de la función de ponderación  $W$  elegida. Si sustituimos  $T$  por la solución aproximada  $\hat{T}$ , entonces los paréntesis se han de sustituir por las funciones residuo.

$$\int_{\Omega} W_j R \, d\Omega - \int_{S_2} W_j R_2 \, dS - \int_{S_2} W_j R_3 \, dS = 0 \quad (5.11)$$

Realmente la ecuación de residuos ponderados está forzada a cero. Esto nos proporcionará una ecuación para determinar los coeficientes ajustables, por ello necesitamos tantas funciones de ponderación como coeficientes.

Es decir, se plantea una ponderación de residuos, no solo del dominio, sino también de los contornos, por tanto se complica la tarea de ponderación de errores, aunque se facilita la elección de las funciones de ensayo. Con respecto a este último punto, cabe todavía dar un paso más. Al igual que en el método de separación de variables, nos interesaremos por las condiciones esenciales en la forma homogénea. Al objeto de *normalizar* y facilitar la selección de las funciones de ensayo  $\Phi_j$ , estas funciones se eligen del conjunto completo de funciones que satisfacen las condiciones de contorno esenciales pero *en su forma homogénea*. Bajo esta consideración, la solución aproximada se elige de la forma:

$$\hat{T} = \Psi_0(\mathbf{r}) + \sum a_i \Phi_i(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega \quad (5.12)$$

donde la función  $\Psi_0$ , además de ser integrable en  $\Omega$ , *satisface la parte no homogénea* de las condiciones de contorno esenciales, es decir,

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = T_0 \quad \forall \mathbf{r} \in S_1 \quad (5.13)$$

Las funciones linealmente independientes  $\Phi_j$  satisfacen la condición *en su forma homogénea*, es decir:

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in S_1 \text{ y } \forall j \quad (5.14)$$

De esta forma, y con independencia de la parte no homogénea, diferente para cada problema en particular, podemos hacer la misma elección de  $W_j$ , que en el método de Galerkin coincide con  $\Phi_j$ :

$$W_j = \frac{\partial \hat{T}}{\partial a_j} = \Phi_j \quad (5.15)$$

a la vez que con  $\Psi_0$  aseguramos que el residuo  $R_1$  sea cero en  $S_1$ . En el ejemplo del tema anterior ocurre lo que se discute en esta sección.



A continuación vamos a transformar la forma integral (5.11) en otra equivalente más ventajosa, ya que nos va a permitir reducir los requisitos mínimos de continuidad de las funciones de ensayo. La transformación matemática que buscamos se obtiene de aplicar la primera fórmula de Green (o teorema de integración por partes). Expresado en forma genérica a dos funciones definidas e integrables en un dominio  $\Omega$ , con un contorno  $S$ , el teorema de Green nos dice que:

$$\int_{\Omega} \Phi \nabla^2 \Psi \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi \, d\Omega + \int_S \Phi \nabla \Psi \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.16)$$

donde  $\mathbf{n}$  es un unitario normal al contorno y hacia fuera. Se observa que la fórmula de Green iguala una integral de dominio, en la que en el integrando figura un operador diferencial sobre  $\hat{T}$  de orden dos, con otra integral de dominio, donde el orden del operador sobre  $\hat{T}$  se ha reducido a uno, sumada a otra integral de contorno. Veremos a continuación, que las integrales que figuran en la derecha de la igualdad nos resultarán más convenientes.

En nuestro problema aplicaremos el teorema de Green a la integral del residuo  $R$  sobre  $\Omega$ , que incluye al operador laplaciano (de orden dos). Al aplicar (5.16) a nuestro problema bastará con sustituir:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow W_j = \Phi_j \\ \Psi &\rightarrow \hat{T} \end{aligned}$$

quedando:

$$\int_{\Omega} K(\nabla^2 \hat{T}) \Phi_j \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \cdot K \nabla \hat{T} \, d\Omega + \int_S \Phi_j K \nabla \hat{T} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.17)$$

si tenemos en cuenta que:

$$\nabla \hat{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial n}$$

la expresión (5.17) queda como:

$$\int_{\Omega} K(\nabla^2 \hat{T}) \Phi_j \, d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \cdot K \nabla \hat{T} \, d\Omega + \int_S \Phi_j K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} \, dS \quad (5.18)$$

a continuación, en primer lugar, sustituimos (5.18) en la expresión general (5.11) (en la cual se ha de sustituir  $R$ ,  $R_2$  y  $R_3$ , por las expresiones (5.7-9) respectivamente), en segundo lugar, sustituimos también la integral extendida al contorno  $S$  por la suma de las correspondientes integrales extendidas a  $S_1$ ,  $S_2$ , y  $S_3$ , y en tercer lugar tenemos presente que la integral en  $S_1$  es nula puesto que en dicho contorno  $\Phi_j$  se hace igual a cero (como indica (5.14)). Teniendo en cuenta todo esto y tras simplificar se llega a:

$$-\int_{\Omega} \nabla \Phi_j K \nabla \hat{T} d\Omega + \int_{\Omega} \Phi_j g d\Omega + \int_{S_2} \Phi_j q'' dS + \int_{S_3} \Phi_j h (T_{\infty} - \hat{T}) dS = 0$$

multiplicando todo por (-1), se llega finalmente a:

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_j K \nabla \hat{T} d\Omega - \int_{\Omega} \Phi_j g d\Omega - \int_{S_2} \Phi_j q'' dS - \int_{S_3} \Phi_j h (T_{\infty} - \hat{T}) dS = 0 \quad (5.19)$$

A esta forma integral, totalmente equivalente a la inicial (5.11), se denomina *formulación débil*. Como consecuencia de la integración por partes, en la forma integral débil figuran operadores con derivadas de menor orden (orden uno) de los que presenta la forma integral de partida (orden dos). Esto supone que las funciones de prueba pueden ser más simples y, además, pueden pertenecer a la clase de continuidad  $C^0$ . Por lo tanto estaría permitido una definición de  $\Phi_j$  de forma parcelada sin tener forzosamente que preocuparnos de garantizar la continuidad de las primeras derivadas. Aproximaciones lineales o cuadráticas como las de la figura 5-2, no podrían usarse bajo la forma integral (5.11), ya que una discontinuidad o salto finito en la primera derivada hace que la segunda derivada se dispare a un valor infinito, haciéndose singular la integral. Sin embargo, esa discontinuidad no ocasiona ninguna anomalía en la evaluación de las integrales que figuran en la forma débil.

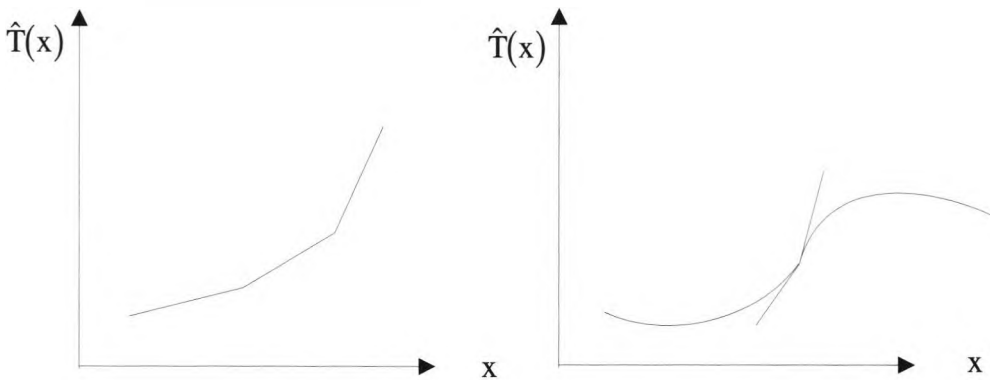


Figura 5-2: Dos tipos de aproximaciones  $C^0$

La ecuación (5.19) se va planteando con cada una de las funciones de ensayo  $\Phi_j$ , desde  $j=1$  hasta  $j=n$ , lo cual conduce al planteamiento de un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas del tipo  $[A]a = b$ , siendo  $a$  el vector de incógnitas, en este caso los  $n$  coeficientes ajustables que figuran en la aproximación (5.12).

Al objeto de estructurar posteriores desarrollos, la ecuación (5.19) la podemos presentar bajo la siguiente notación:

$$I_K + I_g + I_{q''} + I_h = 0 \quad (5.20)$$

donde se representan cada una de las integrales relacionadas con: la conducción en el dominio ( $I_K$ ); la posible generación de calor en el dominio ( $I_g$ ); las posibles condiciones de contorno con flujo impuesto ( $I_{q''}$ ); y las posibles condiciones de contorno por convección ( $I_h$ ). Veamos con más detalle las contribuciones de cada una de estas integrales al sistema final de ecuaciones.

Si en  $I_K$  sustituimos  $\hat{T}$  por (5.12), resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi_j K \nabla \hat{T} d\Omega = \sum_{i=1}^n \left[ a_i \underbrace{\int_{\Omega} K \nabla \Phi_j \nabla \Phi_i d\Omega}_{K_{ji}=K_{ij}} \right] + \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \nabla \Psi_0 d\Omega \quad (5.21)$$

Al variar  $j$  desde 1 hasta  $n$ , resulta evidente que habrá una contribución a la matriz del sistema de la forma:  $[K] a$ , donde los elementos de la matriz (de  $n \times n$ ) verifican que  $K_{ij}=K_{ji}$ , por lo cual la matriz  $[K]$  es simétrica. Por otra parte las integrales en las que no figure  $\hat{T}$ , no aparece el vector de incógnitas  $a$ , eso supone que representan una contribución al vector de datos. Esto ocurre con la integral que contiene a  $\Psi_0$ , de modo que para función  $\Phi_j$  la contribución al vector  $b$  en la fila  $j$  será:

$$b_{Kj} = \int_{\Omega} \nabla \Phi_j \nabla \Psi_0 d\Omega \quad (5.22)$$

La integral de dominio  $I_g$  contribuirá al vector de datos. Para la función  $\Phi_j$  la contribución al vector  $b$  en la fila  $j$  será:

$$I_g = - \int_{\Omega} \Phi_j g d\Omega = b_{g,j} \quad (5.23)$$

La integral de contorno  $I_{q''}$  contribuirá al vector de datos. Para la función  $\Phi_j$  la contribución al vector  $b$  en la fila  $j$  será:

$$I_{q''} = - \int_{\Omega} \Phi_j q'' d\Omega = b_{q'',j} \quad (5.24)$$

La integral  $I_h$  contribuirá tanto a la matriz del sistema como al vector de datos. Para la función  $\Phi_j$ , tendremos:

$$I_h = - \int_{S_3} \Phi_j h (T_\infty - \hat{T}) dS = \sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\int_{S_3} h \Phi_i \Phi_j ds}_{H_{ij}=H_{ji}} - \underbrace{\int_{S_3} h \Phi_j T_\infty dS}_{b_{hj}} \quad (5.25)$$

Al variar  $j$  desde 1 hasta  $n$ , resulta evidente que habrá una contribución a la matriz del sistema de la forma:  $[\mathbf{H}]\mathbf{a}$ , donde los elementos de la matriz (de  $n \times n$ ) verifican que  $H_{ij}=H_{ji}$ , por lo cual la matriz  $[\mathbf{H}]$  es simétrica. La contribución al vector  $\mathbf{b}$  en la fila  $j$  será la integral  $b_{hj}$  indicada en (5.25).

Así pues, de:

$$I_K + I_g + I_{q''} + I_h = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n \quad (5.26)$$

se llega a:

$$[\mathbf{A}]\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (5.27)$$

siendo:

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{K}] + [\mathbf{H}] \quad (5.28)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_K + \mathbf{b}_g + \mathbf{b}_{q''} + \mathbf{b}_h$$

Como la matriz  $[\mathbf{A}]$  es suma de dos matrices simétricas, ésta también lo será. Una vez evaluadas las integrales (de dominio o de contorno), se obtendrá el vector de coeficientes ajustables  $\mathbf{a}$ , lo cual nos permitirá mediante la expresión (5.12) obtener la temperatura aproximada en cualquier punto del dominio.

## 5.2 Concepto de discretización por elementos finitos

El Método de Elementos Finitos (M.E.F.) nació (1956) como un método específico para el cálculo de estructuras [10], sin embargo en poco tiempo alcanzó un notable desarrollo, aplicándose hoy día en áreas muy diversas como mecánica de sólidos, mecánica de fluidos, transmisión de calor, electromagnetismo, etc.. En esta línea de desarrollo, Zienkiewick [11] fue el primero que planteó una formulación por elementos finitos para problemas de campo.

En el M.E.F. se pretende aplicar los métodos clásicos anteriormente considerados (Galerkin y/o variacional), pero con una importante y fundamental novedad, que consiste en que las funciones de prueba  $\Phi_j$  se definen en forma parcelada en trozos o subdominios denominados elementos finitos. Dichas funciones serían nulas

en todo el dominio excepto en el subdominio donde están definidas. Esta técnica facilita la elección de dichas funciones, lográndose un método más potente y sistemático que los clásicos, pues entre otras ventajas, la mayor o menor complejidad de la geometría no afecta a la forma general de proceder.

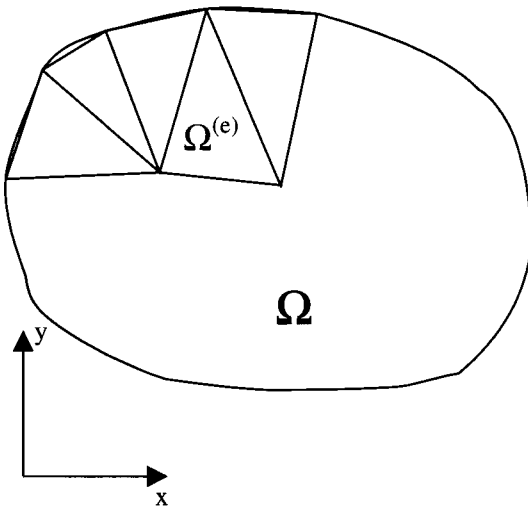


Figura 5-3:

La geometría de cada elemento queda definido por un conjunto de *nodos*. En los problemas unidimensionales, el elemento ha de quedar definido por dos nodos como mínimo, en los problemas bidimensionales (Fig 5.3) el elemento queda definido por tres nodos como mínimo, etc. La unión de todos los elementos finitos define una *malla*. Adecuando en cada caso el tamaño de los elementos, la geometría de la malla puede aproximarse con muy poco error a la geometría del modelo.

Al igual que en los métodos clásicos, el objetivo será determinar la temperatura  $\hat{T}(\mathbf{r})$  en  $\Omega$  de forma aproximada. La discretización induce a asociar los parámetros ajustables  $a_j$ , con los valores de la función potencial en los nodos que pertenecen a cada elemento. De este modo al determinar los valores de  $a_j$ , quedaría determinada la función potencial en cada elemento, y por extensión, en la malla. Bajo este punto de vista, las funciones de ensayo que se utilizan para definir la solución aproximada elemental, desempeñan el papel de funciones de interpolación. En el contexto de los E.F., las funciones ensayo reciben el nombre de *funciones de forma*.

La discretización por elementos finitos, supone que la solución aproximada del problema  $\hat{T}$  se puede definir como:

$$\hat{T}(\mathbf{r}) = \sum \hat{T}^{(e)}(\mathbf{r}) \quad (5.29)$$

de modo que para un elemento  $\Omega^{(e)}$ ,  $\hat{T}^{(e)}$  se define:

$$\hat{T}^{(e)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin \Omega^{(e)} \\ \sum_{i=1}^{n_e} N_i^{(e)}(\mathbf{r}) a_i & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega^{(e)} \end{cases} \quad (5.30)$$

donde  $n_e$  es número de nodos que tiene el elemento  $\Omega^{(e)}$ . En el problema de conducción de calor,  $a_i$  representa la *temperatura en los nodos del elemento*. Las funciones de forma  $N_i^{(e)}$ , han de escogerse de modo tal que al sustituir en la ecuación (5.30) las

coordenadas de los nodos, devuelvan las correspondientes temperaturas nodales. Por tanto son funciones de interpolación que han de verificar:

$$N_i(r_j) = \delta_{ij} \quad \text{donde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.31)$$

con esta elección, se garantiza la continuidad del potencial de un elemento al contiguo, y el residuo en las condiciones de contorno esenciales, obviamente es nulo. La imposición de estas condiciones se traduce simplemente en una disminución del número de incógnitas del sistema global de ecuaciones.

Las funciones de forma, determinan el tipo de función con que se supone que varía el potencial en el dominio elemental  $\Omega^{(e)}$ . Si por ejemplo, tratamos de discretizar un problema unidimensional, y el elemento se define con sólo dos nodos, una posibilidad compatible con (5.31) es que las funciones de forma en el elemento sean las rectas que se muestran en la Fig. 5-4. Con estas funciones de forma es evidente que en cada elemento (e) se está suponiendo una dependencia lineal del potencial con respecto a la coordenada  $x$ .

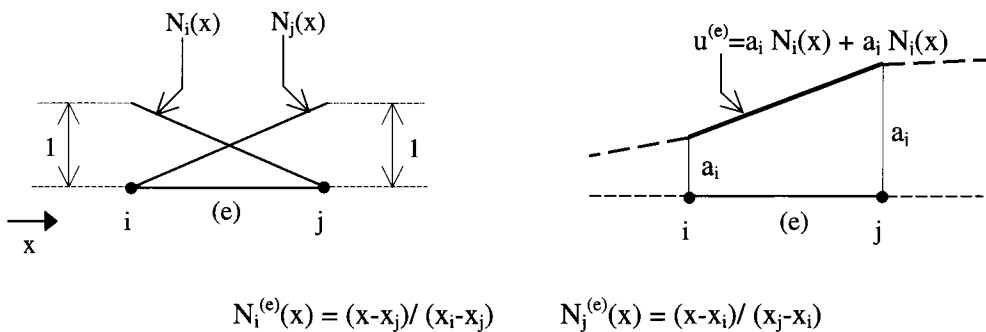


Figura 5-4: Funciones de forma para un elemento lineal unidimensional

Los criterios que en los métodos clásicos se aplicaban a las funciones de ensayo definidas en  $\Omega$ , se aplican en el M.E.F. para todos y cada uno de los subdominios  $\Omega^{(e)}$ . Para que este proceso de extensión de los métodos clásicos sea viable, las funciones de forma han de cumplir unos *requisitos de convergencia y de compatibilidad o continuidad*. Una vez superados estos requisitos (que comentaremos a continuación), la solución aproximada mejorará a medida que aumente el número de elementos, y se podrá afirmar que las formas integrales, que en los métodos clásicos sólo tenían sentido en el dominio, ahora representan la suma de las correspondientes definidas sobre cada uno de los subdominios o elementos, es decir:

$$\int_{\Omega} ( ) d\Omega = \sum \int_{\Omega^{(e)}} ( ) d\Omega \quad (5.32)$$

$$\int_{\Gamma} ( ) d\Gamma = \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} ( ) d\Gamma \quad (5.33)$$

lo cual nos conducirá a plantear un sistema de ecuaciones empleando las técnicas de ensamblaje típicas de los sistemas discretos.

$$[\mathbf{A}]\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$$

siendo:

$$[\mathbf{A}] = \sum [\mathbf{A}]^{(e)}$$

$$\mathbf{b} = \sum \mathbf{b}^{(e)}$$

Este sistema de ecuaciones se verá reducido en el número de nodos afectados por las condiciones de contorno esenciales.

Podemos concluir diciendo que la extensión del método de Galerkin (en su forma débil) al método de elementos finitos implica novedades en los siguientes conceptos:

- Discretización: La función incógnita se define de forma parcelada a partir de las funciones de forma.
- Las funciones de forma  $N_j^{(e)}$  en  $\Omega^{(e)}$ , se corresponden con las funciones de ensayo  $\Phi_j$  en  $\Omega$ .
- El conjunto  $a_i$ , que en los métodos clásicos son los coeficientes ajustables, en el M.E.F. pasa a adquirir el significado de temperaturas nodales, los cuales determinan la temperatura local en el elemento, y consecuentemente en la malla.
- Para que el esquema discreto tenga éxito, las funciones de forma han de verificar ciertas condiciones de convergencia y compatibilidad.

### 5.3 Planteamiento general

Comenzaremos por considerar las condiciones de convergencia y compatibilidad que han de cumplir las funciones de forma, luego estudiaremos las funciones de forma (polinómicas) más sencillas que verifican estos requisitos, y finalmente consideraremos el proceso de ensamblaje de las ecuaciones por elementos finitos de un problema bidimensional en conducción, en los términos generales que se indicó el apartado 5.1 y en la figura 5-1.

#### *FUNCIONES DE FORMA: CONDICIONES DE CONVERGENCIA Y COMPATIBILIDAD*

Las condiciones de convergencia y compatibilidad se expresan haciendo alusión al orden de los operadores que figuran en la ecuación diferencial y en la forma integral débil. En general se puede plantear problemas en los que el orden del operador que

figura en la ecuación diferencial que gobierna el problema es  $2m$ , y tras integrar por partes  $m$  veces, se llega a una forma integral débil en la que figuran operadores cuyo orden es  $m$ . Para el problema de conducción de calor, y cualquier otro gobernado por la ecuación de Laplace, se tiene que  $m=1$ . Es decir sólo hace falta integrar por partes (o aplicar el teorema de Green) una vez, para llegar a la forma débil

*Condición de Desarrollo Completo:* La solución de ensayo en un elemento, y cualquiera de sus derivadas hasta la de orden  $m$  que figure en la forma integral, deberán alcanzar un valor constante en el dominio del elemento, a medida que el tamaño de éste tienda a cero.

*Condición de Continuidad:* Entre elementos deberá existir (como mínimo) continuidad tanto en la solución de ensayo, como en sus derivadas hasta el orden  $m-1$ . En otras palabras, la continuidad requerida para la solución aproximada le obliga a pertenecer a la clase  $C^{m-1}$  como mínimo.

La primera condición afecta al dominio de cada elemento, mientras que la segunda afecta a la continuidad mínima exigible en sus fronteras con otros elementos contiguos. Las funciones polinómicas satisfacen ambas condiciones, y son aceptadas universalmente como funciones de forma, no obstante los términos del desarrollo del polinomio no se pueden tomar arbitrariamente, sino que han de ser *polinomios que presenten un grado completo mínimo*. Si notamos por  $p$  el grado completo del polinomio, la condición de desarrollo completo puede expresarse simplemente afirmando que el grado completo del polinomio a usar en las funciones de forma ha de ser como mínimo igual a  $m$ , es decir  $p \geq m$ .

Tomando como ejemplo el problema de conducción de calor en el que  $m = 1$ , el elemento bidimensional más sencillo es el triangular. La aproximación local de la temperatura

en el elemento  $\Omega^{(e)}$  se obtendrá de una combinación de las temperaturas nodales del elemento ( $a_i$ ) con las funciones de forma, es decir:

$$\hat{T}^{(e)}(x,y) = \sum a_i N_i^{(e)}(x,y) \tag{5.34}$$

En este tipo de elemento, las funciones de forma adoptan la expresión:

$$N_i^{(e)}(x,y) = \frac{\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y}{2A} \tag{5.35}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i &= y_j - y_k \\ \gamma_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad A = 1/2 \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \equiv \text{Area del elemento}$$



Para llegar a estas expresiones, se parte de una más general en la que se suponga una dependencia lineal tanto con  $x$  como con  $y$ , es decir:

$$\hat{T}^{(e)}(x, y) = C_1^{(e)} + C_2^{(e)}x + C_3^{(e)}y \quad (5.36)$$

Si a cada nodo de cada elemento finito asociamos una temperatura nodal (en principio desconocida) de modo que:

$$\begin{aligned} \text{nodo } i: & a_i = T^{(e)}(x_i, y_i) \\ \text{nodo } j: & a_j = T^{(e)}(x_j, y_j) \\ \text{nodo } k: & a_k = T^{(e)}(x_k, y_k) \end{aligned}$$

Al obligar a cumplir las anteriores condiciones es evidente que se plantea:

$$\begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}^{(e)}$$

de donde:

$$\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix}$$

al invertir la matriz, se obtienen las expresiones algebraicas de las constantes. Sustituyendo las constantes, e identificando con (5.34), se obtiene finalmente (5.35). En la figura 5-5 se representa la función de forma asociada al nodo  $i$ , es decir  $N_i^{(e)}(x, y)$ , la cual debe cumplir la relación (5.31), es decir toma el valor unidad en el nodo asociado ( $i$ ) y cero en los demás. Las representaciones de las restantes funciones sería análoga.

Como se aprecia en (5.35), las funciones de forma son polinomios que contienen el desarrollo completo hasta el grado 1, lo cual se aprecia cómodamente en el conocido triángulo de Pascal. Como  $p=1$ , y tiene los términos estrictos en su desarrollo, cumple estrictamente la condición de desarrollo completo.

El elemento rectangular de la figura. 5-6 posee algo más de complejidad en sus funciones de forma, pues al estar definido por cuatro nodos, figura en su desarrollo el término  $xy$ , sin embargo al faltar los términos  $x^2$  e  $y^2$ , su grado completo sigue siendo 1. En este elemento las funciones de forma establecen una *interpolación bilineal*. Las funciones de forma, dadas por (5.37), se obtienen del producto de los polinomios de Lagrange para cada una de las dimensiones  $x$  e  $y$ . De hecho, a partir de este elemento se deriva una familia de elementos de mayor complejidad, pero con la misma filosofía de interpolación, por lo que se conoce como "*familia lagrangiana*".

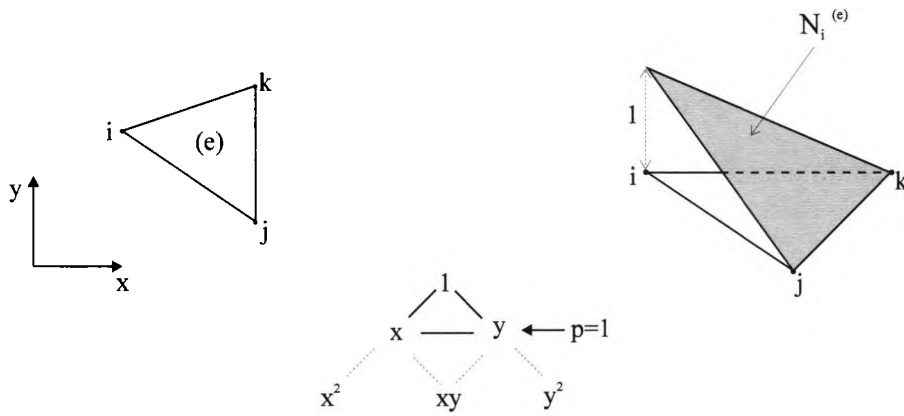


Figura 5-5: Elemento triangular lineal: Función de forma asociada al nodo i. Términos del desarrollo sobre el triángulo de Pascal

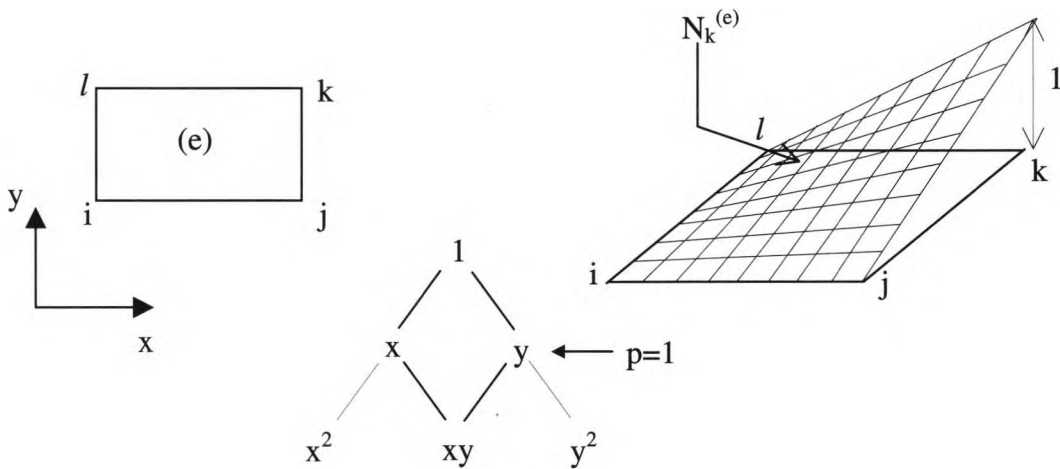


Figura 5-6: Elemento rectangular lineal: Función de forma asociada al nodo k. Términos del desarrollo sobre el triángulo de Pascal.

$$\begin{aligned}
 N_i^{(e)}(x, y) &= \frac{(x - x_j)(y - y_l)}{(x_i - x_j)(y_i - y_l)} & N_j^{(e)}(x, y) &= \frac{(x - x_i)(y - y_k)}{(x_j - x_i)(y_j - y_k)} \\
 N_k^{(e)}(x, y) &= \frac{(x - x_l)(y - y_j)}{(x_k - x_l)(y_k - y_j)} & N_l^{(e)}(x, y) &= \frac{(x - x_k)(y - y_i)}{(x_l - x_k)(y_l - y_i)}
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

Conviene resaltar que los elementos triangular y rectangular son combinables en una malla, ya que sus funciones de forma a lo largo de un lado común son idénticas. Basta tener presente que en un lado las funciones de forma quedan determinadas por las

coordenadas de los nodos que lo definen, por lo tanto son básicamente iguales a las del elemento unidimensional de la figura. 5-4, bastaría con cambiar la coordenada  $x$  por la coordenada del contorno del elemento.

A continuación trataremos la *condición de continuidad*. Para el problema de conducción de calor en el que  $m = 1$ , esta condición obliga a que las funciones de forma pertenezcan a la clase  $C^0$ . Esto supone que en las fronteras de los elementos únicamente se requiere que exista continuidad en la temperatura, no así en su primera derivada, que está asociada con el flujo. Por lo tanto, es suficiente con asignar a cada nodo un único grado de libertad, que sería la temperatura nodal. Obviamente, la numeración nodal no deberá hacer distinción por la pertenencia de un determinado nodo a un elemento o al contiguo, ya que en dicho nodo no hay discontinuidad en el potencial.

Para un problema bidimensional, el elemento que cumple estrictamente los requisitos mínimos impuestos por las dos condiciones consideradas, es el elemento triangular  $C^0$  de tres nodos. En principio, cabe pensar que para mejorar la solución el procedimiento sería emplear elementos cuyas funciones de forma superen lo establecido por ambas condiciones, sin embargo se suele evitar el empleo de elementos que superen el mínimo requisito de continuidad, en nuestro caso  $C^0$ , ya que la complejidad del elemento aumenta dramáticamente, sin ser requisito obligado para llegar a una solución aproximada. En otras palabras, no aprovecharíamos la ventaja de disponer de una *forma integral débil*. Basta considerar que el número de grados de libertad de un elemento bidimensional perteneciente a la clase  $C^1$ , es el triple del correspondiente a la clase  $C^0$ . Las estrategias usuales para mejorar la solución son:

- ( I ): Aumentar el número de elementos de la malla, con lo cual el “tamaño”  $h$  de cada elemento se hace menor. Este proceso se conoce como *refinamiento de malla* o también  *$h$ -refinement*. Su aplicación no necesariamente tiene que afectar a toda la malla, ya que lo usual es considerar refinamientos locales.
- ( II ): Aumento del grado del polinomio. Este aumento no se refiere necesariamente al grado completo, como ocurre al pasar de elementos triangulares a rectangulares. No obstante el grado completo  $p$  deberá ser  $p \geq m$ . Este proceso se conoce en la literatura como  *$p$ -refinement*.

## PROCESO DE ENSAMBLAJE

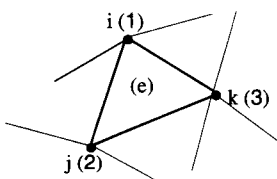


Figura 5-7

Para clarificar las notaciones de las ecuaciones que vamos a manejar, conviene en primer lugar distinguir dos numeraciones nodales equivalentes, que aplicaremos según el contexto al que hagamos referencia. En la figura 5-7, se representa un elemento triangular arbitrario. En el conjunto de elementos que forman la malla, los nodos del elemento aparecen numerados como  $i, j$  y  $k$ , no obstante al considerar los mismos nodos en el dominio exclusivamente local, los identificaremos con los números 1, 2 y 3 respectivamente.

Sabemos que la ecuación de Poisson (5.3) se ha de verificar en cualquier punto del dominio  $\Omega$ . Si en el subdominio  $\Omega^{(e)}$  sustituimos la solución exacta  $T$  por la aproximación local  $\hat{T}$ , se origina un residuo sobre dicho dominio. A continuación aplicaremos el método de Galerkin, considerando primero un elemento genérico y luego el conjunto de todos los elementos. Para ello forzamos a cero el residuo local, y puesto que consideramos el método de Galerkin, el residuo irá ponderando en la integral con las mismas funciones de forma  $N_j^{(e)}$  (las cuales sustituyen las funciones de ensayo  $\Phi_j$ ) que se proponen en la aproximación local (tantas como nodos tenga el elemento), por lo tanto tendremos:

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} (g + K \nabla^2 \hat{T}) d\Omega = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n_e \quad (5.38)$$

donde  $n_e$  es el número de nodos del elemento en el contexto local. Si queremos reducir el orden del operador, aplicamos la primera fórmula de Green (formulación débil) a la integral que contiene a dicho operador:

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} K \nabla^2 \hat{T} d\Omega = - \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_j^{(e)} K \nabla \hat{T} d\Omega + \int_{s^{(e)}} N_j^{(e)} K \nabla \hat{T} \mathbf{n} dS \quad (5.39)$$

sustituyendo en (5.38), y multiplicando todo por (-1) se llega a:

$$\underbrace{- \int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} g d\Omega}_{I_g^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_j^{(e)} K \nabla \hat{T} d\Omega}_{I_K^{(e)}} - \underbrace{\int_{s^{(e)}} N_j^{(e)} K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} dS}_{I_S^{(e)}} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, n_e \quad (5.40)$$

En la integral sobre el contorno del elemento de nuevo se ha tenido en cuenta que:

$$\nabla \hat{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \hat{T}}{\partial n}$$

La ecuación (5.40) es análoga a la que se obtuvo en el método clásico (5.19), salvo las diferencias ya comentadas entre el dominio global y el local.

Al sustituir  $\hat{T}$  por (5.34) en (5.40), al igual que en los métodos clásicos se obtiene un sistema de ecuaciones. Si el elemento fuese triangular, tendríamos en notación matricial un sistema de (3×3):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}^{(e)} + \begin{Bmatrix} b_{g1} \\ b_{g2} \\ b_{g3} \end{Bmatrix}^{(e)} + \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}^{(e)} = 0 \quad (5.41)$$

siendo:

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_i^{(e)} \mathbf{K} \nabla N_j^{(e)} d\Omega \quad (5.42)$$

$$b_{gj} = - \int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} g d\Omega \quad (5.43)$$

$$b_j = - \int_{S^{(e)}} N_j^{(e)} \mathbf{K} \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} dS \quad (5.44)$$

los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $a_3$ , representan las temperaturas nodales del elemento. La ecuación (5.41) no se debe resolver aún, pues  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $a_3$  en el contexto global son  $a_i$ ,  $a_j$  y  $a_k$ . Como esos nodos forman parte de los elementos contiguos, es evidente que no podemos ignorar su contribución en dichos elementos. Por tanto (5.41) representa exclusivamente la contribución del elemento (e). La contribución se aprecia más claramente al expresar las anteriores ecuaciones en las mismas dimensiones del sistema global. El sistema global de ecuaciones tendrá en principio tantas incógnitas como nodos (N) tenga la malla, aunque al imponer las condiciones esenciales se reduzca el número de grados de libertad. La definición parcelada de las funciones de forma y la condición de continuidad para el potencial en los nodos, permiten que las anteriores matrices puedan expresarse en dimensiones de  $N \times N$ ,  $N \times 1$  y  $N \times 1$  respectivamente. Para ello basta tener presente que en cada matriz elemental  $\mathbf{K}^{(e)}$  sólo deben figurar coeficientes no nulos en las filas y columnas correspondientes a los números asignados a los nodos del elemento. Análogamente ocurre con las filas no nulas de  $\mathbf{b}_g^{(e)}$ . Si los nodos del elemento triangular (en la malla) son I, J y K respectivamente, la estructura de estas matrices elementales sería: (sólo figuran los elementos no nulos).

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & K_{II} & \cdots & K_{IJ} & \cdots & K_{IK} & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & & K_{JJ} & \cdots & K_{JK} & \cdots \\ & & & & \ddots & \vdots & \\ \text{Sim.} & & & & & K_{KK} & \cdots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}^{(e)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila I} \\ \leftarrow \text{Fila J} \\ \leftarrow \text{Fila K} \end{array} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{b}_g^{(e)T} = [\cdots \quad b_{gI} \quad \cdots \quad b_{gJ} \quad \cdots \quad b_{gK} \quad \cdots]^{(e)} \quad (5.46)$$

El vector incógnita  $\mathbf{a}$ , igual para todas las ecuaciones elementales, será:

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad a_N] \quad (5.47)$$

Cada ecuación elemental resulta de minimizar el residuo en el subdominio del elemento. La ecuación global, suma de las elementales, resulta de minimizar el residuo en la malla. Al igual que en los métodos clásicos, las matrices elementales y la matriz global, son simétricas. Sin embargo, la discretización por elementos finitos implica un confinamiento de los elementos no nulos en forma de banda. El ancho de banda se verá influido por la numeración nodal empleada. La simetría y estructura en banda de los coeficientes no nulos repercute ventajosamente en el número de cálculos y en una notable disminución de memoria de almacenamiento, ya que únicamente se precisa almacenar los coeficientes que figuran dentro de la mitad superior del ancho de banda.

Para los elementos con lados “internos”, es decir, no situados en el contorno (como el indicado en la figura 5-8, con nodos I, J y K), la contribución de las integrales de contorno (5.44) al vector datos no tiene sentido considerarla pues, en el proceso de ensamblaje, se irían sumando coeficientes que representan a integrales iguales y opuestas. En efecto, si consideramos los elementos (e) y (f) de la figura 5-8, el lado  $\overline{IJ}$  es compartido por ambos elementos. Para lograr más simplicidad en la notación,  $q_{-n}$  representa el flujo de calor que entra por el contorno del elemento, es decir según el sentido opuesto al unitario  $\mathbf{n}$  (dirigido hacia afuera). Por lo tanto:

$$q_{-n} = K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n}$$

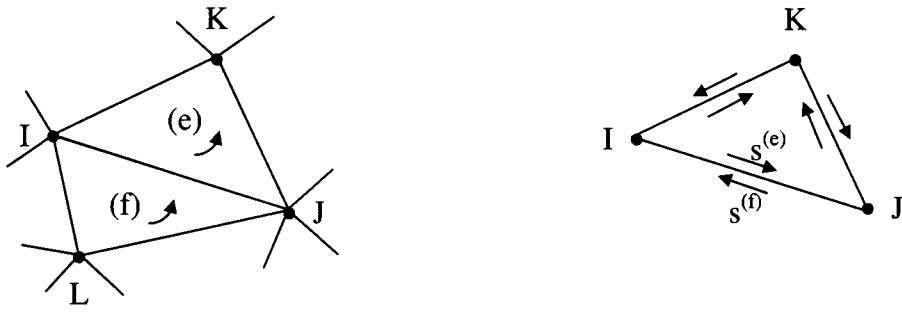


Figura 5-8: La contribución al vector de datos de los lados internos es nula.

Para el elemento (e), en la fila I del vector  $\mathbf{b}^{(e)}$  figurará la integral:

$$\int_{s^{(e)}} \hat{q}_{-n}^{(e)} N_I^{(e)} d\Gamma = \int_I^J \hat{q}_{-n}^{(e)} N_I^{(e)} ds^{(e)} + \underbrace{\int_J^K \hat{q}_{-n}^{(e)} N_I^{(e)} ds^{(e)}}_0 + \int_K^I \hat{q}_{-n}^{(e)} N_I^{(e)} ds^{(e)} \quad (5.48)$$

La integral a lo largo del lado  $\overline{JK}$  es nula, ya que en dicho lado la función de forma asociada al nodo I es nula, de acuerdo con lo expresado en la figura 5-5. No nos debe pasar por alto que el sentido de recorrido del contorno en todos los elementos debe ser el mismo, pues en todos ellos mantenemos el mismo criterio al aplicar los teoremas de integración por partes.

Por idéntico razonamiento, para el elemento contiguo (f), en la fila I de  $\mathbf{b}^{(f)}$  figurará la integral (no se incluye el término nulo):

$$\int_{s^{(f)}} \hat{q}_{-n}^{(f)} N_I^{(f)} d\Gamma = \int_I^L \hat{q}_{-n}^{(f)} N_I^{(f)} ds^{(f)} + \int_J^I \hat{q}_{-n}^{(f)} N_I^{(f)} ds^{(f)} \quad (5.49)$$

Al ensamblar las matrices elementales, se sumarán dichas integrales. Teniendo presente que:

- (I) El flujo normal que entra en el elemento (e) por el lado  $\overline{IJ}$  debe ser igual y opuesto al que entra en el elemento (f) por el mismo lado.
- (II) Las funciones de forma asociadas al nodo I, en los elementos (e) y (f) son evidentemente iguales:  $N_I^{(e)} = N_I^{(f)}$ .

( III ) El sentido de recorrido del lado  $\overline{IJ}$  en el elemento (e) es opuesto al del elemento (f), de modo que  $ds^{(f)} = -ds^{(e)}$ .

Por todo lo anterior, se concluye que en la fila  $I$  se tendrá:

$$\int_I^J \hat{q}_{-n}^{(e)} N_I^{(e)} ds^{(e)} + \int_J^I \hat{q}_{-n}^{(f)} N_I^{(f)} ds^{(f)} = 0 \quad (\text{Fila I}) \quad (5.50)$$

si se repite el razonamiento, se anulan igualmente las integrales a través de los restantes lados internos:  $\overline{JK}$  e  $\overline{IK}$ , a medida que se ensamblan las contribuciones de los elementos adyacentes. Al finalizar el ensamblaje de todas las ecuaciones, las únicas contribuciones de integrales de contorno al vector  $\mathbf{b}$ , conocido como vector de carga o vector de datos, serán las de los elementos que tengan algún lado en el contorno  $S_2$  o  $S_3$  (figura 5-1), es decir la de los elementos afectados por las condiciones de contorno naturales. Esta cancelación de los contornos internos es análoga a la considerada por la teoría clásica de Ampere de las corrientes moleculares para explicar la magnetización de los materiales.

Podemos concluir diciendo que el elemento (e) de la figura (5.7), contribuye al sistema global de la siguiente manera: La matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  (5.45) generada a partir de la integral  $I_K^{(e)}$ , y el vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$  (5.46) (si existe generación) a partir de la integral  $I_g^{(e)}$ .

Nos queda por considerar la ecuación (5.40) en elementos que tengan algún elemento en el contorno  $S_2$  o  $S_3$ .

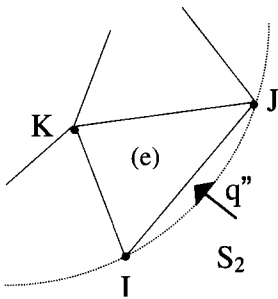


Figura 5-9

Si el elemento está en el contorno  $S_2$  (figura 5-9), la contribución al vector de datos que genera la integral  $I_g^{(e)}$ , así como la contribución a la matriz del sistema por la integral  $I_K^{(e)}$ , serán como las de cualquier elemento de la malla. Detallaremos la contribución de la integral de contorno  $I_S^{(e)}$ , sobre la cual se reflejará la condición de flujo impuesto.

Según (5.4) tendremos que:

$$q'' = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = q_{-n} \quad \text{en el lado } \overline{IJ}$$

La integral de contorno (5.44) ahora será:



$$b_{q^*I} = - \int_{S^{(e)}} N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = - \int_I N_I^{(e)} q'' ds^{(e)} - \underbrace{\int_J N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_0 - \underbrace{\int_K N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_{\text{se cancela}} \quad (\text{Fila I})(5.51)$$

$$b_{q^*J} = - \int_{S^{(e)}} N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = - \int_I N_J^{(e)} q'' ds^{(e)} - \underbrace{\int_J N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_{\text{se cancela}} - \underbrace{\int_K N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_0 \quad (\text{Fila J})(5.52)$$

La integral de contorno ponderada por  $N_K^{(e)}$ , no tiene interés considerarla, pues las integrales a lo largo de los lados JK y KI, se cancelan, y la correspondiente al lado IJ es nula porque en ese contorno  $N_K^{(e)}$  se hace cero. Por lo tanto la contribución de este elemento al vector de datos por la imposición del flujo  $q''$  en el contorno, se refleja en las filas I y J de la siguiente forma:

$$\mathbf{b}_{q^*}^{(e)T} = [ \dots b_{q^*I} \quad \dots b_{q^*J} \quad \dots ] \quad (5.53)$$

donde  $b_{q^*I}$  y  $b_{q^*J}$ , son las integrales de contorno dadas por (5.51) y (5.52).

Podemos concluir diciendo que el elemento (e) de la figura (5.5), contribuye al sistema global de la siguiente manera: La matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  (5.45) generada a partir de la integral  $I_K^{(e)}$ , el vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$  (5.46) (si existe generación) a partir de la integral  $I_g^{(e)}$ , y por último el vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$  (5.53), generado a partir la integral  $I_S^{(e)}$ .

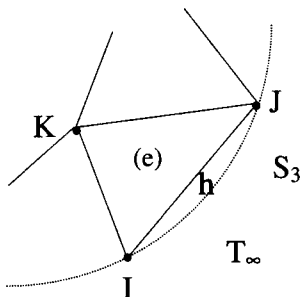


Figura 5-10

Por último consideramos el caso en que el elemento está en el contorno  $S_3$  (figura 5-10). Al igual que en caso anterior, el interés se centra la contribución de la integral de contorno. Según (5.6), ahora tendremos que:

$$q_{-n} = k \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = h(T_\infty - \hat{T}) \quad \text{en el lado } \bar{IJ}$$

será:

Por tanto la integral de contorno (5.44) ahora

$$- \int_{S^{(e)}} N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = - \int_I N_I^{(e)} h(T_\infty - \hat{T}) ds^{(e)} - \underbrace{\int_J N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_0 - \underbrace{\int_K N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_{\text{se cancela}} \quad (5.54)$$

$$-\int_{S^{(e)}} N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = -\int_I N_J^{(e)} h (T_\infty - \hat{T}) ds^{(e)} - \underbrace{\int_J N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_0 - \underbrace{\int_K N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} ds^{(e)}}_{\text{se cancela}} \quad (5.55)$$

por tanto sólo tiene interés la integral sobre el lado afectado por la convección. Como en estas integrales figura la función incógnita  $\hat{T}$ , al sustituirla por (5.34) se generará una contribución a la matriz del sistema. Sin embargo en este caso hay que tener presente que  $\hat{T}$  en las anteriores integrales hay que evaluarla exclusivamente en lado IJ, es decir:

$$\hat{T}_{\text{Lado IJ}}^{(e)} = N_I^{(e)} \Big|_{\text{Lado IJ}} a_I + N_J^{(e)} \Big|_{\text{Lado IJ}} a_J + \underbrace{N_K^{(e)} \Big|_{\text{Lado IJ}}}_{0} a_K \quad (5.56)$$

lo anterior significa que en el lado IJ, la aproximación local de temperatura  $\hat{T}$ , está determinada únicamente por las temperaturas de los nodos I y J. Al sustituir (5.56) en (5.54) y (5.55) resulta:

$$-\int_{S^{(e)}} N_I^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = a_I \underbrace{\int_I N_I^{(e)} N_I^{(e)} h ds^{(e)}}_{H_{II}} + a_J \underbrace{\int_I N_I^{(e)} N_J^{(e)} h ds^{(e)}}_{H_{IJ}} - \underbrace{\int_I N_I^{(e)} h T_\infty ds^{(e)}}_{b_{hI}} \quad (j=I) \quad (5.57)$$

$$-\int_{S^{(e)}} N_J^{(e)} \hat{q}_{-n}^{(e)} dS = a_I \underbrace{\int_I N_J^{(e)} N_I^{(e)} h ds^{(e)}}_{H_{JI}} + a_J \underbrace{\int_I N_J^{(e)} N_J^{(e)} h ds^{(e)}}_{H_{JJ}} - \underbrace{\int_I N_J^{(e)} h T_\infty ds^{(e)}}_{b_{hJ}} \quad (j=J) \quad (5.58)$$

Por tanto es evidente que la integral de contorno en este caso genera por un lado, una contribución a la matriz del sistema, dada por la matriz simétrica:

$$\mathbf{H}^{(e)} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & \vdots & & & \\ & & \mathbf{H}_{II} & \cdots & \mathbf{H}_{IJ} & \cdots \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & \mathbf{H}_{JJ} & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} a_I \\ a_I \\ \vdots \\ a_J \\ a_N \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{fila I} \\ \leftarrow \text{fila J} \end{matrix} \quad (5.59)$$

y por otro lado, una contribución al vector de datos dada por:

$$\mathbf{b}_h^{(e)T} = \left[ \dots \quad b_{hI} \quad \dots \quad b_{hJ} \quad \dots \right] \quad (5.60)$$

Podemos concluir diciendo que el elemento (e) de la figura (5.10), contribuye al sistema global de la siguiente manera: La matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$  (5.45) generada a partir de la integral  $I_K^{(e)}$ , el vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$  (5.46) (si existe generación) a partir de la integral  $I_g^{(e)}$ , y por último la matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$  (5.59) y el vector  $\mathbf{b}_h^{(e)}$  (5.60), generados a partir la integral  $I_S^{(e)}$ .

Al considerar las contribuciones que genera:

$$I_K^{(e)} + I_g^{(e)} + I_S^{(e)} = 0 \quad (5.61)$$

ensamblando desde  $e=1$  hasta  $e=E$  ( $E=\text{num. total de elementos de la malla}$ ), se llega a:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} + \mathbf{b} = 0 \quad (5.62)$$

siendo:

$$\mathbf{A} = \sum_{e=1}^{e=E} \mathbf{K}^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E3} \mathbf{H}^{(e)} \quad (5.63)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{e=1}^{e=E} \mathbf{b}_g^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E2} \mathbf{b}_{q^*}^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E3} \mathbf{b}_h^{(e)}$$

donde E, E2 y E3 representan el número total de elementos en la malla, en el contorno  $S_2$  y en el contorno  $S_3$ , respectivamente. En caso de no existir generación de calor ( $g=0$ ), entonces el vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$  no haría falta considerarlo. Lo mismo cabría decir de los vectores  $\mathbf{b}_{q^*}^{(e)}$ ,  $\mathbf{b}_h^{(e)}$ , y de la matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$ . El vector  $\mathbf{a}$  representa el conjunto de todas las temperaturas nodales de la malla, y que se determinan resolviendo el sistema. La matriz del sistema (al igual que las matrices elementales), tiene unas dimensiones:  $N \times N$ , siendo N el número total de nodos de la malla. Sin embargo si en el contorno se dan condiciones esenciales (en  $S_1$ ), entonces no todas las temperaturas nodales son incógnitas. Si introducimos las temperaturas nodales conocidas en (5.62) se llega a un sistema de menores dimensiones, de cuya solución se obtienen las temperaturas nodales incógnitas. Una vez conocida las temperaturas nodales, se puede conocer la temperatura en cualquier punto de cualquier elemento.

## 5.4 Planteamiento detallado

En esta sección evaluaremos todas las integrales que permiten obtener la matriz  $\mathbf{A}$  y el vector de datos  $\mathbf{b}$  (5.63), particularizando en el elemento bidimensional más sencillo, es decir el elemento triangular, cuyas funciones de forma fueron definidas en (5.35). Así mismo veremos con detalle el proceso a seguir para imponer las condiciones

de contorno esenciales. Por último aplicaremos todos los algoritmos obtenidos a un ejemplo.

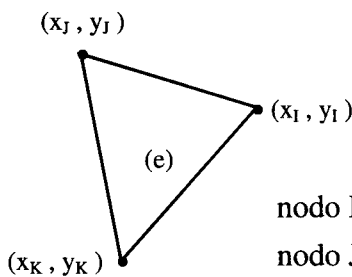
- Comenzaremos evaluando los coeficientes de la matriz  $\mathbf{K}^{(e)}$ . Según (5.42), la expresión general de los coeficientes es:

$$\mathbf{K}_{IJ} = \mathbf{K}_{JI} = \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_I^{(e)} \mathbf{K} \nabla N_J^{(e)} d\Omega$$

si tenemos en cuenta que las funciones de forma son lineales tanto en x como en y, es decir:

$$\begin{aligned} \text{nodo I: } N_I^{(e)}(x, y) &= \frac{\alpha_I + \beta_I x + \gamma_I y}{2A^{(e)}} \\ \text{nodo J: } N_J^{(e)}(x, y) &= \frac{\alpha_J + \beta_J x + \gamma_J y}{2A^{(e)}} \\ \text{nodo K: } N_K^{(e)}(x, y) &= \frac{\alpha_K + \beta_K x + \gamma_K y}{2A^{(e)}} \end{aligned} \quad \mathbf{A}^{(e)} = 1/2 \begin{vmatrix} 1 & x_I & y_I \\ 1 & x_J & y_J \\ 1 & x_K & y_K \end{vmatrix} \quad (5.64)$$

y los coeficientes en función de las coordenadas nodales:



$$\begin{aligned} \text{nodo I: } \alpha_I &= x_J y_K - x_K y_J & \beta_I &= y_J - y_K & \gamma_I &= x_K - x_J \\ \text{nodo J: } \alpha_J &= x_K y_I - x_I y_K & \beta_J &= y_K - y_I & \gamma_J &= x_I - x_K \\ \text{nodo K: } \alpha_K &= x_I y_J - x_J y_I & \beta_K &= y_I - y_J & \gamma_K &= x_J - x_I \end{aligned} \quad (5.65)$$

Entonces los operadores  $\nabla N_I$  y  $\nabla N_J$ , generan vectores constantes. Su producto escalar también es constante y la integral es fácilmente evaluable. De este modo se llega sin dificultad a:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \frac{\mathbf{K}}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} \beta_I^2 + \gamma_I^2 & \beta_I \beta_J + \gamma_I \gamma_J & \beta_I \beta_K + \gamma_I \gamma_K \\ & \beta_J^2 + \gamma_J^2 & \beta_J \beta_K + \gamma_J \gamma_K \\ \text{sim.} & & \beta_K^2 + \gamma_K^2 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

Esta matriz de (3x3) se debe expresar en dimensiones (NxN) como indica (5.45), para así poder llevar a cabo el proceso de ensamblaje.

- En este punto evaluaremos las integrales que corresponden a los coeficientes del vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$ . Según (5.43), la expresión general de los coeficientes es:

$$b_{gI} = - \int_{\Omega^{(e)}} N_I^{(e)} g \, d\Omega = -g \int_{\Omega^{(e)}} N_I^{(e)} \, d\Omega$$

si admitimos que  $g$  es constante en el elemento, y tenemos en cuenta que  $\Omega^{(e)} = A^{(e)}$ , la integral que resulta es igual al volumen limitado superiormente por  $N_I^{(e)}$ . Puesto que según la figura (5.5) sería una pirámide de altura unidad (para cualquier función de forma), resulta que:

$$b_{gI} = -\frac{1}{3} g A^{(e)} = b_{gJ} = b_{gK} \quad (5.67)$$

estos coeficientes se situarían en las filas I, J y K del vector  $\mathbf{b}_g^{(e)}$ , como indica (5.46)

- En este punto evaluaremos las integrales que corresponden a los coeficientes del vector  $\mathbf{b}_q^{(e)}$ . Según (5.43), la expresión general de los coeficientes es:

$$b_{q^I} = - \int_I^J N_I^{(e)} q'' \, ds^{(e)} = -q'' \int_I^J N_I^{(e)} \, ds^{(e)} \quad (5.68)$$

si admitimos que  $q''$  es constante a lo largo del contorno (lado IJ) del elemento, sólo hay que evaluar la integral de la función de forma a lo largo del contorno.

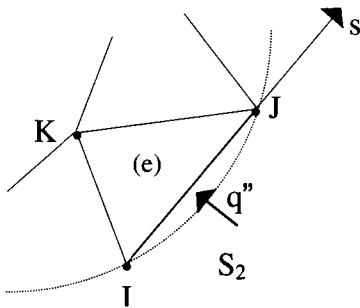


Figura 5-11

Si comparamos la figura (5-5) con la figura (5-4), resulta evidente que  $N_I^{(e)}$  a lo largo del contorno es una función de forma en esencia igual a la del elemento unidimensional, con el matiz que en este caso la coordenada  $x$  debe sustituirse por la coordenada  $s$  a lo largo del contorno. Por tanto las funciones de forma en función de la coordenada de contorno quedarían:

$$\begin{aligned} N_I^{(e)} &= (s_J - s) / s_{JI} \\ N_J^{(e)} &= (s - s_I) / s_{JI} \end{aligned} \quad (5.69)$$

siendo:  $s_{JI} = \sqrt{(x_J - x_I)^2 - (y_J - y_I)^2}$

La integral (5.68) sería el área limitada por  $N_I^{(e)}$  a lo largo del contorno, como estas funciones son lineales, el área sería la de un triángulo de altura unidad, por tanto resulta:

$$b_{q^r I} = -\frac{1}{2} q^r s_{IJ} = b_{q^r J} \quad (5.70)$$

- En este punto evaluaremos las integrales que corresponden a los coeficientes del vector  $\mathbf{b}_h^{(e)}$ . Según (5.57), la expresión general de los coeficientes que contribuyen al vector de datos es:

$$b_{hI} = -\int_I^J N_I^{(e)} h T_\infty ds^{(e)}$$

Obviamente la evaluación de esta integral es análoga a la anterior, resultando:

$$b_{hI} = -\frac{1}{2} h T_\infty s_{IJ} = b_{hJ} \quad (5.71)$$

- Por último evaluaremos las integrales que corresponden a los coeficientes de la matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$ . Según (5.57), la expresión general de los coeficientes es:

$$H_{IJ} = H_{JI} = \int_I^J N_I^{(e)} N_J^{(e)} h ds^{(e)}$$

Estamos de nuevo ante otra integral de contorno, por lo que  $N_I^{(e)}$  y  $N_J^{(e)}$  se han de sustituir por (5.69). Ahora se plantean dos tipos diferentes de integrales. Si  $I \neq J$  entonces :

$$H_{IJ} = H_{JI} = \int_I^J N_I^{(e)} N_J^{(e)} h ds^{(e)} = \int_I^J \frac{h}{s_{IJ}} (s_J - s)(s - s_I) ds^{(e)} = \frac{1}{6} h s_{IJ} \quad (5.72)$$

Si  $I=J$  se plantean dos integrales que arrojan el mismo resultado:

$$\begin{aligned} H_{II} &= \int_I^J N_I^{(e)} N_I^{(e)} h ds^{(e)} = \int_I^J \frac{h}{s_{IJ}} (s_J - s)^2 ds^{(e)} = \frac{1}{3} h s_{IJ} \\ H_{JJ} &= \int_I^J N_J^{(e)} N_J^{(e)} h ds^{(e)} = \int_I^J \frac{h}{s_{IJ}} (s - s_I)^2 ds^{(e)} = \frac{1}{3} h s_{IJ} \end{aligned} \quad (5.73)$$

El cálculo de estas integrales se facilita con el cambio de variable:  $(s-s_I)=t$  ó  $(s_J-s)=t$ . Estas integrales se han de sustituir en las filas y columnas I y J respectivamente, de la matriz  $\mathbf{H}^{(e)}$  dada por (5.59).

Antes de aplicar todos estos algoritmos a un ejemplo, vamos a detallar el proceso de reducción de filas y columnas al imponer las condiciones de contorno esenciales.

## IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO ESENCIALES

Sea el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \quad (5.74)$$

supongamos que una de las incógnitas no es tal, sino que tiene un valor impuesto:  $a_1=T_0$ , entonces se tendrá que:

$$\left. \begin{array}{l} A_{11}T_0 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 = b_1 \\ A_{21}T_0 + A_{22}a_2 + A_{23}a_3 = b_2 \\ A_{31}T_0 + A_{32}a_2 + A_{33}a_3 = b_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_{12}a_2 + A_{13}a_3 = b_1 - A_{11}T_0 \quad (1) \\ A_{22}a_2 + A_{23}a_3 = b_2 - A_{21}T_0 \quad (2) \\ A_{32}a_2 + A_{33}a_3 = b_3 - A_{31}T_0 \quad (3) \end{array}$$

Para obtener las restantes incógnitas ( $a_2$  y  $a_3$ ) es suficiente con las ecuaciones (2) y (3). Por tanto el nuevo sistema ha reducido el número de incógnitas (o grados de libertad del sistema) de 3 a 2, quedando de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_2 - A_{21}T_0 \\ b_3 - A_{31}T_0 \end{Bmatrix} \quad (5.75)$$

En caso de que otra incógnita tuviese un valor impuesto se repetiría un proceso análogo, partiendo en este caso de (5.75). Resulta útil encontrar unas reglas que nos permitan metódicamente imponer las condiciones de contorno esenciales nodo a nodo, lo cual entre otras ventajas facilita la implementación en un programa de ordenador. Estas reglas nos permiten pasar de (5.74) a (5.75) por cada grado de libertad impuesto.

Si suponemos que  $a_1=T_0$ , entonces las reglas serían:

1. Seleccionamos todos los elementos extradiagonales de la columna  $i$ -ésima de la matriz  $A$  para multiplicarlos por  $(-T_0)$ , de modo que el resultado se suma con el vector de datos  $b$ , modificando a éste.
2. Eliminamos la fila  $i$  y columna  $i$  de la matriz  $A$ , así como la fila  $i$  de los vectores  $a$  y  $b$  (modificado).

Consideremos a continuación un ejemplo, donde pongamos en práctica todos los planteamientos. Supongamos un dominio bidimensional en conducción estacionaria, con generación de calor, cuya formulación diferencial es:

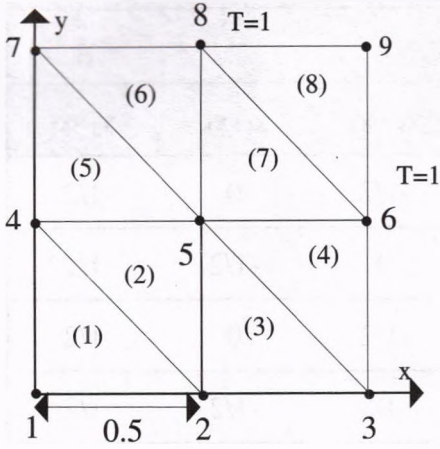


Figura 5-12

$$K\nabla^2 T + g = 0 \quad \text{en } 0 \leq x, y \leq 1 \quad (5.76)$$

$$T = 1 \quad \text{en } x = 1, \text{ e } y = 1 \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{en } x = 0, \text{ e } y = 0 \quad (5.78)$$

En este problema supondremos que  $g=1$  y  $K=1$  (en unidades coherentes. En la figura 5-12 vemos como el dominio se ha discretizado en una malla lo suficientemente sencilla, como para seguir el proceso completo paso a paso. Todos los

elementos son triángulos rectángulos de lado  $1/2$ , por todas las áreas serian iguales a  $1/8$ . Una vez asignada una numeración nodal a cada uno de los elementos, conviene asignar las coordenadas nodales, y ordenar todos los parámetros geométricos (5.65) en forma de tablas, para facilitar los cálculos de los coeficientes, primero a nivel local, y luego ensamblar a nivel global.

Elem.	Nodos			Coordenadas Nodales					
	I	J	K	X <sub>I</sub>	X <sub>J</sub>	X <sub>K</sub>	Y <sub>I</sub>	Y <sub>J</sub>	Y <sub>K</sub>
1	1	2	4	0	1/2	0	0	0	1/2
2	4	2	5	0	1/2	1/2	1/2	0	1/2
3	2	3	5	1/2	1	1/2	0	0	1/2
4	5	3	6	1/2	1	1	1/2	0	1/2
5	4	5	7	0	1/2	0	1/2	1/2	1
6	7	5	8	0	1/2	1/2	1	1/2	1
7	5	6	8	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1
8	8	6	9	1/2	1	1	1	1/2	1



Elem.	Parámetros					
	$\beta_I$	$\beta_J$	$\beta_K$	$\gamma_I$	$\gamma_J$	$\gamma_K$
(e)	$y_J - y_K$	$y_K - y_I$	$y_I - y_J$	$x_K - x_J$	$x_I - x_K$	$x_J - x_I$
1	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2
2	-1/2	0	1/2	0	-1/2	1/2
3	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2
4	-1/2	0	1/2	0	-1/2	1/2
5	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2
6	-1/2	0	1/2	0	-1/2	1/2
7	-1/2	1/2	0	-1/2	0	1/2
8	-1/2	0	1/2	0	-1/2	1/2

Las ecuaciones elementales, expresadas (por sencillez) en dimensiones de (3x3) y (3x1) serían:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^{(1)} &= 1/2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(5)} = \mathbf{A}^{(7)} \\
 \mathbf{A}^{(2)} &= 1/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{A}^{(6)} = \mathbf{A}^{(8)}
 \end{aligned}
 \quad \mathbf{b}^{(I)} = \frac{1}{24} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{para } I = 1, 2, \dots, 9 \quad (5.79)$$

Como la generación de calor es uniforme, y el mallado también lo es, en este ejemplo, la contribución al vector de datos es igual para todos los elementos. El paso siguiente sería ensamblar las contribuciones elementales. Para ello es necesario expresarlas en las dimensiones globales, es decir en (9x9) y (9x1). Sumando ordenadamente todas las contribuciones, es decir haciendo lo expresado en (5.63) se llega a:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & -12 & & & & & \\ -12 & 48 & -12 & 0 & -24 & & & & \\ 0 & -12 & 24 & 0 & 0 & -12 & & & \\ -12 & 0 & 0 & 48 & -24 & 0 & -12 & & \\ & -24 & 0 & -24 & 96 & -24 & 0 & -24 & \\ & & -12 & 0 & -24 & 48 & 0 & 0 & -12 \\ & & & -12 & 0 & 0 & 24 & -12 & 0 \\ & & & & -24 & 0 & -12 & 48 & -12 \\ & & & & & -12 & 0 & -12 & 24 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \quad (5.80)$$

Podemos ver que A es simétrica y estructurada en banda. Antes de resolver, nos queda introducir las condiciones de contorno esenciales, que serían:  $a_3 = a_6 = a_9 = a_8 = a_7 = 1$ . Si comenzamos con el nodo 3, tenemos que modificar el vector de datos con los elementos extradiagonales de la columna 3 (indicados en trazo discontinuo) multiplicados por  $(-)\mathbf{T}_0$ , en este caso por  $(-)$ 1. Luego eliminamos la fila y columna 3 de la matriz, y la fila 3 de los vectores, resultando un sistema de  $(8 \times 8)$ , en el que no figura  $a_3$  como incógnita:

$$\begin{bmatrix} 24 & -12 & -12 & & & & & & \\ -12 & 48 & 0 & -24 & & & & & \\ -12 & 0 & 48 & -44 & 0 & -12 & & & \\ & -24 & -24 & 96 & -24 & 0 & -24 & & \\ & & 0 & -24 & 48 & 0 & 0 & -12 & \\ & & -12 & 0 & 0 & 24 & -12 & 0 & \\ & & & -24 & 0 & -12 & 48 & -12 & \\ & & & & -12 & 0 & -12 & 24 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 3+12 \\ 3-0 \\ 6-0 \\ 3+12 \\ 2-0 \\ 3-0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 3 \\ 6 \\ 15 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Si seguimos el proceso de forma análoga, el sistema final (cuya matriz sigue siendo simétrica) queda reducido a las verdaderas incógnitas de malla:

$$\begin{bmatrix} 24 & -12 & -12 & 0 \\ -12 & 48 & 0 & -24 \\ -12 & 0 & 48 & -24 \\ 0 & -24 & -24 & 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 15 \\ 54 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

La solución de este sistema es:

$$a_1 = 1.25, a_2 = 1.21, a_4 = 1.21, a_5 = 1.21$$

## 5.4 Planteamiento en régimen transitorio

Comenzaremos recordando la formulación diferencial del problema de conducción en régimen transitorio. De nuevo haremos alusión a la figura 5-1. Si la conductividad se supone constante, entonces la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno es:

$$K\nabla^2 T + g = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{en } \Omega \quad (5.83)$$

donde el término de la derecha de la igualdad representa la tasa de energía almacenada (por unidad de volumen) en el elemento diferencial de volumen. En la conducción transitoria la temperatura  $T$  en general es una función:  $T(x,y,z,t)$ . Si partimos de una situación inicial estacionaria, se produce el régimen transitorio cuando: (i) las condiciones de contorno (en  $S_1$ ,  $S_2$  o  $S_3$ ) varían en el tiempo (de forma brusca o gradual), (ii) o bien cuando la tasa de generación de calor varíe en el tiempo (de forma brusca o gradual).

A continuación nos planteamos la forma general, bajo un planteamiento clásico, de la solución aproximada  $\hat{T}(x,y,z,t)$ , que por simplicidad notaremos como  $\hat{T}(x,t)$ . En principio existen dos opciones:

En la primera se construye la solución aproximada como una combinación de coeficientes ajustables por funciones de ensayo, las cuales dependerían del espacio y del tiempo, es decir:

$$\hat{T}(x,t;a) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x,t) \quad (5.84)$$

La otra propuesta considera una separación de variables, es decir los coeficientes ajustables se consideran en realidad dependientes del tiempo (pueden variar de un instante a otro), mientras que las funciones de forma recogen exclusivamente la dependencia del espacio, es decir:

$$\hat{T}(x,t;a) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \Phi_i(x) \quad (5.85)$$

Este es el planteamiento más aceptado, ya que en lo que respecta a la dependencia espacial permite seguir aplicando todo el desarrollo de la conducción estacionaria. La propuesta (5.85) en el contexto de los elementos finitos sería:

$$\hat{T}^{(e)}(x,t;a) = \sum_{i=1}^{n_e} a_i(t) N_i^{(e)}(x) \quad (5.86)$$

puesto que las funciones de forma siguen representando a funciones de interpolación entre las temperaturas nodales, los coeficientes  $a_i(t)$  representarán las temperaturas nodales en función del tiempo.

Antes de aplicar el método de Galerkin, la ecuación diferencial (5.83), la expresaremos:

$$K\nabla^2 T + g - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.87)$$

de este modo al sustituir  $T$  (solución exacta) por  $\hat{T}$ , se origina el correspondiente residuo, que en el método de Galerkin será ponderado por  $N_i^{(e)}$ , por lo tanto tendremos:

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} \left( g + K\nabla^2 \hat{T} - \rho c \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right) d\Omega = 0 \quad \text{para } j=1, \dots, n_e \quad (5.88)$$

donde  $n_e$  es el número de nodos del elemento en el contexto local. Si queremos reducir el orden del operador, aplicamos la primera fórmula de Green (formulación débil) a la integral que contiene a dicho operador:

$$\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} K\nabla^2 \hat{T} d\Omega = - \int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_j^{(e)} K\nabla \hat{T} d\Omega + \int_{S^{(e)}} N_j^{(e)} K\nabla \hat{T} \mathbf{n} dS \quad (5.89)$$

sustituyendo en (5.88), y multiplicando todo por (-1) se llega a:

$$\underbrace{- \int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} g d\Omega}_{I_g^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} \nabla N_j^{(e)} K\nabla \hat{T} d\Omega}_{I_K^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} \left( \rho c \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right) d\Omega}_{I_C^{(e)}} - \underbrace{\int_{S^{(e)}} N_j^{(e)} K \frac{\partial \hat{T}}{\partial n} dS}_{I_S^{(e)}} = 0 \quad \text{para } j=1, \dots, n_e \quad (5.90)$$

Se puede observar que aparecen todas las integrales de la solución estacionaria (no insistiremos en ellas), salvo una integral nueva ( $I_C^{(e)}$ ) relacionada con la energía almacenada. En (5.90) habrá que sustituir  $\hat{T}$  por (5.86). También tendremos que sustituir su derivada parcial con respecto al tiempo en  $I_C^{(e)}$ , la cual vendrá dada por:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n_e} \dot{a}_i N_i^{(e)} \quad (5.91)$$

Tras sustituir, la integral  $I_C^{(e)}$  queda:

$$I_C^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} \left( \rho c \sum_{i=1}^{n_e} \dot{a}_i N_i^{(e)} \right) d\Omega = \sum_{i=1}^{n_e} \dot{a}_i \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} N_j^{(e)} \rho c N_i^{(e)} d\Omega}_{C_{ij}=C_{ji}} \quad (5.92)$$

al considerar las distintas funciones de ponderación  $N_j^{(e)}$  desde  $j=1$  hasta  $j=n_e$ ,  $I_C^{(e)}$  conduce a :

$$\sum_{i=1}^{n_e} \dot{a}_i C_{ij} \quad \text{para } j = 1, \dots, n_e \quad (5.93)$$

Si utilizamos notación matricial, tendríamos una matriz  $C^{(e)}$  simétrica. Si por ejemplo el elemento fuese triangular con nodos I, J y K, entonces (5.93) (en el contexto global) se expresaría:

$$C^{(e)} \dot{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & C_{II} & \cdots & C_{IJ} & \cdots & C_{IK} & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & & C_{JJ} & \cdots & C_{JK} & \cdots \\ & & & & \ddots & \vdots & \\ \text{Sim.} & & & & & C_{KK} & \cdots \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_I \\ \vdots \\ \dot{a}_J \\ \vdots \\ \dot{a}_K \\ \dot{a}_N \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Fila I} \\ \leftarrow \text{Fila J} \\ \leftarrow \text{Fila K} \end{matrix} \quad (5.94)$$

Al considerar las contribuciones que ahora genera:

$$I_C^{(e)} + I_K^{(e)} + I_g^{(e)} + I_S^{(e)} = 0 \quad (5.95)$$

ensamblando desde  $e=1$  hasta  $e=E$  ( $E=\text{num. total de elementos de la malla}$ ), se llega al planteamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$C \dot{\mathbf{a}} + A \mathbf{a} + \mathbf{b} = 0 \quad (5.96)$$

siendo:

$$\begin{aligned} C &= \sum_{e=1}^{e=E} C^{(e)} \\ A &= \sum_{e=1}^{e=E} K^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E3} H^{(e)} \\ \mathbf{b} &= \sum_{e=1}^{e=E} \mathbf{b}_g^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E2} \mathbf{b}_{q^*}^{(e)} + \sum_{e=1}^{e=E3} \mathbf{b}_h^{(e)} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Así pues, el método de Galerkin, junto con la separación de variables (5.86), transforma un problema de valores iniciales y de contorno, en un problema solamente de valores iniciales dado por (5.96). En realidad el problema que plantea (5.96) es similar al que se contempló en los sistemas con capacidad térmica concentrada (1.36), la diferencia radica en que la ecuación diferencial ordinaria (1.36) se aplica a un sistema con un único grado de libertad. Como en nuestro caso tenemos un sistema de N grados de libertad, entonces es lógico que se llegue a un sistema de N ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo (de orden uno). Al tener un problema sólo de valores iniciales, implica que la evolución temporal del sistema está determinada por las condiciones iniciales. Para evaluar esa evolución en el esquema discreto, lo que procede es aplicar las técnicas de marcha en el tiempo que se vieron en el método de diferencias finitas. Al aplicar esas técnicas a (5.96) se obtendrán los correspondientes *algoritmos de recurrencia*.

### ALGORITMOS DE RECURRENCIA:

En primer lugar diremos que existen dos tipos de algoritmos de recurrencia: los de simple salto y los de múltiple salto. En los primeros se busca una relación que involucre a las variables dependientes del tiempo en dos instantes de tiempo separados por un solo salto. En los segundos se buscan relaciones entre dos o más saltos de tiempo, y obviamente son más complejos. Aquí sólo se hará referencia a los algoritmos de simple salto.

La ecuación (5.96) la matizaremos indicando las dependencias temporales:

$$C \dot{\mathbf{a}}(t) + \mathbf{A} \mathbf{a}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.98)$$

Hacemos notar que  $\mathbf{f}(t) = -\mathbf{b}(t)$  indica las posibles las posibles condiciones de contorno o tasa de generación de calor que pueden variar en el tiempo con una dependencia (gradual o brusca) conocida. Partimos del conocimiento de la distribución inicial de temperaturas, esto es de:  $\mathbf{a}_{t=0}$ . Si las condiciones iniciales son de temperatura uniforme, entonces  $a_i = \text{cte}$ , en caso contrario las temperaturas de los nodos serán diferentes en general.

Según la aproximación de la derivada temporal, tendremos diferentes métodos y algoritmos.

- *Método de diferencia hacia atrás*: La derivada temporal se aproxima por un salto hacia atrás, es decir:

$$\text{para cada nodo } a_i: \quad \dot{a}_i^n \cong \frac{a_i^n - a_i^{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5.99)$$

lo cual en notación matricial puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{a}}_n \cong \frac{\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5.100)$$

Por otro lado el sistema de ecuaciones (5.98) se evalúa para el instante  $t=t_n$ , lo cual lo notaremos en la forma:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_n + \mathbf{A} \mathbf{a}_n = \mathbf{f}_n \quad (5.101)$$

al sustituir (5.100) en (5.101) se llega fácilmente al siguiente algoritmo de recurrencia:

$$\left( \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} + \mathbf{A} \right) \mathbf{a}_n = \mathbf{f}_n + \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} \mathbf{a}_{n-1} \quad (5.102)$$

esto quiere decir que en el primer salto de tiempo podemos averiguar  $\mathbf{a}_1$  a partir del conocimiento de  $\mathbf{a}_0$  (condiciones iniciales), en el siguiente paso averiguamos  $\mathbf{a}_2$  a partir de  $\mathbf{a}_1$  y así sucesivamente. Observe que en cada salto de tiempo el vector de temperaturas se obtiene de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas.

- *Método de diferencia adelante:* La derivada temporal se aproxima por un salto adelante, es decir:

$$\dot{\mathbf{a}}_{n-1} \cong \frac{\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5.103)$$

Observe que (5.103) supone un salto adelante con respecto al instante  $t_{n-1}$ . Por ello en este método el sistema de ecuaciones (5.98) se evalúa en el instante  $t_{n-1}$ :

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_{n-1} + \mathbf{A} \mathbf{a}_{n-1} = \mathbf{f}_{n-1} \quad (5.104)$$

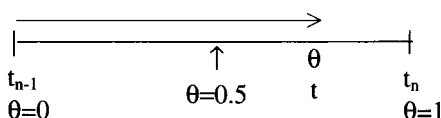
al sustituir (5.103) en (5.104) se llega fácilmente al siguiente algoritmo de recurrencia:

$$\frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} \mathbf{a}_n = \mathbf{f}_{n-1} + \left( \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} - \mathbf{A} \right) \mathbf{a}_{n-1} \quad (5.105)$$

*Método  $\theta$ :* En este método el sistema (5.98) se evalúa en un instante  $t$  intermedio entre  $t_{n-1}$  y  $t_n$ . Por lo tanto se tendrá que:

$$\mathbf{C} \dot{\mathbf{a}}_t + \mathbf{A} \mathbf{a}_t = \mathbf{f}_t \quad (5.106)$$

ese instante interesa relacionarlo con  $t_{n-1}$  y  $t_n$ , por ello resulta útil un cambio de variable definiendo la variable  $\theta$  (adimensional) como:



$$\theta = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5.107)$$

de este modo un valor de  $\theta$  entre 0 y 1 se corresponde linealmente con un valor de  $t$  entre  $t_{n-1}$  y  $t_n$ . Si valoramos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{f}$  en el instante  $t$  como una *interpolación lineal* entre los valores  $t_{n-1}$  y  $t_n$ , podemos afirmar que:

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{n-1} (1 - \theta) + \mathbf{a}_n \theta \quad (5.108)$$

y también que:

$$\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_{n-1}(1-\theta) + \mathbf{f}_n \theta \quad (5.109)$$

en cuanto al vector derivado con respecto al tiempo, podemos decir que:

$$\dot{\mathbf{a}}_t = \frac{d\mathbf{a}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_{n-1}}{\Delta t_n} \quad (5.110)$$

donde se ha derivado con respecto a  $\theta$  (5.108) y con respecto a  $t$  (5.107). Ya sólo queda sustituir (5.108), (5.109) y (5.110) en (5.106), resultando el algoritmo:

$$\left( \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} + \theta \mathbf{A} \right) \mathbf{a}_n = (1-\theta)\mathbf{f}_{n-1} + \theta \mathbf{f}_n + \left[ \frac{1}{\Delta t_n} \mathbf{C} - (1-\theta)\mathbf{A} \right] \mathbf{a}_{n-1} \quad (5.111)$$

Si en este algoritmo hacemos  $\theta=0$ , el sistema de ecuaciones se evalúa en el instante  $t_{n-1}$ , y por tanto se debe obtener el algoritmo de diferencia adelante. Si hacemos  $\theta=1$ , el sistema de ecuaciones se evalúa en el instante  $t_n$ , por tanto se debe obtener el algoritmo de diferencia hacia atrás. Especial interés tiene el caso en que  $\theta=1/2$ , ya que entonces el instante de tiempo en que se evalúa (5.110) se sitúa en la mitad del intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$ , por lo que el orden de error temporal será  $O(\Delta t^2)$ . El algoritmo que resulta de hacer  $\theta=1/2$ , se denomina método de Crank-Nicolson. Se demuestra si  $1/2 \leq \theta \leq 1$ , los algoritmos que resultan son *incondicionalmente estables*. El método de Crank-Nicolson es el más ventajoso por su menor orden de error, aunque si el salto de tiempo es lo suficientemente grande, se pueden presentar oscilaciones. No obstante, la estabilidad del algoritmo hace que esas oscilaciones (“ruido numérico”) no se amplifiquen y terminen amortiguándose.

No conviene confundir el método de Crank-Nicolson, en el que la derivada temporal se evalúa en la mitad del intervalo  $[t_{n-1}, t_n]$ , con el algoritmo que resulta de aproximar la derivada temporal de  $\mathbf{a}$  por:

$$\dot{\mathbf{a}}_n \approx \frac{\mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{a}_{n-1}}{2 \Delta t_n}$$

Aunque el orden de error también es de  $O(\Delta t^2)$ , se puede demostrar que el algoritmo que resultaría de ésta última expresión presentaría un comportamiento *incondicionalmente inestable*. Esto supone que al realizar la marcha en el tiempo, los errores se amplifican y la solución diverge, por lo que no debe ser usado.





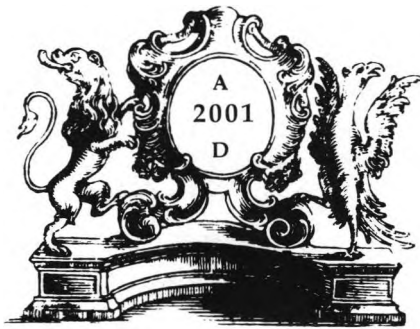
## BIBLIOGRAFÍA

- Frank P. Incropera, David P. de Witt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Jhon Wiley & Sons, 1985.
- Lindon C. Thomas. *Heat Transfer*. Prentice Hall Inc., 1992
- M. Necati Özisik. *Transferencia de Calor*. McGraw-Hill Latinoamericana, S.A., 1979
- D. S. Burnett. *Finite Element Analysis. From Concepts to applications*. Addison-Wesley, 1987
- O. C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *El Método de los elementos Finitos*. 4ª ed., Vol. 1, McGraw-Hill/CIME, 1984.
- F. Javier Pérez Fernández, *Métodos Numéricos básicos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz. 199

## REFERENCIAS

1. M. Necati Özisik. *Heat Conduction*. John Wiley & Sons, 1980.
2. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Science Publications, 1959
3. C. Ray Wylie. *Matemáticas Superiores para Ingeniería*. McGraw-Hill, 1982
4. M. Necati Özisik. *Transferencia de Calor*. McGraw-Hill Latinoamericana, S.A., 1979
5. Heisler, M.P. *Temperature Charts for Induction and Constant Temperature Heating*. Trans. ASME, 69: 227-236, 1947
6. W. M. Rohsenow, J.P. Hartnett, E.N. Ganic. *Handbook of Heat Transfer Fundamentals*. McGraw-Hill, 1985
7. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.E. Schneider, R.H. Pletcher. *Handbook of Numerical Heat Transfer*. John Wiley & Sons, Inc, 1988
8. Frank P. Incropera, David P. de Witt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Jhon Wiley & Sons, 1985.
9. Lindon C. Thomas. *Heat Transfer*. Prentice Hall Inc., 1992

10. J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp. *Stifness and Deflection of Complex Structures*. J. Aero. Sci., 23, 805-823, 1956
11. Zienkiewicz, Y.K. Cheung. *Finite Elements in the Solution of Field Problems*. The Engineer, 507-510, 1965



*Se terminó de componer este libro,  
el día 27 de septiembre,  
festividad de los Santos Cosme y Damián,  
ilustres médicos contemporáneos del emperador Diocleciano  
y adelantados de una medicina total  
que cura así a los cuerpos como a las almas*



SERVICIO DE  
PUBLICACIONES  
UNIVERSIDAD  
DE CÁDIZ



Calpe Institute of Technology

ISBN 84-7786-911-1



9 788477 869115