

Procesos de Ruido Interno en los Circuitos Electrónicos

Técnicas de Computación de la Estabilidad de la Frecuencia

J. J. G. de la Rosa, I. Lloret, A. Moreno, M. Liñán,
V. Pallarés, J. M. Górriz y C. G. Puntonet



UCA Universidad
de Cádiz

Servicio de Publicaciones

Procesos de Ruido Interno en los Circuitos Electrónicos

**Técnicas de Computación
de la Estabilidad de la Frecuencia**

**J. J. G. de la Rosa, I. Lloret, A. Moreno,
M. Liñán, V. Pallarés, J. M. Górriz
y C. G. Puntonet**



UCA

Universidad
de Cádiz

Servicio de Publicaciones

© Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
y los autores

Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz
Doctor Marañón,3. 1002 Cádiz
www.uca.es/publicaciones

I.S.B.N.-13: 978-84-9828-031-9

I.S.B.N.-10: 84-9828-031-1

Depósito legal: SE-6362-2005 E.U.

Printed by Publidisa

“Una vez que lo fundamental ha sido establecido, los caminos salen naturalmente de la raíz”

(Yôuzî, Libro I, Analectas, Confucio)

Los Autores

Dr. JUAN JOSÉ GONZÁLEZ DE LA ROSA es profesor Titular de Universidad en el Área de Electrónica de la Universidad de Cádiz. Su investigación se centra en el procesamiento avanzado de la señal proveniente de sensores con estadística de orden superior y transformaciones digitales aplicadas a procesos no estacionarios. Es autor de numerosos trabajos, que abarcan desde contribuciones a congresos y artículos en revistas, hasta trabajos realizados para empresas y centros de investigación, nacionales y extranjeros. También es autor de libros y capítulos en libros para la formación en Electrónica e Instrumentación Electrónica. Ha visitado los centros « Laboratoire de Physique des Océans en el IFREMER » de Brest, la « Ecole Nationale de Ingenieurs de Brest (ENIB) », el « Institut Universitaire de Technologie de Saint-Nazaire » y la « Ecole Polytechnique Universitaire de Saint-Nazaire ».

Prof. ISIDRO LLORET GALIANA es profesor Titular de la Universidad de Cádiz en el Área de Lenguajes y Sistemas Informáticos. En la actualidad su trabajo se centra principalmente en el tratamiento avanzado de la señal aplicado a la detección de insectos en la madera. También mantiene contratos con el exterior relacionados con el desarrollo y mantenimiento de sistemas informáticos de gestión de bases de datos.

Dr. ANTONIO MORENO MUÑOZ es profesor Titular de Universidad en el Área de Electrónica de la Universidad de Córdoba. Su actividad investigadora se centra en el campo de la Electrónica de Potencia, la Calidad de Suministro Eléctrico y la usabilidad de las interfaces hombre-ordenador.

Prof. MATÍAS LIÑÁN REYES es profesor Asociado T.C. del Área de Tecnología Electrónica de la Universidad de Córdoba. Su investigación se centra en la caracterización de las fuentes de ruido en generadores de funciones, equipos electrónicos de instrumentación y osciladores orientado a la Teoría del Caos para aplicaciones de comunicación segura de bajo ruido y alta fiabilidad. Bajo esta línea de investigación desarrolla su Tesis Doctoral. Otras líneas de investigación complementarias son diseño de Circuitos Integrados Full Custom, Metodologías didácticas de las enseñanzas técnicas en la sociedad del conocimiento y las nuevas tecnologías.

Prof. VICTOR PALLARÉS LÓPEZ es profesor Titular de Escuela Universitaria en el Área de Tecnología Electrónica de la Universidad de Córdoba. Su actividad se centra en el campo de la Instrumentación Electrónica y procesamiento digital de señales.

Dr. JUAN MANUEL GÓRRIZ SÁEZ es profesor del Área de Teoría de la Señal de la Universidad de Granada. Trabaja en procesamiento de la señal y teoría estadística del aprendizaje. El Análisis de componentes independientes y dispersas es aplicado a distintos campos como la biomedicina, telecomunicaciones, finanzas, etc.

Dr. CARLOS GARCÍA PUNTONET es profesor Titular de Universidad en el Departamento de Arquitectura y Tecnología de Computadores de la Universidad de Granada. Ha sido profesor visitante en el « Laboratoire de Traitement d'Images et Reconnaissance de Formes » (INPG, Grenoble, France), en el « Institute of Biophysics » (Regensburg, Germany) y en el « Institute of Physical and Chemical Research » (RIKEN, Nagoya, Japan). Sus áreas de interés son el procesamiento de la señal, el análisis de componentes independientes y la separación ciega de fuentes, las redes neuronales artificiales y métodos de optimización.

Prólogo y Agradecimiento

La presente obra tiene por fin principal mostrar los resultados que arroja el proyecto de investigación nacional DPI2003-00878 en ejecución por los autores y financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España (en el año 2003). Agradecemos a la Secretaría de Estado de Política Científica y Tecnológica (Dirección General de Investigación) la confianza depositada en el equipo investigador. El título del proyecto financiado es: “Técnicas de Computación en Equipos Electrónicos de Instrumentación para la Caracterización de la Estabilidad en Frecuencia de Fuentes Electrónicas de Precisión en Ambientes de Confluencia de Múltiples Tipos de Ruido”. La duración de este proyecto abarca el periodo del 1 de diciembre de 2003 al 30 de noviembre de 2006. Durante su ejecución se han revisado aspectos múltiples y pluridisciplinarios, que constituyen la base de conocimientos adquiridos y expuestos en el presente documento.

En líneas generales, en este proyecto se trata el problema del efecto del ruido interno en los circuitos electrónicos, analizando la problemática de la estabilidad en frecuencia. Esta magnitud física está involucrada en los equipos de comunicaciones, por lo que la caracterización de su estabilidad es un factor crítico. Una frecuencia poco estable hace que la temporización de eventos en un equipo electrónico sea poco fiable. Asimismo, la generación de señales es de baja calidad si el oscilador de referencia es poco estable. En general, la inestabilidad (a corto plazo) de una medida es provocada fundamentalmente por el efecto del ruido interno.

El necesario repasar el concepto de “trazabilidad” con el fin de conocer el proceso de calibración de estos equipos. También se analizan cualitativamente los estándares en frecuencia.

Los efectos del ruido sobre los circuitos electrónicos se caracterizan mediante las densidades espectrales de ruido (DER) evaluadas en la salida. Esto supone el empleo frecuente de diagramas logarítmicos. Para la obtención de las DER de salida se requiere el empleo del “Principio de Inversión” y el análisis de circuitos electrónicos basados en el amplificador operacional. Éste se considera con sus limitaciones prácticas en el dominio de la frecuencia.

Así, una vez planteado el problema, descritos los estándares, y modelado y analizado el efecto del ruido sobre los circuitos electrónicos, se diferencia entre *offset* de frecuencia (desviación en frecuencia) y estabilidad en frecuencia. Esta última característica es el objeto del resto de la obra, empleándose la “varianza de Allan” como estimador de la estabilidad.

Posteriormente se estudia el procedimiento de interpretación de las curvas de estabilidad y su traslación entre los dominios del tiempo y de la frecuencia. Para ello se emplean en primer lugar ejemplos deterministas y, posteriormente, procesos aleatorios.

A lo largo del libro se pone de manifiesto el empleo de receptores GPS¹ en el proceso trazable de calibración y se muestra en el laboratorio un ejemplo.

Los acrónimos y términos en Inglés se traducen sobre la marcha, con el fin de hacer la obra más amena. Se ha optado por no emplear la traducción al Español dado el grado de extensión de la terminología.

Queremos finalizar indicando que esta obra supone una entrega de los avances producidos en el presente proyecto de investigación. Los sucesivos progresos incrementarán los contenidos del presente trabajo.

Los Investigadores
Octubre de 2004

¹ Global Positioning System

Índice

- 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
- 2 CALIBRACIÓN EN FRECUENCIA y TRAZABILIDAD
- 3 ESTÁNDARES EN FRECUENCIA
 - 3.1 **Osciladores de cuarzo**
 - 3.1.1 *Resumen del principio operativo*
 - 3.1.2 *Efectos de la temperatura*
 - 3.1.3 *Envejecimiento: Estabilidad en frecuencia a largo plazo*
 - 3.1.4 *Estabilidad en frecuencia a corto plazo*
 - 3.1.5 *Vibración y choque*
 - 3.1.6 *Interferencias electromagnéticas*
 - 3.1.7 *Apagado-encendido (reencendido)*
 - 3.2 **Osciladores atómicos**
 - 3.2.1 *Principios físicos*
 - 3.2.2 *Osciladores de Rubidio*
 - 3.2.3 *Osciladores de Cesio*
 - 3.2.4 *Másers de Hidrógeno*
 - 3.3 **Estándares transferibles. El GPS**
- 4 CARACTERIZACIÓN ANALÍTICA DE LOS PROCESOS DE RUIDO. CORRELACIÓN y DENSIDADES ESPECTRALES
 - 4.1 **Ruido y señales aleatorias. Función de autocorrelación**
 - 4.1.1 *Definición de ruido*
 - 4.1.2 *Función de autocorrelación de una variable aleatoria continua*
 - 4.1.3 *Estimadores de los estadísticos de un proceso aleatorio*
 - 4.1.4 *Autocorrelación de una variable discreta*
 - 4.1.5 *Interpretación de las gráficas de autocorrelación y análisis exploratorio de datos*
 - 4.2 **Densidades espectrales de ruido**
- 5 FUENTES y EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS DEL RUIDO SOBRE LOS CIRCUITOS ELECTRÓNICOS
 - 5.1 **Valores de tensión y de corriente eficaces de ruido**
 - 5.2 **Fuentes de ruido interno**
 - 5.2.1 *Dos tipos de ruido muy frecuentes*
 - 5.2.2 *Ruido blanco*
 - 5.2.3 *Ruido con densidad espectral inversamente proporcional a la frecuencia*
- 6 RUIDO EN TRANSISTORES BIPOLARES
 - 6.1 **Origen**
 - 6.2 **Modelado y evaluación**
- 7 RUIDO EN LOS AMPLIFICADORES OPERACIONALES
 - 7.1 **Modelado del ruido equivalente en la entrada**
 - 7.2 **Evaluación en circuito práctico**
- 8 EJEMPLO DE MODELADO y EVALUACIÓN DE LOS EFECTOS DEL RUIDO INTERNO EN UNA BANDA DE FRECUENCIAS
- 9 OFFSET o DESVIACIÓN EN FRECUENCIA
 - 9.1 **Desviación en frecuencia**
 - 9.2 **Incertidumbre de la frecuencia**
- 10 ESTABILIDAD DE LA FRECUENCIA. CARACTERIZACIÓN
 - 10.1 **Concepto de estabilidad**
 - 10.1.1 *Estabilidad vs. Precisión*
 - 10.1.2 *Impacto del ruido acoplado a un oscilador*
 - 10.2 **Desviaciones en fase, tiempo y frecuencia**
 - 10.3 **Frecuencia fraccional media**
 - 10.4 **Medidas de la Inestabilidad a Corto Plazo**
 - 10.5 **La varianza o desviación de Allan**
 - 10.5.1 *Planteamiento del problema y estimador*
 - 10.5.2 *Ejemplos deterministas*
 - 10.5.2.1 *Test de máser de hidrógeno*
 - 10.5.2.2 *Offset de frecuencia y fase constante*

10.5.2.3 Desviación de frecuencia lineal

10.5.2.4 Perturbaciones periódicas

11 PROCESOS ALEATORIOS

11.1 Modelos clásicos de ruido en el dominio de la frecuencia

11.2 Variabilidad de la frecuencia fraccional

11.3 Ejemplos de evaluación del ruido acoplado y conversión entre dominios t y f

11.4 Causas del ruido acoplado a los osciladores

Planteamiento del Problema

Esta obra tiene por fin analizar el efecto y modelado del ruido en los circuitos electrónicos, y la problemática asociada a la caracterización de la estabilidad de magnitudes físicas, mediante el análisis de la incertidumbre y la estabilidad en mediciones de frecuencias.

La precisión de la medida del tiempo condiciona la precisión de la medida de cualquier parámetro físico ligado a él directa o indirectamente. En equipos de telecomunicaciones, la temporización del flujo de la información está gobernada por “bases de tiempo”, cuyo núcleo es un oscilador de precisión; a su vez, la precisión de este reloj determina los instantes operativos del equipo. Los equipos de telecomunicaciones y de adquisición de señales están sometidos a la acción conjunta de los clásicos tipos de ruido, caracterizados por su densidad espectral de potencia.

Los osciladores de precisión juegan un papel crucial en los equipos de comunicaciones de alta velocidad, navegación, seguimiento por satélite, exploraciones espaciales y en otras numerosas áreas. Su monitorización y test son en consecuencia determinantes con el fin del aseguramiento de la calidad de la operación.

Varios métodos y configuraciones de equipos han sido desarrollados para medir la deriva en frecuencia de un generador u oscilador. De todos, el método de “contabilizar intervalos de tiempo” (TIC; Time Interval Counter) es probablemente el que más se emplea debido a sus ventajas de coste, diseño simple, y excelente rendimiento en aplicaciones de caracterización de la deriva, incertidumbre y estabilidad en frecuencia, que involucre periodos de calibración o intervalos de promediado elevados.

La calibración consiste en comparar el dispositivo bajo test (generalmente un oscilador de cuarzo, rubidio o cesio) con una señal de referencia. Éste debe ser un oscilador de superiores prestaciones o un “estándar remoto trazable o transferible” que recibe una señal de radio enviada por un centro (o laboratorio) donde está el oscilador de cesio patrón mundial. La segunda es la solución mundialmente empleada en calibración de equipos electrónicos de comunicaciones y adquisición de datos, ya que no todos los laboratorios pueden permitirse poseer y mantener osciladores de cesio. Un estándar transferible recibe una señal de radio entregada por un oscilador de cesio remoto; esta señal de radio mantiene las características de estabilidad y precisión del oscilador de cesio al generar en el receptor una señal que se deriva del él. Incluso si un laboratorio posee un oscilador de cesio, es necesaria la calibración remota transferible.

Los estándares transferibles permiten la calibración trazable hacia un estándar remoto. La mayoría de estos equipos reciben señales trazables al estándar que mantiene NIST². Algunas señales son trazables porque son controladas de forma directa por NIST. Es este el caso de las transmitidas vía HF (alta frecuencia) por estaciones WWV y WWVH y las de LF (bajas frecuencias) producidas por la estación WWVB. Otras, como

² National Institute of Standards and Technology.- en Boulder, Colorado, EE.UU

las producidas por los sistemas GPS y LORAN-C son trazables porque sus referencias se comparan regularmente con la de NIST por medio de señales de radio. Fuera de EE.UU también se da trazabilidad debido a que los sistemas de referencia comparan su estándar de frecuencia con NIST.

Una vez introducido el problema, se tratan con más detalle todos los aspectos involucrados en las definiciones anteriores. La estructura del resto de la obra queda como sigue. A continuación (en el apartado o tema 2) se introduce el concepto de calibración en frecuencia y trazabilidad, sin profundizar en los estándares y sólo informando acerca de ellos (clasificación de los estándares en frecuencia). En el apartado 4 se describen las herramientas estadísticas de segundo orden empleadas en la caracterización de los distintos tipos de ruido en los dominios del tiempo y de la frecuencia (funciones de correlación y densidades espectrales de potencia). Acto seguido, en el apartado 5 se analizan los distintos tipos de ruido presentes en los circuitos electrónicos.

Los temas 6 y 7 tienen por fin describir y modelar las fuentes de ruido interno en transistores bipolares y amplificadores operacionales (son dos ejemplos concretos de ruido en dispositivos electrónicos). En el apartado 8 se expone, mediante un ejemplo la evaluación del ruido en una banda de frecuencias. Con esto quedan descritos los procesos de ruido en Electrónica, el modelado de las fuentes de ruido en algunos componentes y circuitos electrónicos, y algunos ejemplos de cuantificación de su efecto.

En el resto del capítulo se evalúa la desviación y la estabilidad de la frecuencia. La inestabilidad a corto plazo de una magnitud física (distinta al envejecimiento) se debe fundamentalmente a la acción de procesos de ruidos interno y externo (el ruido interno determina la estabilidad en los circuitos electrónicos). En estos últimos apartados del tema se exponen ejemplos que involucran series temporales de medidas en osciladores de precisión. Es de especial interés la conversión entre los dominios del tiempo y de la frecuencia, que muestra su faceta experimental en el análisis de los distintos procesos de ruido y en la identificación simultánea de distintos tipos de ruido, generados por ordenador.

2

Calibración en Frecuencia y Trazabilidad

La calibración en frecuencia tiene por fin evaluar la operación de los osciladores bajo test. Éstos generalmente son estándares en frecuencia, es decir, dispositivos que determinan el régimen de temporización de un equipo electrónico, y que constituyen patrones de comparación; es decir, un estándar puede compararse con otro. En la mayoría de las situaciones de calibración el dispositivo bajo test es un oscilador de *cuarzo, rubidio o cesio*.

Durante el proceso de calibración, el dispositivo objeto de la medida (bajo test) es comparado con una *referencia* que, a su vez, es un estándar cuyas especificaciones superan a las del oscilador evaluado en una relación establecida mediante convenio. En caso contrario, el proceso de calibración no tendría validez. Para establecer cuánto ha de superar la referencia al oscilador bajo test, se define la *relación de incertidumbre del test* (TUR; Test Uncertainty Ratio); se recomienda un TUR de 10:1, aunque si la calibración dura poco tiempo se puede emplear una relación de 5:1.

Una vez concluida, la calibración debe arrojar como resultado la cercanía de la frecuencia medida respecto a la *frecuencia nominal* del oscilador o fuente bajo test. La diferencia entre la frecuencia medida y la frecuencia nominal se denomina *desviación en frecuencia (frequency offset)*. La desviación en frecuencia se mantiene dentro de unos límites, establecidos por la *incertidumbre en frecuencia*. Por tanto, el resultado de la calibración debe incluir este último parámetro. De nada sirve proporcionar una desviación media en frecuencia si no se especifican los límites entre los que puede variar la desviación.

El usuario o cliente especifica los requisitos de desviación en frecuencia y su incertidumbre asociada. Si el oscilador no supera la prueba de calibración debe retirarse del servicio.

Las referencias empleadas en la calibración deben ser trazables, con el fin de llevar a cabo el proceso de calibración *in situ*; con la consecuente eliminación de efectos perjudiciales para la estabilidad y la precisión de los circuitos electrónicos. También se elimina la molestia de trasladar un equipo electrónico. La siguiente es la definición de trazabilidad establecida por la ISO (International Organization for Standardization):

Trazabilidad es la propiedad del resultado de una medida por la cual puede relacionarse con fuentes de referencia estandarizadas mediante el establecimiento de una cadena no interrumpida de comparaciones de incertidumbre conocida.

En los EE.UU la cadena no interrumpida de comparaciones tiene por fin el centro NIST. Los osciladores de este centro de investigación establecen o activan su

trazabilidad mediante los *estándares transferibles* o *trazables*. Estos dispositivos reciben y procesan señales de radio con el fin de producir frecuencias trazables hacia NIST.

Las señales de radio constituyen el vínculo o nexo desde el dispositivo bajo test hacia el laboratorio NIST; permitiendo el proceso de calibración remota trazable. En este tema se describe de forma somera el GPS; sistema que emplea las señales de radionavegación para conectar y establecer la calibración remota, sincronizando un receptor GPS con el estándar trazable *sito* en NIST, una vez se ha producido el enganche de fase con los satélites del sistema.

El *método de calibración* empleado en el laboratorio debe adecuarse a la directriz 25 de la ISO/IEC la cual establece que el laboratorio deberá seleccionar métodos que hayan sido publicados en foros internacionales y de reputación consabida.

La “pirámide” de la trazabilidad (figura 1) se emplea a menudo para ilustrar este concepto. La cadena de trazabilidad comienza con el sistema internacional (SI) de unidades, mantenido por el BIPM³. La unidad base en la metrología del tiempo y de la frecuencia es el segundo (una de las siete unidades básicas del SI) y se define como “la duración de 9.192.631.770 ciclos de la radiación asociada con una transición específica del átomo de cesio. La frecuencia, expresada en hercios, es una de las 21 unidades del SI que derivan de las unidades básicas, y se obtiene mediante la cuenta de eventos durante intervalos de 1 segundo de duración.



Fig. 1. “Pirámide” de la trazabilidad.

A continuación, hacia la base de la pirámide, encontramos los centros nacionales de metrología, que poseen estándares nacionales, y que se extienden a estándares regionales (laboratorios de calibración y test), a estándares de trabajo y, finalmente, a los instrumentos de medida usados a diario.

Como hemos comentado, en algunos campos de la metrología la trazabilidad queda establecida sólo a intervalos periódicos (desplazamiento de equipos al lugar de calibración). Sin embargo, como también se ha comentado, es posible establecer una trazabilidad continua, en tiempo real, a un instituto nacional de metrología. Los vínculos directos a estos centros nacionales se encuentran disponibles en forma de emisiones de señales denominadas UTC (Universal Time Coordinated); estas señales pueden transmitirse en forma de radio, teléfono o red de ordenadores. Los institutos nacionales de metrología deben acreditar su trazabilidad al BIPM con el fin de conseguir trazabilidad internacional.

³ Bureau International des Poids et Mesures (París)

La cadena de trazabilidad se puede establecer mediante control de señales por un centro nacional o con sólo su monitorización. La situación queda descrita en las figuras 2(a,b). Como servicio al usuario final, muchos centros nacionales de metrología distribuyen señales referenciadas a su escala de tiempos UTC. Esto permite al usuario final establecer un vínculo directo a este centro y completar consecuentemente su cadena de trazabilidad. La figura 2(a) muestra la situación en la que se emplea un servicio o centro de emisión de estas señales generadas en los institutos.

La figura 2(b) muestra cómo la trazabilidad puede también llevarse a cabo mediante señales que no están controladas por un instituto nacional (aunque sí deben estar monitorizadas y comparadas con su escala de tiempo UTC). Este tipo de trazabilidad puede establecerse mediante sistemas de radionavegación como LORAN-C y el GPS.

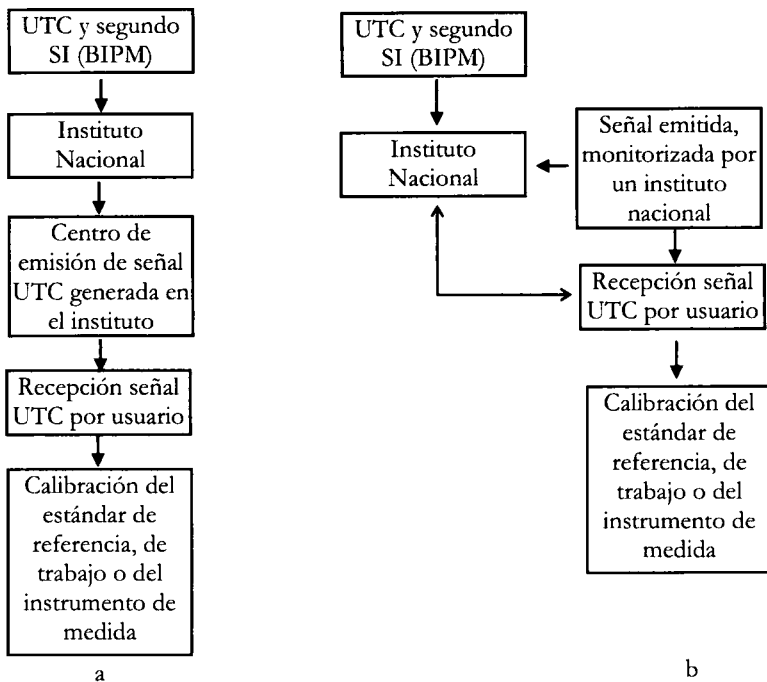


Fig. 2. Cadenas de trazabilidad para señales controladas (a) o monitorizadas (b) por un instituto nacional

El último vínculo (última flecha) es el que existe entre la referencia (estándar de referencia, de trabajo o instrumento de medida) empleada por el usuario final y la señal de emisión.

Básicamente, la incertidumbre asociada a la medida se concentra en los dos últimos vínculos de la figura 2(a). Las primeras incertidumbres se suelen despreciar. Las fuentes de incertidumbre son los receptores, las antenas, el software los equipos de test, los procedimientos de calibración y el error humano.

Una vez establecida la trazabilidad a un instituto nacional en un país, interesa que esta trazabilidad sea reconocida por otros países también. En esa línea existen

cooperaciones en el ámbito de la metrología como la NORAMET⁴ entre Canadá, Méjico y los EUA.

El estándar internacional para el tiempo y la frecuencia la escala de tiempo UTC mantenida por el BIPM. La labor del BIPM consiste en asegurar la uniformidad internacional de las medidas y de la trazabilidad al SI de unidades.

⁴ North American Metrology Cooperation

Estándares en Frecuencia

3.1 Osciladores de cuarzo

3.1.1 Resumen del principio operativo

Los osciladores de cuarzo empezaron a emplearse en el primer cuarto del siglo XX, aproximadamente en 1920, 40 años más tarde del descubrimiento de la piezoelectricidad, y rápidamente sustituyeron en el laboratorio a los dispositivos de péndulos como estándares de tiempo y de frecuencia. Son numerosas sus aplicaciones, que abarcan desde los relojes de pulsera hasta las redes de comunicaciones y sistemas de seguimiento espacial. Solamente los osciladores que se emplean en contadores electrónicos y otros instrumentos electrónicos requieren calibración.

El principio operativo del cristal de cuarzo es el *efecto piezoeléctrico*. El material sintético que compone el cristal de cuarzo se comporta como resonador mecánico; el cristal se expande y se contrae al ritmo en que se le aplica una tensión pulsatoria de frecuencia igual a la de resonancia del cristal. Esto sucede cuando el cristal forma parte de un lazo de realimentación. La *frecuencia de resonancia* depende del tipo de cristal y de sus dimensiones físicas.

La figura 3 muestra un circuito oscilador sinusoidal compuesto por un transistor de efecto campo como elemento amplificador, y por un cristal resonante en la red de realimentación. El amplificador es el encargado de reponer la energía que en ella se disipa. Al estudiar el circuito equivalente para pequeña señal, el modelo del cristal de cuarzo incluye sólo la inductancia y la capacidad en serie (se considera que el cristal resuena en modo serie). La resistencia en serie del cristal se suele despreciar para las condiciones (frecuencia) de oscilación. La bobina de “choke” (RFC) evita que el drenador se conecte a tierra en CC y proporciona amplificación en CA, para radiofrecuencias. Se demuestra que la frecuencia de oscilación del circuito viene dada por:

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_{eq}}} \qquad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Los osciladores de cuarzo son sensibles a las condiciones ambientales como la temperatura, la humedad, la presión y las vibraciones. Estos factores ambientales hacen variar su frecuencia de resonancia.

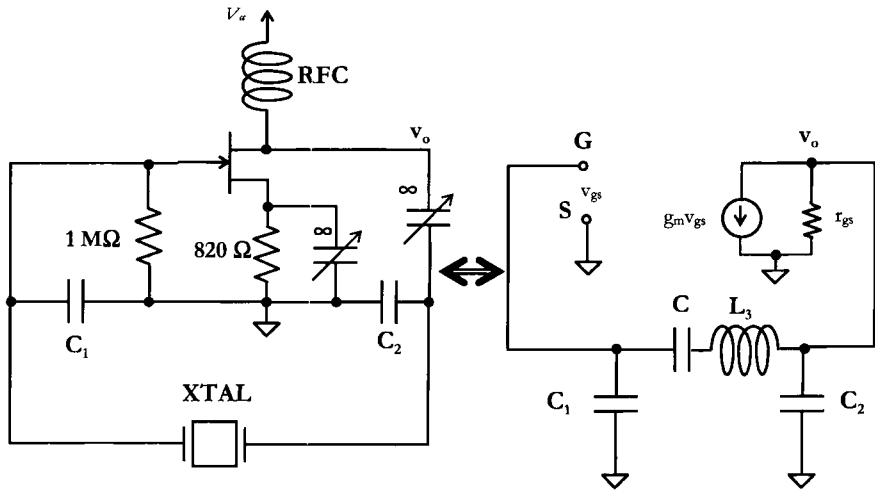


Fig. 3. Oscilador sinusoidal con cristal de cuarzo y circuito equivalente de pequeña señal.

Existen tres configuraciones de osciladores de cristal de cuarzo que se emplean comúnmente en instrumentos electrónicos de laboratorio, como fuentes de frecuencia. Estos tres tipos son los RTXO, los TCXO y los OCXO. En su diseño se ha utilizado el tipo de corte del cristal para compensar las fluctuaciones de temperatura. Otros modelos emplean técnicas de compensación. A continuación se describe brevemente el fundamento de cada modelo en el contexto del cambio térmico.

3.1.2 Efectos de la temperatura

La variación de temperatura constituye la influencia más perjudicial sobre la frecuencia de un oscilador de cuarzo. Por ejemplo, un oscilador que opera exactamente a 25 °C, con un coeficiente de temperatura⁵ de 5 ppm/°C, experimenta una desviación en frecuencia de 25 ppm con sólo 5 °C de aumento. La figura 4 muestra la variación de la frecuencia frente a la temperatura para un cristal de cuarzo con un corte de tipo BT. En ella se aprecia que la frecuencia se mantiene aproximadamente estable en un pequeño rango de temperaturas. Efectos similares tienen lugar para otros tipos de cortes, de ahí que se empleen técnicas de compensación.

El oscilador **RTXO** (room temperature crystal oscillator) usa cristales que han sido concebidos para experimentar el mínimo cambio de frecuencia sobre un rango de temperatura. Esto se consigue básicamente mediante la elección del corte del cristal. Por ejemplo, para un corte de tipo AT se ha comprobado que la variación máxima de la frecuencia fraccional en un rango de 0-50 °C es de $|\Delta f/f| = 2,5 \times 10^{-6}$. En un RTXO el cristal está herméticamente sellado, y se emplean componentes discretos para diseñar el oscilador.

Existen tres tipos de osciladores de cuarzo diseñados para compensar los efectos térmicos. En el oscilador **OCXO** (oven-controlled crystal oscillator) el cristal y los dispositivos sensibles a la temperatura se encuentran encerrados en una cámara de temperatura controlada (*oven*). Cuando se enciende por primera vez, debe transcurrir un periodo de calentamiento hasta que se estabilizan la temperatura de la cámara y la del

⁵ El coeficiente de temperatura depende del corte del cristal de cuarzo.

cristal. Durante este periodo, el comportamiento del oscilador evoluciona hacia la situación de oscilación nominal, o de régimen permanente. La temperatura en el interior de la cámara (oven) permanece constante incluso cuando la temperatura ambiente cambia. Un elemento calentador se emplea para mantener la temperatura de operación del cristal en el punto de inversión. Este es el punto de mínimo cambio de la frecuencia, y depende del corte del cristal.

Una alternativa al oscilador OCXO es el oscilador compensado en temperatura (**TCXO**; temperature-compensated crystal oscillator). En este oscilador, la salida de un sensor de temperatura (comúnmente un termistor o un condensador) actúa como tensión reguladora, que se aplica a un *varactor* (reactancia controlada por tensión). Este varactor provoca un cambio de frecuencia que es igual y opuesto al originado por el cambio de temperatura. Esta técnica es más barata que la anterior, pero menos efectiva. De ahí que los osciladores TCXO se empleen en pequeñas unidades portátiles que no exigen altas prestaciones en un amplio rango de temperaturas. En estos osciladores, se encapsula el cristal, los elementos de compensación y el circuito oscilador, en un mismo contenedor. Las características suelen superar en un factor de 5 al RTXO o menos que 5×10^{-7} en un rango de 0-50 °C.

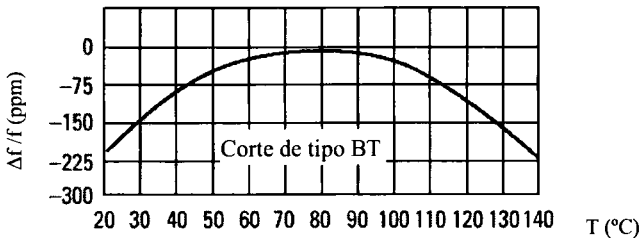


Fig. 4. Variación de la frecuencia frente a la temperatura para un cristal con un corte de tipo BT.

Por último, los osciladores **MCXO** (microcomputer-compensated crystal oscillator) emplean un microprocesador y técnicas digitales para efectuar la compensación de temperatura.

3.1.3 Envejecimiento: Estabilidad de la frecuencia a largo plazo

El envejecimiento consiste en un cambio gradual de la frecuencia y se evalúa durante días o meses. Es un efecto casi lineal y puede ser reversible. A menudo repercute en una disminución de la frecuencia de resonancia, lo que significa que el cristal ha aumentado de tamaño. Las causas del envejecimiento pueden ser diversas, desde la contaminación de la superficie del cristal, hasta cambios en su estructura. El movimiento vibratorio del cristal también puede contribuir al envejecimiento. Esto último sucede cuando el coeficiente de elasticidad del cristal se altera como consecuencia de una expansión o compresión inadecuada. Los osciladores de cuarzo de altas prestaciones deterioran su frecuencia a un ritmo aproximado de 5×10^{-9} $\mu\text{s}/\mu\text{s}$.

Con el fin de mantener la frecuencia del oscilador próxima al valor nominal, se realizan correcciones o ajustes periódicos. Esto se lleva a cabo adelantando o retardando la fase de la señal de salida, según la información recogida en un lazo de realimentación. Generalmente la frecuencia de un oscilador puede variarse unos ciclos realizando un pequeño cambio en la fase de la señal de realimentación.

3.1.4 Estabilidad en frecuencia a corto plazo

La estabilidad de la frecuencia a corto plazo viene determinada por el ruido acoplado al oscilador proveniente de sus componentes electrónicos. La figura 5 muestra cómo estas pequeñas variaciones se reflejan en la curva de envejecimiento del oscilador.

Las medidas a corto plazo se realizan típicamente promediando en cada segundo. Como veremos, las curvas representativas de la estabilidad a corto plazo muestran el cambio que experimenta la desviación típica de las variaciones de la frecuencia fraccional frente a distintos tiempos de promediado. Los osciladores de cuarzo poseen una excelente estabilidad a corto plazo. Un oscilador OCXO puede poseer una variación en tanto por uno de frecuencia (frecuencia fraccional) de 1×10^{-12} s/s.

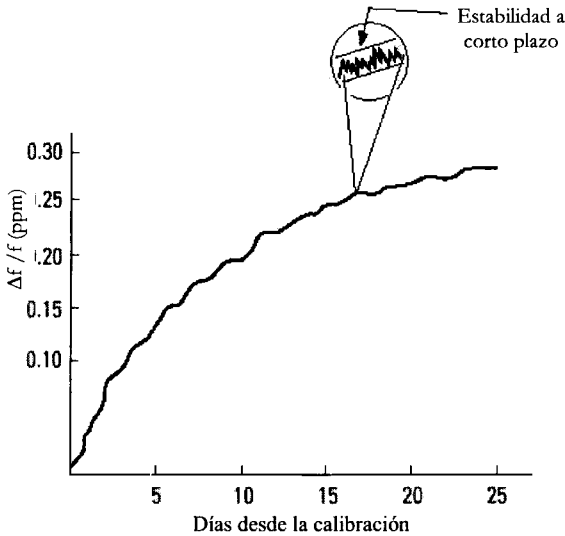


Fig. 5. Curva de envejecimiento. Estabilidad a corto plazo (en el dominio del tiempo) de los cambios de la frecuencia fraccional y su relación con el envejecimiento, a partir del punto de calibración.

3.1.5 Vibración y choque

Las vibraciones producidas en el cristal también pueden provocar variaciones en su frecuencia. Estas alteraciones pueden durar más que las producidas por una sacudida aislada, pero suelen ser menos dañinas porque a largo plazo, en término medio, se compensan. Por el contrario, una sacudida repentina⁶ puede producir un cambio en la frecuencia fraccional de 1×10^{-9} /g.

⁶ Las sacudidas se miden en unidades de g, que es la aceleración en el vacío: $9,81 \text{ m/s}^2$, medida de la aceleración

3.1.6 Interferencias electromagnéticas

Los motores y bobinados cercanos al oscilador pueden producir campos electromagnéticos que se acoplan a los circuitos electrónicos complementarios al oscilador de cuarzo. El empleo de toroides en el oscilador y las precauciones frente a estas fuentes de interferencias las reducen prácticamente a cero.

3.1.7 Apagado-encendido (reencendido)

Cuando un oscilador se apaga y luego se vuelve a encender, generalmente no volverá a oscilar a la misma frecuencia a la que había estado operando, aunque sí conserva la tasa de envejecimiento. Este efecto de histéresis se cuantifica en un orden de 10^8 .

3.2 Osciladores atómicos

3.2.1 Principios físicos

En un oscilador atómico los niveles discretos de energía de los átomos o moléculas que lo componen determinan su frecuencia de resonancia. Las leyes de la Mecánica Cuántica establecen que la energía de un sistema acotado, como un átomo o una molécula, posee ciertos valores discretos. Un campo electromagnético puede promocionar un átomo de un nivel energético a otro superior absorbiendo fotones o, por el contrario, un átomo puede emitir un fotón y caer a un nivel energético menor. La frecuencia de resonancia (f) de un oscilador atómico es la diferencia entre los dos niveles energéticos dividida por la constante de Planck (h):

$$f = \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Los osciladores atómicos se denominan *estándares intrínsecos* o *primarios*, ya que su frecuencia deriva de un fenómeno natural. Existen tres tipos principales de osciladores atómicos: estándares de rubidio, estándares de cesio y máseres de hidrógeno. Los tres incorporan un oscilador de cuarzo interno que es “enganchado” a la frecuencia generada por el átomo de interés.

El proceso de enganche a una frecuencia atómica resulta muy ventajoso, ya que desaparece la influencia de los factores que degradan la estabilidad a largo plazo en un oscilador de cuarzo. Esto es así porque la frecuencia atómica es menos sensible al medio ambiente que la frecuencia de resonancia de un cristal. Sin embargo, la estabilidad a corto plazo (su variabilidad con el ruido interno) no mejora en estos osciladores.

3.2.2 Osciladores de Rubidio

Son los osciladores atómicos más económicos y ofrecen la mejor relación precio/calidad de entre los atómicos. Presentan mucho mejores prestaciones que los osciladores de cuarzo a un coste mucho menor que el de los osciladores de cesio.

Estos osciladores operan a la frecuencia de resonancia del átomo de rubidio (^{87}Rb), 6.834.682.608 Hz. Esta frecuencia se sintetiza a partir de una inferior, generada por un oscilador de cuarzo (típicamente de 5 MHz). El resultado es una frecuencia muy

⁷ Traducción directa de *locked*

estable, con la estabilidad a corto plazo del cuarzo pero con la estabilidad a largo plazo mejorada.

Debido a la mejora de la estabilidad a largo plazo, estos dispositivos requieren menos ajustes que los osciladores de cuarzo. El offset de frecuencia se mantiene entre 5×10^{-10} y 5×10^{-12} , pudiéndose mantener en torno al valor 1×10^{-11} durante mucho más tiempo que en un cristal de cuarzo.

3.2.3 Osciladores de Cesio

El “segundo” del Sistema Internacional de unidades se mide en base a la frecuencia de resonancia del átomo de cesio (^{133}Cs), que es de 9.192.631.770 Hz. Estos osciladores presentan una frecuencia muy próxima a su frecuencia nominal (*name plate*) y el deterioro por envejecimiento es inapreciable. La escala internacional de tiempo (UTC) se deriva de promediar un conjunto de osciladores de cesio. Presentan un offset de frecuencia de 5×10^{-12} .

El elemento más importante de un oscilador de cesio es el tubo de rayos, que produce la frecuencia de resonancia del oscilador que, a su vez, se engancha con la frecuencia de un oscilador de cuarzo. Este tubo necesita de monitorización continua, que asegure que entrega la frecuencia estipulada, y su vida oscila entre 3 y 10 años. El coste es una parte sustancial del oscilador y resulta elevado.

3.2.4 Máseres de Hidrógeno

Es el más costoso de los estándares en frecuencia. Los pocos que existen están en laboratorios internacionales de calibración. “MASER” es el acrónimo de **M**icrowave **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation, y emplean la frecuencia de resonancia del átomo de hidrógeno, que es de 1.420.405.752 Hz.

Hay dos tipos de máseres de hidrógeno, activos y pasivos. El máser activo oscila espontáneamente y un oscilador de cuarzo se engancha en fase a esta frecuencia de oscilación. El máser pasivo opera enganchando en frecuencia un oscilador de cuarzo.

Ambos tipos poseen mejor estabilidad a corto plazo que los osciladores de cesio. Sin embargo, ya que el comportamiento de un máser de hidrógeno depende de numerosos factores ambientales, posee una incertidumbre en frecuencia mayor que la de los osciladores de cesio.

La tabla 1 resume las características de los principales osciladores empleados en bases de tiempo, incluyendo parámetros de osciladores bien diseñados:

Tipo	Envejecimiento típico	Deriva térmica (5°C de aumento)	Desviación en frecuencia permisible	Típico calentamiento	Estabilidad (varianza de Allan)
RTXO	3×10^{-7} /mes	5×10^{-6}	60 Hz	30 minutos	1×10^{-9}
TCXO	1×10^{-7} /mes	1×10^{-6}	13 Hz	3 horas	1×10^{-10}
OCXO	5×10^{-10} /día	5×10^{-10}	150 mHz	3 días	5×10^{-12}
Rb	1×10^{-11} /mes	5×10^{-12}	400 μHz	4 horas	7×10^{-12}
Cs	Ninguno (estándar primario)	3×10^{-12}	6 μHz	45 minutos (2,5 ns/hora)	1×10^{-11}

Tabla 1. Características de los osciladores comúnmente empleados en bases de tiempo.

3.3 Estándares transferibles. El GPS

El oscilador de referencia en un proceso de calibración en frecuencia es un dispositivo de superiores prestaciones al dispositivo bajo test o un estándar transferible, que recibe una señal de radio. Todos los estándares transferibles reciben una señal que tiene como fuente un oscilador de cesio, y esta señal proporciona al usuario una frecuencia que deriva de la del oscilador de cesio. Esto supone un beneficio ya que no todos los laboratorios pueden permitirse el lujo de mantener un oscilador de cesio.

Los estándares transferibles permiten la calibración trazable hacia un estándar remoto. La mayoría reciben señales trazables al estándar que mantiene NIST. Algunas señales son trazables porque son controladas de forma directa por NIST. Es este el caso de las transmitidas vía HF por estaciones WWV y WWVH y las de LF, producidas por la estación WWVB. Otras, como las producidas por los sistemas GPS y LORAN-C son trazables porque sus referencias se comparan regularmente con la de NIST por medio de señales de radio. Fuera de EE.UU también se da trazabilidad, debido a que los sistemas de referencia comparan su estándar de frecuencia con NIST.

El sistema de posicionamiento global (GPS) posee la ventaja de ofrecer un camino no interrumpido entre el transmisor y el receptor, y posee una incertidumbre de $\pm 5 \times 10^{-13}$ /día. La mayoría de los receptores GPS incorporan una salida de 1 pps (pulse per second) y algunos proporcionan 1 kHz y al menos una de las salidas estandarizadas (1, 5 ó 10 MHz).

Cuando el receptor GPS se enciende, realiza un barrido del cielo con el fin de localizar los 4 satélites que le permiten enganchar. Calcula sus coordenadas de latitud, longitud y altitud, y produce su frecuencia sincronizada.

La incertidumbre en frecuencia del receptor es menor debido que operan promediando la información proveniente de los satélites.

Una limitación del GPS es que un instituto no puede monitorizar todos los satélites simultáneamente.

Caracterización Analítica de los Procesos de Ruido. Correlación y Densidades Espectrales

4.1 Ruido y señales aleatorias. Función de autocorrelación

4.1.1 Definición de ruido

En general, se denomina ruido a toda señal no deseada que se superpone a las señales que portan la información, consideradas como señales de interés.

El ruido eléctrico se genera en componentes y circuitos electrónicos debido a las fluctuaciones aleatorias de la corriente y de la tensión en los procesos de conducción eléctrica. Otra causa de generación es la debida a la impurezas en los dopajes y a las imperfecciones en las interfases semiconductoras.

En primera instancia, el tratamiento y la caracterización de las variables aleatorias se realizan mediante la función de autocorrelación.

4.1.2 Función de autocorrelación de una variable aleatoria continua

Dada una variable aleatoria continua $x(t)$, que representa un proceso estacionario⁸, se define su función de autocorrelación en el paso o *lag*⁹ τ como la siguiente integral:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty, -T/2}^{\infty, T/2} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

Esta función permite deducir si existe relación o parecido (en término medio) entre cada muestra y la anterior, retrasada en un tiempo τ . Establece el parecido de la señal con ella misma cuando ha sido retardada τ segundos.

Un caso particular de la función de autocorrelación es el valor cuadrático medio de la señal, que resulta de evaluar la función de autocorrelación para el retraso $\tau = 0$. En efecto,

⁸ Un proceso se considera estacionario si se conservan sus estadísticos; se considera en este capítulo estacionario en media y varianza.

⁹ Retraso o retardo

$$R_x(\tau = 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty, -T/2}^{\infty, T/2} x(t) \cdot x(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty, -T/2}^{\infty, T/2} x(t)^2 dt = \overline{x^2}$$

Si la señal es completamente aleatoria, entonces:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \neq 0 \\ \frac{1}{x^2} \rightarrow \infty & \text{si } \tau = 0 \end{cases}$$

Esto significa que la señal no tiene parecido con otra señal que resulta de ella misma retardada, sea cual sea el retardo, y con ella misma sin retardar se parece “mucho”.

Con el fin de cuantificar la dependencia estadística entre dos variables x e y se define la función de correlación mutua o función de correlación cruzada¹⁰ entre dos variables aleatorias continuas:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty, -T/2}^{\infty, T/2} x(t) \cdot y(t - \tau) dt$$

Si las dos señales aleatorias son independientes, entonces no existe ningún parecido entre ellas, y se verifica que su correlación mutua es cero: $R_{xy}(\tau) = 0$.

Como consecuencia, si la variable aleatoria x se puede expresar como suma de dos variables independientes x_1 y x_2 , entonces se verifican las relaciones:

$$R_x(\tau) = R_{x_1}(\tau) + R_{x_2}(\tau) \quad \overline{x^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2}$$

4.1.3 Estimadores de los estadísticos de un proceso aleatorio

En la práctica, los datos de una serie temporal de medidas se obtienen al muestrear la señal analógica real, proveniente de sensores. Tenemos pues variables aleatorias discretas, y se deben emplear estimadores para realizar su caracterización estadística.

Si “ ξ ” es un estadístico de la variable aleatoria “ $x(n)$ ” (que caracteriza estadísticamente a la variable), representaremos un estimador de “ ξ ” basado en “ N ” muestras de la forma $\hat{\xi}_N$. Como el proceso $x(n)$ es aleatorio, el estimador $\hat{\xi}_N$ del estadístico “ ξ ” también es una variable aleatoria, y será tanto mejor estimador cuanto más cercano al estadístico que estima esté. Es en este punto donde juegan su papel las nociones de sesgo y consistencia de un estimador.

El sesgo de un estimador se define como la diferencia entre el valor esperado del estimador y su valor real:

$$E\left\{\hat{\xi}_N\right\} - \xi$$

El estimador se considera sin sesgo (“unbiased”) cuando el sesgo es cero, es decir, cuando el valor esperado del estimador coincide con el valor real del estimador:

¹⁰ Cross-correlation

$$E\left\{\hat{\xi}_N\right\} - \xi = 0$$

Generalmente, esto se cumple sólo cuando el número de muestras es muy elevado ($N \rightarrow \infty$), en cuyo caso se habla de un estimador asintóticamente sin sesgo (“asymptotically unbiased”).

Por sí mismo, el sesgo no caracteriza completamente un estimador. Si éste es bueno, se espera que tome valores en torno al valor verdadero del estimador. Con el fin de cuantificar esta desviación se define la cantidad promedio de la desviación cuadrática:

$$E\left\{\left|\hat{\xi}_N - \xi\right|^2\right\}$$

El estimador se denomina “asintóticamente consistente” si la desviación cuadrática media tiende a cero cuando $N \rightarrow \infty$. Esta condición recibe a menudo el nombre de “consistencia de valor cuadrático medio”.

A partir de este punto, en lo que sigue, se consideran estimadores, aunque por comodidad se prescinde del “gorro” sobre la variable.

4.1.4 Autocorrelación de una variable discreta

A continuación se define el coeficiente de autocorrelación para variables discretas, generalizándose la definición para variable de media no nula. El coeficiente de autocorrelación para el retraso τ y para un conjunto de N datos se define como:

$$r_x(\tau) = \frac{c_x(\tau)}{c_x(0)}$$

donde $c_x(\tau)$ es la función de autocovarianza o autocorrelación, y $c_x(0)$ es la varianza. En efecto:

$$c_x(\tau) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=1}^{N-\tau} [x(l) - \bar{x}] \cdot [x(l + \tau) - \bar{x}]$$

$$c_x(0) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=1}^N [x(l) - \bar{x}] \cdot [x(l) - \bar{x}] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=1}^N [x(l) - \bar{x}]^2 = \sigma_x^2$$

Por ejemplo, para $\tau = 2$, se compara cada muestra con aquella tomada dos instantes antes.

El periodo de muestreo del equipo electrónico de adquisición de datos es τ_0 y determina la resolución en el dominio del tiempo. Por tanto, el retraso¹¹ es un múltiplo entero del periodo de muestreo, $\tau = n\tau_0$. Por otra parte, obsérvese que el coeficiente de autocorrelación está comprendido entre -1 y 1 .

¹¹ El retraso suele denominarse también tiempo de medida o de promediado.

El estimador considerado es un estimador con sesgo (“biased”). Así, se definen los dos estimadores, sesgado y no sesgado según:

$$c_{x,biased}(\tau) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{l=1}^{N-\tau} [x(l) - \bar{x}] \cdot [x(l+\tau) - \bar{x}]$$

$$c_{x,unbiased}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \cdot \sum_{l=1}^{N-\tau} [x(l) - \bar{x}] \cdot [x(l+\tau) - \bar{x}]$$

La autocovarianza es muy parecida a la convolución entre dos secuencias o series temporales. Gráficamente es muy sencillo de observar si consideramos esta función como la multiplicación punto a punto de la secuencia con ella misma retrasada un retraso τ . Por ejemplo, para $N=10$ y $\tau=1$.

$$\begin{array}{cccccccccc} x(l+1) \rightarrow & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ x(l) \rightarrow & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Y quedan 9 términos, productos en la sumatoria (se supone el proceso con media nula):

$$c_{x,unbiased}(\tau=1) = \frac{1}{10-1} \cdot \sum_{l=1}^{10-1} [x(l) - \bar{x}] \cdot [x(l+1) - \bar{x}] = \frac{1}{9} \cdot \sum_{l=1}^9 x(l) \cdot x(l+1) =$$

$$x(1) \cdot x(2) + x(2) \cdot x(3) + x(3) \cdot x(4) + x(4) \cdot x(5) + x(5) \cdot x(6) + x(6) \cdot x(7) + x(7) \cdot x(8) + x(8) \cdot x(9) + x(9) \cdot x(10)$$

Obsérvese que al emplear un estimador sin sesgo, se divide entre el número de términos considerados al evaluar la autocovarianza para ese periodo de muestreo, mientras que en el estimador sesgado se divide siempre entre el total de las muestras, N .

4.1.5 Interpretación de las gráficas de autocorrelación y análisis exploratorio de datos

Las gráficas de autocorrelación representan el coeficiente de autocorrelación frente al retraso o “lag” $\tau = n\tau_0$. Se emplean como herramienta para cuantificar o establecer una primera aproximación del carácter aleatorio de un conjunto de datos. Si la variable es aleatoria, las gráficas de autocorrelación deberían ser cero prácticamente desde el primer retraso o “lag” (a partir del primero que siempre vale la unidad). Si la variable no es aleatoria entonces una o más de las autocorrelaciones será distinta de cero significativamente. Las gráficas obtenidas han sido obtenidas mediante programación con MATLAB.

Por ejemplo, consideremos la serie temporal de datos de la figura 6 (*run sequence plot*¹²), que incluye $N=200$ medidas correspondientes a la desviación de un haz electrónico cuando es sometido a una perturbación. El muestreo se ha realizado a una velocidad de 10.000 muestras por segundo (10 kHz); por tanto, dos muestras están separadas por 0,1 ms. Se trata de estudiar el carácter de la perturbación. En ella se aprecian fluctuaciones en la posición, cuyo carácter aleatorio se debe cuantificar o caracterizar. En principio, los datos parecen no aleatorios, ya que no se aprecian

¹² Se utiliza la notación empleada en el análisis de datos en por exploración (EDA; Exploratory Data Analysis)

cambios significativos en sus posiciones (éstas parecen acotadas), en su área de posicionamiento. De hecho, a simple vista, aparenta ser un movimiento oscilatorio.

Existen gráficas previas a la de autocorrelación que pueden dar una idea aproximada de la relación de los datos entre sí. Así, la figura 7 muestra la curva que relaciona cada medida con su adyacente (*lag plot*). En ella se aprecian algunos datos que quedan fuera de la distribución (*outliers*), pero la mayoría de las medidas dan lugar a una figura geométrica; además esta figura es una elipse. En consecuencia, se corrobora que no es válida la hipótesis de aleatoriedad. Además, como es una elipse, probablemente la señal se componga predominantemente de una sola componente espectral. Esto se confirma más adelante.

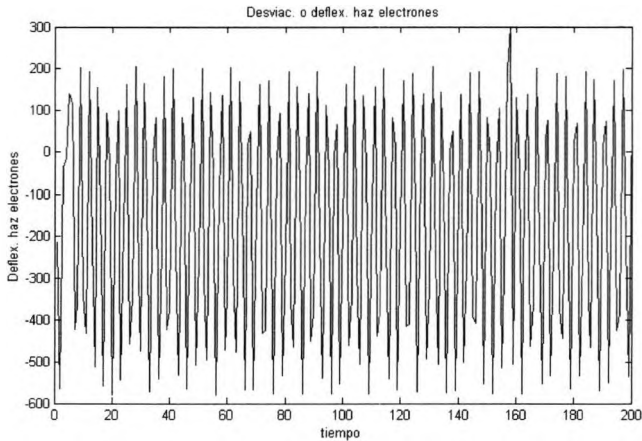


Fig. 6. Secuencia de datos correspondientes a la deflexión del haz electrónico respecto a la posición de reposo cuando es sometido a una perturbación. Suponemos que las unidades no son de interés.

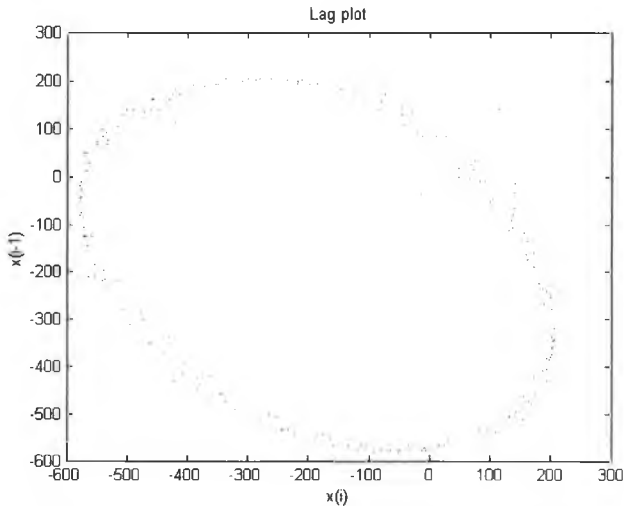


Fig. 7. "Lag plot" de los datos de desviación del haz electrónico.

La figura 8 muestra la curva de autocorrelación de los datos de la secuencia temporal de la figura 6. De ella se deduce que la serie temporal de medidas no exhibe un comportamiento aleatorio. Además podemos entrever que posee un alto grado de correlación cuando se estudian los primeros “lags”. Además, la oscilación en torno a cero del coeficiente de autocorrelación permite predecir que los datos son periódicos. Esta hipótesis se corrobora calculando el espectro de la serie temporal, que se muestra en la figura 10. En él se aprecia que existe una frecuencia o componente espectral dominante (3000 Hz), que se empleará para plantear el modelo cuantitativo según un esquema sinusoidal. La figura 9 muestra la función de autocorrelación “sin sesgo” (“unbiased”).

Como se ha comentado, los estimadores de la función de correlación se distinguen por su opción de normalización. Ésta puede realizarse con sesgo (“biased”) o sin sesgo (“unbiased”). En esta última se promedia entre los términos considerados en cada sumatorio. Si se emplea la opción “biased” se considera el conjunto formado por todos los datos; y como consecuencia la función de autocorrelación irá disminuyendo con el retraso, como se aprecia en la figura 8. En la figura 9 se aprecia que la oscilación de la función estimadora se conserva y no se extingue, como sucedía con la opción “biased”. Por último, con el fin de obtener una mayor resolución en el dominio de la frecuencia se muestra en la figura 11 una versión sin pérdidas del espectro de la serie temporal. En ella se ha utilizado una ventana de *Hanning*.

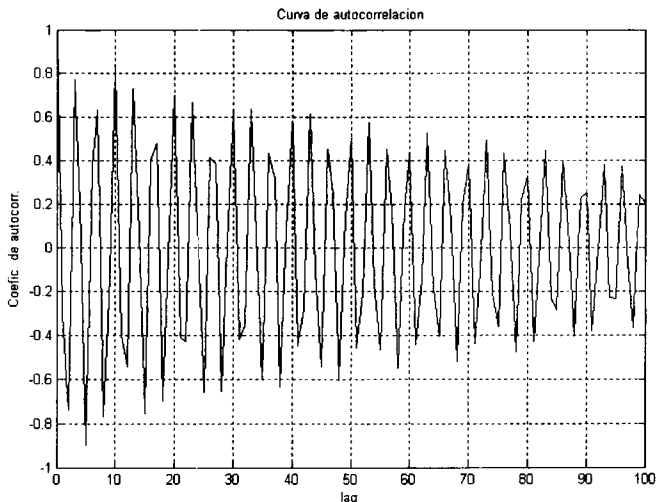


Fig. 8. Coeficiente de autocorrelación, con la opción de normalización “biased” (promediando entre el total de términos, N), frente a los distintos retrasos o “lags”. Obsérvese cómo disminuye porque se van considerando cada vez menos términos y se divide siempre entre “ N ”.

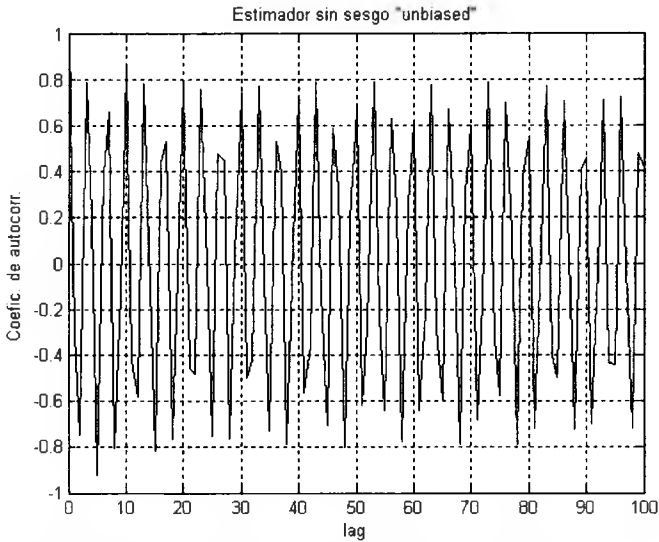


Fig. 9. Gráfica del coeficiente de autocorrelación sin sesgo, es decir, con la opción de normalización "unbiased" (promediando entre el total de términos considerados en cada suma, $N-\tau$), frente a los distintos retrasos o "lags". Obsérvese cómo se conserva la oscilación.

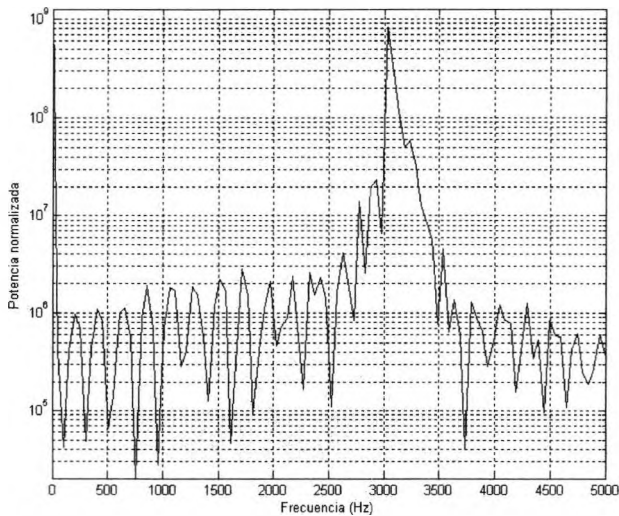


Fig. 10. Espectro de potencia de la serie temporal correspondiente a las deflexiones del haz electrónico. Se aprecia una frecuencia dominante en los 3000 Hz, por lo que el modelo senoidal es el más adecuado. No se ha empleado ninguna función "ventana".

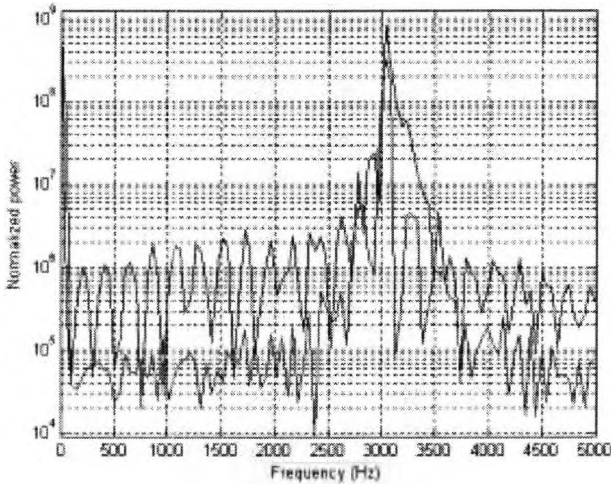


Fig. 11. Comparación de los espectros de potencia con y sin pérdidas (inferior) de la serie temporal de deflexiones del haz electrónico.

A continuación se tratan series temporales correspondientes a los procesos de ruido que podemos encontrar en la Naturaleza, y en particular en los circuitos electrónicos. Primero se analizan sus densidades espectrales, y luego su modelado en circuitos electrónicos.

4.2 Densidades espectrales de ruido

El ruido en los circuitos electrónicos se manifiesta (y se modela) a través de fuentes de tensión, $v_n(t)$, o de intensidad, $i_n(t)$ ¹³, y se cuantifica mediante sus valores eficaces (valor cuadrático medio), promediándose en un tiempo prefijado T . En efecto, si se consideran señales en el dominio del tiempo, sus valores eficaces de tensión y de corriente resultan:

$$V_n = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v_n^2(t) dt} \quad I_n = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_n^2(t) dt}$$

En el dominio de la frecuencia, debe considerarse la contribución de cada una de las componentes espectrales (señales de un tono o frecuencia) al valor eficaz final. Como los espectros son continuos, se introduce el concepto de densidad espectral. Las densidades espectrales de tensión e intensidad de ruido se definen respectivamente según:

$$G_V(f) \equiv v_n^2(f) = \frac{dV_n^2}{df} \left(\frac{V^2}{\text{Hz}} \right); \quad G_I(f) \equiv i_n^2(f) = \frac{dI_n^2}{df} \left(\frac{A^2}{\text{Hz}} \right)$$

¹³ El subíndice “n” de las magnitudes hace referencia al término *noise*

Las densidades espectrales permiten calcular los valores eficaces de potencia, tensión e intensidad dentro de una banda de frecuencias (lo propio para los circuitos electrónicos). En todo el espectro se tienen las siguientes magnitudes:

- De potencia: $G(f)$, $P_{media} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(w) dw \quad (W)$
- De tensión: $G_V(f)$, $\overline{v_n^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_V(f) df = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_V(w) dw \quad (V^2)$
- De intensidad: $G_I(f)$, $\overline{i_n^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} G_I(f) df = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G_I(w) dw \quad (A^2)$

El teorema de Wiener-Khinchine establece la relación entre la densidad espectral de potencia de una señal y su coeficiente de autocorrelación, mediante las transformadas de *Fourier* directa e inversa.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau \quad r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(w) \cdot e^{jw\tau} dw$$

Por ejemplo, en el caso de un ruido blanco, la densidad espectral es constante, y consiste en una curva plana, independiente de la frecuencia (variable f). Por tanto,

$$G(w) = k \Rightarrow r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot e^{jw\tau} dw = k \cdot \delta(\tau)$$

Esto significa que la función de autocorrelación sólo vale la unidad para el retraso inicial 0, es decir, cuando se correlaciona la señal con ella misma. Si correlacionamos la señal con ella misma, pero esta vez desplazada, el coeficiente de autocorrelación es nulo, indicando que no existe parecido alguno entre la señal de interés y ella misma desplazada. En efecto, la demostración es inmediata sin más que considerar la definición de la función delta de *Dirac*.

$$G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} k \cdot \delta(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau = k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-jw\tau} d\tau =$$

$$\text{como } \begin{cases} \delta(\tau) = 1, \tau = 0, e^{-jw\tau} = 1 \\ \delta(\tau) = 0, \tau \neq 0 \end{cases} \rightarrow G(w) = k$$

La anulación de la función de autocorrelación para cualquier retardo indica que el proceso considerado es aleatorio.

Como consecuencia de lo anterior se concluye que la varianza de una señal es el valor medio de la densidad espectral de potencia. Es decir, la potencia media de una señal es su varianza. Por ejemplo, si el proceso o señal de interés (considerado con media nula) posee una densidad espectral $G(\omega)=G$ (cte), y posee un ancho de banda $B=f_H-f_L$, entonces:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) d\omega = \frac{G}{2\pi} \cdot \int_{\omega_L}^{\omega_H} d\omega = \frac{G}{2\pi} \cdot [\omega_H - \omega_L] = G \cdot B$$

A continuación se estudia, mediante ejemplos, el modelado de las fuentes de ruido y su efecto en los circuitos electrónicos. Se comienza con una descripción de los tipos de ruido.

5

Fuentes y Evaluación de los Efectos del Ruido sobre los Circuitos Electrónicos

En este capítulo se describen las fuentes de ruido interno en los dispositivos electrónicos y se expone la técnica de evaluación en la banda de frecuencias considerada.

5.1 Valores de tensión y corriente eficaces de ruido

Una vez calculadas las densidades espectrales, pueden calcularse los valores eficaces de tensión o intensidad dentro de una banda de frecuencias ($f_2 - f_1$). El valor eficaz de tensión en esa banda de frecuencias viene dado por:

$$V_n = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_n^2(f) df} \quad (V_{rms})$$

Si las fuentes de ruido no están correlacionadas, la fuente de ruido resultante equivale a un único generador de ruido cuyo valor eficaz al cuadrado es la suma de los valores eficaces de las fuentes de ruido consideradas individualmente:

$$V_n^2 = \sum_{i=1}^N V_{in}^2$$

Para evaluar los efectos del ruido en la salida de un circuito se obtiene la función de transferencia que relaciona la tensión de salida con la fuente de ruido considerada. La fuente de ruido se contempla entonces como la única entrada del circuito, que contribuye a la salida, y al multiplicarla por la función de transferencia se obtiene la tensión o corriente de ruido resultante a la salida, debida a esa fuente. El resultado depende de la frecuencia y se denomina DER (**D**ensidad **E**spectral de **R**uido) de la tensión de salida del circuito. Para evaluar los efectos del ruido dentro de una banda de frecuencias se debe realizar la integral de la DER de la salida.

5.2 Fuentes de ruido interno

5.2.1 Dos tipos de ruido muy frecuentes

Los dos tipos de ruido más frecuentes son el ruido blanco y el ruido rosa. El primero se caracteriza por tener una densidad espectral y potencia constante en toda la banda de interés. El ruido rosa se caracteriza por poseer potencia constante por década. Sus densidades espectrales son:

$$v_{bn}^2(f) = k_b^2 \quad v_m^2(f) = \frac{k_r^2}{f}$$

Empleando logaritmos, el ruido rosa queda:

$$v_m(f) = \frac{k_r}{\sqrt{f}} \rightarrow \log(v_m) = \log(k_r) - (1/2) \cdot \log f$$

Esto significa que la pendiente es de $-0,5$ dB/dec, y para $f = 1$ Hz toma el valor de la constante k_r .

A continuación se describen los tipos de ruido que afectan a los equipos electrónicos bajo una doble perspectiva: su origen y el planteamiento de la densidad espectral de ruido.

5.2.2 Ruido blanco

Existen dos tipos de ruido blanco según sea su origen y densidad espectral (de tensión o corriente).

Ruido térmico o Johnson. Estas son sus características:

- Toda resistencia pasiva es un generador de *ruido térmico* o *Johnson*.
- Este tipo de ruido se debe al movimiento térmico aleatorio de los electrones o portadores de carga, y es independiente de la corriente.
- Su densidad espectral es constante y proporcional a la temperatura absoluta T y a la resistencia eléctrica. En la práctica, este ruido se modela utilizando un generador de tensión en serie con la resistencia, y su valor es:

$$G_V(f) = v_{Rn}^2(f) = 4k_B TR \Rightarrow \overline{v_{Rn}^2} = \int_{-\infty, f_L}^{+\infty, f_H} v_{Rn}^2(f) df = 4k_B TR \cdot \Delta f \quad \Delta f \equiv f_H - f_L,$$

donde k_B es la constante de *Boltzmann* ($1,38 \times 10^{-23}$ J/K), T es la temperatura absoluta (K), y R el valor de la resistencia (Ω).

- Por ejemplo, para $R=1$ k Ω y $T=300$ °K se tiene:

$$v_{Rn}^2(f) = 4k_B TR = 4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 1000 = 1,656 \cdot 10^{-17} \left(\frac{V^2}{Hz} \right)$$

$$v_{Rn}(f) = \sqrt{v_{Rn}^2(f)} = \sqrt{1,656 \cdot 10^{-17} \left(\frac{V^2}{Hz} \right)} = 4,069398 \cdot 10^{-9} \left(\frac{V}{\sqrt{Hz}} \right) \cong 4 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)$$

$$\overline{v_{Rn}^2} = \int_{-\infty, f_L}^{+\infty, f_H} v_{Rn}^2(f) df = 1,656 \cdot 10^{-17} \left(\frac{V^2}{Hz} \right) \cdot \Delta f (Hz) = 1,656 \cdot 10^{-17} \cdot \Delta f (V^2)$$

$$V_n = \sqrt{\overline{v_{Rn}^2}} = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_{Rn}^2(f) df} = \sqrt{\overline{v_{Rn}^2}} \cong 4 \cdot \sqrt{\Delta f} \text{ (nV r.m.s.)}$$

- El ruido térmico puede representarse, opcionalmente, por generadores de tensión o de intensidad, representaciones serie (generador de tensión en serie con una resistencia) y paralelo (generador de corriente en paralelo con una resistencia):

$$\overline{v^2} = 4k_B TR \cdot \Delta f \quad \frac{\overline{i^2}}{R^2} = 4k_B T \frac{1}{R} \cdot \Delta f$$

Ruido "Shot" (Schottky) o de disparo. Estas son sus características:

- Tiene su origen en el carácter discreto de los portadores de carga.
- Está asociado a una corriente de polarización, generalmente en diodos y transistores bipolares (polarizados en activa). La corriente de difusión se manifiesta mediante una distribución de pulsos de corriente de anchura muy pequeña, τ , que es aproximadamente el tiempo que emplea un portador de carga en atravesar la región de deplexión, o de carga espacial. La figura 12 muestra la corriente en función del tiempo.

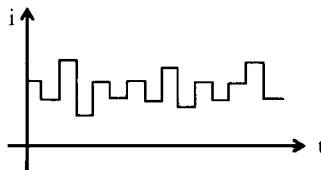


Fig. 12. Ruido "Shot" típico. La anchura de cada pulso es τ . Se ilustra una posible evolución de la corriente de polarización.

- El paso de los portadores por la unión semiconductor es un proceso aleatorio y depende de la energía que posea el portador de carga y de la orientación de su vector velocidad. En consecuencia, la corriente directa no es constante y adopta la forma de la figura 12, compuesta por pulsos de corriente aleatorios, todos con la misma anchura.
- La densidad espectral de corriente es constante para frecuencias $f \ll 1/\tau \approx 10 - 1000$ GHz. Para evaluar el ruido presente en una banda de frecuencias se dispone de la información del valor cuadrático medio de la corriente.

$$G_I(f) = i_n^2(f) = 2qI_{CC} \Rightarrow \overline{i_n^2} = \int_{-\infty, f_L}^{+\infty, f_H} i_n^2(f) df = 2qI_{CC} \cdot \Delta f \quad \Delta f \equiv f_H - f_L$$

- La densidad espectral de corriente presenta una respuesta en frecuencia del tipo paso-bajo, como muestra la figura 13, cuya frecuencia de corte es la inversa de la constante de tiempo.

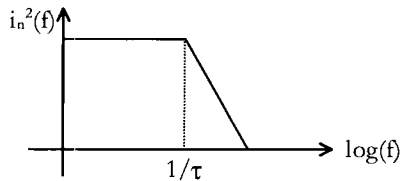


Fig. 13. Respuesta en frecuencia asintótica de la densidad espectral de corriente del ruido tipo "Shot".

Los ruidos estudiados hasta el momento, térmico y "Shot", son indistinguibles en un circuito, ya que poseen densidades espectrales constantes, y el diodo en conducción se modela por una resistencia, situación que se muestra en la figura 14.

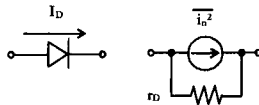


Fig. 14. Modelo equivalente del diodo.

Por ejemplo, en el caso de un diodo, su ruido "Shot" asociado es: $\overline{i_n^2} = 2qI_D \cdot \Delta f$. Si por el diodo circula una corriente de $I_D = 1 \text{ mA}$, en un ancho de banda $\Delta f = 1 \text{ MHz}$, entonces:

$$\overline{i_n^2} = 2qI_D \cdot \Delta f = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ (C)} \cdot 10^{-3} \text{ (A)} \cdot 10^6 \text{ (Hz)} = 3,2 \cdot 10^{-16} \text{ (A}^2\text{)}$$

$$I_n = \sqrt{\overline{i_n^2}} = 1,7888544 \cdot 10^{-8} \approx 18 \text{ (nA r.m.s.)}$$

Con el fin de comprobar la equivalencia entre ambos tipos de ruido (el térmico y el shot) se considera la resistencia directa del diodo (r_D) y la caída de tensión que en ella produce la corriente anterior.

$$r_D = \frac{k_B \cdot T}{q \cdot I_D} \quad V_n = I_n \cdot r_D \approx 465 \text{ (nV r.m.s.)}$$

Esto significa que el ruido del diodo se modela también por esta fuente de tensión.

Ruido de avalancha.- Posee las siguientes características:

- Se produce en uniones *pn* que conducen en inverso mediante un proceso de multiplicación por avalancha (diodos *zener*).

- Debido al fenómeno de multiplicación, el ruido producido es mucho mayor que el ruido de disparo para la misma corriente.
- Un valor típico, para una corriente de valor $I_{\zeta}=0,5 \text{ mA}$ es:

$$\overline{v_Z^2} = \int_{-\infty, f_L}^{+\infty, f_H} v_Z^2(f) df = 10^{-14} \left(\frac{V^2}{\text{Hz}} \right) \cdot \Delta f (\text{Hz}) = 10^{-14} \cdot \Delta f (V^2)$$

Este es un ruido equivalente al ruido térmico en una resistencia de 600 k Ω . En efecto:

$$\begin{aligned} v_{Rn}^2(f) &= 4k_B TR = 4 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 600000 = 9,936 \cdot 10^{-15} \\ &= 0,9936 \cdot 10^{-15} \cong 10^{-14} \left(\frac{V^2}{\text{Hz}} \right) \end{aligned}$$

5.2.3 Ruido con densidad espectral inversamente proporcional a la frecuencia

Ruido Flicker o 1/f o de reverberación.- Posee las siguientes características:

- Se produce en semiconductores y su origen se debe a las imperfecciones de las redes cristalinas y sus interfases. En consecuencia puede reducirse considerablemente mediante adecuados procesos de fabricación.
- Se presenta siempre que existe un corriente CC (por ejemplo, la corriente asociada a lo puntos de operación de los dispositivos).
- El valor cuadrático medio de la corriente en una banda es:

$$\overline{i^2} = k_1 \frac{I^a}{f^b} \cdot \Delta f \quad \Delta f \equiv f_H - f_L$$

donde:

I .- corriente directa

a .- constante entre 0,5 y 2.

$b \cong 1$.

k_1 .- constante asociada al dispositivo concreto.

- En dispositivos con elevado ruido *flicker*, éste puede dominar hasta para MHz.

La figura 15 muestra la representación de la densidad espectral para $b=1$. En ella se aprecia el predominio de este tipo de ruido a bajas frecuencias.

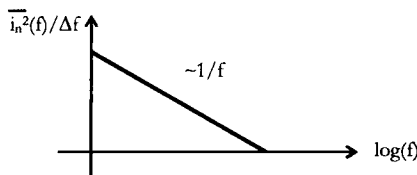


Fig. 15. Respuesta en frecuencia asintótica de la densidad espectral de corriente del ruido "flicker".

Ruido de ráfagas (burst) o de palomitas de maíz (popcorn).- Posee las siguientes características:

- Constituye otra fuente de ruido de baja frecuencia que se produce en transistores discretos y dispositivos integrados, y se relaciona con la presencia de una alta contaminación de iones o impurezas de metales pesados.
- Se presenta en forma de ráfagas o pulsos de duración aleatoria y altura constante. La razón de repetición de los pulsos está en el intervalo de audiofrecuencias (kHz) y su sonido típico se conoce como ruido de palomitas de maíz. La figura 16 muestra un ejemplo de ráfagas o “metralla”.

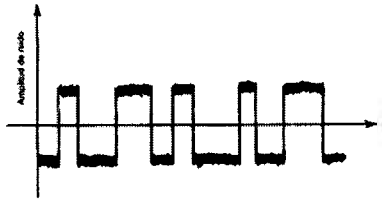


Fig. 16. Ruido de “ráfagas”.

- Se ha comprobado que la densidad espectral del ruido de ráfagas viene dada por:

$$\overline{i^2} = k_2 \frac{I^c}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \cdot \Delta f,$$

donde k_2 es una constante para un dispositivo concreto, I es la corriente directa, c es una constante en el intervalo $[0,5-2]$ y f_c es una frecuencia característica del proceso de ruido.

- La densidad espectral del ruido de ráfagas se presenta en la figura 17. A altas frecuencias, la densidad espectral disminuye a razón de $1/f^2$.

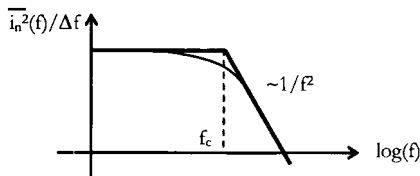


Fig. 17. Densidad espectral del ruido de ráfagas aislado.

- La figura 18 muestra el efecto combinado del ruido de ráfagas y el ruido *flicker*, que con frecuencia se dan simultáneamente.

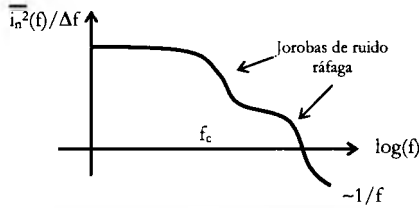


Fig. 18. Densidad espectral del ruido de ráfagas combinado con ruido *flicker*.

Las figuras 19 y 20 muestran una captura real de ruido “flicker” en un equipo de adquisición de datos. El interfaz ha sido diseñado en nuestro laboratorio. El ruido ha sido generado en un generador de señales “a la carta”. Obsérvese el parecido entre el ruido de la figura 19 y el de la figura 16. Muy probablemente el ruido que genera el instrumento de laboratorio sea del tipo “ráfaga” combinado con un “flicker”.

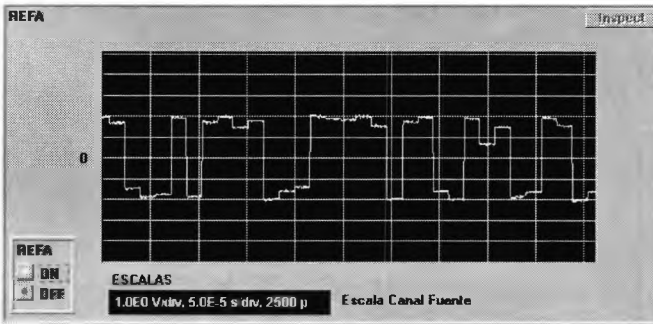


Fig. 19. Serie temporal de ruido inversamente proporcional a la frecuencia, generada por un instrumento de laboratorio.

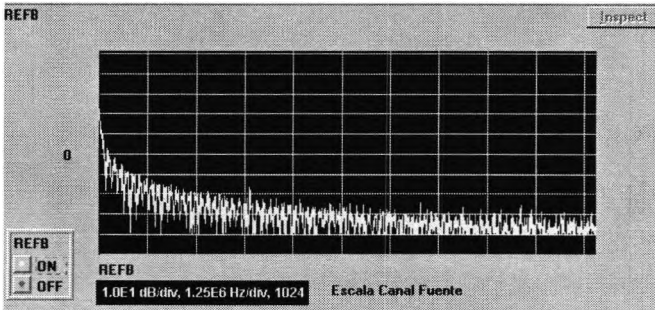


Fig. 20. Espectro de la serie temporal de ruido de la figura 17.

A continuación se tratan las fuentes de ruido presentes en transistores y en los amplificadores operacionales, con el fin de ilustrar el tratamiento de dichas fuentes de ruido.

6

Ruido en Transistores Bipolares

6.1 Origen

En un transistor bipolar polarizado en activa, los portadores minoritarios se difunden y pasan a través de la región de base para ser capturados en la unión colector-base. Cuando los portadores minoritarios entran en la región de carga espacial de la unión colector-base son acelerados hacia el colector. El tiempo de llegada a la unión colector-base y el tiempo que tardan en difundirse o atravesar la región de colector hacen de éste un proceso aleatorio. En consecuencia, la corriente de colector está compuesta por una serie de pulsos de corriente aleatorios y se representa por un ruido de tipo *shot* orientado desde el emisor al colector, como muestra la figura 12.

La corriente de base de un transistor se debe al proceso de recombinación en la base y en la región de deplexión de la unión base-emisor, y también se debe a la inyección de portadores desde la base al emisor. Estos procesos aleatorios también se modelan por un ruido de tipo *shot*.

La resistencia de base se considera un generador de ruido térmico. Lo mismo sucede con la resistencia en serie del colector, pero como ésta está conectada en serie con el nudo de colector, que es de alta impedancia, este ruido es despreciable y generalmente no se incluye en el modelo. Adviértase que las resistencias del modelo en “pi” son componentes ficticios, que se emplean sólo con el fin de modelar el dispositivo, y que por tanto no exhiben ruido térmico.

El ruido *flicker* y el ruido de “ráfagas” se han modelado empíricamente mediante generadores de corriente a través del interior de la unión base-emisor, y se suman al modelado de la corriente de base “ruidosa”.

El ruido de avalancha en transistores es despreciable si la tensión colector-emisor de polarización (V_{CE}) se mantiene al menos 5 V debajo de la tensión de ruptura del transistor (BV_{CE}). Por tanto, se suele despreciar salvo excepciones.

La figura 21 muestra el modelo equivalente de pequeña señal del transistor, que incluye todas las fuentes de ruido reseñadas, en el seno de un ejemplo que se considera más adelante.

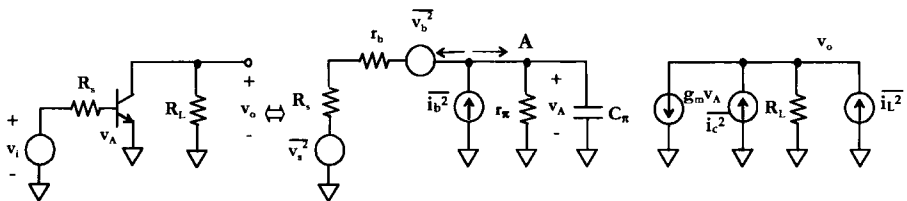


Fig. 21. Circuito amplificador simple y circuito equivalente para pequeña señal que incluye las fuentes de ruido.

Estas fuentes tienen su origen en mecanismos físicos de generación independientes (se emplea “superposición” para su evaluación). Sus valores cuadráticos medios son:

$$\begin{aligned} \overline{v_b^2} &= 4k_B T \cdot r_b \cdot \Delta f \\ \overline{i_c^2} &= 2qI_C \cdot \Delta f \\ \overline{i_b^2} &= 2qI_B \cdot \Delta f + k_1 \cdot \frac{I_B^a}{f} \cdot \Delta f + k_2 \cdot \frac{I_B^c}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \cdot \Delta f, \end{aligned}$$

6.2 Modelado y evaluación

Se considera el ejemplo de la figura 21, donde se han modelado las fuentes de ruido en un circuito amplificador sencillo basado en un transistor bipolar de unión. A continuación se procede a su análisis y cuantificación del efecto del ruido mediante un ejemplo numérico. Se consideran las resistencias exteriores como generadores de ruido térmico.

El ruido total en la salida puede calcularse a partir de las contribuciones individuales de cada una de las fuentes, consideradas independientes. En primer lugar consideramos el generador de ruido térmico asociado con la resistencia de la fuente de señal de entrada, v_s , (esta será la fuente de ruido nº 1). Las fuentes de tensión no consideradas se cortocircuitan y las de corriente se abren.

$$v_A = \frac{Z \cdot v_s}{Z + r_b + R_s}, \quad \text{con } Z \equiv r_\pi \parallel \frac{1}{j\omega C_\pi}$$

Por otra parte, el ruido en la salida es:

$$v_{o1} \equiv v_o|_{v_s} = -g_m \cdot R_L \cdot v_A = -g_m \cdot R_L \cdot \frac{Z}{Z + r_b + R_s} \cdot v_s$$

Como se ha comentado, la fase de las magnitudes de las ecuaciones de arriba es irrelevante, ya que el ruido es un proceso aleatorio. Por tanto, la contribución de esta fuente se caracteriza con el valor cuadrático medio de la tensión de la salida.

$$v_{o1} \equiv v_o|_{v_s} \quad \boxed{\overline{v_{o1}^2} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \overline{v_s^2}}$$

El procedimiento para obtener la contribución de las demás fuentes de ruido es similar. Para el generador de ruido térmico de la resistencia de base (contribución nº 2) se obtiene una expresión análoga a la anterior:

$$v_{o2} \equiv v_o|_{v_b} \quad \boxed{\overline{v_{o2}^2} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \overline{v_b^2}}$$

La fuente de la contribución n° 3 es el generador de corriente de base. Para ello se considera la suma de corrientes en el nudo "A":

$$i_b = \frac{v_A}{r_b + R_s} + \frac{v_A}{Z} = v_A \cdot \left(\frac{1}{r_b + R_s} + \frac{1}{Z} \right) = v_A \cdot \left[\frac{Z + r_b + R_s}{Z \cdot (r_b + R_s)} \right] \rightarrow v_A = \frac{Z \cdot (r_b + R_s)}{Z + r_b + R_s} \cdot i_b$$

Entonces, la salida de esta tercera contribución resulta:

$$v_{o3} \equiv v_o |_{i_b} \quad \boxed{\overline{v_{o3}^2} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2 \cdot (r_b + R_s)^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \overline{i_b^2}}$$

Restan por evaluarse las dos contribuciones de la malla de salida, la corriente por la resistencia de carga y la corriente de colector del transistor, que se numerarán como 4 y 5 respectivamente:

$$\boxed{\overline{v_{o4}^2} = R_L^2 \cdot \overline{i_l^2}} \quad \boxed{\overline{v_{o5}^2} = R_L^2 \cdot \overline{i_c^2}}$$

Finalmente, como todos los generadores son estadísticamente independientes, el valor cuadrático medio resultante es la suma de los valores cuadráticos medios individuales.

$$\overline{v_o^2} = \sum_{i=1}^5 \overline{v_{oi}^2} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \left[\overline{v_s^2} + \overline{v_b^2} + (r_b + R_s)^2 \cdot \overline{i_b^2} \right] + R_L^2 \cdot (\overline{i_l^2} + \overline{i_c^2})$$

Ahora se sustituyen las expresiones de los generadores de ruido, y se plantea la densidad espectral de ruido. Para ello, vamos a suponer que el ruido inversamente proporcional a la frecuencia se puede despreciar a las frecuencias de interés, resultando solamente contribuciones de ruido térmico y *shot*, con densidades espectrales constantes:

$$\overline{v_o^2} = \sum_{i=1}^5 \overline{v_{oi}^2} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \left[\underbrace{\frac{4k_B T \cdot R_S \Delta f}{\overline{v_s^2}}}_{\overline{v_s^2}} + \underbrace{\frac{4k_B T \cdot r_b \Delta f}{\overline{v_b^2}}}_{\overline{v_b^2}} + (r_b + R_s)^2 \cdot \underbrace{\frac{2qI_B \Delta f}{\overline{i_b^2}}}_{\overline{i_b^2}} \right] + R_L^2 \cdot \left(\underbrace{\frac{4k_B T}{R_L} \Delta f}_{\overline{i_l^2}} + \underbrace{2qI_c \Delta f}_{\overline{i_c^2}} \right)$$

La densidad espectral en toda la banda de frecuencias es:

$$\frac{\overline{v_o^2}}{\Delta f} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_s|^2} \cdot \left[4k_B T \cdot (R_S + r_b) + (r_b + R_s)^2 \cdot 2qI_B \right] + R_L^2 \cdot \left(4k_B T \frac{1}{R_L} + 2qI_c \right)$$

La densidad espectral depende de la frecuencia a través de la magnitud Z. Considerando su definición se obtienen las siguientes magnitudes:

$$Z \equiv r_{\pi} \parallel \frac{1}{j\omega C_{\pi}} = \frac{r_{\pi} \cdot \frac{1}{j\omega C_{\pi}}}{r_{\pi} + \frac{1}{j\omega C_{\pi}}} = \frac{r_{\pi}}{j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1}$$

$$Z + r_b + R_S = \frac{r_{\pi}}{j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1} + r_b + R_S = \frac{r_{\pi} + (r_b + R_S) \cdot (j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1)}{j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1} =$$

$$\frac{r_{\pi} + [j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} (r_b + R_S) + r_b + R_S]}{j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1} = \frac{r_{\pi} + r_b + R_S + j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} (r_b + R_S)}{j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} + 1}$$

Entonces, la expresión se adapta a una respuesta de tipo paso-bajo:

$$\frac{|Z|^2}{|Z + r_b + R_S|^2} = \left| \frac{Z}{Z + r_b + R_S} \right|^2 = \left| \frac{r_{\pi}}{r_{\pi} + r_b + R_S + j \cdot 2\pi f C_{\pi} r_{\pi} (r_b + R_S)} \right|^2 = \left| \frac{\frac{r_{\pi}}{r_{\pi} + r_b + R_S}}{1 + j \cdot 2\pi f C_{\pi} \frac{r_{\pi} (r_b + R_S)}{r_{\pi} + r_b + R_S}} \right|^2 =$$

$$\left| \frac{\frac{r_{\pi}}{r_{\pi} + r_b + R_S}}{1 + j \cdot 2\pi f C_{\pi} [r_{\pi} // (r_b + R_S)]} \right|^2 = \left| \frac{r_{\pi}}{r_{\pi} + r_b + R_S} \right|^2 \frac{1}{\left| 1 + j \frac{f}{f_c} \right|^2}$$

La evaluación del cociente anterior demuestra que la densidad espectral de ruido adopta la forma de filtro paso-bajo, cuya frecuencia característica resulta:

$$f_c \equiv \frac{1}{2\pi C_{\pi} [r_{\pi} // (r_b + R_S)]}$$

Con todo, la densidad espectral de ruido, que es función de la frecuencia resulta:

$$\frac{\overline{v_o^2}}{\Delta f} = g_m^2 \cdot R_L^2 \cdot \underbrace{\frac{r_{\pi}^2 \cdot (r_{\pi} + r_b + R_S)^2}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}_{\text{dependencia frecuencia}} \cdot [4k_B T \cdot (r_b + R_S) + (r_b + R_S)^2 \cdot 2qI_B] + R_L^2 \cdot \underbrace{\left(4k_B T \frac{1}{R_L} + 2qI_c\right)}_{\text{constante}}$$

Como se aprecia, la dependencia de la frecuencia está asociada al condensador del modelo del transistor (respuesta a altas frecuencias). En efecto, los generadores de tensión de ruido de la figura 21 aparecen amplificadas en la salida por una función de transferencia que empieza a decrecer a partir de f_c . Por otra parte, como muestra la expresión obtenida, la parte constante de esta densidad espectral está ligada a los generadores de corriente de la salida.

Con el fin de mostrar un ejemplo numérico se utilizan valores concretos:

$$I_c = 200 \mu A \quad R_S = 500 \Omega \quad R_L = 1000 \Omega \quad \beta = 100 \quad C_{\pi} = 20 \text{ pF} \quad r_b = 100 \Omega$$

Para estos valores $f_c=1,3875e+007$, y la función de transferencia resulta:

$$\frac{\overline{v_o^2}}{\Delta f} = \frac{54.0657}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \cdot 1.0167e-017 + 8.0648e-017 = \frac{5.4967e-016}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} + 8.0648e-017 \left(\frac{V^2}{Hz}\right)$$

Las asíntotas de esta función son: $\lim_{f \rightarrow 0} \left(\frac{\overline{v_o^2}}{\Delta f}\right) = 6.3032e-016$ $\lim_{f \rightarrow \infty} \left(\frac{\overline{v_o^2}}{\Delta f}\right) = 8.0648e-017$

Con MATLAB se obtienen los valores máximo y mínimo: $\max(\text{densidad}) = 6.2748e-016$; $\min(\text{densidad}) = 8.1309e-017$.

La figura 22 muestra la representación doble logarítmica de la densidad espectral de ruido y corrobora los cálculos anteriores.

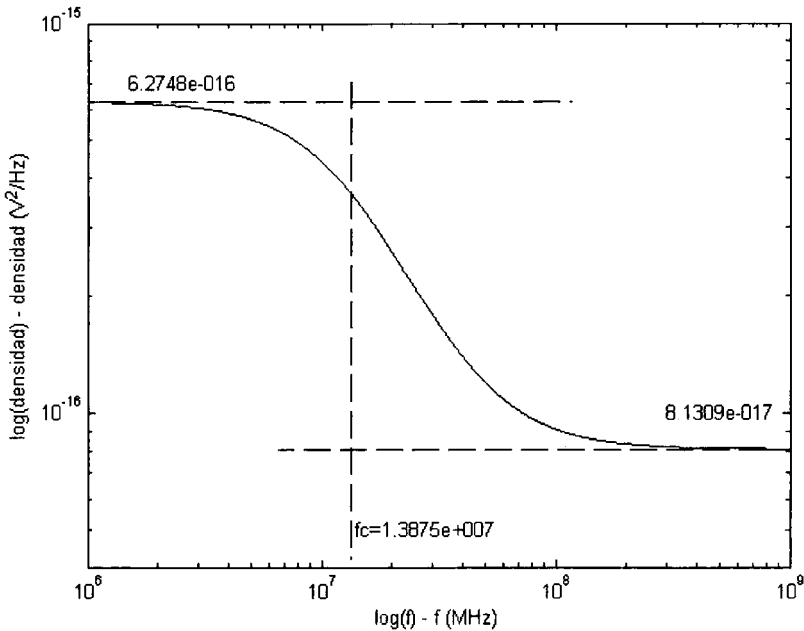


Fig. 22. Densidad espectral de la tensión de ruido en la salida del circuito de la figura 21. Se aprecian los valores asíntóticos calculados. Gráfica con MATLAB.

En esta figura se aprecia que a altas frecuencias la única contribución en la salida se debe a las fuentes de intensidad de la malla de salida del circuito de la figura 21. A bajas frecuencias, la principal contribución a la densidad espectral es la debida a la resistencia de la fuente, seguida de la contribución de la resistencia de base del transistor.

A continuación se describe el modelado de las fuentes de ruido en amplificadores operacionales.

Ruido en los Amplificadores Operacionales

En primer lugar se modela el ruido en la entrada y después se describen ejemplos concretos que incluyen fuentes de tensión y de corriente.

7.1 Modelado del ruido equivalente en la entrada

El ruido equivalente en la entrada de un circuito electrónico, que incluya amplificadores operacionales, se modela mediante generadores de tensión e intensidad (promedio de magnitudes cuadráticas). Un circuito con ruido incorpora estos generadores conectados a un circuito o red libre de ruido. La situación queda reflejada en la figura 23.

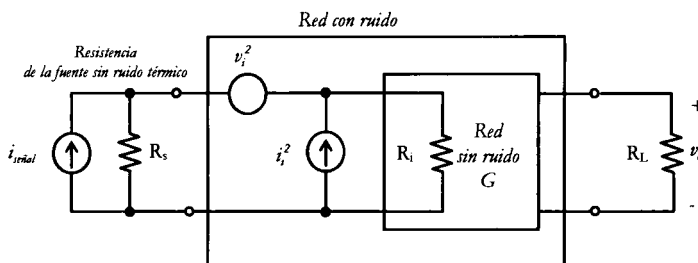


Fig. 23. Modelado de las fuentes de ruido interno en un circuito electrónico (amplificador con ganancia G). No se ha tenido en cuenta el ruido térmico de la resistencia de la fuente. Se consideran las fuentes de ruido equivalentes en la entrada. Aparecen las corrientes auxiliares que se toman para evaluar la potencia de entrada.

Al abrir el generador de corriente de la fuente de señal de la figura 23 se está en disposición de obtener la potencia del ruido equivalente en la entrada del circuito. Aplicando el “principio de superposición” se obtiene que la potencia promedio de ruido equivalente en la entrada, introducida en la red por los dos generadores de ruido de la figura 23, depende de la resistencia de la fuente de señal, R_s , y vale:

$$|N_{Ai}| = \frac{(\overline{v_i^2} + \overline{i_i^2} \cdot R_s^2) \cdot R_i}{(R_s + R_i)^2}$$

Para la obtención de esta expresión se considera abierta la corriente de excitación o de señal. La aplicación de la superposición de efectos en la salida es inmediata. En

primer lugar se obtiene la contribución de la fuente de tensión de ruido. Para ello se abre la fuente de corriente de ruido. En estas circunstancias, la tensión y la potencia instantáneas en la resistencia de entrada del circuito son:

$$v_{Ri}|_{v_i} = \frac{v_i}{R_s + R_i} \times R_i \quad \frac{(v_{Ri})^2}{R_i} = \frac{v_i^2 R_i^2}{R_i (R_s + R_i)^2} = \frac{v_i^2 R_i}{(R_s + R_i)^2}$$

La potencia de ruido en al entrada debida a la fuente de corriente de ruido se obtiene cortocircuitando la fuente de tensión de ruido. Es obvio que la caída de tensión en la resistencia de entrada es:

$$v_{Ri}|_{i_i} = -(R_s // R_i) \times i_i$$

Por lo que la potencia introducida por esta fuente es:

$$\frac{(v_{Ri})^2}{R_i} = \frac{(R_s // R_i)^2 i_i^2}{R_i}$$

La potencia de ruido total la suma de ambas contribuciones.

Realmente, el ruido se mide en la salida. Si G es la ganancia del amplificador de la red, entonces el ruido equivalente en la salida resulta:

$$|N_{Ao}| = \frac{|v_o^2|}{R_L} = \frac{|G|^2 (v_i^2 + i_i^2 \cdot R_s^2) \cdot R_i^2}{R_L \cdot (R_s + R_i)^2}$$

En general, el ruido equivalente en la entrada de un circuito viene limitado por la mínima amplitud de la señal analógica que se puede aplicar como entrada. En la práctica, una parte del ruido equivalente de entrada se debe a generadores internos asociados con la entrada del cuadripolo, y otra parte se debe a generadores internos asociados con la salida. Éstos últimos aparecen en la entrada divididos por la ganancia. Como consecuencia de este último hecho, y debido a que a altas frecuencias la ganancia disminuye, el ruido equivalente en la entrada crece. La figura 24 muestra esta circunstancia.

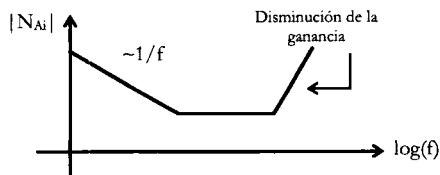


Fig. 24. Respuesta en frecuencia asintótica de la densidad espectral de corriente del ruido "Shot".

En el siguiente apartado se cuantifica mediante un ejemplo la influencia de la salida en la entrada a través de la fuente de ruido equivalente.

7.2 Evaluación en circuito práctico

Se considera la configuración inversora de la figura 25. Se suponen independientes las fuentes de ruido en la entrada del amplificador operacional. En general, todas las fuentes de ruido se suponen independientes. La entrada del AO está cortocircuitada con el fin de obtener el efecto en la salida de las distintas fuentes de ruido. Suponemos infinita la ganancia diferencial del AO.

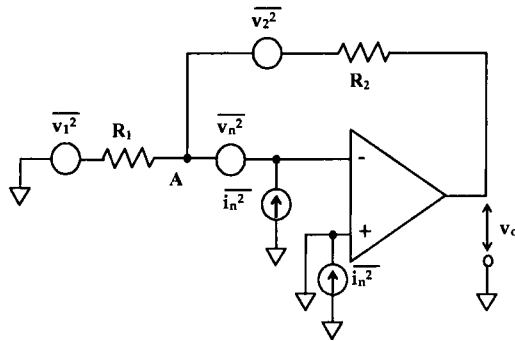


Fig. 25. Configuración inversora que incluye el modelado de las fuentes de ruido acopladas al amplificador operacional.

Las fuentes de ruido que se incluyen en el circuito corresponden a las propias del AO más los ruidos térmicos de las resistencias.

Se plantean las ecuaciones que contienen las corrientes del circuito en el nudo "A", teniendo en cuenta que la terminal inversora del AO está virtualmente a tierra.

$$\frac{v_1 - v_n}{R_1} + i_n = \frac{v_n - v_2 - v_o}{R_2}$$

Entonces, la salida en un instante dado resulta:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} \cdot v_1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \cdot v_n - v_2 - i_n \cdot R_2$$

Como las fuentes son independientes, el valor cuadrático medio de la salida es la suma de los valores cuadráticos medios individuales, según:

$$\overline{v_o^2} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \overline{v_1^2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \overline{v_n^2} + \overline{v_2^2} + \overline{i_n^2} \cdot (R_2)^2$$

En esta expresión se consideran nulos los valores medios de los términos cruzados por ser independientes entre sí (y en consecuencia no están correlacionados).

El generador de ruido equivalente en la entrada se obtiene al dividir la salida por la ganancia:

$$\overline{v_{n, equ}^2} = \frac{\overline{v_o^2}}{|A_V|^2} = \frac{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \overline{v_1^2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \overline{v_n^2} + \overline{v_2^2} + \overline{i_n^2} \cdot (R_2)^2}{|A_V|^2}$$

Como se trata de una configuración inversora, el módulo de la ganancia es $|A_V| = R_2/R_1$, y la tensión de ruido equivalente en la entrada resulta:

$$\overline{v_{n, equ}^2} = \frac{\overline{v_o^2}}{|A_V|^2} = \overline{v_1^2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_n^2} + \overline{v_2^2} \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \overline{i_n^2} \cdot (R_2)^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

Ordenando finalmente, resulta:

$$\begin{aligned} \overline{v_{n, equ}^2} &= \frac{\overline{v_o^2}}{|A_V|^2} = \\ \overline{v_1^2} &+ \left[1 + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 + 2\frac{R_2}{R_1}\right] \cdot \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_n^2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_2^2} + (R_1)^2 \cdot \overline{i_n^2} = \\ \overline{v_1^2} &+ \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + 1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right] \cdot \overline{v_n^2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_2^2} + (R_1)^2 \cdot \overline{i_n^2} = \\ \overline{v_1^2} &+ \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_n^2} + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \overline{v_2^2} + (R_1)^2 \cdot \overline{i_n^2} \end{aligned}$$

Como la ganancia es elevada, el segundo término de la expresión anterior es prácticamente el generador de ruido en la entrada del AO, y el tercero se suele despreciar, resultando la aproximación:

$$\overline{v_{n, equ}^2} \cong \overline{v_1^2} + \overline{v_n^2} + (R_1)^2 \cdot \overline{i_n^2}$$

Ejemplo numérico: Usa densidades espectrales constantes en la banda de interés.

$$\Delta f = 10 \text{ kHz} \quad R_1 = 2 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 20 \text{ k}\Omega \quad T = 300 \text{ K}; \quad \sqrt{\overline{v_n^2}} = 20 \left(\frac{nV}{\sqrt{\text{Hz}}} \right) \quad \sqrt{\overline{i_n^2}} = 0,5 \left(\frac{pA}{\sqrt{\text{Hz}}} \right)$$

$$\overline{v_1^2}(f) = \overline{v_2^2}(f) = 4 \cdot k_B \cdot T \cdot R = 4 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 300 \cdot R_{1,2}$$

$$= \begin{cases} \overline{v_1^2}(f) = 4 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2000 = 3,312 \cdot 10^{-17} \left(\frac{V^2}{\text{Hz}} \right) \\ \overline{v_2^2}(f) = 4 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 300 \cdot 20000 = 3,312 \cdot 10^{-16} \left(\frac{V^2}{\text{Hz}} \right) \end{cases}$$

Se utilizan densidades espectrales que son el resultado de haber realizado la integral en toda la banda de frecuencias de interés. Resultan las contribuciones individuales:

$$\begin{aligned}
 V_n &= \sqrt{\overline{v_n^2}} \cdot \sqrt{\Delta f} = 20 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right) \cdot \sqrt{10000(Hz)} = 2000 (nV \text{ r.m.s.}) = 2 (\mu V \text{ r.m.s.}) \\
 \overline{v_1^2} &= 4 \cdot k_B \cdot T \cdot \Delta f = 4 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 300 \cdot 2000 \cdot 10000 = 3,312 \cdot 10^{-13} \\
 &\rightarrow V_1 = \sqrt{\overline{v_1^2}} = 5,7549978 \times 10^{-7} (V \text{ r.m.s.}) = 0,575 (\mu V \text{ r.m.s.}) \\
 \overline{v_2^2} &= 4 \cdot k_B \cdot T \cdot \Delta f = 4 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 300 \cdot 20000 \cdot 10000 = 3,312 \cdot 10^{-12} \\
 &\rightarrow V_2 = \sqrt{\overline{v_2^2}} = 1,8198901 \times 10^{-6} (V \text{ r.m.s.}) = 1,820 (\mu V \text{ r.m.s.}) \\
 I_n &= \sqrt{\overline{i_n^2}} = 0,5 \left(\frac{pA}{\sqrt{Hz}} \right) \cdot \sqrt{10000(Hz)} = 50 (pA \text{ r.m.s.})
 \end{aligned}$$

Finalmente, el ruido equivalente en la entrada resulta:

$$\begin{aligned}
 \overline{v_{n, equ}^2} &= \overline{v_1^2} + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \cdot \overline{v_2^2} + \overline{v_n^2} + (R_1)^2 \cdot \overline{i_n^2} \\
 &= 3,312 \cdot 10^{-13} + (0,1)^2 \cdot 3,312 \cdot 10^{-12} + (2)^2 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^6 \cdot (50)^2 \cdot 10^{-24} \\
 &= (0,3312 + 0,03312 + 4) \cdot 10^{-12} + 0,01 \cdot 10^{-12} = \underline{\underline{4,37434 (\mu V \text{ r.m.s.})^2}} \\
 &\rightarrow \underline{\underline{\sqrt{\overline{v_{n, equ}^2}} = 2,0914875 (\mu V \text{ r.m.s.})}}
 \end{aligned}$$

En el siguiente capítulo se evalúa el ruido por integración de las densidades espectrales mediante un ejemplo.

Ejemplo de Modelado y Evaluación de los Efectos del Ruido Interno en una Banda de Frecuencias

La figura 26 muestra un amplificador inversor que incluye dos condensadores parásitos y un generador de tensión de ruido de entrada. Los componentes y parámetros involucrados en el análisis son:

$$A_{do} = 10^5 \quad f_o = 100 \text{ Hz} \quad C_1 = 25 \text{ pF} \quad R_1 = 100 \text{ M}\Omega \quad C_2 = 1 \text{ pF} \quad R_2 = 10 \text{ M}\Omega$$

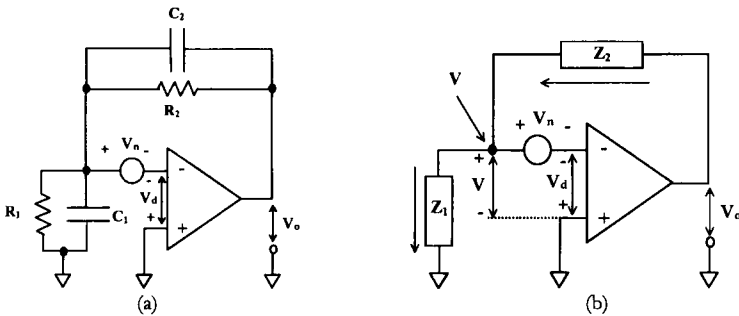


Fig. 26. (a) Circuito amplificador inversor con generador de tensión de ruido de entrada V_n . (b) Circuito empleado en el análisis. Se ha cortocircuitado la entrada.

La tensión diferencial real del amplificador operacional incluye la tensión que modela la fuente de ruido como si se tratara de una tensión de offset de entrada:

$$V = V_n - V_d \rightarrow -V_d = V - V_n \rightarrow V_d = V_n - V \quad (1)$$

La salida del operacional es, considerando (1):

$$V_o = A_d \cdot V_d = A_d \cdot (V_n - V) = A_d \cdot V_n - A_d \cdot V \rightarrow V = -\frac{V_o}{A_d} + V_n \quad (2)$$

Como la impedancia de entrada al operacional es infinita, las corrientes por las dos impedancias Z_1 y Z_2 son iguales:

$$\frac{V_o - V}{Z_2} = \frac{V}{Z_1} \rightarrow V_o = V \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \quad (3)$$

Llevando (2) a (3) resulta:

$$V_o = \left(V_n - \frac{V_o}{A_d}\right) \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) = V_n \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) - \frac{V_o}{A_d} \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)$$

$$V_o \cdot \left[1 + \frac{1}{A_d} \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)\right] = V_n \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right) \rightarrow \frac{V_o}{V_n} = \frac{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}{1 + \frac{1}{A_d} \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)} = \frac{A_d \cdot \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)}{A_d + \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1}\right)}$$

Finalmente:

$$\frac{V_o}{V_n} = \frac{A_d}{1 + \frac{A_d}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}}$$

Obsérvese que cuando la ganancia diferencial tiende a infinito la función de transferencia tiende a la inversa de la red de realimentación, que coincide con la ganancia de la configuración considerando ideal al amplificador operacional:

$$\frac{V_o}{V_n} \Big|_{A_d \rightarrow \infty} \rightarrow 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{H(s)}$$

Por tanto, la transmitancia en lazo abierto es:

$$G(s) = A_d(s)$$

de forma, que la transmitancia en lazo cerrado del circuito resulta:

$$W(s) \equiv \frac{V_o}{V_n} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \frac{A_d}{1 + \frac{A_d}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}}}$$

Considerando las definiciones y las expresiones de las admitancias

$$k \equiv \frac{R_2}{R_1} \quad \tau_1 = R_1 C_1 \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad Z_1 = \frac{R_1}{1 + \tau_1 s} \quad Z_2 = \frac{R_2}{1 + \tau_2 s}$$

volvemos a escribir la expresión anterior de la ganancia:

$$1 + \frac{Z_2}{Z_1} = 1 + \frac{1 + \tau_2 s}{\frac{R_2}{R_1}} = 1 + k \cdot \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + \tau_2 s + k \cdot (1 + \tau_1 s)}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + k + (k\tau_1 + \tau_2) \cdot s}{1 + \tau_2 s}$$

$$\frac{V_o}{V_n} = \frac{A_d}{1 + \frac{Z_2}{Z_1}} = \frac{A_d}{1 + \frac{1 + \tau_2 s}{\frac{R_2}{R_1}}} = \frac{A_d}{1 + \frac{A_d \cdot (1 + \tau_2 s)}{1 + k + (k\tau_1 + \tau_2) \cdot s}}$$

sustituir
sustituido

Considerando ahora los parámetros del amplificador operacional y de los componentes del circuito se obtienen las expresiones concretas de las transmittancias:

$$A_{do} = 10^5 \quad f_o = 100 \text{ Hz} \quad C_1 = 25 \text{ pF} \quad R_1 = 100 \text{ M}\Omega \quad C_2 = 1 \text{ pF} \quad R_2 = 10 \text{ M}\Omega$$

$$G(s) = A_d(s) = \frac{A_{do}}{1 + \frac{s}{2\pi f_o}} = \frac{10^5}{1 + \frac{s}{200\pi}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{H(s)} &= 1 + \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1 + k + (k\tau_1 + \tau_2) \cdot s}{1 + \tau_2 s} = \frac{1 + 0,1 + (0,1 \cdot 10^8 \cdot 25 \cdot 10^{-12} + 10^7 \cdot 10^{-12}) \cdot s}{1 + 10^7 \cdot 10^{-12} \cdot s} = \\ &= \frac{1,1 + (25 \cdot 10^{-5} + 10^{-5}) \cdot s}{1 + 10^{-5} \cdot s} = \frac{1,1 + 26 \cdot 10^{-5} \cdot s}{1 + 10^{-5} \cdot s} \end{aligned}$$

En función de la frecuencia, en régimen sinusoidal permanente:

$$G(j\omega) = \frac{10^5}{1 + j \cdot \frac{\omega}{200\pi}} \rightarrow G(jf) = \frac{10^5}{1 + j \cdot \frac{2\pi \cdot f}{200\pi}} = \frac{10^5}{1 + j \cdot \frac{f}{100}} = \frac{10^7}{100 + jf}$$

$$\frac{1}{H(s)} = \frac{1,1 + 26 \cdot 10^{-5} \cdot s}{1 + 10^{-5} \cdot s} = 1,1 \cdot \frac{1 + 2,3636 \cdot 10^{-4} \cdot s}{1 + 10^{-5} \cdot s} \rightarrow \frac{1}{H(j\omega)} = 1,1 \cdot \frac{1 + 2,3636 \cdot 10^{-4} \cdot j\omega}{1 + 10^{-5} \cdot j\omega}$$

$$\frac{1}{H(jf)} = 1,1 \cdot \frac{1 + 2,3636 \cdot 10^{-4} \cdot j2\pi f}{1 + 10^{-5} \cdot j2\pi f} = 1,1 \cdot \frac{1 + \frac{f}{673,3582}}{1 + \frac{f}{15915,494}}$$

La función de transferencia del ruido se obtiene por aplicación del *Principio de Inversión* a la resultante del lazo cerrado de G y H.

La DER de la tensión de salida sale con unidades en $\text{nv}/\sqrt{\text{Hz}}$, ya que se obtiene multiplicando la función de transferencia del ruido (adimensional) por la DER del ruido de entrada (también en unidades de $\text{nv}/\sqrt{\text{Hz}}$). La situación práctica viene descrita en las gráficas de la figura 27. La figura inferior izquierda muestra la DER del ruido de entrada.

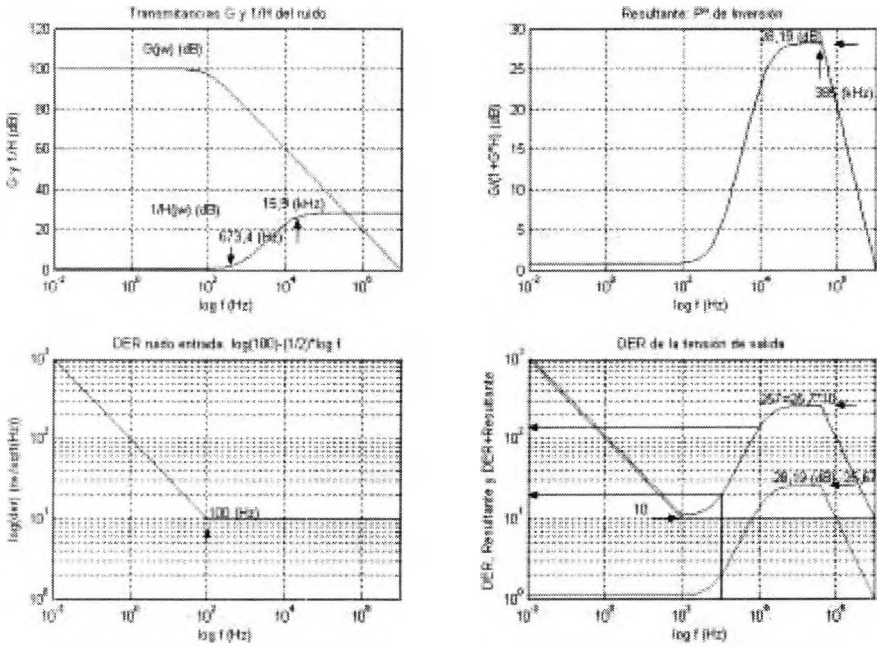


Fig. 27. Curvas características involucradas en el problema. Las figuras de la izquierda permiten apreciar las frecuencias limitadoras de cada tramo. En la figura inferior derecha se observa la evaluación de la pendiente en el tramo 3 entre los puntos 10³ y 10⁴ Hz.

Para evaluar los efectos del ruido dentro de la banda de frecuencias del problema (desde 0,01 Hz a 10⁷ Hz) se toma como referencia la DER de salida del circuito según los distintos tramos en la figura 27. Se calculan los valores eficaces de tensión dentro de cada tramo de frecuencias según la expresión:

$$V_n = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_n^2(f) df}$$

Cada constante involucrada en una densidad espectral se identificará con un subíndice correspondiente al tramo.

Tramo 1: 0,01 – 100 Hz.

Se aprecia una disminución de 1000 a 100 nV en dos décadas; y en escala logarítmica de log(1000) a log(100) (1 unidad). Por tanto, en dos décadas ha disminuido una unidad y se trata de un ruido rosa con densidad espectral dada por:

$$v_{n1}(f) = \frac{k_1}{\sqrt{f}} = \frac{100}{\sqrt{f}} \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right); \quad \log[v_{n1}(f)] = \log[k_1] - \frac{1}{2} \log[f]$$

Obsérvese en la figura 27 que para $f=0,01 \text{ Hz}$ se verifica:

$$v_{n1}(f=0,01) = \frac{100}{\sqrt{0,01}} = 1000 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)$$

Efecto del ruido dentro de esta banda:

$$V_n = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_{n1}^2(f) df} = k_1 \cdot \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{(\sqrt{f})^2}} = k_1 \cdot \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} \frac{df}{f}} = k_1 \cdot \sqrt{\ln \frac{f_2}{f_1}}$$

$$\underline{\underline{V_{n,1}}} = k_1 \cdot \sqrt{\ln \frac{f_2}{f_1}} = 100 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right) \cdot \sqrt{\ln \frac{100}{0,01}} (\sqrt{Hz}) = 303,48543 (nV) = \underline{\underline{0,303 (\mu V)}}$$

Tramo 2: 100-673,4 Hz.

Para mayor sencillez, y por aproximación, se considera un tramo aproximadamente plano hasta los 673,4 Hz, como si el diagrama de la figura 27 fuese asintótico. En consecuencia, el ruido es blanco, y su contribución es:

$$V_n = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_{n2}^2(f) df} = k_2 \cdot \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} df} = k_2 \cdot \sqrt{f_2 - f_1} = 10 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right) \cdot (\sqrt{673,4 - 100}) (\sqrt{Hz})$$

$$\underline{\underline{V_{n,2}}} = 210,72279 (nV) \cong \underline{\underline{0,211 (\mu V)}}$$

Tramo 3: 673,4 Hz-15,9 kHz.

Desde 10^3 a 10^4 Hz se observa un aumento de una década en la DER. La densidad espectral en este tramo resulta:

$$v_{n3}(f) = k_3 \cdot f \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)$$

La constante k_3 , se obtiene para $f=1$ Hz, prolongando la gráfica de la DER de salida hacia el origen. En este caso, gráficamente es complicado de apreciar. Por lo que se plantea una ecuación asintótica para su cálculo.

Se evalúa aproximadamente la densidad espectral en un punto de la gráfica:

$$v_{n3}(f=1000) = 10 = k_3 \cdot 1000 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right) \rightarrow k_3 = 0,01 \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)$$

$$\rightarrow v_{n3}(f) = 0,01 \cdot f \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}} \right)$$

Por tanto, la contribución de ruido dentro de esta banda resulta:

$$V_{n3} = \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} v_{n3}^2(f) df} = k_3 \cdot \sqrt{\int_{f_1}^{f_2} f^2 df} = 0,01 \cdot \sqrt{\left[\frac{f^3}{3} \right]_{f_1}^{f_2}} = 0,01 \cdot \sqrt{\frac{f_2^3 - f_1^3}{3}}$$

Al evaluarlo en la zona de interés:

$$\underline{V_{n3}} = 0,01 \cdot \sqrt{\frac{15900^3 - 673,4^3}{3}} \approx 0,01 \cdot \sqrt{\frac{4,02 \times 10^{12} - 3,05 \times 10^8}{3}} \approx \underline{\underline{11575,398 (nV)}} \approx \underline{\underline{11,575 (\mu V)}}$$

Tramos 4a y 4b: 15,9 kHz-385 kHz-1e7 Hz (considerada infinito en la integral).

Estos tramos corresponden a pendientes 0 y -1 respectivamente. Es por tanto, una respuesta que adopta la forma paso baja, con la banda pasante entre las dos primeras frecuencias ($f_1=15,9$ y $f_2=385$ kHz; defino $BW=385-15,9$ kHz). La frecuencia de corte vale 385 kHz. Por tanto, la densidad espectral en este tramo resulta:

$$v_{n4}(f) = \frac{k_4}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{385000}\right)^2}} \left(\frac{nV}{\sqrt{Hz}}\right); \quad V_{n4} = \sqrt{\int_{f_1}^{\infty} v_{n4}^2(f) df} = k_4 \cdot \sqrt{\int_{15900}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{385000}\right)^2} df}$$

Para resolver la integral se recuerda: $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x)$. Resulta:

$$\underline{V_{n4}} = 280 \cdot \sqrt{385000 \cdot \left[\arctg\left(\frac{f}{385000}\right) \right]_{15900}^{\infty}} = 280 \cdot \sqrt{385000 \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{15900}{385000}\right) \right]} =$$

$$280 \cdot \sqrt{385000 \cdot [0,5 - 0,0132]} \cdot \pi = \underline{\underline{214851,6 (nV)}}$$

Finalmente, se evalúa el efecto total de las distintas contribuciones de cada tramo aplicando la suma cuadrática:

$$V_n^2 = \sum_{i=1}^4 V_{in}^2 \rightarrow \underline{V_n} = \sqrt{\underbrace{(0,303)^2}_{=0,092} + \underbrace{(0,211)^2}_{=0,045} + \underbrace{(11,575)^2}_{=134} + \underbrace{(214,852)^2}_{=46161}} \approx \underline{\underline{215,16 (\mu V.r.m.s)}}$$

El resto del trabajo se dedica a cuantificar los efectos del ruido sobre la estabilidad de la frecuencia.

Offset o Desviación en Frecuencia

El propósito de la calibración consiste en establecer la desviación en frecuencia que experimenta un dispositivo bajo test respecto de la frecuencia que se supone debe entregar según especificaciones, o frecuencia nominal (*name plate*). Además, debe establecerse también la incertidumbre asociada a esta medida.

El dispositivo se compara con una referencia y se realiza una comparación de fases entre ambos. Los parámetros experimentales son la desviación de fase (Δ), y el periodo de medida (T) durante el cual se ha medido la desviación de la fase. Este último suele denominarse periodo de calibración.

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de desfase y de su evolución. La figura 28 muestra la evolución del desfase entre dos señales sinusoidales. Ambas señales han sido muestreadas con una frecuencia de 10^4 Hz, y poseen frecuencia de 100 Hz, con valor medio nulo y $V_{pp} = 2$ V. Se han tomado 10001 muestras, de las que se trazan 200. Por tanto, se muestra en la figura un tiempo de 200×10^{-4} s = 20 ms.

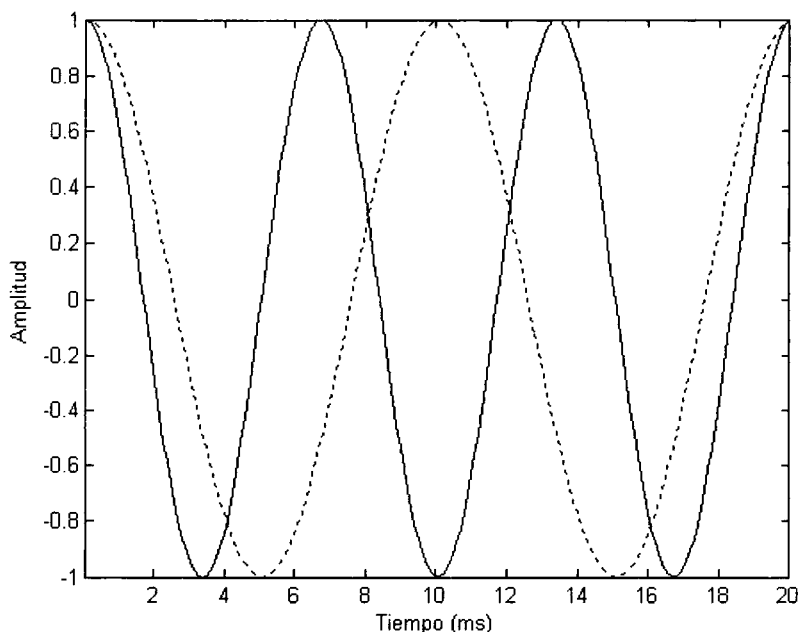


Fig. 28. Desfase entre dos señales sinusoidales. La señal a tramos presenta un desfase que avanza una centésima de π radianes cada 0,1 ms. Por tanto, al cabo de 20 ms las dos señales vuelven a estar en fase.

Una de las señales (la trazada discontinua) desfasa una centésima de π radianes por cada 10^{-4} segundos. Es decir, que al cabo de 20 ms, el desfase transcurrido será de 2π , y las señales volverán a estar en fase. En efecto:

$$\frac{\pi}{100} \left(\frac{\text{rad}}{0,1 \text{ ms}} \right) \times 20(\text{ms}) = 2\pi$$

9.1 Desviación en frecuencia

La desviación en frecuencia se estima según la siguiente expresión, que incluye los términos definidos con anterioridad:

$$f(\text{offset}) = \frac{-\Delta t}{T}$$

Con el fin de mostrar un ejemplo considérese que se obtiene una medida de $\Delta t = 1 \mu\text{s}$ durante un periodo de calibración $T = 24 \text{ horas} = 86.400.000.000 \mu\text{s}$. Este oscilador acumula por día una desviación de fase de $1 \mu\text{s}$. Entonces, la desviación en frecuencia viene dada por:

$$f(\text{offset}) = \frac{-\Delta t}{T} = \frac{-1 \mu\text{s}}{86.400.000.000 \mu\text{s}} \cong -1,1574074 \times 10^{-11} \approx -1,16 \times 10^{-11}$$

Cuanto menor sea la desviación en frecuencia, más cerca está la frecuencia que entrega el dispositivo bajo test de su frecuencia nominal.

La desviación en frecuencia (tanto por uno) puede convertirse a unidades de frecuencia si se conoce la frecuencia nominal del oscilador. En el caso del oscilador anterior, si la frecuencia nominal es de 5 MHz, la desviación de frecuencia en Hz, resulta ser de:

$$5.000.000 (\text{Hz}) \times (1,16 \times 10^{-11}) = 5,80 \times 10^{-5} = 0,0000580 \text{ Hz}$$

Por consiguiente, la frecuencia que en realidad entrega el oscilador resulta:

$$5.000.000 \text{ Hz} + 0,0000580 \text{ Hz} = 5.000.000,0000580 \text{ Hz}$$

El periodo de calibración debe ser suficientemente elevado con el fin de garantizar que el ruido proveniente del equipo de medida y de la referencia no afecte a la medida de la desviación de frecuencia del oscilador bajo test. Un periodo de calibración suficientemente elevado puede garantizar la compensación de estas fuentes parásitas de ruido. Sin embargo, se suele adoptar una medida de seguridad, consiente en trabajar con un TUR de 10:1. En estas circunstancias, muchos equipos de calibración son capaces de medir desviaciones de frecuencia de 1×10^{-10} durante un segundo de tiempo de calibración.

Es evidente que no siempre es posible conseguir un TUR de 10:1, por lo que se suelen emplear periodos de calibración elevados. Por ejemplo, cuando se trabaja con estándares trasferibles, como por ejemplo los receptores GPS, las señales de radio son contaminadas por el ruido, contribuyendo a la desviación de la frecuencia medida. Esta

desviación de frecuencia parásita se suprime empleando periodos de calibración de al menos 24 horas. Se escoge esta duración porque los retardos temporales entre la fuente y el receptor a menudo experimentan una variación cíclica de 24 horas.

9.2 Incertidumbre de la frecuencia

Una vez estudiado el concepto de desviación en frecuencia, es necesario estudiar la incertidumbre de esta desviación con el fin de estimar los límites de la desviación de la frecuencia.

La incertidumbre asociada a la desviación de la frecuencia indica los límites superior e inferior entre los que oscila la medida. De acuerdo con la ISO, la incertidumbre se define como:

Parámetro, asociado al resultado de una medida, que caracteriza la dispersión de valores que podrían razonablemente atribuirse al dispositivo bajo test.

Es práctica habitual emplear un test de incertidumbre 2σ (el doble de la desviación típica de la serie de medidas). Esto significa que cuando establecemos el posible rango de valores para la desviación en frecuencia, hay una probabilidad del 95,4 % de que la desviación en frecuencia permanezca dentro de ese rango durante el periodo de medida. El intervalo de valores en el que oscila la desviación en frecuencia se obtiene calculando la media de la de la desviación en frecuencia durante el periodo de medida y, sumando y restando la incertidumbre estipulada.

La incertidumbre asociada a la desviación en frecuencia se produce debido a que las magnitudes físicas, y en concreto la frecuencia no son absolutamente estables. A continuación se analiza el concepto de estabilidad.

Estabilidad de la Frecuencia. Caracterización

La desviación en frecuencia establece la cercanía de la frecuencia de un oscilador bajo test respecto de su frecuencia nominal. Es decir, establece si la medida es o no correcta. Por el contrario, la estabilidad indica la capacidad de mantenimiento de la desviación en frecuencia, tanto si ésta es o no elevada. Es decir, podemos tener frecuencias estables pero no precisas, y viceversa (y también frecuencias que ni son estables ni son precisas). En este apartado sólo nos preocuparemos por si esa frecuencia, correcta o no, se mantiene o no con el tiempo. Un oscilador con un gran offset puede ser muy estable. Offset y estabilidad son parámetros independientes.

10.1 Concepto de estabilidad

10.1.1 Estabilidad vs. Precisión

La figura 29 muestra cómo una señal de frecuencia que es estable hasta el instante t_2 , se hace inestable a partir de este instante, fluctúa. La salida de los osciladores ideales sería un seno perfecto si no fuera por los procesos de ruido que poseen acoplados.

La figura 30 establece los distintos casos que pueden presentarse en la medida de la frecuencia. Obsérvese en la gráfica de la izquierda que un oscilador puede ser estable pero no preciso. Así por ejemplo, un oscilador con un offset de 1×10^8 puede alcanzar una estabilidad de 1×10^{-12} en un intervalo de 1000 s. Esto significa que entrega una frecuencia estable, aunque no esté cerca de la frecuencia nominal o "name plate".

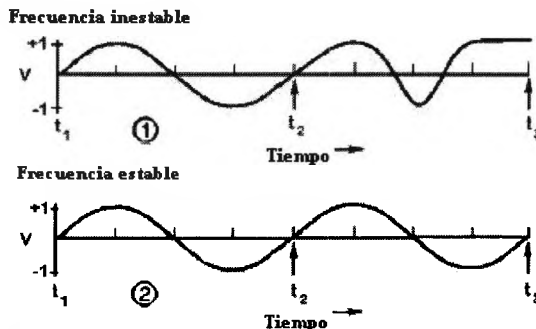


Fig. 29. Diferencia entre frecuencias estable e inestable. La señal n° 2 siempre es estable. La señal n° 1 comienza a hacerse inestable a partir del instante t_2 .

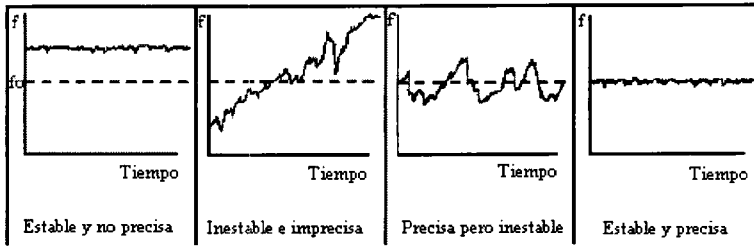


Fig. 30. Distintas posibilidades que muestran la diferencia e independencia entre las magnitudes "offset", o desviación en frecuencia, y la estabilidad de la frecuencia medida.

Por tanto, se debe tener presente que el offset o desviación representa la precisión de la medida, mientras que la estabilidad representa su incertidumbre asociada.

La figura 31 muestra una simulación de la tensión instantánea que entrega un oscilador. A la señal se ha superpuesto un proceso de ruido con densidad espectral inversamente proporcional a la frecuencia. En general esta magnitud puede expresarse mediante la expresión:

$$v(t) = [V_o + \epsilon(t)] \times \text{sen}[\Phi(t)] = [V_o + \epsilon(t)] \times \text{sen}[2\pi f_o t + \phi(t)],$$

donde se observan las perturbaciones asociadas a la amplitud, a la frecuencia y a la fase de la señal, con respecto a las magnitudes nominales.

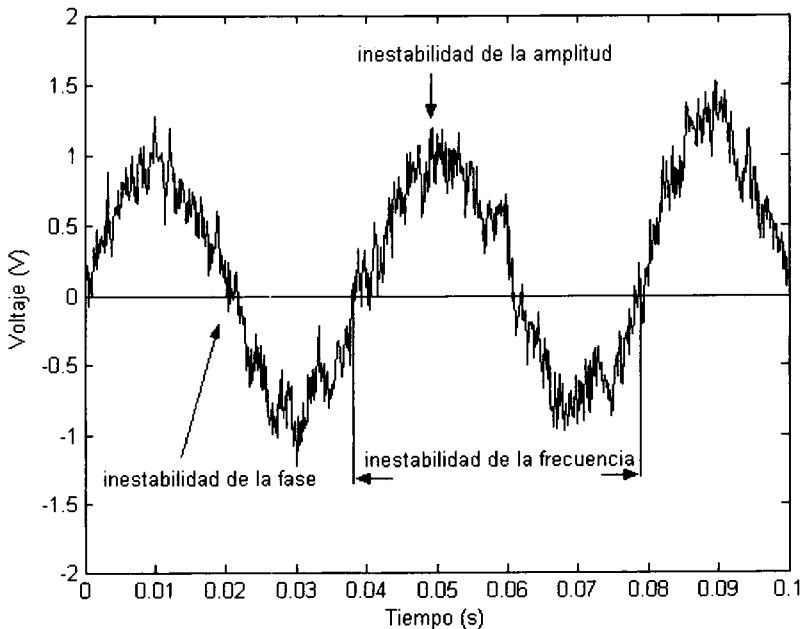


Fig. 31. Tipos de inestabilidad en una señal sinusoidal contaminada por un ruido de frecuencia superior a ella, y correspondiente a la ley exponencial $\beta=-1$ (flicker phase modulation).

En la señal de la figura 31, las componentes en frecuencia del ruido son mayores que los de la frecuencia fundamental o portadora (*carrier frequency*).

Si la frecuencia bajo test es estable la fase total $\Phi(t)$ crece linealmente con el tiempo; en caso contrario realiza oscilaciones en torno a la recta de comportamiento ideal. La situación se indica en la figura 32.

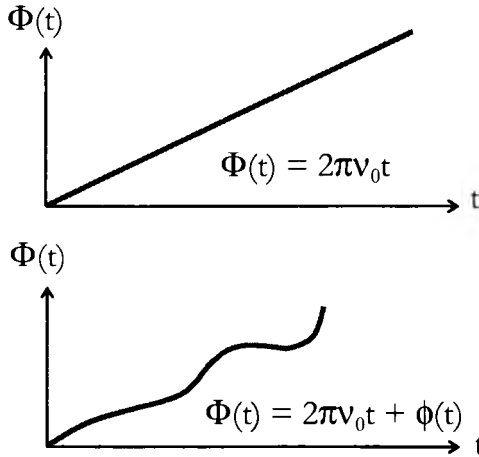


Fig. 32. Evolución de la fase de un oscilador ideal (superior) vs. oscilador real (curva inferior). Se usa en esta figura la letra “ ν ” para designar la frecuencia portadora. El subíndice “0” indica que es la nominal.

Ya que la frecuencia viene dada por la tasa de variación de la fase, la variación en frecuencia viene dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d\Phi(t)}{dt} \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d(2\pi\nu_0 t + \phi(t))}{dt} \right] \rightarrow f(t) - f_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d\phi(t)}{dt} \right]$$

La inestabilidad se define formalmente como la estimación estadística de las fluctuaciones de la frecuencia de una señal durante un intervalo de medida (tiempo de promediado). Estas fluctuaciones de la frecuencia representan generalmente la mayor contribución a la incertidumbre asociada a la medida de la frecuencia.

La estabilidad a corto plazo hace referencia a las mediciones durante periodos de tiempo inferiores a 100 s. La estabilidad a largo plazo se evalúa sobre tiempos de medida superiores a 100 s.

Las estimaciones de la estabilidad pueden realizarse en los dominios del tiempo y de la frecuencia. El primero de ellos se usa más comúnmente. Ambos permiten establecer el tipo o proceso de ruido acoplado al oscilador.

10.1.2 Impacto del ruido acoplado a un oscilador

A continuación se exponen los principales efectos del ruido sobre osciladores electrónicos.

- Limitación de la capacidad de predecir la deriva en frecuencia.
- Degradación de la precisión de la sintonización.
- Limitación del rango dinámico útil de recepción, espaciado entre canales, y selectividad.
- Limitación del rendimiento de los sistemas de radar (especialmente los radares *Doppler*).
- Provoca errores de temporización [proporcionales al tiempo de promediado y a la varianza de las fluctuaciones de la frecuencia instantánea, $\tau\sigma_y(\tau)$].
- Errores de bit en sistemas de comunicaciones electrónicas.
- Limitación del número de usuarios en sistemas de comunicaciones electrónicas, cuando el ruido proveniente de los transmisores interfiere con receptores en canales cercanos.
- Limitación de la precisión de la navegación.
- Provoca pérdidas de enganche en sistemas basados en el lazo de enganche de fase (PLL; **P**hase **L**ocked **L**oop).

A continuación, comienza el estudio cuantitativo de la estabilidad que conducirá en última instancia a inferir el proceso de ruido acoplado.

10.2 Desviaciones en fase, tiempo y frecuencia

Sean los osciladores 1 y 2 cuya frecuencia nominal es f_0 (V_0), y que entregan, respectivamente, las señales:

$$\text{sen}[2\pi f_0 t + \phi_1(t)]; \quad \text{sen}[2\pi f_0 t + \phi_2(t)],$$

donde $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son las desviaciones de fase relativas a f_0 . Supongamos que ambos osciladores se emplean para propósitos de temporización. En el instante absoluto t , los tiempos correspondientes a los osciladores son:

$$2\pi f_0 t_1 = 2\pi f_0 t + \phi_1(t); \quad 2\pi f_0 t_2 = 2\pi f_0 t + \phi_2(t)$$

$$\rightarrow t_1 = t + \frac{\phi_1(t)}{2\pi f_0}; \quad t_2 = t + \frac{\phi_2(t)}{2\pi f_0}$$

Es decir, t_i es el instante en el que la salida del oscilador perfecto de frecuencia f_0 tendría la misma fase total que el oscilador i -ésimo en el instante t . La desviación temporal relativa entre los dos osciladores se convierte en nuestra variable de interés $x(t)$:

$$x(t) \equiv t_1 - t_2 = \frac{\phi_1(t) - \phi_2(t)}{2\pi f_0} = \frac{\phi(t)}{2\pi f_0}$$

Generalmente dispondremos de estas medidas en series temporales para realizar el análisis exploratorio de datos instrumentales.

La desviación porcentual o fraccional en frecuencia¹¹ establece la variación temporal de la fase relativa de los osciladores y se define:

$$y(t) \equiv \frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{1}{2\pi f_0} \cdot \frac{d[\phi(t)]}{dt}$$

Esta magnitud puede interpretarse como la variación instantánea del desfase, dado por la variable $x(t)$, entre los dos osciladores. Es decir, cómo varía la variación de tiempo en cada instante. Es la velocidad a la que cambia el desfase. A partir de esta definición se introduce la magnitud promedio, que conducirá a la desviación de *Allan*.

10.3 Frecuencia fraccional media

La desviación en frecuencia media¹² u offset de frecuencia durante un periodo de medida o tiempo de promediado τ^3 en el intervalo $(t-\tau, t)$ queda descrita mediante:

$$\bar{y}(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_{t-\tau}^t y(s) \cdot ds = \frac{x(t) - x(t-\tau)}{\tau} = \frac{\Delta_\tau x(t)}{\tau},$$

donde Δ_τ es el operador primera diferencia. Este parámetro establece el desfase temporal entre los dos osciladores cuando éste se evalúa cada τ segundos. Se obtiene así una serie temporal de primeras diferencias, que se emplea en la computación del estimador de la estabilidad.

10.4 Medidas de la Inestabilidad a Corto Plazo

El estándar IEEE 1139 caracteriza las mediciones de inestabilidad en frecuencia, fase y amplitud. La medida estándar para la caracterización de la inestabilidad de la frecuencia y de la fase en el dominio de la frecuencia es $L(f)$, que se define como la mitad de la doble banda lateral de la densidad espectral de las fluctuaciones de fase. Cuando se expresa en decibelios, las unidades de $L(f)$ son dBc/Hz (decibelios debajo de la portadora en un ancho de banda de 1 Hz) La caracterización de un dispositivo se efectúa mediante una gráfica de $L(f)$ frente a la variable f (frecuencia de *Fourier* o frecuencia offset). Esta magnitud se interpreta en la práctica como una densidad espectral de ruido de fase.

Otras magnitudes en el dominio de la frecuencia y que se usan principalmente en esta obra son:

- $S_y(f)$: Densidad espectral de las fluctuaciones de la frecuencia fraccional (One-sided spectral density of the fractional frequency fluctuations).
- $S_\phi(f)$: Densidad espectral de las fluctuaciones de la fase (One-sided spectral density of the fractional frequency fluctuations).

¹¹ Fractional frequency deviation

¹² Average fractional frequency deviation or frequency offset

¹³ Averaging time

Las relaciones entre estas magnitudes vienen dada por:

$$S_{\phi}(f) = \frac{v_0^2}{f^2} \cdot S_y(f) \quad L(f) = \frac{1}{2} S_{\phi}(f)$$

En el dominio del tiempo la desviación de *Allan*, $\sigma_y(\tau)$ (two-sample deviation). Un dispositivo quedará caracterizado por una gráfica de la desviación de *Allan* frente al tiempo de medida o periodo de promediado. Acompañando al resultado figurarán el ancho de banda del sistema de medida y el tiempo total de medida.

La relación entre las caracterizaciones en los dominios del tiempo y de la frecuencia viene dada por.

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{2}{(\pi v \tau)^2} \int_0^{\infty} S_{\phi}(f) \text{sen}^4(\pi f \tau) df$$

A continuación se analiza la caracterización de la estabilidad en el dominio del tiempo.

10.5 La varianza o desviación de *Allan*

La varianza o desviación de *Allan* se introdujo con el fin de caracterizar la desviación promedio del desfase entre dos osciladores.

10.5.1 Planteamiento del problema y estimador

Para estimar la estabilidad en el dominio del tiempo comenzamos con un conjunto de medidas del offset de frecuencia (y_i). La dispersión de estos puntos está asociada al ruido que está acoplado al oscilador. Cuanto mayor sea la dispersión de estas medidas mayor es la inestabilidad de la señal que entrega el oscilador.

Normalmente, la desviación típica o estándar, σ , (o la varianza, σ^2) es la magnitud estadística empleada para cuantificar la dispersión de un conjunto de medidas. La varianza es la medida numérica de la desviación de los datos respecto de su valor medio. Es decir, indica en término medio cómo se aleja cada dato que compone la serie temporal de medidas respecto de la media.

Sin embargo, la varianza clásica sólo se puede calcular a partir de datos estacionarios, es decir, para procesos en los que la media y la desviación típica no cambien con el tiempo; así los resultados son independientes del tiempo. Esto lleva consigo la idea de que el ruido es blanco, es decir, su densidad espectral de potencia es constante (la potencia asociada a cada componente espectral de ruido está uniformemente distribuida en todo el ancho de banda de medida).

Para datos estacionarios, la media y la varianza convergen a valores concretos cuando el número de medidas aumenta considerablemente. Con datos no estacionarios (como los que se manejan con los osciladores) tenemos una media que cambia cada vez que se añade una nueva medida a la serie temporal.

Por esta razón se emplea un estadístico no clásico para estimar la estabilidad en el dominio del tiempo. Siguiendo la recomendación del IEEE, se emplea la desviación de *Allan* para caracterizar la estabilidad de los estándares en frecuencia.

Dada una serie temporal de $m+1$ muestras, correspondiente cada una de ellas a la desviación temporal de fase entre dos osciladores, $x(0)$, $x(\tau)$, $x(2\tau)$, ..., $x(m\tau)$; la varianza de *Allan* para una serie temporal compuesta por estas muestras se define según:

$$\sigma_y^2(\tau) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2(m-1)} \cdot \sum_{j=2}^m (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1})^2$$

donde la magnitud

$$\bar{y}_j = \frac{x(j\tau) - x(j\tau - \tau)}{j\tau - j\tau + \tau} = \frac{x(j\tau) - x(j\tau - \tau)}{\tau}$$

representa el cambio promedio que experimenta el desfase temporal en cada intervalo de promediado, que constituye la unidad elemental (resolución) del tiempo de calibración total $T = m\tau$.

En consecuencia, si el límite anterior existe, la varianza de *Allan* representa el valor eficaz de la magnitud:

$$\frac{\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1}}{\sqrt{2}}$$

El estimador usual de la varianza de *Allan* es la desviación de *Allan*, definida según:

$$S_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \sum_{j=2}^m (\bar{y}_j - \bar{y}_{j-1})^2 = \frac{1}{2\tau^2(m-1)} \cdot \sum_{j=2}^m [\Delta_\tau^2 x(j\tau)]^2$$

donde $\Delta_\tau^2 x(j\tau)$ es el operador segunda diferencia; $x(j\tau)$ es el valor de la diferencia de fase entre la fuente bajo test y la referencia. Cada uno de los m valores están espaciados $\tau = m\tau_0$ segundos, y τ_0 representa la resolución del instrumento electrónico empleado en el dominio del tiempo; las medidas se toman a intervalos de τ_0 segundos.

Obsérvese que, con respecto al estimador clásico, la diferencia radica en que ahora se le resta a cada dato su anterior. Esto se debe a que este parámetro establece una medida de la estabilidad en frecuencia, es decir, de las fluctuaciones de la frecuencia de un oscilador. En consecuencia, se consigue eliminar de esta forma el offset de frecuencia constante de la serie de medidas.

Conviene expandir el operador segunda diferencia con el fin de facilitar la resolución de los ejemplos del siguiente apartado:

$$\begin{aligned} \bar{y}_j - \bar{y}_{j-1} &= \frac{1}{\tau} [\Delta_\tau x(j\tau) - \Delta_\tau x((j-1)\tau)] = \frac{1}{\tau} \Delta_\tau^2 x(j\tau) \\ &= \frac{1}{\tau} [x(j\tau) - x(j\tau - \tau) - x(j\tau - \tau) + x(j\tau - \tau - \tau)] \\ &= \frac{1}{\tau} [x(j\tau) - 2x(j\tau - \tau) + x(j\tau - 2\tau)] \\ &= \frac{1}{\tau} [x(j\tau) - 2x((j-1)\tau) + x((j-2)\tau)] \end{aligned}$$

10.5.2 Ejemplos deterministas

10.5.2.1 Test de máser de hidrógeno (C. A. GreenHall, 1988)

Como primer ejemplo se resuelve la evaluación de la estabilidad para dos máseres de hidrógeno (se está comparando la estabilidad del rayo). Se propone este ejemplo en primer lugar con el fin de mostrar la mecánica operatoria con simplicidad.

La tabla 2 muestra los datos originales para los distintos instantes de tiempo. La segunda columna ofrece las diferencias temporales, que constituyen la serie de partida, $x(t)$, cuyos valores vienen dados en unidades de 10^{-14} s, y el tiempo viene dado en unidades de $\tau_0=256$ s (resolución del muestreador, o mínimo periodo de muestreo).

Los distintos tiempos de promediado se establecen como múltiplos del periodo de muestreo. Para $n=1$, se consideran todos los datos de la serie y se tiene:

$$\begin{aligned} S_y^2(\tau_0, 8) &= \frac{1}{2\tau_0^2(m-1)} \cdot \sum_{j=2}^m [\Delta_\tau^2 x(j\tau)]^2 = \frac{1}{2 \cdot 256^2 (8-1)} \cdot \left[\begin{aligned} &(-87)^2 + (-99)^2 + (160)^2 + (26)^2 + \\ &(-156)^2 + (100)^2 + (-7)^2 \end{aligned} \right] \\ &\cong 2,9162825766179 \cdot 10^{-15} \approx 2,92 \cdot 10^{-15} \end{aligned}$$

$t=n\tau_0$	$x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=1}x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=1}^2x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=2}x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=2}^2x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=3}x(j\tau)$	$\Delta_{\tau=3}^2x(j\tau)$
0	0						
1	658	658					
2	1229	571	-87	1229			
3	1701	472	-99			1701	
4	2333	632	160	1104	-125	1675	
5	2991	658	26			1762	
6	3493	502	-156	1160	56	1792	91
7	4095	602	100			1762	87
8	4690	595	-7	1197	37	1699	-63

Tabla 2. Diferencias de fase para los máseres de hidrógeno, desfases en unidades de 10^{-14} s.

Para el resto de los múltiplos del periodo de muestreo se tiene:

Para $n=2$: $S_y^2(2\tau_0, 4) \cong 0,11312961294980 \cdot 10^{-15} \approx 1,13 \cdot 10^{-15}$

Para $n=3$: $S_y^2(3\tau_0, 2) \cong 0,08378478787497 \cdot 10^{-15} \approx 8,37 \cdot 10^{-16}$

10.5.2.2 Offset de frecuencia y fase constante

En este caso la evolución del desfase viene dada por:

$$x(t) = a_0 + a_1 t, \quad x(t - \tau) = a_0 + a_1(t - \tau),$$

donde a_1 y a_2 son constantes. Por tanto:

$$y(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = a_1.$$

Las primeras y segundas diferencias resultan:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\tau x(t) &= x(t) - x(t - \tau) = a_0 + a_1 t - a_0 - a_1(t - \tau) \\ &= a_1 \tau \\ \Delta_\tau x(t - \tau) &= x(t - \tau) - x(t - 2\tau) \\ &= a_0 + a_1(t - \tau) - a_0 - a_1(t - 2\tau) = a_1 \tau \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta_\tau^2 x(t) = \Delta_\tau x(t) - \Delta_\tau x(t - \tau) = a_1 \tau - a_1 \tau = 0$$

En consecuencia: $\sigma_y(\tau, m) = 0$ para cualquier valor de τ . La cuestión es clara, ya que la varianza de *Allan* sólo es cero si la diferencia entre las frecuencias de dos osciladores cambia con el tiempo. Si la diferencia en frecuencia no cambia, entonces se mantiene estable.

10.5.2.3 Desviación de frecuencia lineal

En este caso, para que la derivada arroje una dependencia lineal:

$$x(t) = \frac{1}{2} k \cdot t^2,$$

donde k es una constante. Por tanto:

$$y(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = k \cdot t$$

Segundas diferencias:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau^2 x(j\tau) &= x(j\tau) - 2x((j-1)\tau) + x((j-2)\tau) \\ &= \frac{1}{2} k(j\tau)^2 - 2 \frac{1}{2} k((j-1)\tau)^2 + \frac{1}{2} k((j-2)\tau)^2 = \dots \\ &= k\tau^2 \end{aligned}$$

Aplicando la definición del estimador en función de las segundas diferencias:

$$S_y^2(\tau, m) = \frac{1}{2\tau^2(m-1)} \cdot \sum_{j=2}^m [k\tau^2]^2 = \frac{k^2 \tau^4 (m-1)}{2\tau^2(m-1)} = \frac{k^2 \tau^2}{2} \rightarrow \sigma_y(\tau, m) = \frac{k\tau}{\sqrt{2}}$$

En consecuencia, un cambio lineal de frecuencia lleva consigo una desviación de *Allan* proporcional a τ . Existen métodos para estimar esta desviación y suprimirla de las medidas.

10.5.2.4 Perturbaciones periódicas

Supongamos que la desviación temporal de fase evoluciona de forma cosenoidal según:

$$x(t) = x_0 \cdot \cos(2\pi ft + \theta)$$

En este caso, la desviación de *Allan* depende del carácter entero de la magnitud $2f\tau$.

La figura 32 muestra el resultado correspondiente a un ejemplo de computación del estimador en este caso. Se ha considerado la señal $x(t) = \cos(2\pi 100t)$, muestreada cada $\tau_0 = 0,0005$ s, hasta un tiempo de promediado final de $\tau_{\text{final}} = 0,15$ s. Se observa que la desviación *Allan* es nula en los puntos que verifican la condición: $f \times \tau = f \times n\tau_0 = 100 \times n \times 0,0005 = n \times 0,05 = \{0, 1, 2, \dots\}$. En efecto, para $\tau = [0,01 \ 0,02 \ 0,03 \ 0,04 \ \dots \ 0,15]$ se verifica $f \times \tau = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 15]$.

En la práctica, las desviaciones de frecuencia y fase están provocadas por procesos de ruido que se acoplan al oscilador. Esta cuestión se revisa en el siguiente apartado.

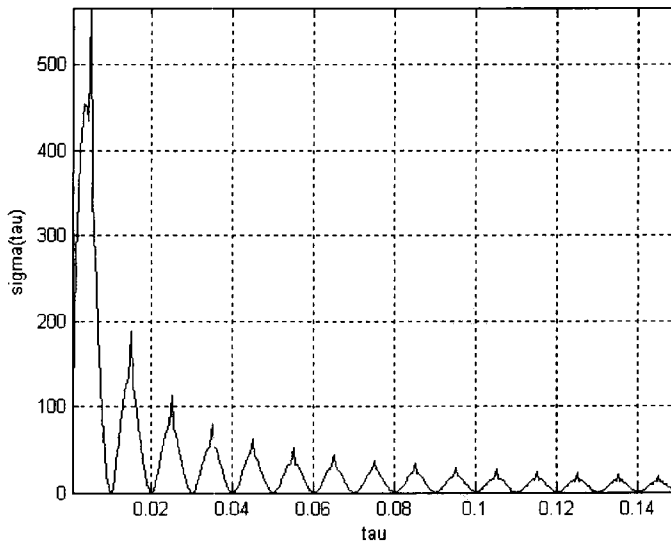


Fig. 32. Desviación de *Allan* para una perturbación periódica cosenoidal. El eje horizontal se obtiene como $\tau_0 \times [1: n\tau_{\text{final}}] = 0,0005 \times [1: 300]$. De esta forma se obtiene el intervalo de variación [0,0005-0,15] s.

Procesos Aleatorios

Los usuarios de los estándares de frecuencia vieron pronto la necesidad de efectuar una calibración según dos enfoques, en los dominios del tiempo y de la frecuencia. En el primero de ellos, como hemos visto, se estudian las varianzas de las fluctuaciones de frecuencia promediadas; mientras que en el segundo se estudian las densidades espectrales de las fluctuaciones de frecuencia y de fase.

En este apartado se estudian los cinco procesos de ruido clásicos que suelen encontrarse acoplados a los osciladores y sus curvas de estabilidad en el dominio del tiempo.

11.1 Modelos clásicos de ruido en el dominio de la frecuencia

El modelo de ruido clásico está compuesto por la suma de los cinco tipos de ruido que comúnmente se consideran en los osciladores de precisión. Este modelo se caracteriza por la densidad espectral de potencia de fase ($S_{\phi}(f)$), espectro de potencia de la desviación de fase de la señal bajo estudio) que, a su vez se obtiene a partir de la densidad espectral de potencia de la señal de desviación en frecuencia ($S_y(f)$), espectro de potencia de la desviación en frecuencia), según ([1]-[7]):

$$S_{\phi}(f) = \frac{v_0^2}{f^2} \cdot S_y(f) = \frac{v_0^2}{f^2} \cdot \sum_{\alpha=-2}^2 h_{\alpha} \cdot f^{\alpha} = v_0^2 \cdot \sum_{\beta=0}^{-4} h_{\beta} \cdot f^{\beta}$$

para $0 \leq f \leq f_b$. Donde f_b es la frecuencia superior de corte del equipo de medida. Cada término la ecuación está asociado a un tipo de ruido básico de los que existen en la naturaleza y en particular se acoplan a los osciladores electrónicos.

La tabla 3 muestra para los distintos tipos o procesos de ruido, las densidades espectrales de desviación de frecuencia y de fase, y las curvas en el dominio del tiempo que relacionan las desviaciones de *Allan*¹⁴ con el tiempo de promediado.

Las densidades espectrales de fase o frecuencia se miden con un analizador de espectros (analógico o FFT), y en función de la pendiente del espectro se determina el ruido acoplado al oscilador que se quiere caracterizar. Según la tabla 3, la calibración también es posible en el dominio del tiempo.

¹⁴ La varianza modificada se introdujo con el fin de poder discriminar entre los procesos de ruido correspondientes a $\beta=0$ y $\beta=-1$, que producían la misma pendiente en caso de emplear la varianza clásica

	$S_y(f)$	$S_\phi(f)$	$\sigma_y(\tau) = \tau ^{\mu/2}$	$Mod.\sigma(\tau) = \tau ^{\mu'}$	
	α	$\beta = \alpha - 2$	$\mu/2$	μ' [9]	μ' [3]
Random walk frequency modulation	-2	-4	1/2	1	1/2
Flicker frequency modulation	-1	-3	0	0	0
White frequency modulation	0	-2	-1/2	-1	-1/2
Flicker phase modulation	1	-1	-1	-2	-1
White phase modulation	2	0	-1	-3	-1,5

Tabla 3. Distintos tipos de ruido caracterizados por las pendientes en los dominios de la frecuencia y el tiempo. Distinguimos dos columnas de μ' según distintas referencias.

A continuación se muestran los cinco procesos de ruido (figuras 34-38) y sus curvas de varianzas de Allan (ΔVAR). Los procesos aleatorios han sido programados y generados con código de MATLAB.

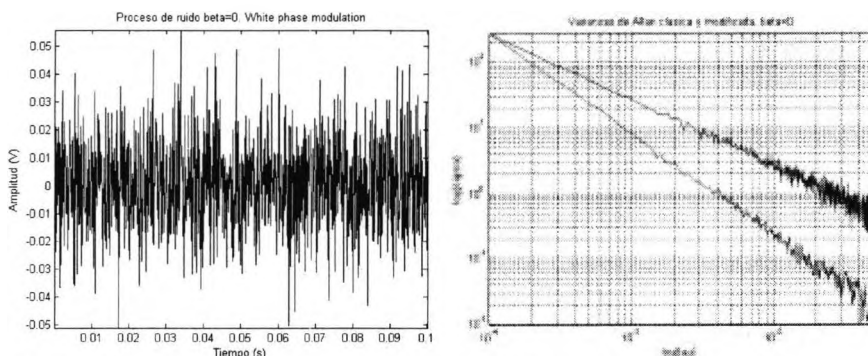


Fig. 34. Caracterización del proceso de ruido correspondiente a $\beta=0$.

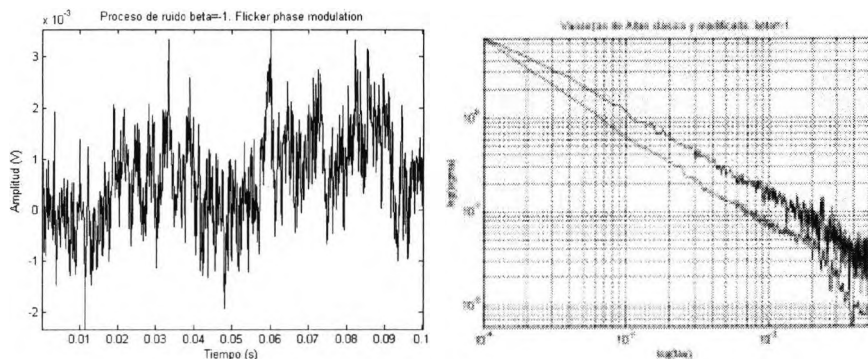
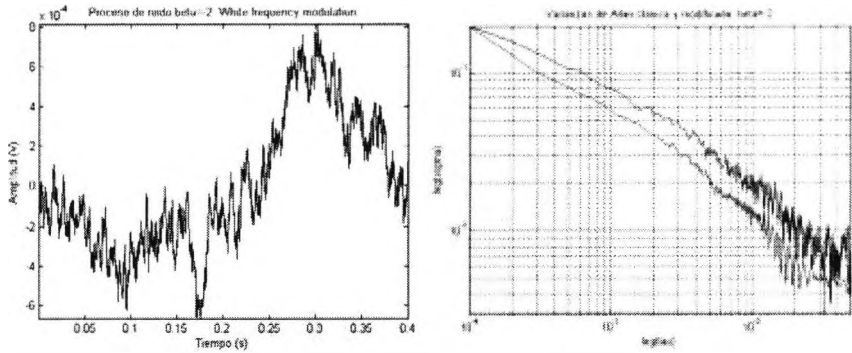
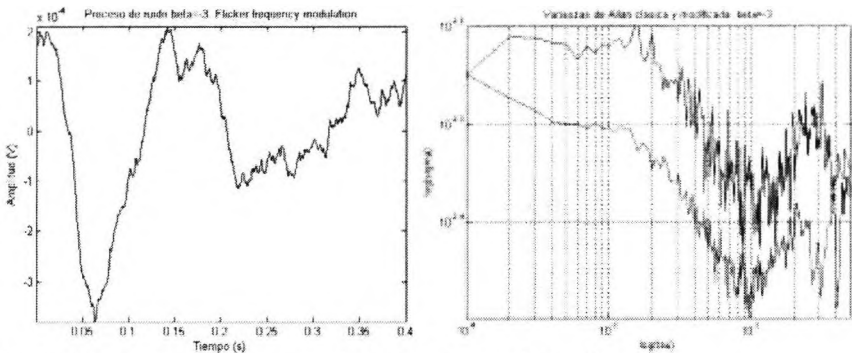
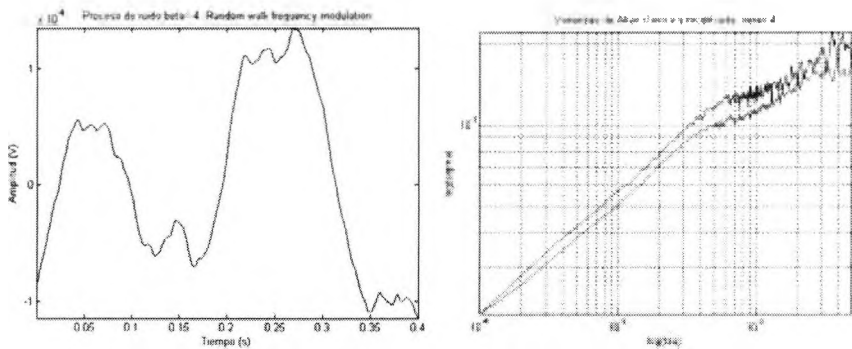


Fig. 35. Caracterización del proceso de ruido correspondiente a $\beta=-1$.

Fig. 36. Caracterización del proceso de ruido correspondiente a $\beta=-2$.Fig. 37. Caracterización del proceso de ruido correspondiente a $\beta=-3$.Fig. 38. Caracterización del proceso de ruido correspondiente a $\beta=-4$.

Empleando los resultados de la tabla 3, correspondientes a las desviaciones de *Allan* clásica y modificada, el lector puede comprobar la coincidencia de los resultados correspondientes a las pendientes de las curvas de estabilidad.

11.2 Variabilidad de la frecuencia fraccional

A continuación se realizan apreciaciones cualitativas acerca de la variabilidad de los distintos procesos de ruido, que explican el comportamiento de las curvas anteriores.

Como quiera que la varianza de *Allan* mide la variabilidad de la frecuencia fraccional, es esta la variable que escogemos para comprender el comportamiento de las curvas. Analizamos qué es lo que sucede con la variable $y(f, \tau)$ para los distintos tiempos de promediado. Para ello se han seleccionado las situaciones extremas de los procesos de ruido (extremas en la pendientes, $\beta=0$ y $\beta=-4$). Se han estudiado las series temporales correspondientes a la frecuencia fraccional para distintos tiempos de promediado. Los resultados se muestran en las figuras 39 y 40.

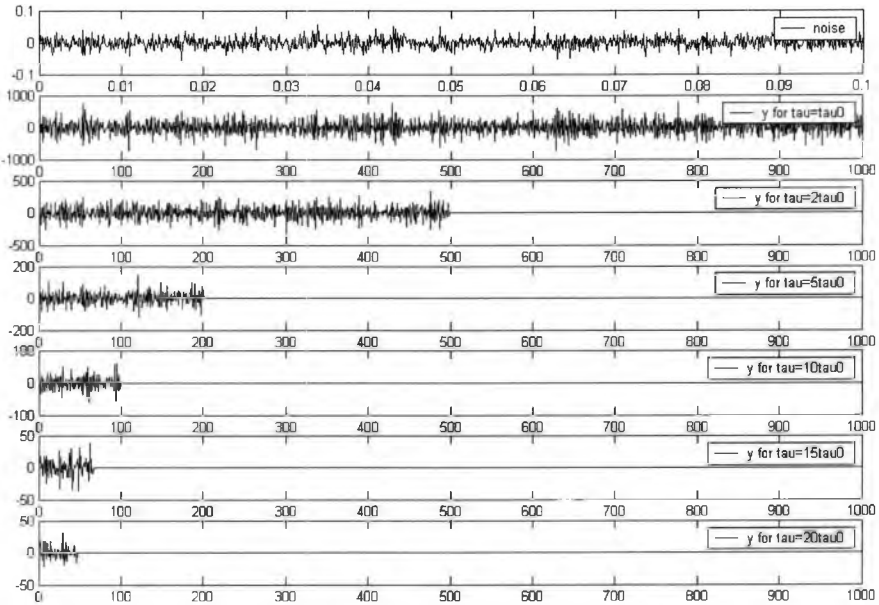


Fig. 39. Proceso de ruido para $\beta=0$ y frecuencia fraccional para distintos tiempos de promediado.

Gráfica para $\beta=0$: Se observa que los valores de la frecuencia fraccional cada vez son menores si el tiempo de promediado es mayor. Por tanto, la variación es más pequeña. La frecuencia fraccional (sus fluctuaciones) está comprendida entre valores cada vez menores.

Gráfica para $\beta=-4$: Se observa que a pesar de que son iguales las escalas para las gráficas de frecuencia fraccional frente a distintos tiempos de promediado, las fluctuaciones en la frecuencia son mayores.

Como conclusión resulta que la varianza para el proceso de ruido correspondiente a $\beta=-4$ aumenta con el tiempo de promediado, mientras que para el proceso de ruido correspondiente a $\beta=0$, la varianza disminuye.

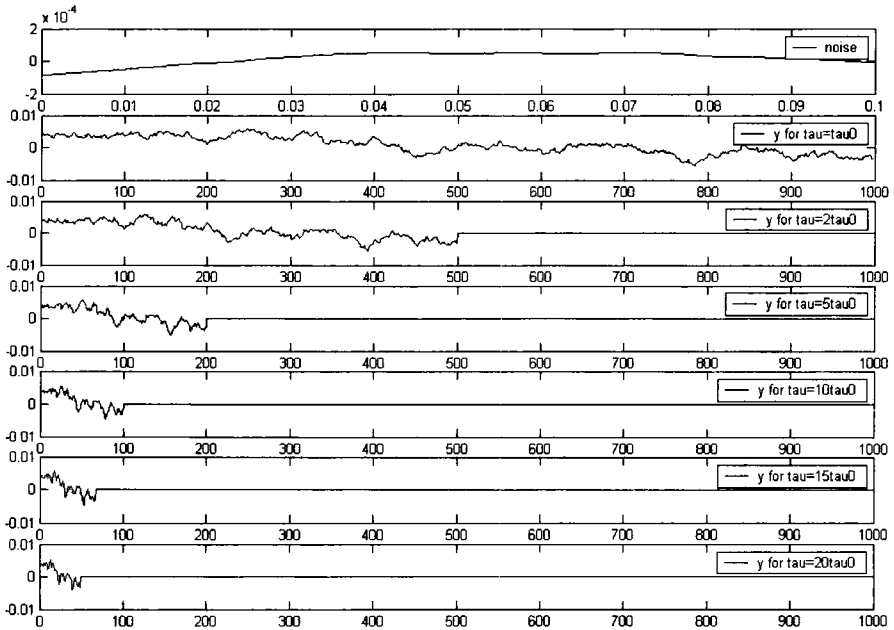


Fig. 40. Proceso de ruido para $\beta=-4$ y frecuencia fraccional para distintos tiempos de promediado

En el siguiente apartado se estudia cómo transferir la información del dominio del tiempo al de la frecuencia y viceversa.

11.3 Ejemplos de evaluación del ruido acoplado y conversión entre dominios t y f

A partir de las medidas de $S_x(f)$ y $S_y(f)$ para un par de osciladores, en esta sección se estudia cómo trasladar la información del dominio de la frecuencia al del tiempo. Estas gráficas permiten estudiar la relación entre la magnitud $\sigma_y^2(\tau)$ y el tiempo de promediado τ , y determinan la caracterización de la estabilidad en el dominio del tiempo.

Este procedimiento de caracterización está muy extendido en laboratorios y centros de calibración, ya que permite establecer el valor de la desviación de las medidas para un determinado tiempo de promediado. La tabla 4 relaciona las magnitudes de ambos dominios a través de las constantes A y B , según el proceso de ruido considerado.

Con el fin de ilustrar el procedimiento de traslación de la información del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo se considera, a título de ejemplo, la curva de densidad espectral de fase dada por la figura 41, correspondiente a la caracterización de la estabilidad de un oscilador con frecuencia nominal $\nu_0=1$ MHz. El ancho de banda a considerar es 10^4 Hz.

$S_y(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_{\alpha} \cdot f^{\alpha}$ $S_{\phi}(f) = \frac{v_0^2}{f^2} \cdot S_y(f)$ $S_{\phi}(f) = v_0^2 \cdot \sum_{\beta=0}^{-4} h_{\beta} \cdot f^{\beta}$		$S_y(f) = A \times \sigma_y^2(\tau)$	$\sigma_y^2(\tau) = B \times S_{\phi}(f)$ $\sigma_y^2(\tau) = \frac{S_y(f)}{A} = \frac{f^2}{\underbrace{A \cdot v_0^2}_B} \cdot S_{\phi}(f)$
α	$\beta = \alpha - 2$	A	B = $\frac{f^2}{A \cdot v_0^2}$
2 (white phase)	0	$\frac{(2\pi)^2 \tau^2 f^2}{3f_h}$	$\frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2 v_0^2}$
1 (flicker phase)	-1	$\frac{(2\pi)^2 \tau^2 f^2}{1,038 + 3 \ln(w_h \tau)}$	$\frac{1,038 + 3 \ln(w_h \tau)}{(2\pi)^2 \tau^2 v_0^2}$
0 (white frequency)	-2	2τ	$\frac{f^2}{2\tau \cdot v_0^2}$
-1 (flicker frequency)	-3	$\frac{1}{2 \ln(2) \times f}$	$\frac{2 \ln(2) \times f^3}{v_0^2}$
-2 (random walk frequency)	-4	$\frac{6}{(2\pi)^2 \cdot \tau \cdot f^2}$	$\frac{(2\pi)^2 \cdot \tau \cdot f^4}{6 \cdot v_0^2}$

Tabla 4. Relación entre las magnitudes que caracterizan la estabilidad en los dominios del tiempo y de la frecuencia; donde v_0 es la frecuencia nominal del oscilador y f_h es el ancho de banda del instrumento de medida.

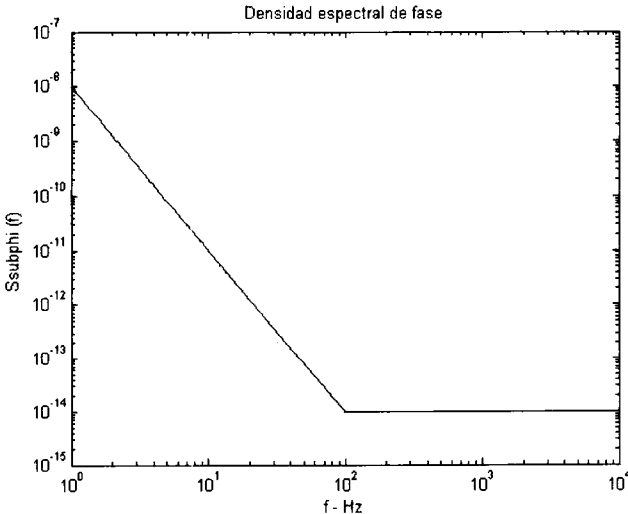


Fig. 41. Curva doble-logarítmica de densidad espectral de fase que muestra la presencia de dos tipos de procesos de ruido, al apreciarse un cambio en su pendiente.

Por observación de la figura 41, se distinguen dos regiones, [1-100] Hz y [100, 10000] Hz. En la primera, la densidad espectral de fase disminuye 3 décadas cuando la frecuencia lo hace una. Por ejemplo, desde 10^{-8} hasta 10^{-11} al moverse la frecuencia desde 1 Hz a 10 Hz. Por tanto, podemos establecer que la densidad espectral va en esta zona como: $S_{\phi}(f) \propto f^{-3}$. De hecho, cuantitativamente la recta queda determinada por:

$$S_{\phi}(f) = 10^{-8} \times f^{-3}$$

En consecuencia, en esta primera zona, el proceso de ruido es un “flicker FM” (inversamente proporcional a la frecuencia y modulador de ésta). En efecto, para $\beta = -3$, es $\alpha = -1$; por lo que desde el punto de vista de la densidad espectral de desviación de frecuencia se trata de un ruido inversamente proporcional a la frecuencia, es decir, un ruido “flicker”.

Es posible incluso calcular el coeficiente del desarrollo en serie de potencias, ya que tenemos la frecuencia nominal del oscilador. En efecto:

$$S_{\phi}(f) = v_0^2 \cdot \sum_{\beta=0}^{-4} h_{\beta} \cdot f^{\beta} = 10^{-6} \cdot \sum_{\beta=0}^{-4} h_{\beta} \cdot f^{\beta} = 10^{-6} \times h_{\beta=-3} \cdot f^{-3} = 10^{-8} \times f^{-3} \rightarrow h_{\beta=-3} = 10^{-2}$$

Con el fin de obtener la curva de estabilidad en el dominio del tiempo, recurrimos a la tabla 4 para obtener la expresión de la varianza según el proceso de ruido identificado:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{S_y(f)}{A} = \frac{f^2}{\underbrace{A \cdot v_0^2}_B} \cdot S_{\phi}(f) = B \cdot S_{\phi}(f) = \frac{2 \ln(2) \times f^3}{v_0^2} \cdot S_{\phi}(f)$$

Teniendo en cuenta ahora lo ya calculado, se obtiene un valor constante de la varianza para esta primera región. En efecto:

$$\underline{\underline{\sigma_y^2(\tau)}} = \frac{2 \ln(2) \times f^3}{v_0^2} \cdot S_{\phi}(f) = \frac{2 \ln(2) \times f^3}{(10^6)^2} \times 10^{-8} \cdot f^{-3} = 2 \ln(2) \times 10^{-20} \cong \underline{\underline{1,39 \times 10^{-20}}}$$

La desviación típica es:

$$\underline{\underline{\sigma_y(\tau)}} = \sqrt{\sigma_y^2(\tau)} \cong \sqrt{1,39 \times 10^{-20}} \cong \underline{\underline{1,18 \times 10^{-10}}}$$

En la segunda zona a considerar, la densidad espectral de fase es constante y vale.

$$S_{\phi}(f) = 10^{-14}$$

Por ello, el proceso de ruido es “white PM” (ruido blanco de fase). En efecto, un ruido blanco se caracteriza por poseer una densidad espectral constante; en este caso de fase.

Considerando de nuevo la tabla 4 se obtiene la varianza para este proceso de ruido:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{S_y(f)}{A} = \frac{f^2}{\underbrace{A \cdot v_0^2}_B} \cdot S_\phi(f) = B \cdot S_\phi(f) = \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2 v_0^2} \cdot S_\phi(f)$$

Al sustituir los valores ya conocidos se obtiene la expresión de la varianza en función del tiempo de promediado:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(\tau) &= \frac{3f_h}{(2\pi)^2 \tau^2 v_0^2} \cdot S_\phi(f) = \frac{3 \times 10^4}{(2\pi)^2 \tau^2 (10^6)^2} \times 10^{-14} \cong 0,075990887 \times 10^{-22} \times \left(\frac{1}{\tau^2}\right) \\ &\rightarrow \underline{\underline{\sigma_y^2(\tau) \cong 7,6 \times 10^{-24} \times \left(\frac{1}{\tau^2}\right)}} \end{aligned}$$

Y la desviación típica resulta:

$$\underline{\underline{\sigma_y(\tau) = \sqrt{\sigma_y^2(\tau)} = \sqrt{7,6 \times 10^{-24}} \times \left(\frac{1}{\tau}\right) \cong 2,7568097 \times 10^{-12} \times \left(\frac{1}{\tau}\right) \approx 2,76 \times 10^{-12} \times \left(\frac{1}{\tau}\right)}}$$

Estas curvas vienen representadas en la figura 42 para los distintos tiempos de promediado. Las representaciones de la figura 42 han sido consideradas desde un punto de vista aislado.

En la práctica, la envolvente superior es la curva representativa de la estabilidad del oscilador. En nuestro caso, se observa el predominio del ruido blanco de fase para tiempos de promediados bajos, mientras que para tiempos de medida altos predomina el ruido “flicker FM”. Intuitivamente esto es fácil de razonar, ya que a bajas frecuencias el ruido “flicker” es el que da problemas. Por tanto, para tiempos de promediado elevados debe descubrirse por observación de la pendiente de la curva de la desviación de *Allan*. Por otra parte, en situaciones de tiempos pequeños de promediado no se va a descubrir un ruido “flicker” ya que sus componentes de alta frecuencia son pequeñas. El ruido blanco ya estará muy compensado para tiempos de promediado elevados y tendrá relevancia sólo para tiempos de promediado bajos.

El tiempo de promediado que separa ambos procesos de ruido se obtiene a partir de igualar las desviaciones típicas:

$$\begin{aligned} \sigma_y(\tau^*)_{flicker FM} &= 1,18 \times 10^{-10} = 2,76 \times 10^{-12} \times \left(\frac{1}{\tau^*}\right) = \sigma_y(\tau^*)_{white phase} \\ \tau^* &= \frac{2,76 \times 10^{-12}}{1,18 \times 10^{-10}} \cong 0,02338983 \approx 0,0234 \text{ s} \end{aligned}$$

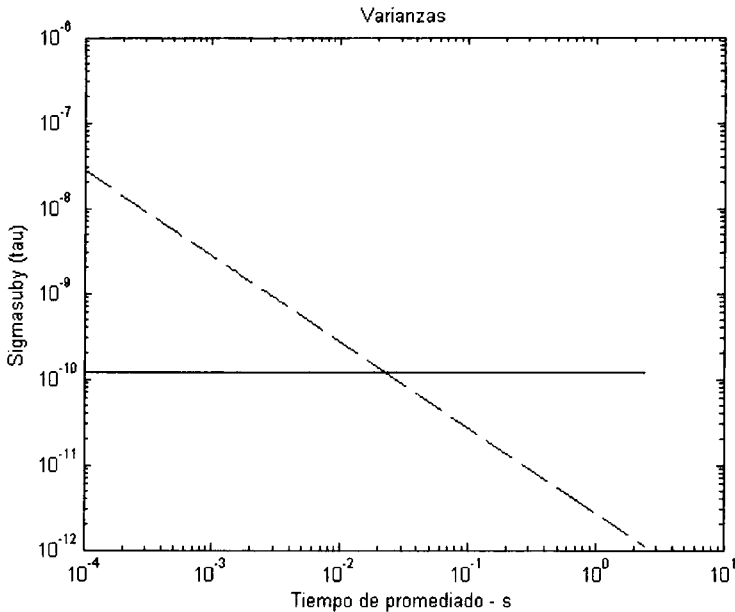


Fig. 42. Curva doble-logarítmica de las varianzas asociadas a los procesos de ruido. La línea discontinua representa al proceso de ruido de la zona 2.

A continuación se profundiza un poco más en las posibles causas del ruido acoplado a un oscilador.

11.4 Causas del ruido acoplado a los osciladores

En este apartado se realizan observaciones acerca de los cinco procesos de ruido caracterizados en el dominio de la frecuencia por el desarrollo en serie de potencia espectral de fase.

El ruido “random walk” ($1/f^2$) es difícil de medir, ya que generalmente está muy cerca de la portadora. Generalmente este tipo de ruido tiene su origen en el medio ambiente o entorno del oscilador bajo test. Si es este el tipo de ruido predominante debemos entonces pensar que los desplazamientos en la portadora pueden ser provocados por “choques mecánicos”, vibraciones, temperatura, u otros efectos medioambientales.

El origen del ruido “flicker FM” ($1/f^3$) no ha llegado a ser comprendido en su totalidad, pero típicamente se relaciona con tres posibles causas: el mecanismo de resonancia física de un oscilador activo, la elección de determinados componentes electrónicos o propiedades ambientales. Este ruido es típico de osciladores de alta calidad, pero puede quedar enmascarado por el ruido “white FM ($1/f^2$)” o por el ruido “flicker PM ($1/f$)” en osciladores de menor calidad.

El ruido “white FM ($1/f^2$)” se encuentra muy comúnmente en resonadores pasivos estándares de frecuencia. Éstos contienen un oscilador esclavo, a menudo de cuarzo, que se “engancha” a algún rasgo resonante de otro dispositivo, el cual a su vez se comporta como un filtro de alto factor de calidad. Los estándares de cesio y rubidio poseen este ruido.

El proceso de ruido “flicker PM (1/f)” puede relacionarse con el mecanismo de resonancia física de un oscilador, pero generalmente su origen se encuentra en dispositivos electrónicos ruidosos. Este tipo de ruido es común incluso en osciladores de muy alta calidad, ya que se emplean amplificadores (después de la fuente de señal) con el fin de elevar la amplitud de la señal hasta el nivel deseado. Además de introducirse en el amplificador, puede introducirse en multiplicadores de frecuencia. Para reducir este ruido debe emplearse realimentación negativa y circuitos integrados de bajo ruido.

Finalmente, el ruido “white PM (f^0)” es un proceso de banda ancha y tiene poco que ver con los mecanismos de resonancia. Probablemente esté producido por un fenómeno similar al que produce el ruido “flicker PM (1/f)”, como por ejemplo las etapas amplificadoras. Este tipo de ruido puede mantenerse a unos niveles muy bajas realizando un buen diseño de amplificadores., realizando una cuidadosa elección de componentes, filtrando con banda estrecha la salida o elevando, si fuera posible, la potencia de la fuente primaria.

REFERENCIAS

- [1] D.W. Allan, “Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators”. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, UFFC-34, 647-654, 1987. (BIN: 752).
- [2] D.W. Allan. “The Science of Timekeeping”, Hewlett-Packard, Application Note 1289.
- [3] J. Rutman and F.L. Walls. “Characterization of frequency stability in precision frequency sources”. *Proc. IEEE*, vol. 79, No. 7, July 1991, pp. 952-960.
- [4] C.A. Greenhall. *Frequency Stability Review*. TDA Progress Report 42-88. Communications Systems Research Section, 1988.
- [5] D.A. Howe, D.W. Allan and J.A. Barnes (1990). *Properties of Oscillators Signals and Measurement Methods*. National Institute of Standards and Technology. Boulder, Colorado, USA.
- [6] M.A. Lombardi. An Introduction to Frequency Calibrations. The International Journal of Metrology, September-October 1999.
- [7] M.A. Lombardi. *Traceability in Time and Frequency Metrology*. Time and Frequency Division, NIST, 1998.
- [8] D.B. Sullivan, D.W. Allan, D.A. Howe, and F.L. Walls, *Characterization of Clocks and Oscillators*, NIST Tech Note 1337, 1990. (BIN: 868).
- [9] P. Lesage and T. Ayi. “Characterisation or Frequency Stability: Analysis of the Modified Allan Variance and Properties of its Estimate”. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, vol. IM-33, no. 4, pp 332-336., Dec. 1984.
- [10] The Institute of IEEE. *IEEE Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology*. April 1989.
- [11] J.G. Proakis y D.G. Manolakis, Tratamiento Digital de Señales, Prentice Hall, 3ª edición, 2003.

ISBN 84-9828-031-1



9 788498 280319

978-84-9828-031-9